

Є. А. Сторожук

**ТОЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ  
ПІДДАТЛИВОЇ НА ПОПЕРЕЧНИЙ ЗСУВ ОВАЛЬНОЇ  
ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ**

*Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,  
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: stevan@ukr.net*

**Abstract.** The statement is given and the exact analytical solution is obtained for the geometrically nonlinear problem on the transverse shear-compliant long cylindrical shell of the oval cross-section under action of a uniform surface load. The basic equations are written according to the geometrically nonlinear theory of shallow shells in the quadratic approximation, Timoshenko hypothesis and Hooke law. For the shell with hinged longitudinal ends, the exact expressions for the components of the stress-strain state are obtained, the characteristic (limit) values of the generalized curvature parameter are determined, a system of equations for finding the critical load is constructed, as well as the main partial and limit cases are considered.

**Key words:** long cylindrical shell, oval cross section, geometric nonlinearity, transverse displacement, uniform pressure, exact solution.

**Вступ.**

Композитні циліндричні оболонки некругового поперечного перерізу (еліптичного, овалового, параболічного, тощо) знаходять широке застосування в різних галузях сучасної техніки як конструктивні елементи машин і приладів: фюзеляжі пасажирських і вантажних літаків; двигуни військових літаків; корпуси (обтікачі) ракет; канали парогенераторів і оболонки ТВЕЛів ядерних реакторів; резервуари автоцистерн; економайзери парових котлів. Високі вимоги до точності й достовірності результатів досліджень оболонкових елементів конструкцій, виготовлених з композитних матеріалів, вимагають крім урахування дійсних умов експлуатації також і урахування особливостей їх деформування (деформацій поперечного зсуву і великих прогинів).

Значну кількість результатів з розрахунку некругових циліндричних оболонок отримано за допомогою чисельних і наближених аналітичних методів [2 – 6, 8, 13, 14, 18, 19, 21, 22].

Особливий інтерес становить одержання точних аналітичних розв'язків задач даного класу в геометрично нелінійній постановці, що дозволяє розглянути поведінку оболонки у всій області деформування – як докритичній, так і закритичній, і провести аналіз напружено-деформованого стану (НДС) залежно від геометричних і механічних параметрів, а також видів навантаження й контурних умов. Огляд основних результатів з деформування гнучких некругових циліндричних оболонок наведений у роботі [15].

В більшості робіт, присвячених аналітичному дослідженню нелінійного деформування циліндричної оболонки, отримано точні розв'язки геометрично нелінійних задач для нескінченно довгої пологої оболонки кругового поперечного перерізу як в класичній [12], так і некласичній [16] постановках.

Точним розв'язком нелінійних крайових задач для некругових оболонок присвячені лише окремі роботи. Так, автори робіт [1, 9] на основі геометрично нелінійної

теорії пологих оболонок у квадратичному наближенні, в якій мають місце гіпотези Кірхгофа – Лява або Тимошенка, аналітично дослідили нелінійне деформування і стійкість довгої циліндричної оболонки некругового поперечного перерізу, кривизна якого змінюється за квадратичним законом.

Відзначимо, що точні розв’язки лінійно-пружних задач статки для довгої циліндричної оболонки овального поперечного перерізу з неперервним і східчасто-змінним радіусами кривизни, яка навантажена нормальними поверхневими і погонними силами, рівномірно розподіленими вздовж твірних, наведені в роботі [20].

Далі дано постановку геометрично нелінійної задачі статки для піддатливої на поперечний зсув нескінченно довгої пологої циліндричної оболонки овального поперечного перерізу з неперервним радіусом кривизни, отримано аналітичний (точний) розв’язок даної задачі й наведено конкретні числові результати для незамкненої оболонки з шарнірно закріпленими поздовжніми краями під дією рівномірного тиску.

### §1. Постановка задачі і основні співвідношення.

Розглянемо незамкнену нескінченно довгу пологу циліндричну оболонку овального поперечного перерізу, виготовлену із трансверсально-ізотропного матеріалу. Геометрію оболонки опишемо в декартовій системі координат  $(X, Y, Z)$ , вісь  $OY$  якої розташована в площині поздовжніх країв на однаковій відстані від них (рис. 1). Площину поперечного перерізу віднесемо до системи координат  $(X, Z)$ , а серединну поверхню оболонки – до криволінійної ортогональної системи координат  $(s, y)$ , спряженої з лініями головних кривизни, де  $s, y$  – довжини напрямної і твірної. Прямолінійну координату  $\gamma$  направимо по нормалі до серединної поверхні. Вважатимемо координату  $\gamma$  додатною, якщо точка знаходиться з боку опуклості серединної поверхні.

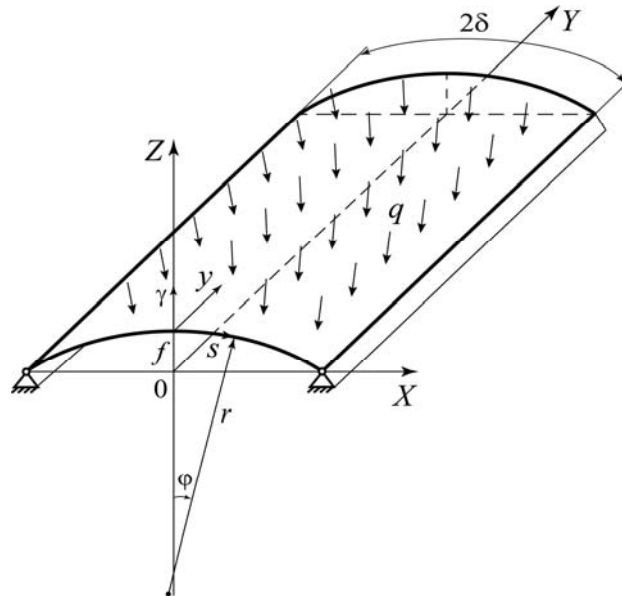


Рис. 1

Приймемо, що оболонка має сталі характеристики жорсткості й навантажена рівномірним нормальним тиском інтенсивності  $q = \text{const}$ . З викладеного вище випливає, що переміщення, деформації й напруження в кожному поперечному перерізі оболонки будуть однаковими, а всі шукані величини будуть змінюватися тільки вздовж напрямної (будуть залежати тільки від координати  $s$ ).

Поперечний переріз незамкненої циліндричної оболонки має форму дуги овалу, кривизна якого змінюється за законом:

$$k = \frac{1}{r} = k_0 (1 - \xi \cos 2k_0 s), \quad (1.1)$$

де  $r$  – радіус кривизни поперечного перерізу;  $k_0 = 1/r_0$ ;  $r_0$  – радіус кола, довжина якого  $L_0 = 2\pi r_0$  дорівнює довжині овалу;  $\xi$  – параметр, який є мірою відхилення овалу від кола (мірою ексцентриситету) і змінюється в межах:  $-1 \leq \xi \leq 1$ .

Параметричні рівняння контуру поперечного перерізу оболонки запишемо у вигляді:

$$X = \int_0^s \cos \varphi ds; \quad Z = f - \int_0^s \sin \varphi ds = \int_s^\delta \sin \varphi ds; \quad -\delta \leq s \leq \delta. \quad (1.2)$$

У співвідношеннях (1.2) через  $\varphi$  і  $f$  позначені кут між нормаллю до серединної поверхні й вертикальною віссю  $OZ$  та стріла підйому циліндричної панелі (рис. 1), які обчислюються за формулами:

$$\varphi = \int_0^s k ds = k_0 s - 0,5\xi \sin 2k_0 s; \quad f = \int_0^\delta \sin \varphi ds. \quad (1.3)$$

Використовуючи параметричні рівняння (1.2), отримаємо такі вирази для відношення стріли підйому до відстані між поздовжніми краями панелі

$$\tilde{f} = \int_0^{\tilde{k}_0/2} \sin \tilde{\varphi} d\tilde{s} \Big/ 2 \int_0^{\tilde{k}_0/2} \cos \tilde{\varphi} d\tilde{s} \quad (1.4)$$

та для відношення півосей овалу

$$a/b = \int_0^{\pi/2} \cos \tilde{\varphi} d\tilde{s} \Big/ \int_0^{\pi/2} \sin \tilde{\varphi} d\tilde{s}, \quad (1.5)$$

де введені безрозмірні величини:  $\tilde{\varphi} = \tilde{s} - 0,5\xi \sin 2\tilde{s}$ ;  $\tilde{s} = s/r_0$ ;  $\tilde{k}_0 = 2\delta k_0$ .

Зазначимо, що інтегрування у формулах (1.4), (1.5) виконується чисельно.

Залежність відношення  $\tilde{f}$  від параметрів  $\tilde{k}_0$  та  $\xi$  наведена в табл. 1.

Таблиця 1

$\tilde{f}$								
	$\tilde{k}_0$							
$\xi$	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	2,00	2,50
-1	0,063	0,126	0,192	0,260	0,333	0,410	0,580	0,770
-0,5	0,047	0,094	0,142	0,191	0,241	0,293	0,403	0,524
0	0,031	0,063	0,095	0,128	0,162	0,197	0,273	0,361
0,5	0,016	0,032	0,049	0,068	0,089	0,112	0,167	0,237
1	0,0002	0,0013	0,0043	0,010	0,019	0,033	0,073	0,134

З умови пологості панелі ( $\tilde{f} \leq 0,2$ ), напрямна якої задається рівняннями (1.2), (1.3), впливає таке обмеження на геометричні параметри поперечного перерізу панелі:

$$\tilde{k}_0 - \xi \sin \tilde{k}_0 \leq 4 \operatorname{arctg} \frac{2}{5}.$$

Для наочного уявлення про овали, що розглядаються в даній роботі, на рис. 2 показано графіки четвертих частин декількох овалів (суцільні криві;  $0 \leq \tilde{s} \leq \pi/2$ ) з такими значеннями параметра ексцентриситету:  $\xi = 0; 3/11; 3/5; 1$ . Відношення півосей овалу ( $a/b$ ), що відповідають заданим значенням його ексцентриситету  $\xi$ , дорівнюють:  $a/b = 1,00; 1,20; 1,51; 2,06$ . Графіки побудовані в системі безрозмірних координат  $(\tilde{X}, \tilde{Z})$ , осі якої збігаються з осями симетрії овалу:  $\tilde{X} = X/r_0$ ;  $\tilde{Z} = (Z + b - f)/r_0$ .

На цьому рисунку для порівняння також наведено еліпси (пунктирні криві) з тими самими значеннями довжини  $2\pi r_0$  та відношення півосей  $a/b$ , що й у відповідних овалів.

Величини півосей еліпса в даному випадку обчислюються за формулами:

$$a = r_0(1+c)/g; \quad b = r_0(1-c)/g, \quad (1.6)$$

$$\text{де } g = 1 + \frac{c^2}{4} + \frac{c^4}{64} + \frac{c^6}{256} + \dots; \quad c = \frac{a-b}{a+b} = \left(\frac{a}{b}-1\right) / \left(\frac{a}{b}+1\right).$$

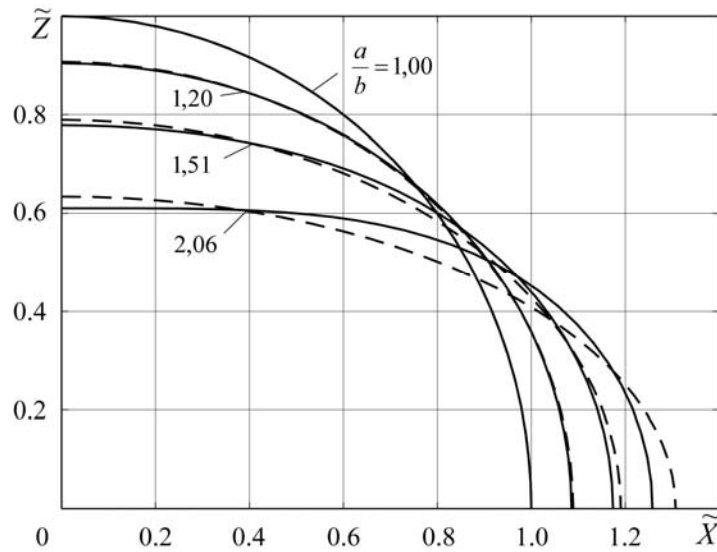


Рис. 2

Наведені на рис. 2 дані свідчать про те, що для  $a/b \leq 1,5$  овал є достатньо точним наближенням відповідного еліпса.

Нехай при підвищених рівнях діючого навантаження в оболонці виникають великі (скінченні) прогини, порівняні з товщиною. Для дослідження НДС даного класу гнучких циліндричних оболонок скористаємося рівняннями геометрично нелінійної теорії пологих оболонок у квадратичному наближенні, яка базується на гіпотезі прямої лінії (враховуються деформації поперечного зсуву). У цьому випадку для компонентів деформації оболонки  $\varepsilon, \psi, \mu$  маємо вирази [1, 15]:

$$\varepsilon = \frac{du}{ds} + kw + \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{ds} \right)^2; \quad \psi = \vartheta + \frac{dw}{ds}; \quad \mu = \frac{d\vartheta}{ds}, \quad (1.7)$$

де  $u, w$  – тангенціальне переміщення і прогин точок середньої поверхні оболонки;  $\vartheta$  – кут повороту нормалі.

Зв'язок внутрішніх зусиль і момента з компонентами деформації оболонки запишемо згідно із законом Гука у вигляді:

$$N = D_N \varepsilon; \quad D_N = \frac{Eh}{1-\nu^2}; \quad Q = D_Q \psi; \quad D_Q = m G_{sy} h; \quad (1.8)$$

$$M = D_M \mu; \quad D_M = D_N h^2 / 12.$$

У співвідношеннях (1.8) позначено:  $N, Q$  – тангенціальне і перерізує зусилля;  $M$  – згинальний момент;  $D_N, D_M, D_Q$  – характеристики жорсткості оболонки;  $h = \text{const}$  – товщина оболонки;  $E, \nu$  – модуль пружності й коефіцієнт Пуассона матеріалу оболонки в площині ізотропії;  $G_{sy}$  – модуль зсуву в площині поперечного перерізу;  $m$  – коефіцієнт, який залежить від характеру розподілу зсуву по товщині й способу визначення середнього значення зсуву.

Рівняння рівноваги мають такий вигляд:

$$\frac{dN}{ds} = 0; \quad \frac{dQ^*}{ds} - kN - q = 0; \quad \frac{dM}{ds} - Q = 0, \quad (1.9)$$

де  $Q^* = Q + N \frac{dw}{ds}$ .

На підставі (1.7) – (1.9) приходимо до системи розв’язувальних рівнянь у переміщеннях

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left\{ D_N \left[ \frac{du}{ds} + kw + \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{ds} \right)^2 \right] \right\} &= 0; \\ D_Q \left( \frac{d\vartheta}{ds} + \frac{d^2 w}{ds^2} \right) + \frac{d}{ds} \left\{ D_N \left[ \frac{du}{ds} + kw + \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{ds} \right)^2 \right] \frac{dw}{ds} \right\} - & (1.10) \\ -kD_N \left[ \frac{du}{ds} + kw + \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{ds} \right)^2 \right] &= q; \\ D_M \frac{d^2 \vartheta}{ds^2} - D_Q \left( \vartheta + \frac{dw}{ds} \right) &= 0. \end{aligned}$$

При розв’язанні конкретних крайових задач до системи рівнянь (1.10) потрібно приєднати відповідні граничні умови.

Наведемо граничні умови для випадку, коли поздовжні краї оболонки шарнірно закріплені:

$$w(\pm\delta) = 0; \quad \left. \frac{d\vartheta}{ds} \right|_{s=\pm\delta} = 0; \quad u(\pm\delta) = 0. \quad (1.11)$$

Останню з умов (1.11) на одному краї можна замінити еквівалентною умовою

$$\Delta = \int_{-\delta}^{\delta} \frac{du}{ds} ds = 0, \quad (1.12)$$

яка означає, що зближення між краями відсутнє.

## §2. Побудова розв’язку геометрично нелінійної задачі для овальної циліндричної панелі.

Розглянемо найбільш важливий із практичної точки зору випадок, коли поверхневе навантаження прикладене з боку опуклості оболонки, як показано на рис. 1. Тоді тангенціальне зусилля  $N$  є нерозтягуючим ( $N \leq 0$ ).

Інтегруючи перше рівняння системи (1.10), отримуємо, що

$$N = D_N \left[ \frac{du}{ds} + kw + \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{ds} \right)^2 \right] = C_0 = \text{const}, \quad (2.1)$$

тобто, тангенціальне зусилля не змінюється вздовж напрямної.

З врахуванням (2.1) перепишемо друге рівняння системи (1.10) у вигляді

$$(D_Q + N) \frac{d^2 w}{ds^2} + D_Q \frac{d\mathcal{G}}{ds} = kN + q. \quad (2.2)$$

Введемо безрозмірні величини [9, 11]:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{s}{\delta}; \quad \tilde{w} = \frac{w}{k_0 \delta^2}; \quad \tilde{u} = \frac{u}{k_0^2 \delta^3}; \quad \tilde{\mathcal{G}} = \frac{\mathcal{G}}{k_0 \delta}; \\ \tilde{\delta} &= \frac{\delta}{h}; \quad \tilde{\Delta} = \frac{\Delta}{k_0^2 \delta^3}; \quad \tilde{q} = \frac{q \delta^2}{k_0 D_M}; \quad \beta = \frac{D_M}{D_Q \delta^2}; \\ \tilde{N} &= \frac{N \delta^2}{D_M}; \quad \tilde{Q} = \frac{Q \delta}{D_M k_0}; \quad \tilde{M} = \frac{M}{D_M k_0}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Тоді рівності (2.1) і (2.2), а також третє рівняння рівноваги набудуть вигляду:

$$\frac{d\tilde{u}}{d\eta} + (1 - \xi \cos \tilde{k}_0 \eta) \tilde{w} + \frac{1}{2} \left( \frac{d\tilde{w}}{d\eta} \right)^2 = \frac{\tilde{N}}{3 \tilde{\delta}^2 \tilde{k}_0^2} \quad (2.4)$$

та

$$(1 + \tilde{N} \beta) \frac{d^2 \tilde{w}}{d\eta^2} + \frac{d\tilde{\mathcal{G}}}{d\eta} = \tilde{N} \beta (1 - \xi \cos \tilde{k}_0 \eta) + \beta \tilde{q}; \quad (2.5)$$

$$\beta \frac{d^2 \tilde{\mathcal{G}}}{d\eta^2} - \tilde{\mathcal{G}} - \frac{d\tilde{w}}{d\eta} = 0.$$

Система (2.5) є системою лінійних звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами і її загальний розв'язок (безрозмірні прогин  $\tilde{w}$  і кут повороту  $\tilde{\mathcal{G}}$ ) виражається лінійно через праву частину, тобто через параметр навантаження  $\tilde{q}$ . З іншого боку, у вирази для коефіцієнтів системи (2.5) входить безрозмірне тангенціальне зусилля  $\tilde{N}$ , яке нелінійно залежить від  $\tilde{q}$ , що спричиняє нелінійну залежність  $\tilde{w}$  і  $\tilde{\mathcal{G}}$  від  $\tilde{q}$ .

Крайові умови (1.11), (1.12) у безрозмірних величинах записуються наступним чином:

$$\tilde{w}(\pm 1) = 0; \quad \left. \frac{d\tilde{\mathcal{G}}}{d\eta} \right|_{\eta=\pm 1} = 0; \quad \tilde{u}(\pm 1) = 0; \quad (2.6)$$

$$\tilde{\Delta} = \int_{-1}^1 \frac{d\tilde{u}}{d\eta} d\eta = 0. \quad (2.7)$$

Розв'язок однорідної системи, яка відповідає системі (2.5), шукаємо за методом Ейлера. У випадку, коли  $-\beta^{-1} < \tilde{N} < 0$  (тангенціальне зусилля є стискаючим), характеристичне рівняння системи

$$\begin{vmatrix} (1 + \beta \tilde{N})t^2 & t \\ -t & \beta t^2 - 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.8)$$

має чотири корені:

$$t_{1,2} = 0; \quad t_{3,4} = \pm i\lambda, \quad (2.9)$$

де  $\lambda^2 = -\frac{\tilde{N}}{1 + \beta\tilde{N}} > 0$ ;  $i = \sqrt{-1}$ .

Частинний розв'язок неоднорідної системи (2.5) визначається законами зміни вздовж прямої кривизни оболонки й діючого поверхневого навантаження.

Враховуючи значення (2.9) коренів характеристичного рівняння та використовуючи принцип суперпозиції й метод невизначених коефіцієнтів, отримаємо такий загальний розв'язок системи (2.5) за умови  $\lambda \neq \tilde{k}_0$ :

$$\begin{aligned} w &= C_1 + C_2\eta + C_3 \cos \lambda\eta + C_4 \sin \lambda\eta + 0,5P\eta^2 + A \cos \tilde{k}_0\eta; \\ \tilde{g} &= -C_2 + \lambda(1 + \tilde{N}\beta)(C_3 \sin \lambda\eta - C_4 \cos \lambda\eta) - P\eta + B \sin \tilde{k}_0\eta. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Тут  $C_1, C_2, C_3, C_4$  – сталі інтегрування;

$$P = 1 + \frac{\tilde{q}}{\tilde{N}}; \quad A = \frac{(1 + \beta\tilde{k}_0^2)B}{\tilde{k}_0}; \quad B = \frac{\lambda^2\xi}{\tilde{k}_0(\lambda^2 - \tilde{k}_0^2)}. \quad (2.11)$$

Визначимо сталі інтегрування з граничних умов на поздовжніх краях.

При  $\sin \lambda \neq 0$  і  $\cos \lambda \neq 0$  з перших чотирьох граничних умов (2.6) одержимо такі значення сталих інтегрування:

$$C_1 = \frac{(1 - 0,5\tilde{N})P - (\tilde{N}A + \tilde{k}_0B) \cos \tilde{k}_0}{\tilde{N}}; \quad C_2 = 0; \quad C_3 = \frac{-P + \tilde{k}_0B \cos \tilde{k}_0}{\tilde{N} \cos \lambda}; \quad C_4 = 0. \quad (2.12)$$

Таким чином, розв'язок системи (2.5), який задовольняє граничним умовам (2.6), має вигляд

$$\begin{aligned} \tilde{w} &= -\frac{(\tilde{N}A + \tilde{k}_0B) \cos \tilde{k}_0}{\tilde{N}} + \frac{P}{\tilde{N}} \left[ 1 + \frac{\tilde{N}(\eta^2 - 1)}{2} - \frac{\cos \lambda\eta}{\cos \lambda} \right] + \\ &\quad + \frac{\tilde{k}_0B \cos \tilde{k}_0 \cos \lambda\eta}{\tilde{N} \cos \lambda} + A \cos \tilde{k}_0\eta; \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\tilde{g} = -\frac{\tilde{k}_0B \cos \tilde{k}_0 \sin \lambda\eta}{\lambda \cos \lambda} + \frac{P}{\lambda} \left( \frac{\sin \lambda\eta}{\cos \lambda} - \lambda\eta \right) + B \sin \tilde{k}_0\eta.$$

З першої формули (2.13) при значенні координати  $\eta = 0$  дістанемо вираз для стріли прогину (прогину у вершині панелі):

$$\tilde{w}(0) = \frac{\tilde{k}_0B \cos \tilde{k}_0}{\tilde{N} \cos \lambda} - \frac{(\tilde{N}A + \tilde{k}_0B) \cos \tilde{k}_0}{\tilde{N}} + P \left( \frac{\cos \lambda - 1}{\tilde{N} \cos \lambda} - \frac{1}{2} \right) + A. \quad (2.14)$$

Безрозмірні згинальний момент і перерізує зусилля обчислюються за формулами:

$$\tilde{M} = -\frac{\tilde{k}_0B \cos \tilde{k}_0 \cos \lambda\eta}{\cos \lambda} + P \left( \frac{\cos \lambda\eta}{\cos \lambda} - 1 \right) + \tilde{k}_0B \cos \tilde{k}_0\eta; \quad (2.15)$$

$$\tilde{Q} = \frac{\lambda \tilde{k}_0B \cos \tilde{k}_0 \sin \lambda\eta}{\cos \lambda} - \frac{\lambda P \sin \lambda\eta}{\cos \lambda} - \tilde{k}_0^2 B \sin \tilde{k}_0\eta.$$

Вираз для нормального напруження  $\sigma$  в безрозмірних величинах має вигляд

$$\tilde{\sigma} = \tilde{N} + 6\tilde{\delta}\tilde{k}_0\tilde{M}\tilde{\gamma} \quad (-0,5 \leq \tilde{\gamma} \leq 0,5), \quad (2.16)$$

де  $\tilde{\sigma} = h\delta^2\sigma / D_M$ ;  $\tilde{\gamma} = \gamma / h$ .

Задовольняючи граничну умову (2.7), отримаємо залежність між безрозмірними параметрами навантаження  $\tilde{q}$  й тангенціального зусилля  $\tilde{N}$  у вигляді квадратного рівняння відносно  $P$

$$R_1 P^2 + R_2 P + R_3 = 0, \quad (2.17)$$

коєфіцієнти якого залежать від безрозмірного тангенціального зусилля, а також геометричних і механічних параметрів оболонки:

$$\begin{aligned} R_i &= r_{i1} \sin^2 \lambda + r_{i2} \cos^2 \lambda + r_{i3} \sin \lambda \cos \lambda \quad (i = 1, 2, 3); \\ r_{11} &= -\frac{\lambda^2}{2\tilde{N}^2}; \quad r_{12} = \frac{2}{\tilde{N}} - \frac{\lambda^2}{2\tilde{N}^2} - \frac{1}{3}; \quad r_{13} = \frac{\lambda}{2\tilde{N}^2} - \frac{2}{\lambda\tilde{N}}; \\ r_{21} &= \frac{\tilde{k}_0 \lambda^2 B \cos \tilde{k}_0}{\tilde{N}^2}; \quad r_{22} = \frac{\tilde{k}_0 \lambda^2 B \cos \tilde{k}_0}{\tilde{N}^2} - \frac{2\tilde{k}_0 B \cos \tilde{k}_0}{\tilde{N}} - \frac{2(3-\tilde{N})}{3\tilde{N}} + \frac{F \sin \tilde{k}_0}{\tilde{N}} + \\ &+ \frac{2\xi \sin \tilde{k}_0}{\tilde{k}_0 \tilde{N}} + \frac{2\xi(\tilde{k}_0 \cos \tilde{k}_0 - \sin \tilde{k}_0)}{\tilde{k}_0^3} + \frac{2A(\sin \tilde{k}_0 - \tilde{k}_0 \cos \tilde{k}_0)}{\tilde{k}_0}; \\ r_{23} &= \frac{2(\tilde{k}_0 B \cos \tilde{k}_0 + 1)}{\lambda \tilde{N}} - \frac{H \cos \tilde{k}_0}{\tilde{N}} - \frac{\tilde{k}_0 \lambda B \cos \tilde{k}_0}{\tilde{N}^2}; \\ r_{31} &= -\frac{\tilde{k}_0^2 \lambda^2 B^2 \cos^2 \tilde{k}_0}{2\tilde{N}^2}; \quad r_{32} = -\frac{\tilde{k}_0^2 \lambda^2 B^2 \cos^2 \tilde{k}_0}{2\tilde{N}^2} + \frac{2(\tilde{k}_0 B + \tilde{N}A)(\tilde{k}_0 - \xi \sin \tilde{k}_0) \cos \tilde{k}_0}{\tilde{k}_0 \tilde{N}} - \\ &- \frac{F \tilde{k}_0 B \sin 2\tilde{k}_0}{2\tilde{N}} + \xi A \left( 1 + \frac{\sin 2\tilde{k}_0}{2\tilde{k}_0} \right) - 0,5 \tilde{k}_0^2 A^2 \left( 1 - \frac{\sin 2\tilde{k}_0}{2\tilde{k}_0} \right) + \frac{2\tilde{N}}{3\tilde{\delta}^2 \tilde{k}_0^2} - \frac{2A \sin \tilde{k}_0}{\tilde{k}_0}; \\ r_{33} &= \frac{\lambda \tilde{k}_0^2 B^2 \cos^2 \tilde{k}_0}{2\tilde{N}^2} + \frac{H \tilde{k}_0 B \cos^2 \tilde{k}_0}{\tilde{N}} - \frac{2\tilde{k}_0 B \cos \tilde{k}_0}{\lambda \tilde{N}}; \\ F &= \frac{\lambda \tilde{k}_0 A - \xi}{\tilde{k}_0 - \lambda} - \frac{\lambda \tilde{k}_0 A + \xi}{\tilde{k}_0 + \lambda}; \quad H = \frac{\lambda \tilde{k}_0 A - \xi}{\tilde{k}_0 - \lambda} + \frac{\lambda \tilde{k}_0 A + \xi}{\tilde{k}_0 + \lambda}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Квадратне рівняння (2.17) має дійсні розв'язки при невід'ємних значеннях його дискримінанта:

$$\begin{aligned} D &= (r_{21}^2 - 4r_{11}r_{31}) \sin^4 \lambda + (r_{23}^2 + 2r_{21}r_{22} - 4r_{13}r_{33} - 4r_{11}r_{32} - 4r_{12}r_{31}) \sin^2 \lambda \cos^2 \lambda + \\ &+ (r_{22}^2 - 4r_{12}r_{32}) \cos^4 \lambda + 2(r_{21}r_{23} - 2r_{11}r_{33} - 2r_{31}r_{13}) \sin^3 \lambda \cos \lambda + \\ &+ 2(r_{22}r_{23} - 2r_{12}r_{33} - 2r_{32}r_{13}) \sin \lambda \cos^3 \lambda = \tilde{D} \cos^2 \lambda \geq 0; \\ \tilde{D} &= (r_{23}^2 + 2r_{21}r_{22} - 4r_{13}r_{33} - 4r_{11}r_{32} - 4r_{12}r_{31}) \sin^2 \lambda + (r_{22}^2 - 4r_{12}r_{32}) \cos^2 \lambda + \\ &+ 2(r_{22}r_{23} - 2r_{12}r_{33} - 2r_{32}r_{13}) \sin \lambda \cos \lambda \geq 0, \end{aligned} \quad (2.19)$$

де враховано, що  $r_{21}^2 - 4r_{11}r_{31} = 0$  і  $r_{21}r_{23} - 2r_{11}r_{33} - 2r_{31}r_{13} = 0$ .



Таким чином, точний розв'язок нелінійної крайової задачі (2.4) – (2.7) отримано в параметричній формі з величиною  $\lambda$  в якості параметра.

Залежності  $\tilde{w}(\tilde{q})$ ,  $\tilde{\vartheta}(\tilde{q})$ ,  $\tilde{Q}(\tilde{q})$ ,  $\tilde{M}(\tilde{q})$ ,  $\tilde{\sigma}(\tilde{q})$  при фіксованому значенні координати  $\eta$  отримуються в результаті виконання наступних кроків. Спочатку за допомогою рівнянь (2.17) – (2.19) чисельно знаходимо залежність  $\tilde{q}(\lambda)$ . Далі з виразів для  $\tilde{w}$ ,  $\tilde{\vartheta}$ ,  $\tilde{Q}$ ,  $\tilde{M}$ ,  $\tilde{\sigma}$  (2.13), (2.15) і (2.16), перебираючи  $\lambda$  і враховуючи зв'язок  $\tilde{q}(\lambda)$ , одержуємо залежності  $\tilde{w}(\tilde{q})$ ,  $\tilde{\vartheta}(\tilde{q})$ ,  $\tilde{Q}(\tilde{q})$ ,  $\tilde{M}(\tilde{q})$ ,  $\tilde{\sigma}(\tilde{q})$ .

Зазначимо, що за невеликих значень параметра  $\lambda$  коефіцієнти рівняння (2.17) є малими величинами, у вирази яких входять великі доданки різних порядків, що може призвести до значних похибок при обчисленні навантаження. Тому, в цьому випадку, необхідно або оптимізувати операції додавання і віднімання, або виконувати розрахунки з великою кількістю значущих цифр.

### §3. Характерні (граничні) значення параметра кривизни.

Залежність  $\tilde{D}(\lambda)$  є дуже складною, тому аналітично дослідити умову  $\tilde{D} \geq 0$  існування дійсних розв'язків рівняння (2.17) неможливо. Чисельний аналіз виразу  $\tilde{D}$  свідчить про те, що при фіксованому значенні параметра  $\tilde{k}_0$  для кожного значення параметра ширини  $\tilde{\delta}$  або узагальненого параметра кривизни  $\tilde{k} = \tilde{\delta}\tilde{k}_0/2 = \delta^2 k_0/h$  існує певне значення параметра внутрішнього зусилля  $\lambda_{\max}$ , для якого  $\tilde{D}(\lambda) > 0$  при  $\lambda < \lambda_{\max}$ ,  $\tilde{D}(\lambda_{\max}) = 0$  і  $\tilde{D}(\lambda) < 0$  при  $\lambda > \lambda_{\max}$ .

Значення узагальненого параметра кривизни  $\tilde{k}$ , для якого  $\lambda_{\max} = \pi/2$ , позначається  $\tilde{k}_{\pi/2} = \tilde{k}|_{\lambda=\pi/2}$  і знаходиться з умови

$$\tilde{D}|_{\lambda=\pi/2} = 0. \quad (3.1)$$

Рівняння для визначення  $\tilde{k}_{\pi/2}$  має вигляд

$$\left( r_{23}^2 + 2r_{21}r_{22} - 4r_{13}r_{33} - 4r_{12}r_{31} - 4r_{11}r_{32}^* - \frac{2r_{11}\tilde{N}}{3\tilde{k}^2} \right) \Big|_{\lambda=\pi/2} = 0. \quad (3.2)$$

Звідки знаходимо

$$\tilde{k}_{\pi/2} = \sqrt{\frac{2r_{11}\tilde{N}}{3(r_{23}^2 + 2r_{21}r_{22} - 4r_{13}r_{33} - 4r_{12}r_{31} - 4r_{11}r_{32}^*)}} \Big|_{\lambda=\pi/2}. \quad (3.3)$$

Аналогічно з умови  $\tilde{D}|_{\lambda=\pi} = 0$  визначаємо величину узагальненого параметра кривизни  $\tilde{k}_{\pi}$ , для якої  $\lambda_{\max} = \pi$ :

$$\tilde{k}_{\pi} = \sqrt{\frac{2r_{12}\tilde{N}}{3(r_{22}^2 - 4r_{12}r_{32}^*)}} \Big|_{\lambda=\pi}. \quad (3.4)$$

У формулах (3.2) – (3.4) позначено:

$$\begin{aligned} r_{32}^* = & -\frac{\tilde{k}_0^2 \lambda^2 B^2 \cos^2 \tilde{k}_0}{2\tilde{N}^2} + \frac{2(\tilde{k}_0 B + \tilde{N}A)(\tilde{k}_0 - \xi \sin \tilde{k}_0) \cos \tilde{k}_0}{\tilde{k}_0 \tilde{N}} - \frac{F \tilde{k}_0 B \sin 2\tilde{k}_0}{2\tilde{N}} + \\ & + \xi A \left( 1 + \frac{\sin 2\tilde{k}_0}{2\tilde{k}_0} \right) - 0,5 \tilde{k}_0^2 A^2 \left( 1 - \frac{\sin 2\tilde{k}_0}{2\tilde{k}_0} \right) - \frac{2A \sin \tilde{k}_0}{\tilde{k}_0}; \quad \tilde{N} = -\lambda^2 / (1 + \beta \lambda^2). \end{aligned}$$

Отримані граничні значення узагальненого параметра кривизни при фіксованій величині параметра  $\tilde{k}_0$  розбивають область зміни  $\tilde{k}$  на три проміжки.

1)  $0 < \tilde{k} < \tilde{k}_{\pi/2}$  ( $0 < \lambda_{\max} < \pi/2$ ). В цьому проміжку залежність прогину у вершині оболонки від навантаження  $\tilde{w}|_{\eta=0}(\tilde{q})$  є монотонно зростаючою і існує тільки одна стійка симетрична форма рівноваги оболонки (втрати стійкості немає).

2)  $\tilde{k}_{\pi/2} \leq \tilde{k} < \tilde{k}_{\pi}$  ( $\pi/2 \leq \lambda_{\max} < \pi$ ). В цьому діапазоні залежність  $\tilde{w}|_{\eta=0}(\tilde{q})$  має точки максимуму і мінімуму (верхнє і нижнє критичні значення навантаження) та існують дві різні форми стійкої рівноваги оболонки, перехід між якими відбувається за рахунок хлопка.

3)  $\tilde{k} \geq \tilde{k}_{\pi}$  ( $\lambda_{\max} \geq \pi$ ). В цьому випадку можлива втрата стійкості оболонки за рахунок біфуркації з переходом до несиметричної форми рівноваги.

#### §4. Критичні значення навантаження.

Верхнє і нижнє критичні значення навантаження, які відповідають точкам максимуму та мінімуму залежності прогину у вершині панелі від навантаження  $\tilde{w}|_{\eta=0}(\tilde{q})$  і при досягненні яких відбувається втрата стійкості за рахунок хлопка, знаходяться з використанням рівняння (2.17) і умови

$$\frac{d\tilde{q}}{d\lambda} = 0. \quad (4.1)$$

В результаті диференціювання рівняння (2.17) з врахуванням умови (4.1) і співвідношень  $P = 1 + \tilde{q}/\tilde{N}$  та  $\tilde{N} = -\lambda^2/(1 + \beta\lambda^2)$  отримаємо ще одну залежність між параметрами навантаження і тангенціального зусилля:

$$\left(\frac{dR_1}{d\lambda} - \frac{4R_1\tilde{N}}{\lambda^3}\right)P^2 + \left[\frac{dR_2}{d\lambda} + \frac{2\tilde{N}(2R_1 - R_2)}{\lambda^3}\right]P + \frac{dR_3}{d\lambda} + \frac{2R_2\tilde{N}}{\lambda^3} = 0, \quad (4.2)$$

де

$$\frac{dR_i}{d\lambda} = \left(\frac{dr_{i1}}{d\lambda} - r_{i3}\right)\sin^2 \lambda + \left(\frac{dr_{i2}}{d\lambda} + r_{i3}\right)\frac{dr_{i2}}{d\lambda}\cos^2 \lambda + \left(\frac{dr_{i3}}{2d\lambda} + r_{i1} - r_{i2}\right)\sin 2\lambda \quad (i = 1, 2, 3).$$

Розв'язуючи систему рівнянь (2.17) і (4.2), визначаємо значення  $\tilde{q}$  і  $\lambda$ , для яких виконується умова (4.1), тобто, знаходимо критичні точки, в яких відбувається втрата стійкості за рахунок хлопка.

#### §5. Часткові та граничні випадки.

1. Якщо  $\tilde{N} = 0$  ( $\lambda = 0$ ), то система (2.5) набуває вигляду

$$\frac{d^2\tilde{w}_0}{d\eta^2} + \frac{d\tilde{g}_0}{d\eta} = \beta\tilde{q}_0; \quad \beta\frac{d^2\tilde{g}_0}{d\eta^2} - \tilde{g}_0 - \frac{d\tilde{w}_0}{d\eta} = 0. \quad (5.1)$$

Розв'язуючи систему (5.1) і задовольняючи граничні умови (2.6) та (2.7), приходимо до таких виразів для узагальнених переміщень, внутрішніх силових факторів і навантаження при  $\tilde{N} = 0$ :

$$\tilde{w}_0 = -\frac{\tilde{q}_0[\eta^4 - 6(1 + 2\beta)\eta^2 + 5 + 12\beta]}{24}; \quad \tilde{g}_0 = \frac{\tilde{q}_0(\eta^3 - 3\eta)}{6};$$

$$\tilde{M}_0 = \frac{\tilde{q}_0(\eta^2 - 1)}{2}; \quad \tilde{Q}_0 = \tilde{q}_0\eta \quad (i = 1, 2); \quad (5.2)$$

$$\tilde{q}_{0,1} = 0; \quad \tilde{q}_{0,2} = \frac{42(2+5\beta)\tilde{k}_0^5 + 210\xi\{\tilde{k}_0[\tilde{k}_0^2 + 3(1+\beta\tilde{k}_0^2)]\cos\tilde{k}_0 - 3(1+\beta\tilde{k}_0^2)\sin\tilde{k}_0\}}{(17+84\beta+105\beta^2)\tilde{k}_0^5}.$$

2. Якщо  $\cos\lambda = 0$ , тобто  $\lambda = \lambda_n = \pi/2 + \pi(n-1)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , то з перших чотирьох граничних умов (2.6) визначаємо три сталі інтегрування

$$C_1 = -0,5P_n - A_n \cos\tilde{k}_0; \quad C_2 = C_4 = 0 \quad (5.3)$$

і величину навантаження

$$P_n = P|_{\lambda=\lambda_n} = \tilde{k}_0 B_n \cos\tilde{k}_0; \quad \tilde{q}_n = \tilde{q}|_{\lambda=\lambda_n} = \tilde{N}_n(\tilde{k}_0 B_n \cos\tilde{k}_0 - 1), \quad (5.4)$$

при якій оболонка знаходиться в стані рівноваги.

У формулах (5.3), (5.4) позначено:  $A_n = A|_{\lambda=\lambda_n}$ ;  $B_n = B|_{\lambda=\lambda_n}$ ;  $\tilde{N}_n = \tilde{N}|_{\lambda=\lambda_n}$ .

Використовуючи граничну умову (2.7), отримаємо рівняння для знаходження сталої інтегрування  $C_3$ :

$$S_1 C_3^2 + S_2 C_3 + S_3 = 0, \quad (5.5)$$

де

$$\begin{aligned} S_1 &= -\frac{\lambda_n^2}{2}; \quad S_2 = (-1)^n \left( \frac{2}{\lambda_n} - \frac{2P_n}{\lambda_n} - H_n \cos\tilde{k}_0 \right); \\ S_3 &= -\frac{P_n^2}{3} + P_n \left\{ \frac{2}{3} + 2A_n \left( \frac{\sin\tilde{k}_0}{\tilde{k}_0} - \cos\tilde{k}_0 \right) \right\} + \\ &+ \frac{\xi}{\tilde{k}_0} \left[ \left( 1 - \frac{2}{\tilde{k}_0^2} \right) \sin\tilde{k}_0 + \frac{2\cos\tilde{k}_0}{\tilde{k}_0} - \sin\tilde{k}_0 \right] - \frac{2A_n[\cos\tilde{k}_0(\xi \sin\tilde{k}_0 - \tilde{k}_0) + \sin\tilde{k}_0]}{\tilde{k}_0} + \\ &+ \xi A_n \left( 1 + \frac{\sin 2\tilde{k}_0}{2\tilde{k}_0} \right) - \frac{1}{2} \tilde{k}_0^2 A_n \left( 1 - \frac{\sin 2\tilde{k}_0}{2\tilde{k}_0} \right) + \frac{\tilde{N}_n}{6\tilde{k}_0^2}; \quad n = 1, 2, \dots, n_{\max}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Тут  $H_n = H|_{\lambda=\lambda_n}$ ;  $n_{\max}$  – найбільше із значень  $n$ , для яких рівняння (5.5) має дійсні розв'язки:

$$C_3 = \frac{-S_2 \pm \sqrt{D_n}}{2S_1}; \quad D_n = S_2^2 - 4S_1 S_3 \geq 0. \quad (5.7)$$

З (2.18), (2.19), (5.6), (5.7) випливає, що  $D_n = \tilde{N}_n^2 \tilde{D}_n|_{\lambda=\lambda_n} = \tilde{N}_n^2 \tilde{D}_n$ .

Підставивши вирази для сталих інтегрування (5.3) і (5.7) у формули (2.10), дістанемо розв'язок системи (2.5), який задовольняє граничним умовам (2.6), (2.7) при  $\cos\lambda = 0$ , тобто для значень параметра тангенціального зусилля  $\lambda_n = \pi/2 + \pi(n-1)$ :

$$\begin{aligned} \tilde{w}_n &= \frac{(-S_2 \mp \tilde{N}_n \sqrt{\tilde{D}_n}) \cos\lambda_n \eta}{2S_1} + 0,5P_n(\eta^2 - 1) + A_n(\cos\tilde{k}_0 \eta - \cos\tilde{k}_0); \\ \tilde{g}_n &= \frac{\lambda_n(1 + \tilde{N}_n \beta)(-S_2 \mp \tilde{N}_n \sqrt{\tilde{D}_n}) \sin\lambda_n \eta}{2S_1} - P_n \eta + B_n \sin\tilde{k}_0 \eta. \end{aligned} \quad (5.8)$$

3. Якщо  $\sin \lambda = 0$ , тобто  $\lambda = \pi, 2\pi, \dots$ , то з перших чотирьох граничних умов (2.6) отримаємо такі значення сталих інтегрування:

$$C_1 = \frac{(1-0,5\tilde{N})P - (\tilde{N}A + \tilde{k}_0B) \cos \tilde{k}_0}{\tilde{N}} \Big|_{\lambda=\lambda_m}; \quad C_2 = 0; \quad C_3 = \frac{-P + \tilde{k}_0B \cos \tilde{k}_0}{\tilde{N} \cos \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_m}; \quad (5.9)$$

$C_4$  – довільне дійсне число;  $\lambda_m = \pi m$  ( $m = 1, 2, \dots$ ).

При досягненні параметром внутрішнього зусилля значення  $\lambda = \pi$  симетрична відносно лінії  $\eta = 0$  форма рівноваги оболонки вперше стає нестійкою та з'являється несиметрична складова прогину  $C_4 \sin \lambda_m \eta$ .

Сталу інтегрування  $C_4$  в цьому випадку визначаємо з граничної умови (2.7):

$$\tilde{\Delta} \Big|_{\lambda=\lambda_m} = \left( R_1 P^2 + R_2 P + R_3 - \frac{1}{2} \lambda^2 C_4^2 \right) \Big|_{\lambda=\lambda_m} = 0. \quad (5.10)$$

Звідки

$$C_4^2 = \frac{2(R_1 P^2 + R_2 P + R_3)}{\lambda^2} \Big|_{\lambda=\lambda_m}. \quad (5.11)$$

Оскільки  $\lambda_m^2 > 0$ , то з (5.11) випливає, що при  $\lambda = \lambda_m$  квадратичний тричлен  $R_1 P^2 + R_2 P + R_3$  повинен бути невід'ємним. Використовуючи формули (2.18), легко показати, що за умови  $\sin \lambda = 0$  коефіцієнт  $R_1 < 0$ . Це означає, що при  $\lambda = \lambda_m$  вираз  $R_1 P^2 + R_2 P + R_3$  набуває невід'ємних значень за виконання таких умов:  $\tilde{D} \Big|_{\lambda=\lambda_m} \geq 0$  і  $\min\{P_1, P_2\} \leq P \leq \max\{P_1, P_2\}$ , де  $P_1, P_2$  – корені рівняння (2.17) при  $\lambda = \lambda_m$ . Причому, цей вираз дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли  $P = P_1$  або  $P = P_2$ .

Отже, розв'язок системи (2.5), отриманий за умови  $\sin \lambda = 0$ , після задоволення граничних умов (2.6) та (2.7) набуває наступного вигляду:

$$\tilde{w}_m = \tilde{w} \Big|_{\lambda=\lambda_m} + C_4 \sin \lambda_m \eta; \quad \tilde{g}_m = \tilde{g} \Big|_{\lambda=\lambda_m} - \lambda_m (1 + \tilde{N}_m \beta) C_4 \cos \lambda_m \eta, \quad (5.12)$$

де  $\tilde{w} \Big|_{\lambda=\lambda_m}$ ,  $\tilde{g} \Big|_{\lambda=\lambda_m}$  визначаються за формулами (2.13) при  $\lambda = \lambda_m$ .

Прогин у вершині панелі можна, як і раніше, обчислювати за допомогою співвідношення (2.14), вважаючи  $\lambda = \lambda_m$ :

$$\tilde{w}_m(0) = \left[ \frac{\tilde{k}_0 B \cos \tilde{k}_0}{\tilde{N} \cos \lambda} - \frac{(\tilde{N}A + \tilde{k}_0 B) \cos \tilde{k}_0}{\tilde{N}} + P \left( \frac{\cos \lambda - 1}{\tilde{N} \cos \lambda} - \frac{1}{2} \right) + A \right] \Big|_{\lambda=\lambda_m}. \quad (5.13)$$

З формули (5.13) випливає, що для несиметричної форми деформування (при  $\sin \lambda = 0$ ) залежність прогину у вершині овальної панелі від навантаження є лінійною.

4. У випадку, коли  $\lambda = \tilde{k}_0$ ,  $\sin \tilde{k}_0 \neq 0$  і  $\cos \tilde{k}_0 \neq 0$ , розв'язок системи (2.5), який задовольняє граничним умовам (2.6), має такий вигляд:

$$\tilde{w}_k = P_k \left( \frac{\cos \tilde{k}_0 - \cos \tilde{k}_0 \eta}{\tilde{N}_k \cos \tilde{k}_0} + \frac{\eta^2 - 1}{2} \right) - \frac{\xi (\cos \tilde{k}_0 - \cos \tilde{k}_0 \eta)}{\tilde{k}_0^2} - B_1 (\operatorname{tg} \tilde{k}_0 \cos \tilde{k}_0 \eta - \eta \sin \tilde{k}_0 \eta); \quad (5.14)$$

$$\tilde{g}_k = P_k \left( \frac{\sin \tilde{k}_0 \eta}{\tilde{k}_0 \cos \tilde{k}_0} - \eta \right) - \frac{\xi [(\tilde{k}_0 \operatorname{tg} \tilde{k}_0 - 1) \sin \tilde{k}_0 \eta + \tilde{k}_0 \eta \cos \tilde{k}_0 \eta]}{2\tilde{k}_0}.$$

$$\text{Тут } \tilde{N}_k = \tilde{N}|_{\lambda=\tilde{k}_0} = -\frac{\tilde{k}_0^2}{1+\beta\tilde{k}_0^2}; \quad B_1 = \frac{\xi(1+\beta\tilde{k}_0^2)}{2\tilde{k}_0}.$$

З умови відсутності зближення між поздовжніми краями (2.7) отримаємо рівняння для знаходження величини навантаження  $P_k$  при значенні параметра тангенціального зусилля  $\lambda = \tilde{k}_0$ :

$$L_1 P_k^2 + L_2 P_k + L_3 = 0, \quad (5.15)$$

де

$$\begin{aligned} L_1 &= -\frac{1}{3} - \frac{\tilde{k}_0^2 l_1}{2\tilde{N}_k^2 \cos^2 \tilde{k}_0} - \frac{2l_3}{\tilde{N}_k \cos \tilde{k}_0}; \\ L_2 &= -\frac{1}{3} - \frac{(2 - \tilde{N}_k)(\tilde{k}_0 - \xi \sin \tilde{k}_0)}{\tilde{k}_0 \tilde{N}_k} + \frac{2 \sin \tilde{k}_0 - \xi \tilde{k}_0 l_2}{\tilde{k}_0 \tilde{N}_k \cos \tilde{k}_0} - \frac{\tilde{k}_0 B_1 (2l_1 + l_4)}{2\tilde{N}_k \cos \tilde{k}_0} + \\ &\quad + \frac{\tilde{k}_0^2 l_1 l_5}{\tilde{N}_k \cos^2 \tilde{k}_0} + \frac{2l_3 l_5}{\cos \tilde{k}_0} + \frac{(\xi - 2\tilde{k}_0 B_1)(\tilde{k}_0 \sin \tilde{k}_0 - l_3) - \xi l_3}{\tilde{k}_0^2}; \\ L_3 &= \frac{\tilde{N}_k}{6\tilde{k}^2} + \frac{2(\tilde{k}_0 l_6 - l_5 \operatorname{tg} \tilde{k}_0 - l_3 B_1)}{\tilde{k}_0} + \frac{\xi [2\tilde{k}_0 l_2 l_5 - (4l_6 \sin \tilde{k}_0 - l_4 B_1) \cos \tilde{k}_0]}{2\tilde{k}_0 \cos \tilde{k}_0} - \\ &\quad - \frac{\tilde{k}_0^2 l_1 l_5^2}{2 \cos^2 \tilde{k}_0} - \frac{B_1^2 [3(2l_1 + l_4) + 2\tilde{k}_0^2 (3l_2 - 2)]}{12} + \frac{\tilde{k}_0 l_5 B_1 (2l_1 + l_4)}{2 \cos \tilde{k}_0}; \\ l_1 &= 1 - \frac{\sin 2\tilde{k}_0}{2\tilde{k}_0}; \quad l_2 = 1 + \frac{\sin 2\tilde{k}_0}{2\tilde{k}_0}; \quad l_3 = \frac{\sin \tilde{k}_0}{\tilde{k}_0} - \cos \tilde{k}_0; \quad l_4 = \frac{\sin 2\tilde{k}_0}{2\tilde{k}_0} - \cos 2\tilde{k}_0; \\ l_5 &= \frac{\xi \cos \tilde{k}_0}{\tilde{k}_0^2} - B_1 \sin \tilde{k}_0; \quad l_6 = \frac{\xi \cos \tilde{k}_0}{\tilde{k}_0^2}. \end{aligned}$$

Звідки

$$P_k = \frac{-L_2 \pm \sqrt{D_k}}{2L_1}; \quad D_k = L_2^2 - 4L_1 L_3 \geq 0. \quad (5.16)$$

5. Частина складових виразів для компонентів НДС панелі (2.13), (2.15) при  $\tilde{N} \rightarrow 0$  ( $\lambda \rightarrow 0$ ), при  $\cos \lambda \rightarrow 0$  ( $\lambda \rightarrow \lambda_n = \pi/2 + \pi(n-1)$ ) та при  $\lambda \rightarrow \tilde{k}_0$  є нескінченно великими величинами. Тому потрібно дослідити границі цих виразів при  $\lambda \rightarrow 0$ ,  $\lambda \rightarrow \lambda_n$ ,  $\lambda \rightarrow \tilde{k}_0$ .

Знайдемо вказані границі для прогину:

$$1) \lim_{\lambda \rightarrow 0} \tilde{w} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left\{ A(\cos \tilde{k}_0 \eta - 1) + \frac{\tilde{k}_0 B \cos \tilde{k}_0}{\tilde{N}} \left( \frac{\cos \lambda \eta}{\cos \lambda} - 1 \right) - \frac{1 - \eta^2}{2} + \frac{\cos \lambda - \cos \lambda \eta}{\tilde{N} \cos \lambda} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\tilde{q}[\cos \lambda - 0,5\tilde{N}(1-\eta^2)\cos \lambda - \cos \lambda \eta]}{\tilde{N}^2 \cos \lambda} \Big\} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left\{ \frac{\lambda^2 \xi(1+\beta \tilde{k}_0^2)(\cos \tilde{k}_0 \eta - 1)}{\tilde{k}_0^2(\lambda^2 - \tilde{k}_0^2)} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\xi(1+\beta \lambda^2)\cos \tilde{k}_0}{\lambda^2 - \tilde{k}_0^2} \left( \frac{\cos \lambda \eta}{\cos \lambda} - 1 \right) - \frac{1-\eta^2}{2} - \frac{1+\beta \lambda^2}{\cos \lambda} \cdot \frac{\cos \lambda - \cos \lambda \eta}{\lambda^2} + \right. \quad (5.17) \\
& \quad \left. + \frac{1+\beta \lambda^2}{\cos \lambda} \cdot \frac{\tilde{q}[(1+\beta \lambda^2)\cos \lambda + 0,5\lambda^2(1-\eta^2)\cos \lambda - (1+\beta \lambda^2)\cos \lambda \eta]}{\lambda^4} \right\} = -\frac{1-\eta^2}{2} - \\
& - \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\cos \lambda - \cos \lambda \eta}{\lambda^2} + \lim_{\lambda \rightarrow 0} \tilde{q} \cdot \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{(1+\beta \lambda^2)\cos \lambda + 0,5\lambda^2(1-\eta^2)\cos \lambda - (1+\beta \lambda^2)\cos \lambda \eta}{\lambda^4} = \\
& \quad = -\frac{1-\eta^2}{2} - \frac{\eta^2 - 1}{2} - \frac{\tilde{q}_0[\eta^4 - 6(1+2\beta)\eta^2 + 5 + 12\beta]}{24} = \tilde{w}_0; \\
& 2) \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n} \tilde{w} = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n} \left[ -\frac{(\tilde{N}A + \tilde{k}_0 B)\cos \tilde{k}_0}{\tilde{N}} + A \cos \tilde{k}_0 \eta + P \left( \frac{1}{\tilde{N}} + \frac{\eta^2 - 1}{2} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{(\tilde{k}_0 B \cos \tilde{k}_0 - P)\cos \lambda \eta}{\tilde{N} \cos \lambda} \right] = \left[ -\frac{(\tilde{N}A + \tilde{k}_0 B)\cos \tilde{k}_0}{\tilde{N}} + A \cos \tilde{k}_0 \eta + P \left( \frac{1}{\tilde{N}} + \frac{\eta^2 - 1}{2} \right) \right] \Big|_{\lambda=\lambda_n} + \\
& \quad + \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n} \frac{(2\tilde{k}_0 R_1 B \cos \tilde{k}_0 + R_2 \mp \sqrt{\tilde{D}} \cos \lambda)\cos \lambda \eta}{2R_1 \tilde{N} \cos \lambda} = \\
& \quad = \left[ -\frac{(\tilde{N}A + \tilde{k}_0 B)\cos \tilde{k}_0}{\tilde{N}} + A \cos \tilde{k}_0 \eta + \tilde{k}_0 B \cos \tilde{k}_0 \left( \frac{1}{\tilde{N}} + \frac{\eta^2 - 1}{2} \right) \right] \Big|_{\lambda=\lambda_n} + \quad (5.18) \\
& \quad + \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n} \frac{[2(r_{12} \cos \lambda + r_{13} \sin \lambda)\tilde{k}_0 B \cos \tilde{k}_0 + r_{22} \cos \lambda + r_{23} \sin \lambda \mp \sqrt{\tilde{D}}]\cos \lambda \eta}{2\tilde{N}(r_{11} \sin^2 \lambda + r_{12} \cos^2 \lambda + r_{13} \sin \lambda \cos \lambda)} = \\
& \quad = \left[ A(\cos \tilde{k}_0 \eta - \cos \tilde{k}_0) + 0,5(\eta^2 - 1)\tilde{k}_0 B \cos \tilde{k}_0 \right] \Big|_{\lambda=\lambda_n} + \\
& \quad + \left. \frac{[(2r_{13}\tilde{k}_0 B \cos \tilde{k}_0 + r_{23})\sin \lambda \mp \sqrt{\tilde{D}}]\cos \lambda \eta}{2\tilde{N}r_{11}} \right|_{\lambda=\lambda_n} = \\
& \quad = \left[ A(\cos \tilde{k}_0 \eta - \cos \tilde{k}_0) + 0,5(\eta^2 - 1)\tilde{k}_0 B \cos \tilde{k}_0 \right] \Big|_{\lambda=\lambda_n} - \\
& \quad - \left. \frac{[(2 - 2P - \lambda H \cos \tilde{k}_0)\sin \lambda \mp \lambda \tilde{N} \sqrt{\tilde{D}}]\cos \lambda \eta}{\lambda^3} \right|_{\lambda=\lambda_n} = \tilde{w}_n;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 3) \lim_{\lambda \rightarrow \tilde{k}_0} \tilde{w} = \lim_{\lambda \rightarrow \tilde{k}_0} \left[ P \left( \frac{1}{\tilde{N}} + \frac{\eta^2 - 1}{2} - \frac{\cos \lambda \eta}{\tilde{N} \cos \lambda} \right) - \frac{(\tilde{N}A + \tilde{k}_0 B) \cos \tilde{k}_0}{\tilde{N}} + \right. \\
& \left. + \frac{\tilde{k}_0 B \cos \tilde{k}_0 \cos \lambda \eta + \tilde{N}A \cos \lambda \cos \tilde{k}_0 \eta}{\tilde{N} \cos \lambda} \right] = P_k \left( \frac{1}{\tilde{N}_k} + \frac{\eta^2 - 1}{2} - \frac{\cos \tilde{k}_0 \eta}{\tilde{N}_k \cos \tilde{k}_0} \right) + \\
& + \lim_{\lambda \rightarrow \tilde{k}_0} \left\{ - \frac{B[\tilde{N}(1 + \beta \tilde{k}_0^2) + \tilde{k}_0^2] \cos \tilde{k}_0}{\tilde{k}_0 \tilde{N}} + \frac{B[\tilde{k}_0^2 \cos \tilde{k}_0 \cos \lambda \eta + \tilde{N}(1 + \beta \tilde{k}_0^2) \cos \lambda \cos \tilde{k}_0 \eta]}{\tilde{k}_0 \tilde{N} \cos \lambda} \right\} = \\
& = P_k \left( \frac{1}{\tilde{N}_k} + \frac{\eta^2 - 1}{2} - \frac{\cos \tilde{k}_0 \eta}{\tilde{N}_k \cos \tilde{k}_0} \right) + \lim_{\lambda \rightarrow \tilde{k}_0} \left\{ \frac{\xi \cos \tilde{k}_0}{\tilde{k}_0^2 (\lambda + \tilde{k}_0)} \cdot \frac{\tilde{k}_0^2 (1 + \beta \lambda^2) - \lambda^2 (1 + \beta \tilde{k}_0^2)}{\lambda - \tilde{k}_0} - \right. \\
& \left. - \frac{\xi}{\tilde{k}_0^2 (\lambda + \tilde{k}_0) \cos \lambda} \cdot \frac{\tilde{k}_0^2 (1 + \beta \lambda^2) \cos \tilde{k}_0 \cos \lambda \eta - \lambda^2 (1 + \beta \tilde{k}_0^2) \cos \lambda \cos \tilde{k}_0 \eta}{\lambda - \tilde{k}_0} \right\} = \quad (5.19) \\
& = P_k \left( \frac{1}{\tilde{N}_k} + \frac{\eta^2 - 1}{2} - \frac{\cos \tilde{k}_0 \eta}{\tilde{N}_k \cos \tilde{k}_0} \right) + \frac{\xi \cos \tilde{k}_0}{2 \tilde{k}_0^3} \cdot (-2 \tilde{k}_0) - \\
& - \frac{\xi}{2 \tilde{k}_0^3 \cos \tilde{k}_0} \cdot [\tilde{k}_0^2 (1 + \beta \tilde{k}_0^2) (\sin \tilde{k}_0 \cos \tilde{k}_0 \eta - \eta \cos \tilde{k}_0 \sin \tilde{k}_0 \eta) - 2 \tilde{k}_0 \cos \tilde{k}_0 \cos \tilde{k}_0 \eta] = \\
& = - \frac{\xi [\cos \tilde{k}_0 - \cos \tilde{k}_0 \eta + 0, 5 \tilde{k}_0 (1 + \beta \tilde{k}_0^2) (tg \tilde{k}_0 \cos \tilde{k}_0 \eta - \eta \sin \tilde{k}_0 \eta)]}{\tilde{k}_0^2} + \\
& + P_k \left( \frac{1}{\tilde{N}_k} + \frac{\eta^2 - 1}{2} - \frac{\cos \tilde{k}_0 \eta}{\tilde{N}_k \cos \tilde{k}_0} \right) = \tilde{w}_k.
\end{aligned}$$

При обчисленні границь (5.17) – (5.19) враховано, що:

$$\begin{aligned}
& 1) \lim_{\lambda \rightarrow 0} R_1 = \lim_{\lambda \rightarrow 0} R_2 = \lim_{\lambda \rightarrow 0} R_3 = 0; \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{R_1}{\tilde{N}} = 0; \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{R_1}{\tilde{N}^2} = -\frac{17}{315} - \frac{4\beta}{15} - \frac{\beta^2}{3}; \\
& \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{R_2}{\tilde{N}} = \frac{4}{15} + \frac{2\beta}{3} + \frac{2\xi}{\tilde{k}_0^5} \left\{ \left[ 1 + \left( \frac{1}{3} + \beta \right) \tilde{k}_0^2 \right] \tilde{k}_0 \cos \tilde{k}_0 - (1 + \beta \tilde{k}_0^2) \sin \tilde{k}_0 \right\}; \\
& \lim_{\lambda \rightarrow 0} \tilde{q} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{-\frac{2R_1}{\tilde{N}} - \frac{R_2}{\tilde{N}} \pm \sqrt{\left( \frac{R_2}{\tilde{N}} \right)^2 - \frac{4R_1 R_3}{\tilde{N}^2}}}{\frac{2R_1}{\tilde{N}^2}} = \frac{-\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{R_2}{\tilde{N}} \pm \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{R_2}{\tilde{N}}}{2 \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{R_1}{\tilde{N}^2}}; \\
& \lim_{\lambda \rightarrow 0} \tilde{q}_1 = \frac{-\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{R_2}{\tilde{N}} + \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{R_2}{\tilde{N}}}{2 \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{R_1}{\tilde{N}^2}} = 0 = \tilde{q}_{0,1}; \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \tilde{q}_2 = \frac{-\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{R_2}{\tilde{N}} - \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{R_2}{\tilde{N}}}{2 \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{R_1}{\tilde{N}^2}} = -\frac{\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{R_2}{\tilde{N}}}{\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{R_1}{\tilde{N}^2}} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{4}{15} + \frac{2\beta}{3} + \frac{2\xi}{\tilde{k}_0^5} \left\{ \left[ 1 + \left( \frac{1}{3} + \beta \right) \tilde{k}_0^2 \right] \tilde{k}_0 \cos \tilde{k}_0 - (1 + \beta \tilde{k}_0^2) \sin \tilde{k}_0 \right\}}{\frac{17}{315} + \frac{4\beta}{15} + \frac{\beta^2}{3}} = \tilde{q}_{0,2}; \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \tilde{q} = \tilde{q}_0;$$

$$2) \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n} P = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n} \frac{-R_2 \pm \sqrt{\tilde{D}} \cos \lambda}{2R_1} = \frac{-\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n} R_2}{2 \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n} R_1} = -\frac{r_{21}}{2r_{11}} \Big|_{\lambda=\lambda_n} = \tilde{k}_0 B_n \cos \tilde{k}_0 = P_n;$$

$$3) \lim_{\lambda \rightarrow k_0} R_i = L_i \cos^2 \tilde{k}_0 \quad (i=1,2,3); \quad \lim_{\lambda \rightarrow k_0} D = \lim_{\lambda \rightarrow k_0} (R_2^2 - 4R_1 R_3) = D_k \cos^4 \tilde{k}_0;$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow k_0} P = \lim_{\lambda \rightarrow k_0} \frac{-R_2 \pm \sqrt{\tilde{D}}}{2R_1} = \frac{-L_2 \pm \sqrt{D_k}}{2L_1} = P_k.$$

Границі решти компонентів НДС панелі при  $\lambda \rightarrow 0$ ,  $\lambda \rightarrow \lambda_n$ ,  $\lambda \rightarrow \tilde{k}_0$  обчислюються аналогічно.

Таким чином, вказані вище границі виразів для узагальнених переміщень і внутрішніх силових факторів існують та дорівнюють їх значенням, відповідно, у точках  $\lambda = 0$ ,  $\lambda = \lambda_n$ ,  $\lambda = \tilde{k}_0$ .

Зазначимо, що дані границі існують тоді, коли  $\tilde{D} \geq 0$  в деяких околах точок  $\lambda = 0$ ,  $\lambda = \lambda_n$ ,  $\lambda = \tilde{k}_0$ .

6. Якщо значення параметра  $\beta = 0$ , то за отриманими в роботі формулами визначаються величини узагальнених переміщень, внутрішніх силових факторів і критичного навантаження для циліндричної оболонки овального поперечного перерізу на основі гіпотез Кірхгофа – Лява.

7. За умови  $\xi = 0$  вище одержані співвідношення описують НДС і стійкість довгої циліндричної панелі кругового поперечного перерізу як для моделі Тимошенка, так і Кірхгофа – Лява [16].

### §6. Числові результати і їх аналіз.

На основі отриманого точного аналітичного розв'язку геометрично нелінійної задачі (1.10) – (1.12) дослідимо деформування і стійкість піддатливої на поперечний зсув довгої овальної незамкненої циліндричної оболонки з шарнірно закріпленими поздовжніми краями під дією рівномірного нормального тиску, прикладеного з боку опуклості оболонки.

З використанням співвідношень (2.14), (2.17), (3.3), (3.4), (4.2) для ряду значень параметрів  $\xi$ ,  $\beta$ ,  $\tilde{k}_0$ ,  $\tilde{k}$  отримані граничні значення узагальненого параметра кривизни  $\tilde{k}_{\pi/2}$  і  $\tilde{k}_\pi$ , верхнє і нижнє критичні значення навантаження  $\tilde{q}_u$  і  $\tilde{q}_l$ , при досягненні яких відбувається втрата стійкості за рахунок хлопка ( $\tilde{k}_{\pi/2} \leq \tilde{k} < \tilde{k}_\pi$ ), критичне навантаження  $\tilde{q}_u^*$ , при досягненні якого оболонка може втратити стійкість за рахунок біфуркації ( $\tilde{k} \geq \tilde{k}_\pi$ ), та навантаження  $\tilde{q}_l^*$ , яке є нижньою межею для  $\tilde{q}$  при несиметричній формі втрати стійкості. Також були обчислені відповідні цим критичним навантаженням значення прогинів у вершині панелі  $\tilde{w}_u, \tilde{w}_l, \tilde{w}_u^*, \tilde{w}_l^*$ . Результати розрахунків наведені в табл. 2 – 6 як для моделі Кірхгофа – Лява ( $\beta = 0$ ), так і для моделі Тимошенка ( $\beta \neq 0$ ).



Таблица 2

$\xi = -1$								
$\beta$	$\tilde{k}_0$	$\tilde{k}_{\pi/2}$	$\tilde{k}_{\pi}$	$\tilde{k}$	$\tilde{q}_u, \tilde{q}_u^*$	$\tilde{q}_l, \tilde{q}_l^*$	$\tilde{w}_u, \tilde{w}_u^*$	$\tilde{w}_l, \tilde{w}_l^*$
0	0,25	0,561	1,133	0,80	6,309	3,540	-0,607	-1,457
				1,05	8,896	1,010	-0,530	-1,545
				1,40	13,664*	-3,471*	-0,428*	-1,648*
	0,75	0,574	1,158	0,80	6,013	3,605	-0,602	-1,412
				1,05	8,415	1,246	-0,521	-1,502
				1,40	12,989*	-3,068*	-0,441*	-1,584*
0,08	0,25	0,513	0,865	0,65	4,693	3,534	-0,666	-1,401
				0,80	5,816	2,470	-0,577	-1,510
				1,40	9,591*	-0,794*	-0,219*	-1,844*
	0,75	0,525	0,878	0,65	4,497	3,535	-0,663	-1,362
				0,80	5,539	2,536	-0,569	-1,462
				1,40	9,320*	-0,798*	-0,215*	-1,797*

Таблица 3

$\xi = -0,5$								
$\beta$	$\tilde{k}_0$	$\tilde{k}_{\pi/2}$	$\tilde{k}_{\pi}$	$\tilde{k}$	$\tilde{q}_u, \tilde{q}_u^*$	$\tilde{q}_l, \tilde{q}_l^*$	$\tilde{w}_u, \tilde{w}_u^*$	$\tilde{w}_l, \tilde{w}_l^*$
0	0,25	0,747	1,509	0,95	4,232	3,157	-0,498	-1,050
				1,35	6,355	1,072	-0,403	-1,153
				1,90	10,447*	-2,824*	-0,306*	-1,253*
	0,75	0,759	1,531	0,95	4,112	3,163	-0,497	-1,026
				1,35	6,128	1,178	-0,399	-1,132
				1,90	10,151*	-2,634*	-0,311*	-1,222*
0,08	0,25	0,683	1,152	0,75	3,185	2,985	-0,589	-0,958
				0,95	3,845	2,342	-0,465	-1,092
				1,90	7,243*	-0,637*	-0,158*	-1,391*
	0,75	0,694	1,164	0,75	3,112	2,963	-0,593	-0,928
				0,95	3,730	2,358	-0,462	-1,068
				1,90	7,109*	-0,640*	-0,156*	-1,368*

Таблица 4

$\xi = 0$								
$\beta$	$\tilde{k}_0$	$\tilde{k}_{\pi/2}$	$\tilde{k}_{\pi}$	$\tilde{k}$	$\tilde{q}_u, \tilde{q}_u^*$	$\tilde{q}_l, \tilde{q}_l^*$	$\tilde{w}_u, \tilde{w}_u^*$	$\tilde{w}_l, \tilde{w}_l^*$
0	0,25; 0,75	1,119	2,260	1,6	3,174	1,766	-0,304	-0,731
				2,1	4,479	0,490	-0,265	-0,775
				2,6	6,172*	-1,058*	-0,263*	-0,778*
0,08	0,25; 0,75	1,022	1,726	1,3	2,359	1,767	-0,333	-0,704
				1,6	2,926	1,231	-0,289	-0,758
				2,6	4,681*	-0,266*	-0,130*	-0,904*

Таблица 5

$\xi = 0,5$								
$\beta$	$\tilde{k}_0$	$\tilde{k}_{\pi/2}$	$\tilde{k}_{\pi}$	$\tilde{k}$	$\tilde{q}_u, \tilde{q}_u^*$	$\tilde{q}_l, \tilde{q}_l^*$	$\tilde{w}_u, \tilde{w}_u^*$	$\tilde{w}_l, \tilde{w}_l^*$
0	0,25	2,225	4,496	3,0	1,502	0,981	-0,159	-0,361
				4,0	2,121	0,374	-0,136	-0,387
				5,0	2,896*	-0,321*	-0,147*	-0,376*
	0,75	2,127	4,317	3,0	1,644	0,955	-0,162	-0,383
				4,0	2,356	0,262	-0,140	-0,409
				5,0	3,286*	-0,575*	-0,137*	-0,412*
0,08	0,25	2,033	3,438	2,5	1,154	0,920	-0,173	-0,348
				3,0	1,375	0,708	-0,150	-0,375
				5,0	2,318*	-0,092*	-0,072*	-0,449*
	0,75	1,946	3,346	2,5	1,251	0,921	-0,175	-0,373
				3,0	1,505	0,682	-0,154	-0,399
				5,0	2,449*	-0,086*	-0,075*	-0,471*

Таблиця 6

$\xi = 1$								
$\beta$	$\tilde{k}_0$	$\tilde{k}_{\pi/2}$	$\tilde{k}_{\pi}$	$\tilde{k}$	$\tilde{q}_u, \tilde{q}_u^*$	$\tilde{q}_l, \tilde{q}_l^*$	$\tilde{w}_u, \tilde{w}_u^*$	$\tilde{w}_l, \tilde{w}_l^*$
0	2,0	3,488	10,075	6	1,194	0,451	-0,097	-0,256
				8	1,556	0,129	-0,089	-0,271
				12	1,853*	0,071*	-0,117*	-0,244*
				15	2,177*	-0,253*	-0,094*	-0,267*
	2,5	2,406	6,707	4	1,681	0,695	-0,142	-0,367
				6	2,444	0,022	-0,126	-0,397
				8	2,728*	0,041*	-0,165*	-0,357*
				12	3,428*	-0,659*	-0,115*	-0,406*
0,02	2,0	3,457	18,477	6	1,090	0,481	-0,099	-0,258
				12	1,592	0,064	-0,082	-0,287
				24	1,385*	0,556*	-0,145*	-0,219*
	2,5	2,382	10,313	6	2,054	0,288	-0,127	-0,401
				8	2,330	0,069	-0,119	-0,416
				15	2,239*	0,549*	-0,187*	-0,339*
0,03	2,0	3,445	-	6	1,042	0,494	-0,100	-0,259
				12	1,440	0,164	-0,083	-0,287
	2,5	2,371	-	6	1,900	0,381	-0,128	-0,403
				12	2,286	0,080	-0,113	-0,426
0,5	2,0	-	-	6	-	-	-	-
	2,5	-	-	6	-	-	-	-

Зірочкою зверху в таблицях позначені значення навантажень  $\tilde{q}_u^*, \tilde{q}_l^*$  і прогинів у вершині панелі  $\tilde{w}_u^*, \tilde{w}_l^*$ , які відповідають несиметричній формі втрати стійкості.

З аналізу даних, наведених в табл. 2 – 6, випливає, що зростання параметра  $\tilde{k}_0$  призводить до незначних змін граничних значень кривизни, критичних навантажень і відповідних їм прогинів у вершині панелі при  $\xi = -1; \pm 0,5$  та до суттєвих змін цих величин при  $\xi = 1$ . У випадку панелі кругового перерізу ( $\xi = 0$ ) зміна параметра  $\tilde{k}_0$  не впливає на значення граничних кривизн, критичних навантажень і НДС оболонки.

Врахування деформацій поперечного зсуву ( $\beta \neq 0$ ) призводить до зменшення значень всіх видів критичного навантаження в порівнянні з даними розрахунків для моделі Кірхгофа–Лява ( $\beta = 0$ ). Так, на основі даних табл. 2 для оболонки з параметрами  $\xi = -1; \tilde{k}_0 = 0,75; \beta = 0,08$  зменшення становить: 7,9% і 29,7% для верхніх і нижніх критичних навантажень хлопка при  $\tilde{k} = 0,8$  та 28,2% для навантаження біфуркації при  $\tilde{k} = 1,4$ .

При зростанні ексцентриситету поперечного перерізу ( $-1 \leq \xi \leq 1$ ) критичні значення навантаження і прогини у вершині спадають як для оболонки Тимошенка, так і для моделі Кірхгофа – Лява.

Деформування піддатливої на поперечний зсув ( $\beta \neq 0$ ) оболонки овального перерізу при значеннях ексцентриситету близьких до одиниці ( $0,99 \leq \xi \leq 1$ ) суттєво відрізняється від поведінки даної оболонки за інших значень параметра  $\xi$ . Так, згідно даних табл. 6 при  $\xi = 1$  і  $0 \leq \beta < 0,03$  в залежності від значення узагальненого параметра кривизни  $\tilde{k}$  деформування оболонки буде відбуватися за одним із трьох сценаріїв (§3): 1) без втрати стійкості; 2) з втратою стійкості за рахунок хлопка; 3) з втратою стійкості за рахунок біфуркації. При  $\xi = 1$  і  $0,03 \leq \beta < 0,5$  для даної оболонки існує тільки одне граничне значення узагальненого параметра кривизни  $\tilde{k}_{\pi/2}$  і тому реалізуються лише перші два сценарії деформування; при  $\xi = 1$  і  $\beta \geq 0,5$  граничних зна-

чень узагальненого параметра кривизни  $\tilde{k}_{\pi/2}$  та  $\tilde{k}_{\pi}$  не існує і оболонка буде деформуватися без втрати стійкості.

Далі в роботі для шести значень узагальненого параметра кривизни  $\tilde{k}$  на основі співвідношень (2.17) – (2.19) отримано залежність навантаження  $\tilde{q}$  від параметра внутрішнього зусилля  $\lambda$  панелі з такими геометричними і фізико-механічними параметрами:

$$\xi = 0,5; \tilde{k}_0 = 0,5; \beta = 0,08.$$

В цьому випадку граничні значення параметра  $\tilde{k}$  дорівнюють:

$$\tilde{k}_{\pi/2} = 1,999; \tilde{k}_{\pi} = 3,401.$$

Результати розрахунків наведено на рис. 3, де штрихова лінія відповідає граничному значенню узагальненого параметра кривизни  $\tilde{k}_{\pi/2} = 1,999$ , а суцільні – значенням  $\tilde{k} = 1,5; 2,5; 3,0; 4,0; 4,5$ .

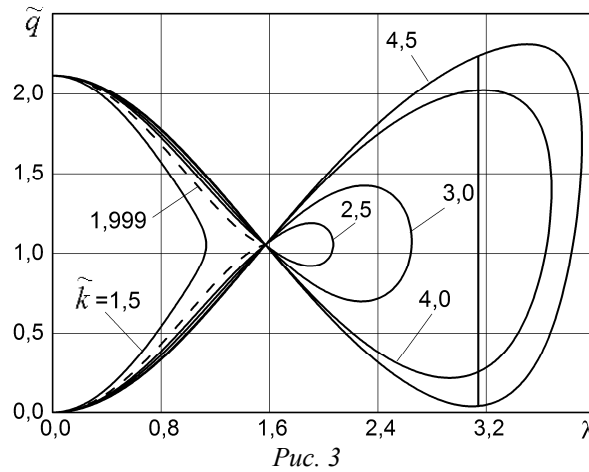


Рис. 3

Аналізуючи вираз для  $\tilde{D}$  (2.19) і наведені на рис. 3 результати, можна зробити висновок, що графіки функції  $\tilde{q}(\lambda)$  мають дві гілки, кожна з яких відповідає розв'язку квадратного рівняння (2.17), і для  $\tilde{k} \geq \tilde{k}_{\pi/2}$  перетинаються в точці  $\lambda = \pi/2$ . Величина навантаження в точці  $\lambda = \pi/2$  не залежить від геометричного параметра  $\tilde{k}$  і дорівнює  $\tilde{q}|_{\lambda=\pi/2} = \tilde{N}(\tilde{k}_0 B \cos \tilde{k}_0 - 1)|_{\lambda=\pi/2}$ . Вертикальна пряма  $\lambda = \pi$  на цьому рисунку відповідає випадку несиметричної форми втрати стійкості.

На рис. 4 зображено залежність прогину у вершині від навантаження для тих самих значень узагальненого параметра кривизни, що й на рис. 3.

З представлених на рис. 4 даних випливає, що для  $\tilde{k} < \tilde{k}_{\pi/2}$  залежність  $\tilde{w}|_{\eta=0}(\tilde{q})$  є монотонно зростаючою кривою, для  $\tilde{k}_{\pi/2} < \tilde{k} < \tilde{k}_{\pi}$  графік залежності має точки максимуму і мінімуму, для  $\tilde{k} = \tilde{k}_{\pi/2}$  залежність не має максимумів і мінімумів, а тільки точку перегину з дотичною до кривої  $\tilde{w}|_{\eta=0}(\tilde{q})$ , паралельною осі  $O\tilde{w}$ , для  $\tilde{k} \geq \tilde{k}_{\pi}$  графік складається з кривої, що описує симетричне деформування панелі, і похилої

прямої, яка відповідає несиметричному деформуванню при втраті стійкості за рахунок біфуркації та побудована з використанням рівняння (5.13).

Зі збільшенням узагальненого параметра кривизни  $\tilde{k}$  верхні критичні навантаження  $\tilde{q}_u$  і  $\tilde{q}_u^*$  зростають, а нижні  $\tilde{q}_l, \tilde{q}_l^*$  – спадають; зміна відповідних їм прогинів  $\tilde{w}_u, \tilde{w}_u^*, \tilde{w}_l, \tilde{w}_l^*$  у вершині панелі має протилежну тенденцію.

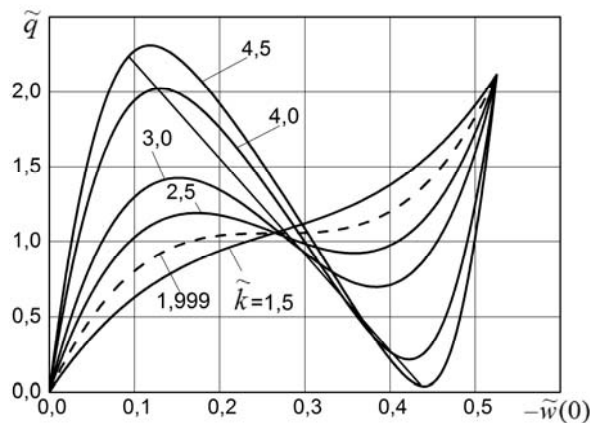


Рис. 4

З формул (5.2) і рис. 4 також випливає, що при фіксованих параметрах  $\xi, \beta, \tilde{k}_0$  значення найбільших прогинів у вершині панелі та відповідних їм навантажень, отриманих для різних величин узагальненого параметра кривизни  $\tilde{k}$ , є однаковими.

#### Висновки.

В роботі побудовано аналітичний розв'язок крайової задачі для нескінченно довгої трансверсально-ізотропної циліндричної оболонки овального поперечного перерізу з врахуванням геометричної нелінійності та деформацій поперечного зсуву. Отриманий розв'язок дозволяє обчислити точні значення внутрішніх силових факторів і узагальнених переміщень даної оболонки, оцінити її міцність, жорсткість і стійкість за дії статичного рівномірного поверхневого навантаження. Як частинні випадки з наведеного розв'язку випливають відповідні результати для моделі Кірхгофа–Лява та оболонки кругового перерізу. Досліджено НДС і стійкість оболонки з шарнірно закріпленими поздовжніми краями. Отримані результати також можуть бути еталонними для наближених і чисельних методів. В подальшому представляє інтерес дослідження нелінійного деформування і стійкості композитної циліндричної оболонки некругового (еліптичного, параболічного тощо) поперечного перерізу за сумісного врахування фізичної і геометричної нелінійностей [7, 10, 17].

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за рахунок бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

**РЕЗЮМЕ.** Дано постановку та отримано точний аналітичний розв'язок геометрично нелінійної задачі для піддатливої на поперечний зсув довгої циліндричної оболонки овального поперечного перерізу при дії рівномірного поверхневого навантаження. Основні рівняння записані згідно з геометрично нелінійною теорією пологих оболонок у квадратичному наближенні, гіпотезою Тимошенка і законом Гука. Для оболонки з шарнірно закріпленими поздовжніми краями одержано точні вирази для компонентів напружено-деформованого стану, визначено характерні (граничні) значення узагальненого параметра кривизни, побудовано систему рівнянь для знаходження критичного навантаження, розглянуто основні часткові та граничні випадки.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: довга циліндрична оболонка, овальний поперечний переріз, геометрична нелінійність, поперечний зсув, рівномірний тиск, точний розв'язок.

1. Марчук М.В., Тучапский Р.И., Пакош В.С. Исследование деформирования гибких длинных пологих некруговых цилиндрических панелей с защемленными продольными краями на основе уточненной теории // Механика машин, механизмов и материалов. – 2015. – № 4 (33). – С. 59 – 69.
2. Abrosov Yu.Yu., Maximyuk V.A., Chernyshenko I.S. Physically Nonlinear Deformation of a Long Orthotropic Cylindrical Shell with Elliptic Cross-Section // Int. Appl. Mech. – 2021. – 57, N 3. – P. 282 – 289.
3. Akgün G., Kurtaran H. Large displacement transient analysis of FGM super-elliptic shells using GDQ method // Thin-Walled Struct. — 2019. – 141. – P. 133 – 152.
4. Boiko D.V., Zheleznov L.P., Kabanov V.V. Studies of Nonlinear Deformation and Stability of Stiffened Oval Cylindrical Shells under Combined Loading by Bending Moment and Boundary Transverse Force // Mech. Solids. – 2012. – 47, N 3. – P. 298 – 303.
5. Boule A., Dubé M., Gosselin F.P. Parametric study of an elliptical fuselage made of a sandwich composite structure // Mech. Res. Comm. – 2015. – 69. – P. 129 – 135.
6. Chen Y.N., Kempner J. Buckling of oval cylindrical shell under compression and asymmetric bending // AIAA J. – 1976. – 14, N 9. – P. 1235 – 1240.
7. Chernyshenko I.S., Storozhuk E.A. Inelastic Deformation of Flexible Cylindrical Shells with Acurvilinear Hole // Int. Appl. Mech. – 2006. – 42, N 12. – P. 1414 – 1420.
8. Coman C.D. Oval cylindrical shells under asymmetric bending: a singular-perturbation solution // Z. Angew. Math. Phys. – 2018 – 69. – P. 1 – 16.
9. Grigorenko Ya.M., Kharitonova L.V. To Determination of Critical Values of the Load under Deformation of Flexible Non-Circular Cylindrical Shells with Rigidly Fixed Edges // Int. Appl. Mech. – 2005. – 41, N 11. – P. 1278 – 1287.
10. Guz A.N., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S. Elastoplastic State of Flexible Cylindrical Shells with Two Circular Holes // Int. Appl. Mech. – 2004. – 40, N 10. – P. 1152 – 1156.
11. Karpov V.V., Semenov A.A. Dimensionless parameters in the theory of reinforced shells // Vestn. Perm Nats. Issled. Politekh. Univ. Mekh. – 2015. – N 3. – P. 74 – 94.
12. Kerr A.D., Soifer M.T. The linearization of the prebuckling state and its effect on the determined instability loads // ASME J. Appl. Mech. – 1969. – 36, N 4. – P. 775 – 783.
13. Kiseleva T.A., Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P. Comparison of scalar and vector FEM forms in the case of an elliptic cylinder // J. Comput. Math. Math. Phys. – 2015. – 55, N 3. – P. 422 – 431.
14. Marguerre K. Stability of the Cylindrical Shell of Variable Curvature. – Washington: NASA, 1951. – 64 p.
15. Soldatos K.P. Mechanics of cylindrical shells with non-circular cross-section: a survey // Appl. Mech. Rev. – 1999. – 52, N 8. – P. 237 – 274.
16. Storozhuk E.A. Stress-Strain State and Stability of Flexible Circular Cylindrical Shell with Allowance for Deformations of Transverse Shear // Int. Appl. Mech. – 2021. – 57, N 5. – P. 554 – 567.
17. Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S. Stress Distribution in Physically and Geometrically Nonlinear Thin Cylindrical Shells with Two Holes // Int. Appl. Mech. – 2005. – 41, N 11. – P. 1280 – 1287.
18. Storozhuk E.A., Chernyshenko I. S., Yatsura A.V. Stress-Strain State Near a Hole in a Shear-Compliant Composite Cylindrical Shell with Elliptical Cross-Section // Int. Appl. Mech. – 2018. – 54, N 5. – P. 559 – 567.
19. Storozhuk E.A., Yatsura A.V. Analytical-Numerical Solution of Static Problems for Noncircular Cylindrical Shells of Variable Thickness // Int. Appl. Mech. – 2017. – 53, N 3. – P. 313 – 325.
20. Storozhuk E.A., Yatsura A.V. Exact Solutions of Boundary-Value Problems for Noncircular Cylindrical Shells // Int. Appl. Mech. – 2016. – 52, N 4. – P. 386 – 397.
21. Timoshenko S. Strength of materials. Part II: Advanced theory and problems. – 2nd ed. – New York: D. Van Nostrand Company, 1941. – 510 p.
22. Tornabene F., Fantuzzi N., Baccocchi M., Dimitri R. Free vibrations of composite oval and elliptic cylinders by the generalized differential quadrature method // Thin Walled Struct. – 2015. – 97. – P. 114 – 129.

Надійшла 24.12.2019

Затверджена до друку 19.07.2022