С.В.Дегтяр[1], Ю.В.Шушарін[1], Я.О.Жук[2,3]

РУХ СИМЕТРИЧНОГО ГІРОСКОПА ПІД ДІЄЮ СИЛИ ТЯЖІННЯ З ДИСКРЕТНОЮ ВИПАДКОВОЮ ЗМІНОЮ ПАРАМЕТРІВ СИСТЕМИ

[1]Київський національний економічний університет ім. Вадима Гетьмана, просп. Перемоги, 54/1, 03057, Київ, Україна;
[2]Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, просп. Глушкова, 4е, 01033, Київ, Україна;
[3]Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ, вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: y.zhuk@i.ua

Abstract. The problem of the symmetric gyroscope motion is considered for the case when the gyroscope is under the action of gravity and random influences, which form a sequence of discrete intrusion of the chance, namely at some random moments, the system parameters "jump" into some random values in phase space. To study the dynamical system, a probabilistic model is constructed, which is described by a Markov process, which in turn is a solution of a differential equation with random parameters. Next, we consider the asymptotic situation when the discrete intrusion of the chance becomes rare and disappears completely at infinity. This is ensured by replacing the transient function of the Markov process with a function that depends on a small parameter and studies the behavior of the system while directing the parameter to zero and time to infinity.

Key words: probabilistic model, gyroscope, Markov process, Markov intrusion of the chance, asymptotic behavior, small parameter, random moments, rare events, transient phenomena.

Вступ.

Застосування ймовірнісно-статистичних методів охоплює надзвичайно широке різноманіття практичних проблем. Для описання об’єктів дослідження напрацьовані певні класи ймовірнісних моделей [7]. Зокрема, останнім часом все більший інтерес у спеціалістів викликають механічні системи, які перебувають під випадковими впливами, що обумовлено їх очевидною практичною спрямованістю. Із множини випадкових процесів, які лежать в основі моделей таких систем, виділяється клас марківських процесів, які є природнім узагальненням динамічної системи. Як фізичні і механічні системи при правильному виборі фазового простору перетворюються в динамічні (це значить, що стан системи в даний момент визначає її еволюцію в майбутньому), так і довільний випадковий процес може при відповідному виборі фазового простору перетворюватися в марківський, тобто в такий, для якого подальша еволюція залежить від минулого тільки через стан в теперішній момент [3]. Ця властивість називається марківською.

Системи, які мають марківську властивість, вперше розглянув Колмогоров. Він називав їх стохастично визначеними. Випадковість в реальних системах може проявлятись в результаті випадкової зміни параметрів системи або в результаті випадкового збурення, що діє на систему. Можна також розглядати і системи, випадковість яких визначається випадковістю початкового положення системи.

Надзвичайно плідним для дослідження ймовірнісних феноменів виявився метод малого параметру. В теорії ймовірностей метод малого параметру застосовується в різноманітних асимптотичних схемах. Він використовувався як для виведення великої кількості наближених формул і створення розрахункових методів, так і для розкриття внутрішніх закономірностей в складних випадкових процесах. Широкому застосуванню метода сприяє його наочність і , зокрема, можливість інтуїтивної інтерпретації такого поняття, як порядок тієї або іншої величини у просторі та часі [12].

На даний час створено потужний науковий напрямок – теорію граничних теорем для випадкових процесів. Основоположний внесок в цей напрямок зроблено Прохоровим, Гіхманом, Скороходом [1, 3].

Напевно одним із найяскравіших застосувань розробленого математичного апарату до вивчення поведінки механічних систем є задачі теорії гіроскопів. На сьогодні опубліковано чимало робіт, присвячених вивченню руху гіроскопічних приладів різного призначення під впливом випадкових сил. Інтерес до цих питань пояснюється тим, що імовірнісне трактування збурень, що діють на гіроскопи, у ряді випадків точніше відповідає реальній обстановці, в якій працюють гіроскопічні системи, встановлені на різноманітних об'єктах. У багатьох задачах, наприклад, щодо впливу хитавиці корабля на рух гіроскопічних пристроїв, виникає необхідність вивчення впливу не однієї конкретної реалізації збурення, а цілої сукупності можливих збурень, у яких відомі лише їх ймовірнісні характеристики. Ці збурення є деякими випадковими процесами. Врахування випадкових збурень допомагає пояснити деякі ефекти, які можуть бути отримані в детермінованій постановці. Так, наприклад, впливом випадкових вібрацій основи можуть бути пояснені в деяких випадках дрейф гіроскопічних систем і т. д. До проблем, що розглядаються в цій галузі, відносяться задачі оптимізації гіроскопічних систем, що перебувають під дією випадкових збурень, і задачі синтезу гіроскопічних систем, призначених для відстеження деякого руху за наявності випадкових перешкод. Деякі питання застосування розроблених методик до дослідження гіроскопічних систем розглядались, наприклад, у [5, 8 – 11]. В даній статті детально вивчається задача про рух симетричного гіроскопа під дією сили тяжіння з дискретним втручанням випадку.

1. Постановка задачі. Основні рівняння. Диференціальні рівняння руху симетричного гіроскопа під дією сили тяжіння (випадок Лагранжа).

Представимо симетричний гіроскоп, у якого точка O, яка лежить на осі симетрії, закріплена нерухомо (рис. 1). Позначимо вагу гіроскопа через P, відстань його центра ваги G від точки O – через l.

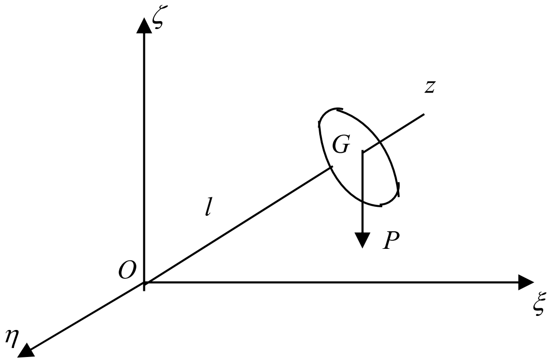

Рис. 1

Проведемо в точці O нерухомі взаємно ортогональні осі ξ, η, ζ і спрямуємо вісь ζ вертикально вверх.

Досліджуваний гіроскоп має три ступені свободи; його положення відносно осей ξ, η, ζ будемо визначати кутами α, β, φ (рис. 2). Кути α і β визначають положення осі симетрії z; цими кутами визначається також положення тріедра осей N, K, z, де N – лінія вузлів. Власне обертання гіроскопа визначається кутом φ, який утворюється віссю x (лежить в площині NK і зв'язана з тілом гіроскопа) і лінією вузлів N.

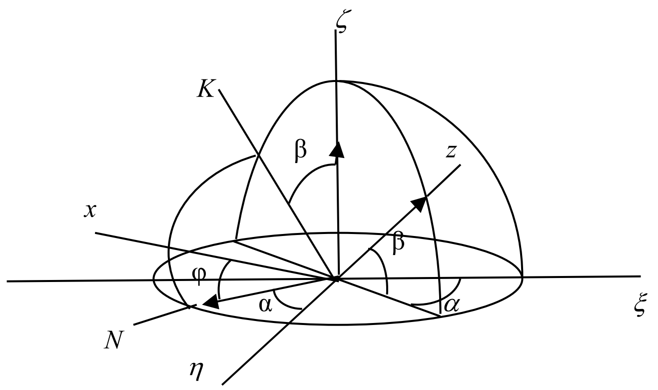

Рис. 2

В цьому випадку [2] три диференціальні рівняння руху гіроскопа відповідно до його трьох ступенів свободи мають вигляд:

$$\dot{\varphi} + \dot{\alpha}\sin\beta = r_0; \tag{1}$$

$$a\dot{\alpha}\cos^2\beta = b - c\sin\beta; \tag{2}$$

$$a^2\dot{\beta}^2\cos^2\beta = (e - \sin\beta)\cos^2\beta - (b - c\sin\beta)^2. \tag{3}$$

Рівняння (1), (2), (3) визначають кути α, β, φ як функції часу. Величини b, c і e є довільними сталими; a є сталою приладу, яка має розмірність часу.

Диференціальне рівняння (3) визначає кут нутації β. Цьому рівнянню можна надати іншій вигляд, якщо взяти за невідому функцію величину

$$u = \sin\beta.$$

Виконавши цю підстановку, отримаємо:

$$a^2\dot{u}^2 = (e - u)(1 - u^2) - (b - c\sin u)^2.$$

Визначивши звідси величину u, знаходимо далі кути α і φ з рівнянь (1), (2), які можна представити як:

$$\dot{\alpha} = \frac{b - cu}{a(1 - u^2)}; \tag{4}$$

$$\dot{\varphi} = r_0 - \frac{u(b - cu)}{a(1 - u^2)}; \tag{5}$$

$$a^2\dot{u}^2 = (e - u)(1 - u^2) - (b - c\sin u)^2. \tag{6}$$

2. Межі зміни кута нутації.

Інтегрування рівняння (6) призводить до еліптичних функцій. Покажемо, що кут змінюється періодично між двома межами і знайдемо ці межі.

Позначимо праву частину рівняння (6) через $f(u)$, тобто покладемо:

$$f(u) = (e - u)(1 - u^2) - (b - c\sin u)^2. \tag{7}$$

Маємо рівняння

$$a^2\dot{u}^2 = f(u). \tag{8}$$

Побудуємо графік функції $f(u)$ (7), надаючи змінній u всі можливі значення від $-\infty$ до $+\infty$.

Маємо:

$$f(-\infty) = -\infty; \quad f(-1) = -(b+c)^2; \quad f(1) = -(b-c)^2; \quad f(+\infty) = +\infty. \tag{9}$$

Позначимо початкові значення кута β та його похідної $\dot{\beta}$ через β_0 і $\dot{\beta}_0$; відповідно до цього початкові значення u і $\dot{u}$ позначимо u_0 і $\dot{u}_0$. Маємо:

$$u_0 = \sin\beta_0; \quad \dot{u}_0 = \dot{\beta}_0 \cos\beta_0 .$$

Зазначимо, що $u_0 = \sin\beta_0$ є число, яке лежить між -1 і $+1.$ З іншої сторони, застосовуючи рівняння (8) до моменту $t = 0,$ маємо $a^2\dot{u}_0^2 = f(u_0),$ звідки випливає, що $f(u_0) \geq 0$.

Отже, при значенні $u = u_0$, яке лежить між -1 і $+1,$ функція $f(u)$ приймає додатне (або рівне нулю) значення. З (9) і враховуючи, що функція $f(u)$ як поліном третього степеню не може мати більше трьох коренів, робимо висновок, що функція $f(u)$ має три дійсних кореня. Два з них (позначимо їх u_1 і u_2) лежать в проміжку від -1 до $+1$; третій корінь u_3 є числом більшим за $+1.$ З рівняння (8) видно, що впродовж всього руху $f(u) \geq 0$.

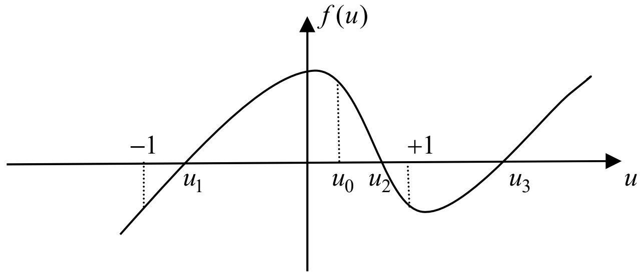

Рис. 3

Величина $u = \sin\beta$ менша за одиницю. Тому

$$u_1 \leq u \leq u_2 .$$

Звідси випливає, що кут нутації β змінюється в межах $\beta_1 \leq \beta \leq \beta_2$, де кути β_1 і β_2 визначаються зі співвідношень $u_1 = \sin\beta_1$, $u_2 = \sin\beta_2$.

3. Визначення кута нутації як функції часу.

Повернемось до інтегрування рівняння (8)

$$a^2 \dot{u}^2 = f(u) .$$

Розкладаючи поліном $f(u)$ на множники, маємо:

$$a^2\dot{u}^2 = (u - u_1)(u - u_2)(u - u_3) . \tag{10}$$

Введемо нову змінну функцію w підстановкою

$$u = u_1 + (u_2 - u_1)w^2 .$$

Вона знаходиться в межах $-1 \leq w \leq 1$.

Зробивши вказану підстановку в рівнянні (10), будемо мати:

$$4a^2\dot{w}^2 = (1 - w^2)\left[u_3 - u_1 - (u_2 - u_1)w^2\right].$$

Вводячи позначення

$$m = \frac{\sqrt{u_3 - u_1}}{2a}; \quad k^2 = \frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1} \quad (0 \le k^2 \le 1),$$

приведемо це рівняння до вигляду:

$$\dot{w}^2 = m^2(1 - w^2)(1 - k^2 w^2).$$

Приймаючи до уваги, що змінна $-1 \le w \le 1$, зробимо підстановку

$$w = \sin \varPhi,$$

де $\varPhi$ – нова змінна, яка монотонно зростає з часом.

Зробивши цю підстановку в попередньому рівнянні, будемо мати для визначення $\varPhi$ рівняння

$$\dot{\varPhi}^2 = m^2(1 - k^2 \sin^2 \varPhi),$$

або

$$\frac{d\varPhi}{dt} = m\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \varPhi)}. \tag{11}$$

Звідси, інтегруючи, знаходимо:

$$m(t - t_1) = \int_0^{\varPhi} \frac{d\varPhi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varPhi}}, \tag{12}$$

де t_1 – довільна стала.

Інтеграл, який стоїть в правій частині цієї рівності, називається лежандровим еліптичним інтегралом першого роду; вводячи для цього інтеграла звичне позначення $F(k, \varPhi)$, маємо:

$$m(t - t_1) = F(k, \varPhi).$$

Цією рівністю час t визначається як монотонно зростаюча функція змінної $\varPhi$. Навпаки, величина $\varPhi$ звідси визначається як монотонно зростаюча функція від аргументу $m(t - t_1)$; синус цієї функції є однією з якобієвих еліптичних функцій, яка позначається літерами sn. Отже, маємо:

$$w = \sin \varPhi = sn[m(t - t_1)].$$

Звідси для змінної u отримуємо вираз

$$u = u_1 + (u_2 - u_1) sn^2[m(t - t_1)].$$

Функція sn є табульованою. За допомогою таблиць цієї функції можна легко обчислити значення величини u, а, отже, і значення кута нутації β для будь-якого значення t.

4. Рух симетричного гіроскопу з дискретним втручанням випадку.

Нехай права частина рівняння (8) залежить від параметру θ, який характеризує вплив зовнішніх сил на гіроскоп. Тоді рух гіроскопу під дією зовнішніх впливів описується диференціальним рівнянням

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{a}\sqrt{f(\theta, u)} = a_1(\theta, u). \tag{13}$$

Випадковість в реальних динамічних системах може проявлятись в результаті випадкової зміни параметрів системи або в результаті випадкового збурення, що діє на систему.

Припустимо, що в результаті впливу зовнішніх випадкових сил на гіроскоп величина θ в рівнянні (13) набуває випадковий характер. Випадковий вплив на нашу динамічну систему полягає в тому, що в певні випадкові моменти часу τ параметр θ «перестрибує» в деяке випадкове значення з множини станів E. Вважатимемо, що множина E задана і є дискретною (скінченою або зліченою) з визначеною σ -алгеброю підмножин $\mathcal{A}$. Пара $(E, \mathcal{A})$ називається вимірним простором, який є фазовим простором динамічної системи. Моменти τ є моментами втручання випадку. Дискретність втручання випадку означає, що ці моменти можна розглядати як деяку зростаючу послідовність випадкових величин $\tau_1 < \tau_2 < ... < \tau_n < ...$, де $\tau_n \to \infty$, до яких зручно віднести і початковий момент часу $\tau_0 = 0$. Якщо позначити θ_k значення параметру θ в момент τ_k $(k = 0,1,...)$ (це стан безпосередньо після k -го втручання випадку), то отримаємо послідовність випадкових величин θ_k $(k = 0,1,...)$. Початкове значення θ_0 задано і не випадкове.

Сформулюємо наступні припущення:

1. Момент втручання зовнішніх випадкових впливів не залежить від стану динамічної системи. Послідовність випадкових величин τ_k $(k = 1,2,...)$ така, що випадкові величини $\tau_1, \tau_2 - \tau_1, ..., \tau_{k+1} - \tau_k$ є незалежними, однаково розподіленими і

$$F(t) = P\left\{\tau_1 > t\right\} = P\left\{\tau_k - \tau_{k-1} > t\right\} = e^{-\alpha t} \ (k = 1,2,...),$$

тобто $\tau_1, \tau_{k+1} - \tau_k$ $(k = 1,2,...)$ мають показниковий розподіл з параметром α.

2. Послідовність θ_k $(k = 0,1,...)$ утворює однорідний ланцюг Маркова. Відповідна їй перехідна ймовірність

$$P(x, A) = P(\theta_k \in A \mid \theta_{k-1} = x),\ x \in E,\ A \in \mathcal{A} \quad (k = 0,1,...).$$

Тоді випадковий процес $\theta(t), t \geq 0$, де $\theta(t) = \theta_k$, при $\tau_k \leq t < \tau_{k+1}$ $(k = 0,1,...)$, є однорідним марківським процесом.

Побудуємо випадковий процес $u(t), t \geq 0$. Його фазовим простором є вимірний простір $([0,1], \mathcal{F})$, де $\mathcal{F}$ визначена σ -алгебра підмножин $[0,1]$.

$$u(t) = u(\tau_k) + \frac{1}{a}\int_{\tau_k}^{t} \sqrt{f(\theta_k, u(s))}\, ds, \quad \tau_k \leq t < \tau_{k+1} \quad (k = 0,1,...),$$

$$u(0) = u_{\theta_o} \text{ не випадкове.}$$

Тоді $u(t), t \geq 0$ є також однорідним марківським процесом.

Таким чином рух гіроскопу під дією зовнішніх випадкових впливів буде описуватись диференціальним рівнянням

$$\frac{du(t)}{dt} = a_1\left(\theta(t), u(t)\right) \tag{14}$$

при початкових умовах $\theta(0) = \theta_0$, $u(0) = u_{\theta_0}$, де

$$a_1\left(\theta(t), u(t)\right) = \frac{1}{a}\sqrt{f\left(\theta(t), u(t)\right)}.$$

Розглянемо розв’язок рівняння (13) при фіксованому значенні θ.

$$\frac{du^{\theta}(t)}{dt} = a_1\left(\theta, u^{\theta}(t)\right), u^{\theta}(0) = u_{\theta_0}. \tag{15}$$

Покажемо, що існує така міра $\pi_\theta\left(du\right)$, для якої існує границя

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T g\left(u^{\theta}(t)\right)dt = \int_{-1}^{1} g(s)\,\pi_\theta\left(s\right)ds, \tag{16}$$

де g обмежена $\mathcal{F}$ вимірна довільна функція, тобто виконується ергодична теорема.

Обчислимо границю в правій частині (16), беручи до уваги такі співвідношення:

$$u^{\theta}(t)=u_1^{\theta}+(u_2^{\theta}-u_1^{\theta})\sin^2 \Phi(t);$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T g\left(\sin(t)\right)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{g(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Маємо

$$J=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T g(u^{\theta}(t))dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T g\left(u_1^{\theta}+(u_2^{\theta}-u_1^{\theta})\sin^2 \Phi(t)\right)dt.$$

Застосуємо підстановку $\Phi(t)=s$. Тоді $\Phi'(t)dt=ds$. З формули (11) випливає, що

$$\frac{d\Phi}{dt}=m_{\theta}\sqrt{1-k_{\theta}^2\sin^2\Phi(t)}\ ,$$

тому

$$dt=\frac{ds}{\Phi'(t)}=\frac{ds}{m_{\theta}\sqrt{1-k_{\theta}^2\sin^2\Phi(t)}}\ .$$

Отримаємо

$$J=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{\Phi(T)}\frac{g\left(u_1^{\theta}+(u_2^{\theta}-u_1^{\theta})\sin^2 s\right)}{m_{\theta}\sqrt{1-k_{\theta}^2\sin^2 s}}ds.$$

Відповідно до виразу (12)

$$mT=\int_0^{\Phi(T)}\frac{ds}{\sqrt{1-k_{\theta}^2\sin^2 s}}\ .$$

Обчислимо границю

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\Phi(t)}{T}=\lim_{T\to\infty}\frac{m}{\dfrac{1}{\Phi(t)}\displaystyle\int_0^{\Phi(T)}\frac{dv}{\sqrt{1-k_{\theta}^2\sin^2 v}}}=$$

$$=\frac{m}{\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-k_{\theta}^2x^2}\sqrt{1-x^2}}}=\frac{\pi m}{2\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-k_{\theta}^2x^2}\sqrt{1-x^2}}}=\frac{\pi m_{\theta}}{2K_{\theta}}\ ,$$

де K_{θ} – еліптичний інтеграл першого роду. Інтеграли таких видів є табульованими і за допомогою відповідних таблиць ми легко можемо обчислити його значення.

Отже, остаточно отримаємо:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\Phi(T)}{T}\frac{1}{\Phi(T)}\int_0^{\Phi(T)}\frac{g\left(u_1^{\theta}+(u_2^{\theta}-u_1^{\theta})\sin^2 s\right)}{m_{\theta}\sqrt{1-k_{\theta}^2\sin^2 s}}ds==\frac{\pi m_{\theta}}{\pi m_{\theta}}\frac{\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{g\left(u_1^{\theta}+(u_2^{\theta}-u_1^{\theta})x^2\right)}{\sqrt{1-k_{\theta}^2x^2}\sqrt{1-x^2}}dx}{2K_{\theta}}=$$

$$=\frac{\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{g\left(u_1^{\theta}+(u_2^{\theta}-u_1^{\theta})x^2\right)}{\sqrt{1-k_{\theta}^2x^2}\sqrt{1-x^2}}dx}{2K_{\theta}}=\int_{-1}^{1}g(s)\pi_{\theta}\left(s\right)ds.$$

Застосуємо підстановку $u_1^{\theta}+(u_2^{\theta}-u_1^{\theta})x^2=u,$ знаходимо

$$x^2=\frac{u-u_1^\theta}{u_2^\theta-u_1^\theta};\quad 2(u_2^\theta-u_1^\theta)xdx=du;\quad dx=\frac{du}{2\sqrt{(u_2^\theta-u_1^\theta)(u-u_1^\theta)}}.$$

Враховуючи вирази для m_θ і k_θ^2

$$m_\theta=\frac{\sqrt{u_3^\theta-u_1^\theta}}{2a};\quad k_\theta^2=\frac{u_2^\theta-u_1^\theta}{u_3^\theta-u_1^\theta},$$

отримаємо

$$\frac{1}{2K_\theta}\int_{-1}^{1}\frac{g\left(u_1^\theta+(u_2^\theta-u_1^\theta)x^2\right)dx}{\sqrt{1-k_\theta^2x^2}\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{4K_\theta}\int_{-1}^{1}\frac{g(u)du}{\sqrt{1-\dfrac{u-u_1^\theta}{u_3^\theta-u_1^\theta}}\sqrt{1-\dfrac{u-u_1^\theta}{u_2^\theta-u_1^\theta}}\sqrt{(u-u_1^\theta)(u_2^\theta-u_1^\theta)}}=$$

$$=\frac{1}{4K_\theta}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{u_3^\theta-u_1^\theta}\,g(u)du}{\sqrt{(u_3^\theta-u)(u_2^\theta-u)(u-u_1^\theta)}}=\frac{\sqrt{u_3^\theta-u_1^\theta}}{4K_\theta a}\int_{-1}^{1}\frac{g(u)}{a_1(\theta,u)}du=\int_{-1}^{1}g(s)\pi_\theta(s)ds.$$

Тому для $\pi_\theta(u)$ ми можемо записати таке співвідношення

$$\pi_\theta(u)=\frac{\sqrt{u_3^\theta-u_1^\theta}}{4aK_\theta a_1(\theta,u)}$$

при фіксованому значенні θ. Таким чином, для $u^\theta(t)$ виконується ергодична теорема й існує $\pi_\theta(u)$ інваріантний розподіл, тобто ймовірнісна міра на фазовому просторі $([0,1],\mathcal{F})$.

Існування границі (16) еквівалентно існуванню границі

$$\lim_{\lambda\to0}\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}g(u^\theta(t))dt=\int_{-1}^{1}g(u)\pi_\theta(u)du.$$

Позначимо для марківського процесу $u^\theta(t)$ півгрупу через $T_t^\theta f^\theta(u)$, відповідний інфінітезимальний оператор $A_\theta f^\theta(u)$ [1]

$$A_\theta f^\theta(u)=\frac{d}{dt}T_t^\theta f^\theta(u)\big|_{t=0}=a_1(\theta,u)\frac{\partial f(\theta,u)}{\partial u}.$$

Ергодичний процес $u^\theta(t), t\ge0$ повністю визначається рівнянням (15) з початковою умовою $u(0)=u_{\theta_0}$, тому можна записати

$$g(u^\theta(t))=e^{tA_\theta}g(u_{\theta_0}).$$

Позначимо через R_λ^θ резольвенту процесу $u^\theta(t)$. Існує границя

$$\lim_{\lambda\to0}\lambda R_\lambda^\theta=\lim_{\lambda\to0}\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}e^{tA_\theta}dt=\lim_{\lambda\to0}\lambda\left(\lambda I-A_\theta\right)^{-1}=\Pi_\theta\,, \tag{17}$$

де оператор $\Pi_\theta g^\theta(u)=\int_{-1}^{1}\pi_\theta(u)g^\theta(u)du$.

Повернемось до диференціального рівняння (14). Позначимо через $T_t f(\theta,u)$ півгрупу для марківського процесу $\{\theta(t),u(t)\}$. Тоді інфінітезимальний оператор півгрупи має вигляд

$$Bf = \frac{d}{dt} T_t f\,|_{t=0} = \alpha \left\{ \int_E P(\theta, dy) f(y,u) - f(\theta,u) \right\} + a_1(\theta,u) \frac{\partial f(\theta,u)}{\partial u} = Qf + A_\theta f\,. \quad (18)$$

Розглянемо рівняння (14), яке залежить від малого параметру $\varepsilon > 0$ і дослідимо асимптотику його розв'язку при малих ε і великих t.

$$\frac{du_\varepsilon(t)}{dt} = a_1\left(\theta_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)\right) \quad (19)$$

з початковими умовами $\theta_\varepsilon(0) = \theta_0,\, u_\varepsilon(0) = u_{\theta_0}$.

Припустимо, що параметр ε входить в рівняння (19) тільки через перехідну ймовірність

$$P_\varepsilon(x, A) \underset{\varepsilon \to 0}{\to} \begin{cases} 1, x \in A \\ 0, x \notin A \end{cases},$$

тобто $P_\varepsilon(x, A)$ – умовна ймовірність рідкісної події (при $\varepsilon \to 0$ ймовірність виходу системи з початкового стану мала).

Перепозначимо $P(x, A),\, B,\, Q,\, A_\theta$ на $P_\varepsilon(x, A),\, B_\varepsilon,\, Q_\varepsilon,\, H,$ відповідно. Тоді на основі (18) можемо записати інфінітезимальний оператор B_ε марківського процесу $\{\theta_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)\}$, який є розв'язком (19), у вигляді

$$B_\varepsilon = Q_\varepsilon + H\,.$$

Введемо новий процес $\{\hat\theta_\varepsilon(t), \hat u_\varepsilon(t)\}$, де $\hat\theta_\varepsilon(t) = \theta_\varepsilon(t/\delta(\varepsilon)),\ \hat u_\varepsilon(t) = u_\varepsilon(t/\delta(\varepsilon))$ і $\delta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$; $\delta(\varepsilon)$ виберемо таким чином, щоб

$$Q_\varepsilon \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0\,, \text{ а } \frac{1}{\delta(\varepsilon)} Q_\varepsilon \to C \text{ при } \varepsilon \to 0\,.$$

Не порушуючи загальності міркувань, можна вважати, що $\delta(\varepsilon) = \varepsilon,$ тобто

$$\frac{1}{\varepsilon} Q_\varepsilon \to C \text{ при } \varepsilon \to 0\,.$$

Інфінітезимальний оператор $\hat B_\varepsilon$ для марківського процесу $\{\theta_\varepsilon(t/\varepsilon), u_\varepsilon(t/\varepsilon)\}$ задовольняє співвідношення

$$\hat B_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} B_\varepsilon.$$

Теорема. Сімейство марківських процесів $\{\theta_\varepsilon(t/\varepsilon), u_\varepsilon(t/\varepsilon)\}$, яке є розв'язком рівняння (19) при $\varepsilon \to 0$, збігається до випадкового процесу $\{\overline\theta(t), \eta(\overline\theta(t))\}$ в розумінні збіжності резольвент. Тут $\overline\theta(t)$ однорідний марківський процес з інфінітезимальним оператором C. Випадковий процес $\eta(\theta)$ не залежить від $\overline\theta(t)$ і має розподіл

$$P\{\eta(\theta) < v\} = \int_{-1}^{v} \pi_\theta(y)\, dy\,.$$

Доведення. Позначимо R_λ^ε резольвенту процесу $\{\theta_\varepsilon(t/\varepsilon), u_\varepsilon(t/\varepsilon)\}$ і дослідимо її поведінку при $\varepsilon \to 0$.

$$R_\lambda^\varepsilon = \left(\lambda I - \hat B_\varepsilon\right)^{-1} = \left(\lambda I - \frac{1}{\varepsilon} B_\varepsilon\right)^{-1} = \left\{\lambda I - \frac{1}{\varepsilon} Q_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} H\right\}^{-1}.$$

Беручи до уваги рівність

$$\left(H+B\right)^{-1}=H^{-1}\left(I+BH^{-1}\right)^{-1},$$

маємо

$$R_{\lambda}^{\varepsilon}=\left\{\lambda I-\frac{1}{\varepsilon}H\right\}^{-1}\left\{I-\frac{1}{\varepsilon}Q_{\varepsilon}\left(\lambda I-\frac{1}{\varepsilon}H\right)^{-1}\right\}^{-1}=\varepsilon\left\{\lambda\varepsilon I-H\right\}^{-1}\left\{I-\frac{1}{\varepsilon}Q_{\varepsilon}\varepsilon\left(\lambda\varepsilon I-H\right)^{-1}\right\}^{-1}.$$

З формули (17)

$$\lim_{\lambda\to 0}\lambda\left\{\lambda I-H\right\}^{-1}=\Pi,$$

де

$$\Pi f\left(\theta,u\right)=\Pi_{\theta}f^{\theta}\left(u\right)=\int_{-1}^{1}\pi_{\theta}\left(u\right)g^{\theta}\left(u\right)du.$$

Отже

$$\lim_{\lambda\to 0}R_{\lambda}^{\varepsilon}=\lim_{\lambda\to 0}\varepsilon\left\{\lambda\varepsilon I-H\right\}^{-1}\left\{I-\frac{1}{\varepsilon}Q_{\varepsilon}\varepsilon\left(\lambda\varepsilon I-H\right)^{-1}\right\}^{-1}=$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\lambda\varepsilon\left\{\lambda\varepsilon I-H\right\}^{-1}\left\{I-\frac{1}{\varepsilon}Q_{\varepsilon}\frac{1}{\lambda}\lambda\varepsilon\left(\lambda\varepsilon I-H\right)^{-1}\right\}^{-1}=$$

$$=\frac{1}{\lambda}\Pi\left\{I-\frac{1}{\lambda}C\Pi\right\}^{-1}=\Pi\left\{\lambda I-C\Pi\right\}^{-1}.$$

З означення і властивостей резольвенти випливає

$$\Pi\left\{\lambda I-C\Pi\right\}^{-1}=\int_{0}^{\infty}e^{-\lambda t}\Pi e^{tC\Pi}dt.$$

Розкладаючи в ряд $e^{tC\Pi}$ і використовуючи рівність $\Pi^2=\Pi$, отримаємо

$$\Pi e^{tC\Pi}=\Pi\left(I+tC\Pi+\frac{t^2}{2}\left(C\Pi\right)^2+\ldots\right)=\Pi+tC\Pi+\frac{t^2}{2}C^2\Pi+\ldots=$$

$$=\left(I+tC+\frac{t^2}{2}C^2+\ldots\right)\Pi=e^{tC}\Pi.$$

Тому

$$\int_{0}^{\infty}e^{-\lambda t}\Pi e^{tC\Pi}dt=\int_{0}^{\infty}e^{-\lambda t}e^{tC}\Pi dt,$$

де

$$e^{tC}\Pi f\left(\theta,u\right)=Mf\left(\overline{\theta}(t),\eta\left(\overline{\theta}(t)\right)\right).$$

Символом M позначено математичне сподівання.

Висновок.

Необхідність вивчення гіроскопічних приладів під дією випадкових збурень обумовлена їх очевидною практичною спрямованістю. На сьогодні не існує скільки-небудь завершеної теорії таких систем.

В роботі розглянуто рух симетричного гіроскопа під дією сили тяжіння, який набуває випадковий характер. Це відбувається в результаті втручання випадкових зовнішніх сил в випадкові моменти часу. Вони утворюють послідовність дискретних втручань випадку.

Гіроскопічна система описується за допомогою стохастичної моделі. Вона представляє собою диференціальне рівняння з випадковими параметрами, розв’язком якого є однорідний марківськй процес. Вибір марківської моделі при вивченні динамічної системи, яка знаходиться під випадковими впливами, обумовлено еволюційним характером розвитку марківського процесу, що дає можливість отримати еволюційні рівняння для визначення ймовірнісних характеристик системи.

Основна увага приділяється гранично виродженій ситуації, коли марківський процес характеризується рідкісними переходами із стану в стан за скінчений час. Це забезпечується заміною перехідної функції марківського процесу функцією, яка залежить від малого параметру. Далі вивчається поведінка системи при одночасному узгодженому прямуванні параметра до нуля, а часу – до нескінченності. Доведено існування нетривіальної границі.

Основний результат асимптотичного дослідження сформульовано у теоремі.

Такі асимптотичні випадки розглядались, наприклад, в [4, 6].

РЕЗЮМЕ. Розглянуто задачу про рух симетричного гіроскопу під дією сили тяжіння і випадкових впливів, які утворюють послідовність дискретних втручань випадку, а саме, в деякі випадкові моменти часу параметри системи «перестрибують» в деякі випадкові значення у фазовому просторі. Для вивчення динамічної системи було побудовано ймовірнісну модель, що описується марківським процесом, який в свою чергу є розв’язком диференціального рівняння з випадковими параметрами. Далі розглядається асимптотична ситуація, коли дискретне втручання випадку стає більш рідкісним і, зрештою, зникає зовсім на нескінченності. Це забезпечується заміною перехідної функції марківського процесу функцією, яка залежить від малого параметру, і далі вивчається поведінка системи при одночасному прямуванні параметра до нуля, а часу – до нескінченності.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: ймовірнісні моделі, гіроскоп, марківський процес, марківське втручання випадку, асимптотична поведінка, малий параметр, випадкові моменти часу, рідкісні події, перехідні явища.

1. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Теория случайных процессов. Т. 2. – Москва: Наука, 1973. – 664 с.
2. *Николаи Е.Л.* Теория гироскопов. – Москва: Ленинград: ОГИЗ ГИТТЛ, 1948. – 173с.
3. *Портенко Н.И., Скороход А.В., Шуренков В.М.* Марковские процессы. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т.46.– Москва: ВИНИТИ, 1989. – 248с.
4. *Шуренков В.М., Дегтяр С.В.* Теореми марківського відновлення у схемі серій. Асимптотичний аналіз випадкових еволюцій. – Київ: Інститут математики НАН України, 1994. – С. 270 – 305.
5. *Golin’ko S.I., Slyn’ko V.I.* Influence of the System of Forces on the Stability of Impulsive Mechanical Gyroscopic Systems // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 3. – P. 301 – 314.
6. *Degtyar S.V.* Markov renewal limit theorems // Theory of Probability and Mathematical Statistics. – 2008. – **76**. – P. 33 – 40.
7. *Kovalenko I.N., Kuznetsov N.Yu., Shurenkov V.M.* Models of random processes. A handbook for mathematicians and engineers. – Boca Raton: CRC Press, 1996. – 446 pp.
8. *Lobas L.G.* The Dynamics of Finite-Dimensional Systems Under Nonconservative Position Forces // Int. Appl. Mech. – 2001. – **37**, N 1. – P. 38 – 65.
9. *Martynyuk A.A., Miladzhanov V. G.* The Theory of Stability of an Orbiting Observatory with Gyroscopic Stabilization of Motion // Int. Appl. Mech. – 2000. – **36**, N 5. – P. 682 – 690.
10. *Storozhenko V.A.* Dissipation in Systems of Coupled Lagrange Gyroscopes // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, N 11. – P. 1297 – 1303.
11. *Storozhenko V.A.* Stability Analysis of Gyroscopic Systems with Integral Correction // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 11 – P. 1248 – 1256.
12. *Kato T.* Perturbation Theory for Linear Operators (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 132). – New York: Springer-Verlag, 1966. – 592 pp.

Надійшла 03.12.2021 Затверджена до друку 19.07.2022