

О. М. Багно

**ВПЛИВ ШАРУ В'ЯЗКОЇ СТИСЛИВОЇ РІДИНИ НА
ПОВЕРХНЕВУ НЕСТІЙКІСТЬ НЕСТИСЛИВОГО ПРУЖНОГО
ПІВПРОСТОРУ, ПІДДАНОГО СКІНЧЕННИМ ПОЧАТКОВИМ
ДЕФОРМАЦІЯМ**

*Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: desc@inmech.kiev.ua*

Abstract. The problem of propagation of the normal waves in a pre-deformed incompressible elastic half-space that interacts with a layer of viscous compressible fluid is considered. The study is carried out based on the three-dimensional linearized equations of the theory of elasticity of finite deformations for the incompressible elastic half-space and the three-dimensional linearized Navier – Stokes equations for the viscous compressible fluid. A problem statement and approach, based on the representations of general solutions of the linearized equations for elastic solid and fluid are applied. The dispersion equation, which describes the propagation of the harmonic waves in a hydroelastic system is obtained. The dispersion curves for surface waves are constructed over a wide range of frequencies. An effect of the finite initial deformations of elastic half-space and the thickness of the layer of viscous compressible fluid on the phase velocities, dispersion of the surface waves, and surface instability of the hydroelastic waveguide are analyzed. The numerical results are presented in the form of graphs and their analysis is given.

Key words: surface waves, phase velocity, attenuation coefficient, incompressible elastic half-space, layer of viscous compressible fluid, finite initial deformations, surface instability.

Вступ.

Лінеаризована теорія гідропружності [2 – 9, 14 – 16], яка дозволяє врахувати властивості, характерні реальним пружним та рідким середовищам, отримала широке застосування як у теоретичних фундаментальних, так і в прикладних дослідженнях. Використання цієї моделі уможливило вивчення впливу початкових (залишкових) напружень в пружному тілі, а також в'язкості та стисливості рідини на закономірності поширення хвиль у гідропружних системах. Вказаним дослідженням присвячена широка бібліографія, частина якої наведена в роботах [3 – 8, 12 – 21]. Лінеаризована теорія дозволяє досліджувати не тільки хвильові властивості, але також можливість виникнення поверхневої нестійкості в пружних тілах гідропружних систем.

У даній роботі для дослідження стійкості пружно-рідинного хвилеводу, що складається з пружного півпростору і шару рідини, застосовуються моделі, які враховують початкові напруження в твердому тілі, а також в'язкість і стисливість рідини. При цьому використовуються тривимірні лінеаризовані рівняння Нав'є – Стокса для рідини та тривимірні лінеаризовані рівняння теорії пружності скінченних деформацій для твердого тіла. Передбачається, що рідина перебуває у стані спокою та теплові ефекти не враховуються. Використовуються постановки задач і метод, оснований на застосуванні представлень загальних розв'язків лінеаризованих рівнянь руху в'язкої стисливої рідини і попередньо напруженого нестисливого пружного тіла, які запропоновані в роботах [2 – 9, 14 – 16].

§1. Постановка задачі та основні співвідношення.

Розглянемо задачу про поширення акустичних хвиль у гідропружній системі, що складається з шару в'язкої стисливої рідини і пружного нестисливого півпростору, підданого великим (скінченним) початковим деформаціям. Постановка задачі базується на використанні тривимірних лінеаризованих рівнянь теорії пружності при скінченних деформаціях для твердого тіла та лінеаризованих рівнянь Нав'є – Стокса для рідини, яка перебуває у стані спокою [2 – 9, 14 – 16].

Далі розглянемо такі динамічні процеси в гідропружній системі, при яких виникають додаткові значно менші початкових збурення деформацій. Досліджуємо гармонічні хвильові процеси малої амплітуди. При цьому приймемо, що пружне тіло перебуває в початковому напружено-деформованому стані. Зауважимо, що на відміну від пружних тіл, співвідношення для яких записані в лагранжевих координатах, рівності для рідкого середовища записуються в ейлерових координатах, введених у природному стані рідини. Слід підкреслити, що початковий стан пружного тіла при розгляді гідропружної задачі є природним станом по відношенню до рідини та системи в цілому. Оскільки в подальшому досліджуємо поширення малих збурень, то, як відомо, у цьому випадку підходи Ейлера і Лагранжа в описі поведінки середовищ співпадають. Тому надалі не робимо різниці між лагранжевими та ейлеровими координатами і характерні для нелінійних задач труднощі при записі граничних умов при зазначених двох підходах не виникають.

В рамках прийнятих моделей, основаних на лінеаризованій теорії гідропружності [2 – 9, 14 – 16], основні співвідношення для системи «попередньо напружене нестисливе пружне тіло – в'язка стислива рідина» мають вигляд:

1) нестисливе пружне тіло –

$$\left(\tilde{\kappa}_{ij\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_\beta} - \delta_{ja} \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_\alpha + \tilde{q}_{ij} \frac{\partial p}{\partial z_i} = 0, \quad z_k \in V_1; \quad (1.1)$$

$$\tilde{\kappa}_{ij\alpha\beta} = \lambda_1 \lambda_\beta \kappa_{ij\alpha\beta}; \quad \tilde{q}_{ij} = \lambda_1 q_{ij}; \quad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1; \quad \tilde{q}_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial z_i} = 0, \quad z_k \in V_1; \quad (1.2)$$

$$\tilde{Q}_j \equiv N_i^0 \left(\tilde{\kappa}_{ij\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial z_\beta} + \tilde{q}_{ij} p \right), \quad z_k \in S; \quad (1.3)$$

2) в'язка стислива рідина –

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \nu^* \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p - \frac{1}{3} \nu^* \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0; \quad \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0; \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \rho^*} = a_0^2, \quad a_0 = \text{const};$$

$$p_{ij} = -p \delta_{ij} + \lambda^* \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{v} + \mu^* \left(\frac{\partial v_i}{\partial z_j} + \frac{\partial v_j}{\partial z_i} \right); \quad \lambda^* = -\frac{2}{3} \mu^*; \quad (1.5)$$

$$\tilde{P}_j = p_{ij} N_i^0, \quad z_k \in S. \quad (1.6)$$

При цьому специфіку взаємодії пружних і рідких середовищ відображають динамічні $\tilde{Q}_j = \tilde{P}_j$, $z_k \in S$ і кінематичні $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{v}$, $z_k \in S$ граничні умови, що задаються на поверхні контакту пружних тіл та рідини S .

Введені тензори $\tilde{\kappa}_{ij\alpha\beta}$ і \tilde{q}_{ij} залежать від виду початкового стану та типу пружного потенціалу матеріалу твердого тіла. Вирази для обчислення складових цих тензорів наведено у роботах [2, 3, 7, 11, 15]. Там же запропоновані спрощення для різних варіантів теорії малих початкових деформацій. Вище прийняті наступні позначення: u_i –

компоненти вектора зсувів пружного тіла \mathbf{u} ; ρ – густина матеріалу пружного півпростору; v_i – складові вектора збурень швидкості рідини \mathbf{v} відносно стану спокою; ρ^* і p – збурення густини і тиску в рідині; ρ_0 і a_0 – густина рідини і швидкість звуку в рідині в стані спокою; ν^* і μ^* – кінематичний та динамічний коефіцієнти в'язкості рідини; λ_i – подовження (при $\lambda_i > 1$) і укорочення (при $\lambda_i < 1$) пружного півпростору в напрямках координатних осей; \tilde{Q}_j і \tilde{P}_j – компоненти напружень, відповідно, в пружному тілі та рідині; V_1 і V_2 – об'єми, які займають, відповідно, пружне тіло і рідина; S – поверхня контакту пружного і рідкого середовищ.

Рівності (1.1) – (1.3) описують поведінку нестисливого пружного тіла. Малі коливання в'язкої стисливої рідини в стані спокою описують співвідношення (1.4) – (1.6).

Далі припустимо, що ізотропне нелінійно-пружне тверде тіло, пружний потенціал якого є довільною двічі неперервно диференційованою функцією компонент тензора деформацій Гріна, займає півпростір ($-\infty < z_1 < \infty$, $-\infty < z_2 \leq 0$, $-\infty < z_3 < \infty$) і контактує з шаром в'язкої стисливої рідини ($-\infty < z_1 < \infty$, $0 \leq z_2 \leq h$, $-\infty < z_3 < \infty$). Приймемо, що зовнішні сили, які діють на зазначені середовища, розподілені рівномірно вздовж осі Oz_3 . У цьому випадку задача є плоскою і можна обмежитися вивченням процесу поширення хвиль у площині Oz_1z_2 . Отже, зазначена задача зводиться до розв'язання системи рівнянь (1.1) – (1.6) при наступних граничних умовах:

$$\tilde{Q}_1|_{z_2=0} = \tilde{P}_1|_{z_2=0}; \quad \tilde{Q}_2|_{z_2=0} = \tilde{P}_2|_{z_2=0}; \quad \tilde{P}_1|_{z_2=h} = 0; \quad \tilde{P}_2|_{z_2=h} = 0; \quad (1.7)$$

$$v_1|_{z_2=0} = \frac{\partial u_1}{\partial t}|_{z_2=0}; \quad v_2|_{z_2=0} = \frac{\partial u_2}{\partial t}|_{z_2=0}. \quad (1.8)$$

Скористаємося постановками задач гідропружності для тіл з початковими напруженнями і в'язкої рідини, а також представленнями загальних розв'язків, запропонованими в роботах [2 – 9, 14 – 16]. Надалі досліджуються хвильові процеси в попередньо деформованих нестисливих пружних тілах, що взаємодіють з в'язкою стислою рідиною, початковий стан яких є однорідним. У разі однорідного напружено-деформованого початкового стану для плоского випадку загальні розв'язки мають вигляд [2 – 9, 14 – 16]

$$u_1 = -\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial z_1 \partial z_2}; \quad u_2 = \lambda_1 q_1 \lambda_2^{-1} q_2^{-1} \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial z_1^2};$$

$$p = \lambda_1^{-1} q_1^{-1} \left\{ \lambda_1^2 \left[\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0 - \lambda_1 \lambda_2 q_1 q_2^{-1} (a_{12} + \mu_{12}) \right] \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \lambda_2^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0) \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} \frac{\partial}{\partial z_2} \chi_1;$$

$$v_1 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_1 \partial t} + \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial z_2 \partial t}; \quad v_2 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_2 \partial t} - \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial z_1 \partial t},$$

де введені функції χ_i є розв'язками наступних рівнянь:

$$\left[\frac{\partial^4}{\partial z_1^4} + \frac{\lambda_2^4 q_2^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0)}{\lambda_1^4 q_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^4}{\partial z_2^4} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial t^2} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{q_1 q_2^{-1} (\lambda_2^2 a_{22} + s_{22}^0) + q_1^{-1} q_2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0) - 2\lambda_1 \lambda_2 (a_{12} + \mu_{12})}{\lambda_1^2 \lambda_2^{-2} (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0) q_1 q_2^{-1}} \frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial z_2^2} - \\
& - \frac{\lambda_2^2 q_2^2 \rho}{\lambda_1^4 q_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^4}{\partial z_2^2 \partial t^2} \Big] \chi_1 = 0; \quad q_i = \lambda_i^{-1}; \quad \lambda_1 \lambda_2 = 1; \\
& \left[\left(1 + \frac{4\nu^*}{3a_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \chi_2 = 0; \quad \left[\frac{\partial}{\partial t} - \nu^* \left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) \right] \chi_3 = 0.
\end{aligned}$$

Тут введено такі позначення: a_{ij} , μ_{ij} – величини, що визначаються з рівнянь стану і залежать від виду пружного потенціалу [2, 3, 6, 7]; s_{ii}^0 – початкові напруження.

Для аналізу поширення збурень, гармонічно змінних в часі, розв'язки системи рівнянь визначаємо в класі біжучих хвиль

$$\chi_j = X_j(z_2) \exp[i(kz_1 - \omega t)] \quad (j = \overline{1, 3}),$$

де k ($k = \beta + i\gamma$) – хвильове число; γ – коефіцієнт згасання хвилі; ω – кругова частота; i – уявна одиниця ($i = \sqrt{-1}$).

Зауважимо, що обраний у даній роботі клас гармонічних хвиль, який є найбільш простим і зручним в теоретичних дослідженнях, не обмежує загальності отриманих результатів, оскільки лінійна хвиля довільної форми, як відомо, може бути представлена набором гармонічних складових. Далі розв'язуємо задачі про власні значення для рівнянь руху пружного тіла і рідини, а також визначаємо відповідні власні функції. Після підстановки загальних розв'язків в граничні умови (1.7), (1.8) отримуємо однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо довільних сталих. Виходячи з умови існування нетривіального розв'язку цієї системи, отримуємо дисперсійне рівняння

$$\det \left\| \psi_{lm} \left(c, \gamma, \lambda_i, \rho, \mu, a_{ij}, \mu_{ij}, s_{ii}^0, \rho_0, a_0, \mu^*, \omega h / c_s \right) \right\| = 0 \quad (l, m = \overline{1, 6}), \quad (1.9)$$

де c – фазова швидкість хвиль у гідропружній системі; γ – коефіцієнт згасання хвилі; h – товщина шару рідини; c_s – швидкість хвилі зсуву у матеріалі пружного тіла ($c_s^2 = \mu / \rho$); μ – модуль зсуву матеріалу пружного тіла.

Як відомо, у необмеженому нестисливому пружному тілі існує зсувна хвиля. У в'язкому стисливому рідкому середовищі поширюються поздовжня хвиля і хвиля зсуву. Саме ці хвилі, взаємодіючи між собою на вільній граничній поверхні, а також на поверхні контакту середовищ, породжують складне хвильове поле в гідропружній системі.

Відзначимо, що отримане дисперсійне рівняння (1.9) не залежить від форми пружного потенціалу. Воно є найбільш загальним і з нього можна отримати співвідношення для ряду окремих випадків, розглянутих в роботах [4, 5, 10, 11, 13, 20]. Зокрема, якщо a_0 спрямувати до нескінченності, то (1.9) переходить в рівняння для визначення параметрів хвиль у разі взаємодії пружного півпростору з нестисловою в'язкою рідиною. Приймаючи динамічний коефіцієнт в'язкості μ^* рівним нулю, отримаємо гідропружну систему з ідеальною рідиною, результати для якої наведені в роботах [1, 10, 13, 17 – 20]. Інші окремі випадки, які впливають з даної роботи, пов'язані з дослідженням хвиль Релея і Стоунлі, розглядалися раніше в публікаціях [4, 5, 10, 11, 13, 20]. Зазначені випадки враховують наявність початкових деформацій в пружному півпросторі. Якщо прийняти $s_{ii}^0 = 0$, $\lambda_i = 1$, то отримаємо рівності для ґрунтовно досліджених у рамках класичної теорії пружності хвиль Релея і Стоунлі – Шольте [1, 13, 20].

§2. Числові результати і їх аналіз.

Розрахунки проводимо для гідропружної системи, що складається з реальних пружного тіла і рідини. Для пружного півпростору вибираємо високоеластичну гуму, пружні властивості якої описуються пружним потенціалом Трелоара. Механічні параметри для цієї гідропружної системи приймаємо такими: пружний півпростір – $\rho = 1200 \text{ кг/м}^3$, $\mu = 1,2 \cdot 10^6 \text{ Па}$; шар води – $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$, $a_0 = 1459,5 \text{ м/с}$, $\bar{a}_0 = a_0/c_s = 46,153442$, $\bar{\mu}^* = 0,001$. У цього хвилеводу матеріал пружного тіла (гума) є нестисливим, податливим і м'яким. Крім того, при розгляді припускаємо, що початковий напружений стан є однорідним і задовольняє співвідношенням $s_{11}^0 \neq 0$, $s_{22}^0 = 0$. Як показано в роботах [2, 3, 6, 7, 11], при такому навантаженні немає аналогії між задачами в лінеаризованій та лінійній постановках. Тому результати для тіл з початковими напруженнями не можуть бути отримані з розв'язків відповідних лінійних задач.

Зауважимо, що рівняння (1.9) виведено без будь-яких додаткових вимог до виду функції пружного потенціалу, тому воно має місце для пружних потенціалів довільної форми.

Далі дисперсійне рівняння (1.9) розв'язуємо чисельно. Результати обчислень у вигляді графіків представлені на рис. 1 – 7.

На рис. 1 зображені дисперсійні криві для гідропружних хвилеводів, які відображають залежності безрозмірних величин фазових швидкостей хвиль \bar{c} ($\bar{c} = c/c_s$) від безрозмірної величини товщини шару рідини (частоти) \bar{h} ($\bar{h} = \omega h/c_s$). На цьому рисунку лінія 1 відповідає гідропружному хвилеводу при відсутності початкових напружень ($\lambda_1 = 1$), а лінія 2 – гідропружному хвилеводу, пружний півпростір якого підданий початковому стисненню ($\lambda_1 = 0,8$). Тонкими штрих-пунктирними лініями на рис. 1 позначені асимптоти, до яких прямують величини фазових швидкостей хвиль \bar{c} при зростанні товщини рідкого шару (частоти) \bar{h} ($\bar{h} \rightarrow \infty$).

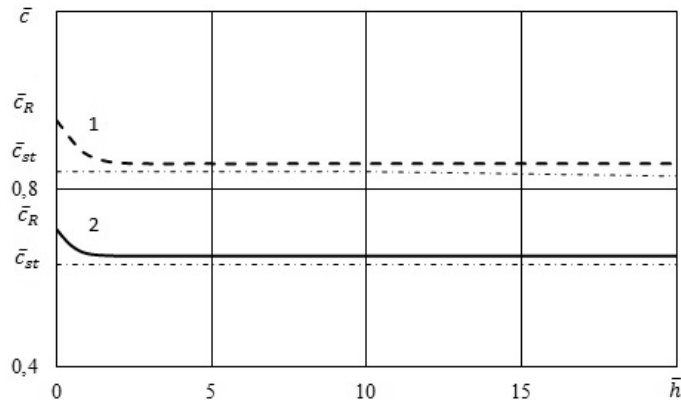


Рис. 1

З графіків, представлених на рис. 1, випливає, що швидкість поверхневої хвилі в пружному півпросторі з гуми (нестисливий, податливий матеріал), який взаємодіє з шаром води, змінюється від швидкості хвилі Релея \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,9553125$ для $\lambda_1 = 1$ і $\bar{c}_R = 0,709557$ для $\lambda_1 = 0,8$) при $\bar{h} \rightarrow 0$ до швидкості хвилі Стоунлі \bar{c}_{st} [$\bar{c}_{st} = 0,857937931591$ для $\lambda_1 = 1$ (лінія 1) і $\bar{c}_{st} = 0,6495414001$ для $\lambda_1 = 0,8$ (лінія 2)] при $\bar{h} \rightarrow \infty$.

На рис. 2 показано криві для гідропружних хвилеводів, які відображають залежності безрозмірних величин коефіцієнтів згасання хвиль $\bar{\gamma}$ ($\bar{\gamma} = \gamma/k_s$, k_s – хвильове

число хвилі зсуву в матеріалі пружного півпростору) від безрозмірної величини товщини шару рідини (частоти) \bar{h} . На цьому рисунку лінія 1 відповідає гідропружному хвилеводу при відсутності початкових напружень ($\lambda_1 = 1$), а суцільна лінія 2 – гідропружному хвилеводу, пружний півпростір якого попередньо стиснений ($\lambda_1 = 0,8$).

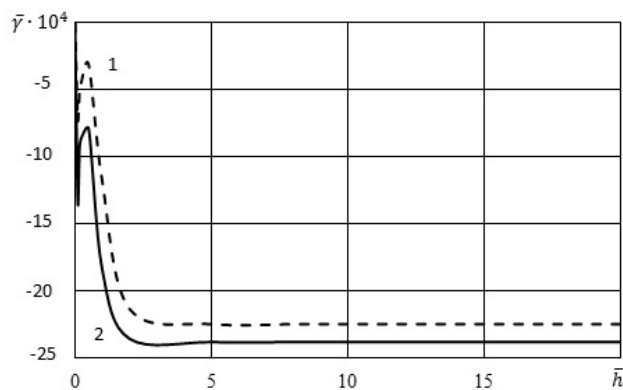


Рис. 2

Графіки, представлені на рис. 3, 4, відображають розподіл амплітуд зміщень (швидкостей $\partial u_i / \partial t$ і v_i) для гідропружного хвилеводу, що складається з пружного півпростору з високоеластичної гуми ($-\infty < \bar{z}_2 \leq 0$) і шару ($0 \leq \bar{z}_2 \leq \bar{h}$) води. На них наведені залежності безрозмірних величин поздовжніх \bar{V}_{z_1} (рис. 3) та поперечних \bar{V}_{z_2} (рис. 4) зсувів від безрозмірної поперечної координати \bar{z}_2 для поверхневої моди (рис. 1). Графіки, представлені на цих рисунках, отримані для існуючої єдиної поверхневої хвилі в короткохвильовій частині спектра при частоті (товщині рідкого шару) $\bar{h} = 20$. У цьому випадку кінематичні параметри мали такі значення $\bar{c} = 0,649541$ при $\lambda_1 = 0,8$ і $\bar{c} = 0,857938$ при $\lambda_1 = 1$. При такій частоті (товщині шару рідини) \bar{h} , рівній 20, ця хвиля трансформується в поверхневу хвилю (хвилю Стоунлі) і її швидкість, як випливає з графіків рис. 1 і як показують отримані числові значення \bar{c} ($\bar{c} = 0,6495414003$

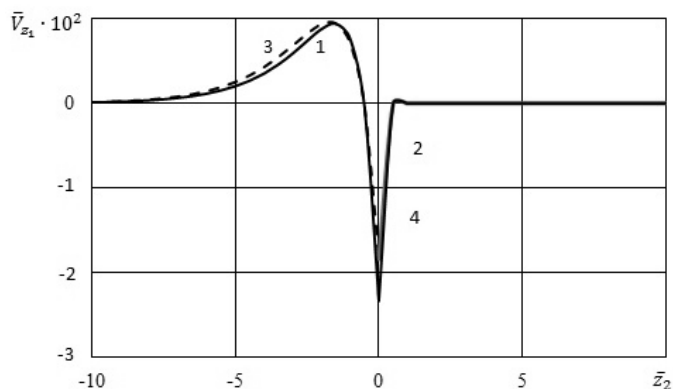


Рис. 3

при $\lambda_1 = 0,8$ і $\bar{c} = 0,857938$ при $\lambda_1 = 1$), незначно відрізняється від швидкості хвилі Стоунлі \bar{c}_{st} ($\bar{c}_{st} = 0,649541400227$ при $\lambda_1 = 0,8$ і $\bar{c}_{st} = 0,857937931591$ при $\lambda_1 = 1$). На цих рисунках суцільні лінії 1 і 2 відповідають попередньо стисненому ($\lambda_1 = 0,8$) півпростору, а штрихові лінії 3, 4 – гідропружній системі при відсутності початкових деформацій ($\lambda_1 = 1$).

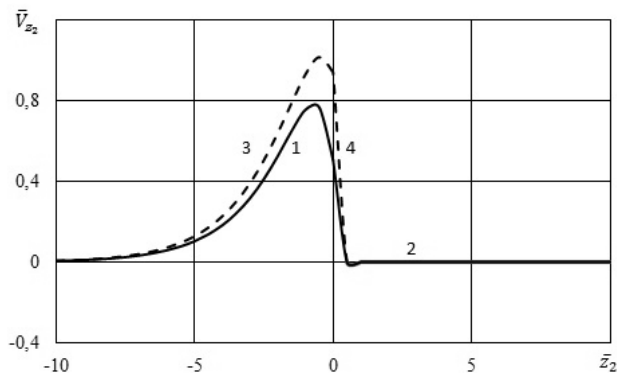


Рис. 4

Характер впливу попереднього деформування пружного півпростору на швидкості поверхневих хвиль ілюструють графіки на рис. 5 і 7, на яких представлені залежності величин фазових швидкостей хвиль \bar{c} від зміни величини λ_1 . На рис. 5 наведено результати обчислень для попередньо стисненого ($\lambda_1 \leq 1$) пружного півпростору.

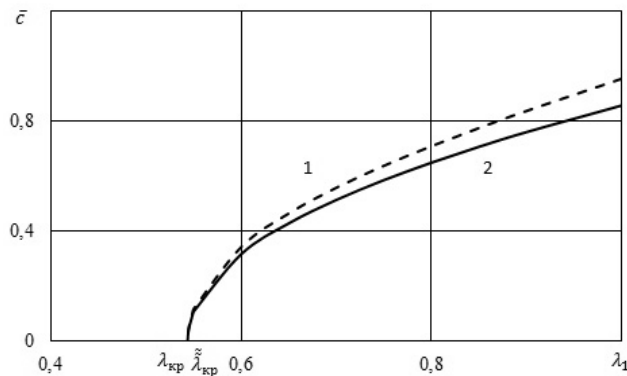


Рис. 5

На рис. 6 наведено графік залежності безрозмірної величини коефіцієнта згасання поверхневої хвилі $\bar{\gamma}$ ($\bar{\gamma} = \gamma/k_s$, k_s – хвильове число хвилі зсуву в матеріалі пружного півпростору) від величини λ_1 для гідропружної системи ($\bar{\mu}^* = 0,001$), пружний півпростір якої підданий початковому стисненню ($\lambda_1 \leq 1$). Як і в попередньому випадку, цей графік отримано для гідропружної системи, товщина в'язкого ($\bar{\mu}^* = 0,001$) рідкого шару \bar{h} якої дорівнює 20.

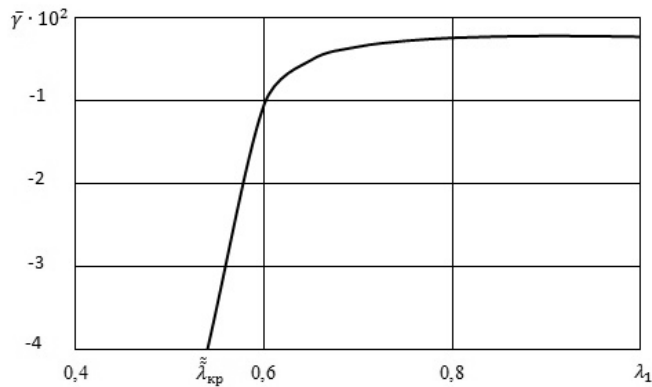


Рис. 6

Наведені на рис. 5, 7 графіки, які зображені суцільними лініями, одержані для гідропружної системи, товщина рідкого шару \bar{h} якої дорівнює 20. На цих рисунках штрихові лінії відповідають пружному півпростору, який не взаємодіє з рідиною ($\bar{\rho}_0 = 0$).

Графіки на рис. 7 представляють значення фазових швидкостей поверхневих хвиль для сильно стисненого пружного півпростору ($0,543685 \leq \lambda_1 \leq 0,543725$). При цьому графік, зображений суцільною лінією 3, отриманий для гідропружної системи, товщина в'язкого ($\bar{\mu}^* = 0,001$) рідкого шару \bar{h} якої дорівнює 20, а штрихова лінія 1 відповідає пружному півпростору, що не взаємодіє з рідиною ($\bar{\rho}_0 = 0$). Характер впливу попереднього стиснення ($0,543685 < \lambda_1 \leq 0,543725$) пружного півпростору на величину фазової швидкості поверхневої хвилі \bar{c} в гідропружній системі із шаром ідеальної рідини ($\bar{\mu}^* = 0$) ілюструє графік на рис. 7, зображений штрих-пунктирною лінією 2.

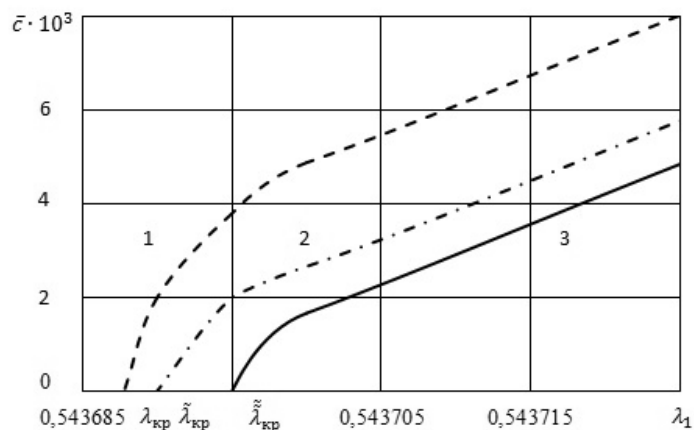


Рис. 7

Як відомо, фазова швидкість і структура хвилі Стоунлі при взаємодії твердого та рідкого півпросторів залежать від механічних параметрів гідропружної системи і визначаються співвідношенням між швидкістю хвилі звуку в рідині і швидкістю хвилі Релея у твердому півпросторі. В даному випадку механічні параметри гідропружної системи «гума – вода» такі, що швидкість поширення звукової хвилі в рідині \bar{a}_0 ($\bar{a}_0 = 46,153442$) більша швидкості релеєвської хвилі \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,955312$ для $\lambda_1 = 1$ і $\bar{c}_R = 0,709557$ для $\lambda_1 = 0,8$). З огляду на результати, представлені на рис. 3 і 4, які характеризують розподіл амплітуд зсувів (швидкостей) хвильових рухів у приконтактних областях, в даній гідропружній системі це призводить до того, що в короткохвильовій частині спектра поверхнева хвиля, поширюючись вздовж межі поділу середовищ, локалізується в приконтактних областях як рідини, так і пружного півпростору. При цьому глибина проникнення цієї поверхневої хвилі (хвиля типу Стоунлі) в пружне тіло більша за глибину проникнення в рідину.

З графіків, представлених на рис. 1 – 7, випливає, що стиснення пружного півпростору ($\lambda_1 < 1$) призводить до зменшення величин фазових швидкостей поверхневих хвиль і збільшення абсолютних значень коефіцієнтів згасання, а також до зміщення хвильових рухів ближче до межі контакту пружного тіла і рідини. При цьому глибина проникнення їх у пружній півпростір залишається більшою, ніж глибина проникнення в рідину. З рисунків також випливає, що стиснення півпростору ($\lambda_1 < 1$) призводить до зближення значень фазових швидкостей хвиль Релея і Стоунлі та їх залежності від параметра укорочення.

§3. Поверхнева нестійкість гідропружної системи.

Графіки на рис. 5, 7 для чисто пружного півпростору, зображені штриховими лініями (лінії 1), показують, що при стисненні та укороченні, рівному $\lambda_1 \approx 0,54$ (більш точне значення $\lambda_1 \approx 0,543688$), тобто при зменшенні довжини високоеластичного нестисливого тіла на 46 % величина фазової швидкості хвилі Релея обертається в нуль. Це свідчить про те, що в умовах плоского напружено-деформованого початкового стану для високоеластичного нестисливого неогуківського тіла при стисненні $\lambda_1 \approx 0,54$ виникає явище поверхневої нестійкості. Зазначимо, що це значення збігається з величиною, раніше отриманою в теорії стійкості [2] і відповідає значенню параметра критичного укорочення $\lambda_{кр}$ [2].

З графіка, наведеного на рис. 7 (суцільна лінія 3), випливає, що у гідропружному хвилеводі ($\bar{\mu}^* = 0,001$) фазова швидкість поверхневої хвилі Стоунлі обертається в нуль при $\lambda_1 \approx 0,543695$. Це свідчить про те, що в умовах плоского напружено-деформованого початкового стану поверхня пружного півпростору гідропружної системи, яка контактує з шаром в'язкої рідини ($\bar{\mu}^* = 0,001$), при стисненні $\tilde{\lambda}_{кр} = \lambda_1 \approx 0,543695$ втрачає поверхневу стійкість. Для пружного півпростору, який не взаємодіє з рідиною ($\bar{\rho}_0 = 0$), як зазначено раніше, явище поверхневої нестійкості виникає при $\lambda_{кр} = \lambda_1 \approx 0,543688$. Ці відмінності між значеннями $\tilde{\lambda}_{кр}$ і $\lambda_{кр}$ свідчать про те, що наявність шару в'язкої стисливої рідини ($\bar{\mu}^* = 0,001$) призводить до зниження порогу поверхневої нестійкості хвилеводу і виникнення її раніше ($\tilde{\lambda}_{кр} > \lambda_{кр}$) при меншому стисненні ($\tilde{\lambda}_{кр} = \lambda_1 \approx 0,543695 > \lambda_{кр} = \lambda_1 \approx 0,543688$).

Із графіків, представлених на рис. 7, також випливає, що в гідропружній системі, що складається з пружного півпростору та ідеального шару ($\bar{\mu}^* = 0$) рідини (штрихпунктирна лінія 2), втрата поверхневої стійкості ($\tilde{\lambda}_{кр} = \lambda_1 \approx 0,54369$) виникає раніше, ніж у суто пружному півпросторі ($\bar{\rho}_0 = 0$) [2], але пізніше, ніж у гідропружній системі з в'язким рідким шаром ($\bar{\mu}^* = 0,001$). При цьому для значень параметрів критичного укорочення має місце співвідношення $\tilde{\lambda}_{кр} = \lambda_1 \approx 0,543695 > \tilde{\lambda}_{кр} = \lambda_1 \approx 0,54369 > \lambda_{кр} = \lambda_1 \approx 0,543688$.

Разом з тим проведені розрахунки показали, що навантаження пружного півпростору шаром рідини істотно не змінює умови виникнення поверхневої нестійкості, оскільки величини параметрів критичного укорочення пружного півпростору $\lambda_{кр}$, а також гідропружних систем $\tilde{\lambda}_{кр}$ і $\tilde{\lambda}_{кр}$ відрізняються на малу величину.

Таким чином, розвинена лінеаризована теорія хвиль для високоеластичних нестисливих тіл дозволяє досліджувати хвильові процеси не тільки в загальному і ряді окремих випадків, але також надає можливість дослідити і умови виникнення явища поверхневої нестійкості як в пружному півпросторі, так і в гідропружній системі.

Висновок.

Запропоновано підхід для розгляду явища поверхневої нестійкості в гідропружному хвилеводі, який складається з шару в'язкої стисливої рідини та високоеластичного нестисливого тіла, підданого скінченним деформаціям. Аналіз отриманих числових результатів показав, що вплив великих початкових деформацій пружного півпростору на характеристики хвильового процесу в гідропружній системі проявляється не тільки кількісно, але і якісно. Скінченні попередні деформації можуть призвести не тільки до зміни величин фазових швидкостей та дисперсійних властивостей поверхневих хвиль, але і до більш істотної зміни параметрів хвильового процесу в гідропружній системі в цілому. В результаті їх дії в пружно-рідинному хвилеводі може виникнути явище поверхневої нестійкості, яке призводить до припинення процесу поширення хвиль і перенесення хвильової енергії. Встановлено, що наявність шару в'язкої стисливої рідини призводить до зниження порогу поверхневої нестійкості хвилеводу і виникнення її раніше при меншому стисненні. Проведені дослідження та розрахунки

показали, що навантаження пружного півпростору шаром в'язкої стисливої рідини істотно не змінює умови виникнення поверхневої нестійкості гідропружної системи. Встановлено, що величини параметрів критичного укорочення пружного півпростору та гідропружної системи відрізняються на малу величину.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в цій статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Наукова і науково-технічна діяльність наукових установ Національної академії наук України» (КПКВК 6541030).

РЕЗЮМЕ. Досліджено поширення нормальних хвиль у попередньо деформованому нестисливому півпросторі, що взаємодіє з шаром в'язкої стисливої рідини. Результати отримано на основі тривимірних лінеаризованих рівнянь теорії пружності скінченних деформацій для нестисливого пружного півпростору та тривимірних лінеаризованих рівнянь Нав'є – Стокса для шару в'язкої стисливої рідини. Застосовано постановку задачі та підхід, які базуються на використанні представлень загальних розв'язків лінеаризованих рівнянь для пружного тіла та рідини. Отримано дисперсійне рівняння, яке описує поширення гармонічних хвиль у гідропружній системі. Побудовано дисперсійні криві поверхневих хвиль у широкому діапазоні частот. Проаналізовано вплив скінченних початкових деформацій пружного півпростору та товщини шару в'язкої стисливої рідини на фазові швидкості, дисперсію поверхневих хвиль та поверхневу нестійкість гідропружного хвилеводу. Числові результати наведено у вигляді графіків і дано їх аналіз.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: поверхневі хвилі, фазова швидкість, коефіцієнт згасання, нестисливий пружний півпростір, шар в'язкої стисливої рідини, скінченні початкові деформації, поверхнева нестійкість.

1. *Викторов И.А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. – Москва: Наука, 1981. – 288 с.
2. *Гузь А.Н.* Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. – Киев: Наук. думка, 1973. – 272 с.
3. *Гузь А.Н.* Упругие волны в телах с начальными напряжениями: в 2-х томах. Т.1. Общие вопросы – Киев: Наук. думка, 1986. – 374 с.
4. *Гузь А.Н.* Упругие волны в телах с начальными напряжениями: в 2-х томах. Т.2. Закономерности распространения. – Киев: Наук. думка, 1986. – 536 с.
5. *Гузь А.Н.* Динамика сжимаемой вязкой жидкости. – Киев: А.С.К., 1998. – 350 с.
6. *Гузь А.Н.* Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. – Киев: А.С.К., 2004. – 672 с.
7. *Гузь А.* Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями: в 2-х частях. Ч. 1. Общие вопросы. Волны в бесконечных телах и поверхностные волны. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. – 501 с.
8. *Гузь А.* Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями: в 2-х частях. Ч. 2. Волны в частичноограниченных телах. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. – 505 с.
9. *Гузь А.* Введение в динамику сжимаемой вязкой жидкости. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing RU, 2017. – 244 с.
10. *Жук А.П.* Волны Стоунли в среде с начальными напряжениями // Прикл. механика. – 1980. – **16**, № 1. – С. 113 – 116.
11. *Babich S.Yu., Guz A.N., Zhuk A.P.* Elastic Waves in Bodies with Initial Stresses // Int. Appl. Mech. – 1979. – **15**, N 4. – P. 277 – 291.
12. *Bagno A.M.* Effect of Prestresses on the Dispersion of Quasi-Lamb Waves in the System Consisting of an Ideal Liquid Layer and a Compressible Elastic Layer // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 2. – P. 139 – 148.
13. *Bagno A.M., Guz A.N.* Elastic Waves in Prestressed Bodies Interacting with a Fluid (survey) // Int. Appl. Mech. – 1997. – **33**, N 6. – P. 435 – 463.
14. *Guz A.N.* Aerohydroelasticity Problems for Bodies with Initial Stresses // Soviet Appl. Mech. – 1980. – **16**, N 3. – P. 175 – 190.
15. *Guz A.N.* Elastic Waves in Bodies with Initial (Residual) Stresses // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, N 1. – P. 23 – 59.
16. *Guz A.N.* Dynamics of Compressible Viscous Fluid. – Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2009. – 428 p.
17. *Guz A.N., Bagno A.M.* Influence of Prestresses on Normal Waves in an Elastic Compressible Half-Space Interacting with a Layer of a Compressible Ideal Fluid // Int. Appl. Mech. – 2019. – **55**, N 6. – P. 585 – 595.
18. *Guz A.N., Bagno A.M.* Influence of Prestresses on Quasi-Lamb Modes in Hydroelastic Waveguides // Int. Appl. Mech. – 2020. – **56**, N 1. – P. 1 – 12.
19. *Guz A.N., Bagno A.M.* Effect of the Initial Stresses on Waves in the System Consisting of a Viscous Fluid Layer and a Compressible Elastic Half-Space // Int. Appl. Mech. – 2021. – **57**, N 1. – P. 1 – 10.
20. *Guz A.N., Zhuk A.P., Bagno A.M.* Dynamics of Elastic Bodies, Solid Particles, and Fluid Parcels in a Compressible Viscous Fluid (Review) // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 5. – P. 449 – 507.
21. *Ottenio M., Destrade M., Ogden R.W.* Acoustic waves at the interface of a pre-stressed incompressible elastic solid and a viscous fluid // Int. J. Non-Linear Mech. – 2007. – **42**, N 2. – P. 310 – 320.

Надійшла 18.11.2019

Затверджено до друку 19.07.2022