

М.О.Бабешко, О.З.Галішин, В.Г.Савченко

НАПРУЖЕНИЙ СТАН ТА МІЦНІСТЬ ТОНКОСТІННИХ КОНСТРУКЦІЙ ПРИ НЕІЗОТЕРМІЧНОМУ ПОВТОРНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

*Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: plast@inmech.kiev.ua*

Abstract. The technique for numerical research of temperature fields and thermoelastoplastic stress-strain state of thin shells with the strength evaluation under repeated loading is proposed. The modified constitutive equations of the theory of small curvature deformation processes with allowance for the perfect Baushinger effect are used. The numerical example is given.

Key words: thermoelastoplastic stress-strain state, thin shell, non-isothermal deformation process, strength, repeated loading.

Вступ.

Ряд елементів конструкцій часто моделюють тонкими ізотропними оболонками обертання. Під час роботи в умовах змінного неізотермічного навантаження в них можуть виникати непружні деформації, які істотно впливають на їх міцність. Міцність конструкції залежить від багатьох факторів, які супроводжують неізотермічні процеси навантаження, таких як залежність властивостей матеріалу від температури, виникнення і розвиток деформацій пластичності і повзучості, історія деформування, пошкодження матеріалу та ін. При визначенні оптимальних режимів експлуатації і прогнозуванні міцності конструкцій необхідно визначати їх пружнопластичний напружено-деформований стан (НДС) з урахуванням реальних умов роботи. Для цього необхідно створювати методи чисельного дослідження НДС тонких оболонок з використанням рівнянь стану, які адекватно описують процеси непружного деформування матеріалів, і різних підходів для оцінки міцності конструкцій. Існують розробки, направлені на створення математичних моделей для прогнозування руйнівного навантаження тонкостінних конструкцій при різних умовах їх експлуатації. В [20] описана методика визначення пружнопластичного НДС з оцінкою міцності оболонкової конструкції в процесі збільшення внутрішнього тиску. В [21] викладено методику прогнозування експлуатаційного та граничного стану відповідальних елементів ракетної техніки при термосиловому навантаженні, що повторюється з постійними параметрами, і спрогнозовано кількість повторів до руйнування. На відміну від [20, 21] в даній роботі розглянуто методику визначення осесиметричного НДС і руйнівного навантаження конструкційних елементів у вигляді тонких оболонок при повторному термосиловому навантаженні, коли параметри навантаження дещо змінилися порівняно з попереднім навантаженням.

1. Постановка задачі.

При розв'язуванні даної задачі будемо використовувати такі основні припущення: меридіан оболонки обертання складається з ланок різної геометрії; оболонка працює в умовах осесиметричного термосилового навантаження; геометричні розміри оболонки та навантаження є такими, що можна використовувати геометрично лінійну теорію оболонок з гіпотезами Кірхгофа – Лява; геометрія оболонки та навантаження є такими, що оболонка не втрачає стійкості;

процес термосилового навантаження відбувається у такий спосіб, що його можна розглядати як сукупність послідовних процесів рівноваги, а деформування елементів оболонки не впливає на її температуру, тобто процес навантаження розглядається в квазістатичній незв'язаній постановці;

деформування оболонки відбувається як в межах, так і за межами пружності при малих деформаціях;

деформації повзучості значно менші порівняно з пружними та пластичними складовими і ними можна знехтувати;

в зонах пластичного деформування може відбуватися розвантаження (часткове або повне) і можуть виникати вторинні пластичні деформації; припущено, що поведінка матеріалу може описуватися ідеальним ефектом Баушингера;

розвантаження в елементах оболонки може відбуватися не тільки при зменшенні зовнішнього навантаження, але і за рахунок зміни температури.

Нехай в початковий момент часу $t = 0$ оболонка перебуває в ненапруженому і недеформованому стані при температурі $T = T_0$, а згодом зазнає дії осесиметричних силових навантажень та нерівномірного нагрівання. Для визначення НДС оболонки при її деформуванні процес навантаження поділено на ряд етапів таким чином, щоб моменти поділу якнайкраще узгоджувалися з моментами переходу від активного процесу до можливого розвантаження і навпаки. На кожному етапі повинні бути відомі величини силових навантажень, умови закріплення і розподіл температури в її меридіональному перетині. Це означає, що розв'язання задачі термопластичності зводиться до послідовного розв'язування задачі теплопровідності по визначенню розподілу температури в оболонці і задачі визначення НДС при відомих температурі і силових навантаженнях. Розв'язок задачі термопластичності на кожному з етапів знаходимо в процесі послідовних наближень, по завершенню якого необхідно перевірити виконання вибраних критеріїв міцності. При виконанні одного з критеріїв вважатимемо навантаження на даному етапі руйнівними.

Оболонку розглядаємо у вибраній криволінійній системі координат s, θ, ζ , пов'язаній з недеформованою неперервною координатною поверхнею, де s ($s_a \leq s \leq s_b$) – меридіональна координата; s_a, s_b – координати, що відповідають торцям оболонки; ζ ($\zeta_0 \leq \zeta \leq \zeta_k$) – координата, яку відраховуємо по нормалі до координатної поверхні; ζ_0 і ζ_k відносяться до внутрішньої і зовнішньої поверхонь, відповідно; товщина оболонки $h = \zeta_k - \zeta_0$. За координатну вибираємо серединну або одну з поверхонь оболонки.

Таким чином, на будь-якому етапі навантаження спочатку в результаті розв'язання задачі теплопровідності знаходимо розподіл температури в меридіональному перетині $T(s, \zeta)$, а потім визначаємо компоненти тензорів напружень σ_{ij} і деформацій ε_{ij} .

2. Задача теплопровідності.

Температурне поле оболонки визначаємо в результаті розв'язання нестационарної задачі теплопровідності. У вибраній системі координат рівняння теплопровідності для тонких оболонок при осесиметричному нагріванні можна записати у вигляді [1, 5]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a(F^{(s)} + F^{(\zeta)}); \quad (1)$$

$$F^{(s)} = \frac{\partial^2 T}{\partial s^2} + \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial s} + \rho \right) \frac{\partial T}{\partial s}; \quad F^{(\zeta)} = \frac{\partial^2 T}{\partial \zeta^2} + \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \zeta} + k \right) \frac{\partial T}{\partial \zeta}, \quad (2)$$

де $a = a(T)$, $\lambda = \lambda(T)$ – коефіцієнти температуропровідності і теплопровідності;

$k = k_s + k_\theta = \frac{d\varphi}{ds} + \frac{\sin \varphi}{r}$ – сума головних кривизн координатної поверхні; $\rho = \frac{\cos \varphi}{r}$;

$r = r(s)$ – радіус координатної поверхні; $(\pi - \varphi)$ – кут між нормаллю до координатної поверхні і віссю обертання z .

Розв'язок рівняння (1) повинен задовольняти граничним умовам на поверхні оболонки [2, 17]. В роботі [1] розглядалися граничні умови конвективного теплообміну з навколишнім середовищем. На відміну від [1], в даному випадку розглянемо нагрівання оболонки при заданому тепловому потоці, конвективному і променевому нагріванні або їх комбінацію [12]. В загальному випадку граничні умови на поверхні оболонки з зовнішньою нормаллю \vec{n} мають вигляд

$$\frac{\partial T}{\partial n} = -\frac{1}{\lambda} \left[\alpha (T - \Theta) + C \tilde{\varepsilon} (T^4 - \Theta^4) - q \right] = -\frac{A}{\lambda}, \quad (3)$$

де α – коефіцієнт тепловіддачі; Θ – температура навколишнього середовища; $C = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт / (м}^2 \text{К}^4)$ – постійна Стефана-Больцмана; $\tilde{\varepsilon}$ – ступінь чорноти; q – заданий тепловий потік. В залежності від значень α , $\tilde{\varepsilon}$, q на поверхні оболонки можуть бути реалізовані ті або інші граничні умови. На поверхнях, які обмежують оболонку, умови (3) мають вигляд

$$\text{при } \zeta = \zeta_0: \quad \frac{\partial T}{\partial \zeta} = \frac{\alpha_1}{\lambda(\zeta_0)} \tilde{S}(\zeta_0) (T - \Theta_1) - \frac{d\zeta_0}{ds} \frac{\partial T}{\partial s}; \quad (4)$$

$$\text{при } \zeta = \zeta_k: \quad \frac{\partial T}{\partial \zeta} = -\frac{\alpha_2}{\lambda(\zeta_k)} \tilde{S}(\zeta_k) (T - \Theta_2) + \frac{d\zeta_k}{ds} \frac{\partial T}{\partial s}; \quad (5)$$

$$\text{при } s = s_a: \quad \frac{\partial T}{\partial s} = \frac{\alpha_3}{\lambda} (T - \Theta_3); \quad (6)$$

$$\text{при } s = s_b: \quad \frac{\partial T}{\partial s} = -\frac{\alpha_4}{\lambda} (T - \Theta_4), \quad (7)$$

де $\tilde{S}(\zeta) = \sqrt{1 + (d\zeta/ds)^2}$; $\Theta_i = \Theta_i(s, \zeta, t)$, $\alpha_i = \alpha_i(s, \zeta, t)$ ($i = 1, \dots, 4$) – температури середовища біля відповідних поверхонь та коефіцієнти тепловіддачі.

Розв'язок рівняння (1) знайдемо, використовуючи метод скінчених різниць і явної різницевої схеми за часом. Для цього на меридіональний перетин кожної ланки оболонки нанесемо рівномірну сітку вздовж меридіану і по товщині. Похідну за часом в (1) запишемо у вигляді

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T(t + \Delta t) - T(t)}{\Delta t},$$

тоді

$$\tilde{T} = T(t + \Delta t) = T(t) + a \Delta t \left[F^{(s)}(t) + F^{(\zeta)}(t) \right]. \quad (8)$$

Похідні за просторовими координатами в (2) апроксимуємо скінченими різницями другого порядку точності. Після такої дискретизації рівняння теплопровідності (1) отримаємо співвідношення для визначення значень температури у вузлових точках кінцево-різницевої розбивки меридіонального перетину оболонки. Таким же чином отримаємо вирази [1] для граничних умов, які використано в даній роботі.

Відомо, що для одержання стійких результатів за вищенаведеними формулами необхідно є умова невід'ємності коефіцієнта при $T_{i,j}$ в правій частині рівняння (8) після підстановки в нього різницевих апроксимацій похідних в умовах (4) – (7) для

граничних точок. Тут індекс i відповідає поділу вздовж меридіану, а j – по товщині оболонки. Ця умова призводить до наступного обмеження кроку за часом

$$\Delta t < \min(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4), \quad (9)$$

де τ_k ($k=1, \dots, 4$) – параметри, характерні для кожної з поверхонь оболонки. Для одержання кроку за часом, при якому процес обчислення буде стійким, для поверхонь оболонки вводяться законтурні точки. Зокрема, для одержання τ_1 на внутрішній поверхні з граничної умови (4) отримаємо вираз для температури $T_{i,0}$ в законтурній точці

$$T_{i,0} = T_{i,2} - 2\Delta\zeta_{i,1} \left\{ \frac{\tilde{S}(\zeta_0)}{\lambda_{i,1}} \left[\alpha_{i,1}(T_{i,1} - \theta_{i,1}) + C\tilde{\varepsilon}_{i,1}(T_{i,1} - \theta_{i,1})(T_{i,1} + \theta_{i,1})(T_{i,1}^2 + \theta_{i,1}^2) - q_{i,1} \right] + \frac{d\zeta_0}{ds} \frac{T_{i+1,1} - T_{i-1,1}}{2\Delta s_l} \right\}. \quad (10)$$

Якщо ввести параметр $\alpha'_{i,1}$ – приведений коефіцієнт теплообміну

$$\alpha'_{i,1} = \alpha_{i,1} + C\tilde{\varepsilon}_{i,1} \left(\bar{T}_{i,1} + \bar{\theta}_{i,1} \right) \left(\bar{T}_{i,1}^2 + \bar{\theta}_{i,1}^2 \right), \quad (11)$$

то після підстановки (10), (11) в (8) із виразу для коефіцієнта при $T_{i,j}$ одержуємо τ_1

$$\tau_1 = a_{i,1}^{-1} \left[\frac{2}{\Delta s^2} + \frac{2}{\Delta\zeta_{i,1}^2} + \frac{\alpha'_{i,1}}{\lambda_{i,1}} \tilde{S}_l(\zeta_0) \left(\frac{7\lambda_{i,1} - 4\lambda_{i,2} + \lambda_{i,3}}{2\Delta\zeta_{i,1}\lambda_{i,1}} - k_i \right) \right]^{-1}. \quad (12)$$

В (11) рисками вгорі позначено величини, які вважаються відомими з попереднього кроку за часом. Вираз (12) збігається з відповідним виразом роботи [1], якщо в останньому замінити $\alpha_{i,1}$ на $\alpha'_{i,1}$. Для одержання параметрів τ_k ($k=2, 3, 4$) скористаємось відповідними співвідношеннями [1], замінивши в них α_{ki} на α'_{ki} , визначивши останні аналогічно (11).

Таким чином, на кожному кроці за часом визначення температури в кожній точці прийнятого поділу оболонки зводиться до рекурентної процедури (8); крок за часом визначається з умови (9).

3. Визначення осесиметричного термопружнопластичного напружено-деформованого стану оболонки в процесі повторного навантаження та оцінка міцності.

Задачу визначення осесиметричного НДС оболонки в процесі повторного навантаження розв'язуємо в геометрично лінійній квазістатичній постановці після знаходження розв'язку задачі теплопровідності.

Деформування матеріалу описуватимемо співвідношеннями модифікованої теорії процесів деформування вздовж траєкторій малої кривизни [6, 11, 12], яка широко застосовується при розв'язуванні крайових задач термопластичності, зокрема [14–16, 19, 23], при оцінці руйнівного навантаження для оболонок, що моделюють елементи ракетної техніки [13, 20, 21]. При активному навантаженні ці рівняння ідентичні рівнянням теорії течії [18, 24], асоційованої з умовою пластичності Мізеса. Скористаємось варіантом співвідношень модифікованої теорії процесів малої кривизни, лінеаризованих методом додаткових напружень [10, 15, 22]. Тоді зв'язок компонентів тензорів напруження σ_{ij} і деформації ε_{ij} в загальному випадку ортогональної криволінійної системи координат має вигляд закону Гука з додатковими напруженнями

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + 3\lambda\varepsilon_0\delta_{ij} - \sigma_{ij}^{(D)}, \quad (13)$$

де

$$\sigma_{ij}^{(D)} = 2G(e_{ij}^{(P)}) + K\varepsilon_T\delta_{ij}; \quad (14)$$

$$\lambda = \frac{2G\nu}{1-2\nu}; \quad \varepsilon_T = \alpha_T(T-T_0); \quad K = \frac{E}{1-2\nu}; \quad E = 2G(1+\nu); \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}. \quad (15)$$

В (13) – (15) $e_{ij}^{(p)} = \varepsilon_{ij}^{(p)}$ – пластичні складові компонент деформації; E , G , ν і α_T – відповідно модуль пружності, модуль зсуву, коефіцієнт Пуассона і коефіцієнт лінійного теплового розширення матеріалу, залежні від температури T ; $\varepsilon_0 = \varepsilon_{ii}/3$ – перший інваріант тензора деформацій, пов'язаний з першим інваріантом тензора напружень $\sigma_0 = \sigma_{ii}/3$ лінійною залежністю

$$\sigma_0 = K(\varepsilon_0 - \varepsilon_T). \quad (16)$$

НДС осесиметрично навантаженої тонкої оболонки при відсутності кручення характеризується компонентами тензорів напружень σ_{ss} , $\sigma_{\theta\theta}$ та деформацій ε_{ss} , $\varepsilon_{\theta\theta}$, $\varepsilon_{\zeta\zeta}$. Тоді рівняння (13) мають вигляд

$$\sigma_{ss} = A_{11}\varepsilon_{ss} + A_{12}\varepsilon_{\theta\theta} - A_{1D}; \quad \sigma_{\theta\theta} = A_{12}\varepsilon_{ss} + A_{22}\varepsilon_{\theta\theta} - A_{2D}, \quad (17)$$

де

$$A_{11} = A_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}; \quad A_{12} = \nu A_{11};$$

$$A_{1D} = A_{11}(e_{ss}^{(p)} + \nu e_{\theta\theta}^{(p)}) + A_{11}(1+\nu)\varepsilon_T; \quad A_{2D} = A_{11}(e_{\theta\theta}^{(p)} + \nu e_{ss}^{(p)}) + A_{11}(1+\nu)\varepsilon_T. \quad (18)$$

Вирази (18) містять пластичні складові компонент деформації $e_{ss}^{(p)} = \varepsilon_{ss}^{(p)}$, $e_{\theta\theta}^{(p)} = \varepsilon_{\theta\theta}^{(p)}$, $\varepsilon_{\zeta\zeta}^{(p)} = -(\varepsilon_{ss}^{(p)} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(p)})$, які на довільному M -му етапі обчислюються як суми приростів Δ цих компонент

$$\varepsilon_{ss}^{(p)} = \sum_{m=1}^M \Delta_m \varepsilon_{ss}^{(p)}; \quad \Delta_m \varepsilon_{ss}^{(p)} = \langle c_{ss} \rangle_m \Delta_m \Gamma_p; \quad \langle c_{ss} \rangle_m = \left\langle \frac{2\sigma_{ss} - \sigma_{\theta\theta}}{S} \right\rangle_m (s, \theta), \quad (19)$$

де кутові дужки означають середні на етапі значення величин; S – інтенсивність дотичних напружень,

$$S = \left[\frac{1}{3} (\sigma_{ss}^2 - \sigma_{ss}\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\theta\theta}^2) \right]^{1/2}, \quad (20)$$

Γ_p – інтенсивність накопиченої пластичної деформації зсуву,

$$\Gamma_p = \sum_{m=1}^{M-1} \Delta_m \Gamma_p + \Delta_M \Gamma_p. \quad (21)$$

Для визначення $\Delta_M \Gamma_p$ скористаємось припущенням, що між інтенсивністю дотичних напружень S (20), інтенсивністю деформацій зсуву

$$\Gamma = \sqrt{\left[(\varepsilon_{ss} - \varepsilon_{\theta\theta})^2 + (\varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon_{\zeta\zeta})^2 + (\varepsilon_{\zeta\zeta} - \varepsilon_{ss})^2 \right] / 6}$$

і температурою T існує залежність, яка при початковому навантаженні має вигляд

$$S = \Phi(\Gamma, T). \quad (22)$$

Для конкретизації залежності (22) використовуємо діаграми $\sigma \sim \varepsilon$ (σ – напруження, ε – поздовжня деформація зразка), одержані в результаті експериментів на розтяг циліндричних зразків при різних фіксованих значеннях температури; для проміжних значень температури ці діаграми одержуємо шляхом інтерполяції. Перехід від σ і ε до других інваріантів девіаторів напружень і деформацій здійснюється за формулами [16, 11, 22]

$$S = \frac{\sigma}{\sqrt{3}}; \quad \Gamma = \frac{S}{2G} + \Gamma_p; \quad \Gamma_p = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\varepsilon - \frac{\sigma}{E} \right). \quad (23)$$

Припускаємо, що при пружному розвантаженні $\Gamma = \frac{S}{2G} + \Gamma_p^{(1)}$, де $\Gamma_p^{(1)}$ – інтенсивність накопиченої пластичної деформації зсуву (21) в момент розвантаження.

У випадку, коли розвантаження супроводжується вторинними пластичними деформаціями, використовуємо залежність

$$S = \Phi_1(\Gamma, \Gamma_p^{(1)}, T). \quad (24)$$

Залежність (24) визначаємо, використовуючи (22), $\Gamma_p^{(1)}$ та відповідне значення $S^{(1)}$ в момент розвантаження. При повторному навантаженні використовуємо залежність

$$S = \Phi_2(\Gamma, \Gamma_p^{(2)}, T). \quad (25)$$

Для побудови залежності (25) використовуємо (22), величину інтенсивності накопиченої вторинної пластичної деформації $\Gamma_p^{(2)}$ і відповідне значення $S^{(2)}$ в момент розвантаження в області вторинних пластичних деформацій. При побудові залежностей (24) і (25) вважаємо, що у відповідності з ефектом Баушингера

$$S^{(1)} + S_T^{(2)} = S^{(2)} + S_T^{(3)} = 2S_T^{(1)}, \quad (26)$$

де $S_T^{(1)}, S_T^{(2)}, S_T^{(3)}$ – значення інтенсивності дотичних напружень, що відповідають границям текучості матеріалів в залежностях (22), (24), (25). Один із способів побудови залежностей (24), (25) описано в [10]. Реалізація деяких підходів до врахування вторинних пластичних деформацій описана в [14, 19].

Таким чином, при визначенні приросту $\Delta_M \Gamma_p$ за поточний етап навантаження в кожному наближенні використовуємо одну з залежностей (22), (24), (25).

Співвідношення (17) використовуємо для знаходження зв'язку між зусиллями N_s, N_θ , моментами M_s, M_θ та деформаціями і змінами кривизни $\varepsilon_s, \varepsilon_\theta, \kappa_s, \kappa_\theta$ координатної поверхні оболонки. Цей зв'язок одержуємо у вигляді

$$\begin{aligned} N_s &= C_{11}^{(0)} \varepsilon_s + C_{12}^{(0)} \varepsilon_\theta + C_{11}^{(1)} \kappa_s + C_{12}^{(1)} \kappa_\theta - N_{1D}^{(0)}; \\ N_\theta &= C_{12}^{(0)} \varepsilon_s + C_{22}^{(0)} \varepsilon_\theta + C_{12}^{(1)} \kappa_s + C_{22}^{(1)} \kappa_\theta - N_{2D}^{(0)}; \\ M_s &= C_{11}^{(1)} \varepsilon_s + C_{12}^{(1)} \varepsilon_\theta + C_{11}^{(2)} \kappa_s + C_{12}^{(2)} \kappa_\theta - N_{1D}^{(1)}; \\ M_\theta &= C_{12}^{(1)} \varepsilon_s + C_{22}^{(1)} \varepsilon_\theta + C_{12}^{(2)} \kappa_s + C_{22}^{(2)} \kappa_\theta - N_{2D}^{(1)}, \end{aligned} \quad (27)$$

де

$$C_{mn}^{(j)} = \int_{\zeta_0}^{\zeta_k} A_{mn} \zeta^j d\zeta; \quad N_{mD}^{(j)} = \int_{\zeta_0}^{\zeta_k} A_{mD} \zeta^j d\zeta \quad (m, n = 1, 2; j = 0, 1, 2). \quad (28)$$

Одержані співвідношення (27), (28) разом з рівняннями рівноваги і геометричними співвідношеннями [7] утворюють систему 12-и рівнянь, яку зводимо до системи 6-и звичайних диференціальних рівнянь відносно невідомих функцій $N_s, Q_s, M_s, u, w, \vartheta_s$, де Q_s – перерізує зусилля; u, w – переміщення точок координатної поверхні в меридіональному та нормальному напрямках; ϑ_s – кут повороту нормалі координатної поверхні. Ця система має вигляд

$$\frac{d\vec{Y}}{ds} = P(s)\vec{Y} + \vec{f}(s) \quad (29)$$

при граничних умовах

$$B_1 \vec{Y}(s_a) = \vec{b}_1; \quad B_2 \vec{Y}(s_b) = \vec{b}_2, \quad (30)$$

де \vec{Y} – вектор-стовпчик розв'язувальних функцій, $\vec{Y} = \{N_s, Q_s, M_s, u, w, \vartheta_s\}$; $P(s)$ – матриця системи; $\vec{f}(s)$ – вектор-стовпчик додаткових членів; B_1, B_2 – задані матриці, \vec{b}_1, \vec{b}_2 – задані вектори-стовпчики граничних умов. Ненульові елементи матриці $P(s)$ обчислюються за формулами

$$\begin{aligned} p_{11} &= -\frac{\cos \varphi}{r}(1 + \lambda_1); \quad p_{13} = -\frac{\cos \varphi}{r} \lambda_2; \quad p_{14} = \frac{\cos^2 \varphi}{r^2} (\lambda_1 C_{12}^{(0)} + C_{22}^{(0)} + \lambda_2 C_{12}^{(1)}); \\ p_{15} &= p_{14} \operatorname{tg} \varphi; \quad p_{16} = -\frac{\cos^2 \varphi}{r^2} (\lambda_3 C_{12}^{(0)} + \lambda_4 C_{12}^{(1)} - C_{22}^{(1)}); \quad p_{21} = \frac{1}{R_s} - \frac{\lambda_1 \sin \varphi}{r}; \\ p_{22} &= -\frac{\cos \varphi}{r}; \quad p_{23} = -\frac{\sin \varphi}{r} \lambda_2; \quad p_{24} = p_{15}; \quad p_{25} = p_{15} \operatorname{tg} \varphi; \quad p_{26} = p_{16} \operatorname{tg} \varphi; \\ p_{31} &= -p_{22} \lambda_3; \quad p_{32} = -1; \quad p_{33} = -\frac{\cos \varphi}{r} (1 - \lambda_4); \quad p_{34} = \frac{\cos^2 \varphi}{r^2} (\lambda_1 C_{12}^{(1)} + C_{22}^{(1)} + \lambda_2 C_{12}^{(2)}); \\ p_{35} &= p_{34} \operatorname{tg} \varphi; \quad p_{36} = -\frac{\cos^2 \varphi}{r^2} (\lambda_3 C_{12}^{(1)} - C_{22}^{(2)} + \lambda_4 C_{12}^{(2)}); \quad p_{41} = \frac{C_{11}^{(2)}}{\delta_1}; \quad p_{43} = -\frac{C_{11}^{(1)}}{\delta_1}; \quad (31) \\ p_{44} &= -\lambda_1 p_{22}; \quad p_{45} = -p_{21}; \quad p_{46} = -p_{31}; \quad p_{54} = -p_{12}; \quad p_{56} = -1; \quad p_{61} = p_{43}; \\ p_{63} &= \frac{C_{11}^{(0)}}{\delta_1}; \quad p_{64} = -p_{13}; \quad p_{65} = -p_{23}; \quad p_{66} = \lambda_4 p_{22}, \end{aligned}$$

де

$$\lambda_1 = (C_{11}^{(1)} C_{12}^{(1)} - C_{12}^{(0)} C_{11}^{(2)}) / \delta_1; \quad \lambda_2 = (C_{11}^{(1)} C_{12}^{(0)} - C_{12}^{(1)} C_{11}^{(0)}) / \delta_1;$$

$$\lambda_3 = (C_{11}^{(2)} C_{12}^{(1)} - C_{12}^{(2)} C_{11}^{(1)}) / \delta_1; \quad \lambda_4 = (C_{11}^{(0)} C_{12}^{(2)} - C_{12}^{(1)} C_{11}^{(2)}) / \delta_1, \quad \delta_1 = C_{11}^{(0)} C_{11}^{(2)} - (C_{11}^{(1)})^2.$$

Ненульові компоненти вектора $\vec{f}(s)$ визначаються виразами

$$\begin{aligned} f_1 &= -\frac{\cos \varphi}{r} [\lambda_1 N_{1D}^{(0)} + \lambda_2 N_{1D}^{(1)} + N_{2D}^{(0)}] - q_s; \quad f_2 = -\frac{\sin \varphi}{r} [\lambda_1 N_{1D}^{(0)} + \lambda_2 N_{1D}^{(1)} + N_{2D}^{(0)}] - q_\zeta; \\ f_3 &= \frac{\cos \varphi}{r} [\lambda_3 N_{1D}^{(0)} + \lambda_4 N_{1D}^{(1)} - N_{2D}^{(0)}]; \quad f_4 = \frac{C_{11}^{(2)} N_{1D}^{(0)} - C_{11}^{(1)} N_{1D}^{(1)}}{\delta_1}; \\ f_6 &= -\frac{C_{11}^{(1)} N_{1D}^{(0)} - C_{11}^{(0)} N_{1D}^{(1)}}{\delta_1}, \end{aligned} \quad (32)$$

де q_s, q_ζ – компоненти розподіленого силового навантаження.

Із формул (28), (31) витікає, що елементи матриці $P(s)$ обчислюються через параметри геометрії оболонки та пружні характеристики матеріалу, які залежать від температури на поточному етапі, а компоненти (32) вектора $\vec{f}(s)$ – ще й через величини зовнішніх навантажень і пластичних складових деформацій; останні необхідно обчислювати в процесі послідовних наближень.

Наведені співвідношення дають можливість визначити НДС оболонки на довільному етапі навантаження. Для проведення обчислень необхідно задати дані, що характеризують геометрію оболонки, умови закріплення і навантаження, а також властивості матеріалу (діаграми $\sigma \sim \varepsilon$, коефіцієнти Пуассона і лінійного теплового розширення в залежності від температури). Ділення на етапи зручно виконувати так, щоб на першому етапі оболонка деформувалася в межах пружності.

В першому наближенні на першому етапі навантаження вважаємо, що в (18) компоненти пластичних складових деформацій рівні нулю, тобто розв'язуємо задачу термопружності. На наступних етапах в першому наближенні використовуємо значення пластичних складових (19), одержані на попередньому етапі, а в наступних наближеннях – значення, одержані в попередньому наближенні. Ці значення необхідні для обчислення компонент вектора-стовпчика $\vec{f}(s)$ (32), а елементи матриці $P(s)$ (31) знаходимо, використовуючи задані властивості матеріалу в залежності від температури; вони не змінюються в процесі послідовних наближень на даному етапі. Обчисливши елементи матриці $P(s)$ і компоненти вектора-стовпчика $\vec{f}(s)$, розв'язуємо крайову задачу (29), (30) шляхом зведення до задач Коші, для розв'язання яких використовуємо метод Рунге – Кутта з дискретною ортогоналізацією [4].

Одержавши в результаті розв'язання крайової задачі розв'язувальні функції, знаходимо компоненти деформацій, а потім – компоненти напружень (17).

Далі обчислюємо

$$\Delta_M \Gamma_p = \sum_{i=1}^{L-1} \Delta_{Mi} \Gamma_p + \Delta_{ML} \Gamma_p; \quad \Delta_{ML} \Gamma_p = \frac{S - S^{(d)}}{2G}, \quad (33)$$

де L – номер поточного наближення на M -му етапі. Значення S в (33) обчислюємо за формулою (20), а $S^{(d)}$ визначаємо по одній із залежностей (22), (24) і (25). Залежність (22) використовуємо при початковому активному навантаженні. Критерієм активного навантаження вважаємо умову $\Delta \Gamma_p > 0$; в протилежному випадку в елементі оболонки відбувається розвантаження, тобто покладаємо $\Delta \Gamma_p = 0$ і продовжуємо розрахунки. У випадку розвантаження при умові $\Gamma < \Gamma_p$ використовуємо залежність (24). Аналогічно, при розвантаженні в області вторинних пластичних деформацій і $\Gamma > \Gamma_p$

переходимо до використання залежності (25). Процес послідовних наближень на етапі завершається при виконанні умови

$$|\Delta_{ML}\Gamma_p| \leq \delta, \quad (34)$$

де δ – мале наперед задане число, що характеризує точність розв’язку задачі пластичності.

Одержавши розв’язок задачі термопластичності на довільному етапі навантаження, використаємо компоненти НДС оболонки для перевірки вибраних критеріїв міцності. Рівень зовнішніх навантажень, при якому виконується умова

$$\sigma_e = \sigma_n, \quad (35)$$

де σ_e – еквівалентне напруження, а σ_n – межа міцності матеріалу при температурі даного елемента оболонки, будемо вважати руйнівним. За еквівалентне напруження приймемо відомі вирази, а саме:

1) максимальне головне напруження [8]

$$\sigma_e = \sigma_{\max}, \quad (36)$$

де $\sigma_{\max} = \max(\sigma_{ss}, \sigma_{\theta\theta})$;

2) критерій Сдобирева [9]

$$\sigma_e = (\sigma_i + \sigma_{\max}) / 2, \quad (37)$$

де σ_i – інтенсивність напружень, $\sigma_i = S\sqrt{3}$, S визначається за формулою (20);

3) критерій Мізеса

$$\sigma_e = \sigma_i. \quad (38)$$

У випадку циклічного навантаження оболонки можна по зміні пластичного гістерезису чи по розмаху деформації прогнозувати кількість циклів до руйнування, користуючись критерієм малоциклової втоми типу Кофіна – Менсона, як в роботі [20].

4. Числові результати.

Визначимо термопружнопластичний НДС оболонки, яка моделює конструкційний елемент під дією високого тиску в процесі повторного навантаження. Меридіан координатної поверхні показано на рис. 1.

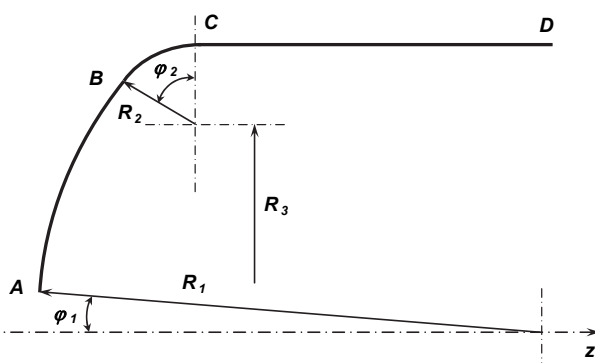


Рис. 1

Оболонка складена зі сферичної AB , торіодальної BC і циліндричної CD ланок, які плавно поєднані між собою. Геометричні розміри такі: $R_1 = 0,32$ м, $R_2 = 0,08$ м, $R_3 = 0,12$ м, $\varphi_1 = \pi / 50$, $\varphi_2 = \pi / 3$; довжина меридіану циліндричної ланки $L = 0,15$ м; товщина оболонки $h = 0,01$ м.

Оболонка виготовлена зі сплаву ЭИ 437, теплофізичні характеристики якого прийнято лінійно залежними від температури: при $T = 293 \text{ K}$ коефіцієнти теплопровідності і температуропровідності, відповідно, рівні $\lambda = 40 \text{ Вт/(м}\cdot\text{K)}$, $a = 1,115 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; при $T = 1573 \text{ K}$ – $\lambda = 29 \text{ Вт/(м}\cdot\text{K)}$, $a = 8,082 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$.

Діаграми $\sigma \sim \varepsilon$ в залежності від температури наведено в [11]. Коефіцієнти Пуассона і лінійного теплового розширення вважались не залежними від температури і рівними, відповідно, $\nu = 0,3$ і $\alpha_T = 12 \cdot 10^{-6} \text{ 1/град}$. Межі міцності при $T = 293 \text{ K}$ і $T = 573 \text{ K}$ дорівнюють, відповідно, $\sigma_n = 980 \text{ МПа}$ і $\sigma_n = 926 \text{ МПа}$ [3].

Оболонка, яка спочатку знаходилася в ненапруженому і недеформованому стані при температурі $T_0 = 293 \text{ K}$, нагрівається шляхом конвективного теплообміну з навколишнім середовищем. Торці оболонки s_a і s_b теплоізовані ($\alpha'_3 = \alpha'_4 = 0$). Температура навколишнього середовища біля зовнішньої поверхні $\Theta_2 = 293 \text{ K}$; коефіцієнт тепловіддачі цієї поверхні $\alpha'_2 = 200 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{K)}$. Температура навколишнього середовища біля внутрішньої поверхні змінна в часі $\Theta_1 = \Theta_1(t)$ (рис. 2).

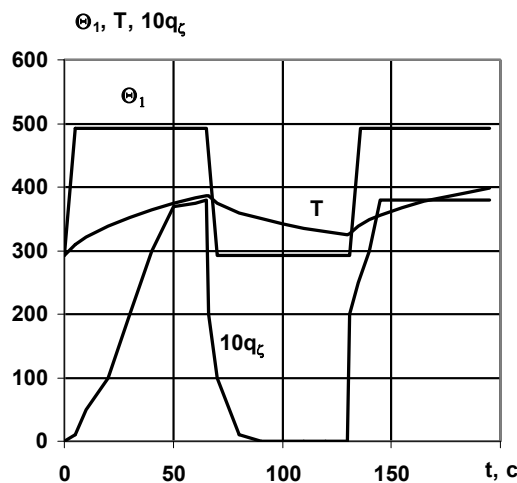


Рис. 2

Розподіл температури в меридіональному перетині оболонки одержано шляхом розв'язання задачі теплопровідності по наведеній вище методиці. В результаті розв'язання цієї задачі при заданих умовах теплообміну встановлено, що температура мало змінюється вздовж меридіану і за товщиною. Максимальна різниця температур на поверхнях оболонки не перевищує 12 градусів. На рис. 2 наведено графік зміни в часі температури T в околі найбільш нагрітого елемента оболонки ($s = 0$, $\zeta = -h/2$).

Одночасно з нагріванням на оболонку діє змінний в часі внутрішній тиск q_ζ , МПа. Графік зміни в часі тиску також наведено на рис. 2.

Процес навантаження і нагрівання оболонки поділено на 25 етапів. Значення q_ζ на деяких етапах наведено в таблиці; там же наведено відповідні моменти часу.

Таблиця

№ етапу	1	3	7	8	9	11	12	16	17	20	25
$t, \text{ с}$	5	20	60	65	99	80	90	130	131	145	195
$q_\zeta, \text{ МПа}$	1	10	37,5	38	20	1	0	0	20	38	38

Граничні умови на контурах оболонки мають вигляд

при $s = s_a = 0 \quad u = 0, w = 0, M_s = 0;$

при $s = s_b \quad N_s = N_s^* = \frac{q_\zeta(R_2 + R_3)}{2}, Q_s = 0, \mathcal{G}_s = 0.$

З рис. 2 і таблиці видно, що силове навантаження зростає до максимального значення на 8-му етапі, потім знижується до нуля на етапах 12 – 16, а починаючи з 17-го етапу знову зростає до максимального значення.

Максимальні значення температури досягаються на 8-му і 25-му етапах, а мінімальні – на етапах 11 – 16.

При розв'язуванні задачі на кожній з трьох ланок оболонки взято по 200 кроків інтегрування; за товщиною оболонки НДС було визначено в 21 точці.

В результаті розв'язування задачі про НДС оболонки встановлено, що на етапах 1 – 8 в значній частині оболонки виникають зони пластичного деформування. Далі в процесі нагрівання і навантаження в деяких елементах оболонки активне навантаження змінювалось на розвантаження, після чого знову відбувалося активне навантаження зі зростанням пластичних деформацій. Деякі результати розрахунку на 25 етапі, тобто в кінці процесу навантаження, наведено на рис. 3 – 10.

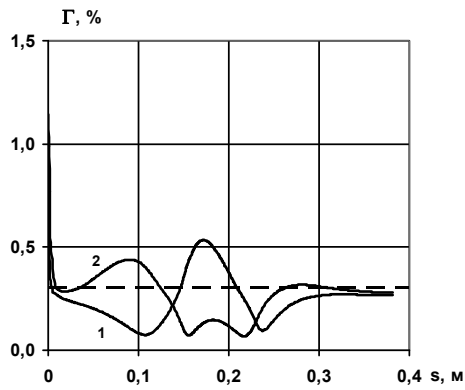


Рис. 3

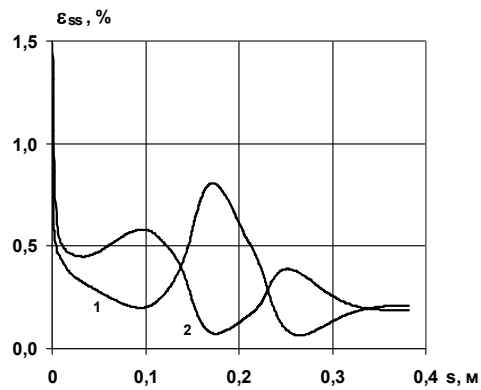


Рис. 4

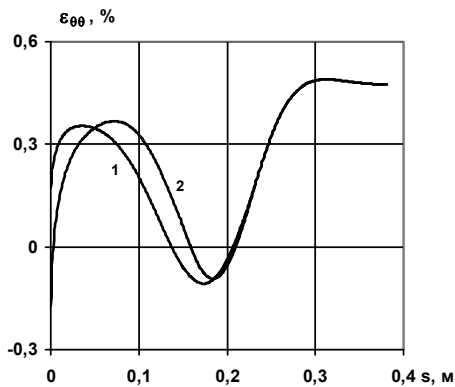


Рис. 5

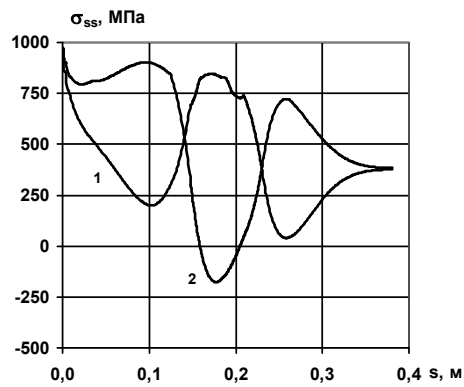


Рис. 6

Про наявність зон пластичного деформування в кінці процесу свідчить рис. 3, на якому наведено зміну інтенсивності деформацій зсуву вздовж меридіану; цифри 1 і 2 на цьому і наступних рисунках відповідають внутрішній і зовнішній поверхням оболонки; горизонтальна пряма позначає початкову межу текучості матеріалу. На рис. 4, 5 показано зміну вздовж меридіану меридіональних і колових деформацій, а на рис. 6, 7 – відповідних напружень.

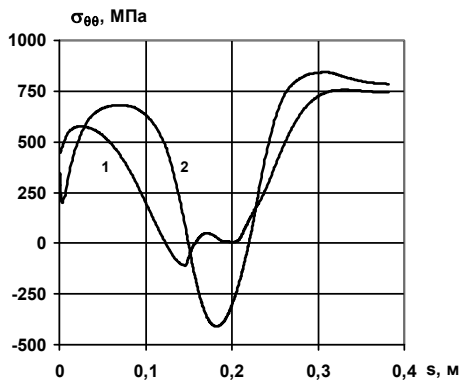


Рис. 7

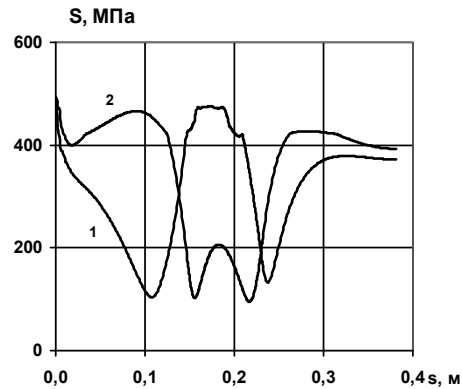


Рис. 8

З останніх рисунків видно, що меридіональні напруження досягають максимальних значень поблизу контура $s = s_a = 0$, а колові – в циліндричній частині оболонки. На рис. 8 зображено зміну вздовж меридіану інтенсивності деформацій зсуву.

На кожному етапі навантаження після завершення процесу послідовних наближень перевірялося виконання критеріїв (24) – (26). На 25-у етапі досягається виконання критерію (24), коли максимальне меридіональне напруження в перетині $s = s_a = 0$ набуває значення $\sigma_n = 975$ МПа при значеннях $q_\zeta = 38$ МПа і $T = 399$ К.

Під час процесу навантаження і нагрівання в деяких елементах оболонки, які деформувалися за межами пружності, відбувалася зміна напрямку процесу: активне навантаження змінювалося розвантаженням, після чого відбувалося повторне навантаження зі зростанням інтенсивності накопиченої пластичної деформації.

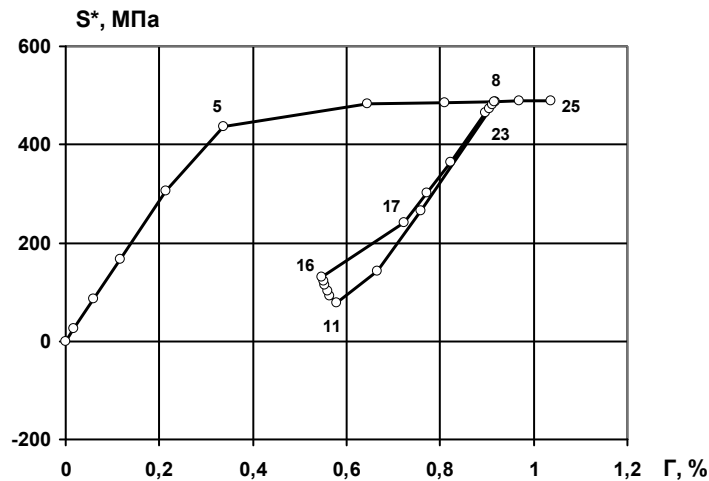


Рис. 9

На рис. 9 для точки з координатами $s = 0$, $\zeta = -h/2$ наведено криві $S^* \sim \Gamma$, де $S^* = \text{sign}(\Gamma - \Gamma_p^{(1)}) \cdot S$ або $S^* = \text{sign}(\Gamma - \Gamma_p^{(2)}) \cdot S$; маркери відповідають кінцям етапів, а числа – номерам етапів. Рис. 9 свідчить, що при повторному навантаженні відбулося збільшення пластичних деформацій порівняно з відповідними значеннями початкового навантаження. На рис. 10 наведено аналогічні результати для елемента оболонки в околі точки $s = 0,0737$ м, $\zeta = h/2$. Тут до кінця процесу збереглася пластична деформація, яка виникла при початковому навантаженні.

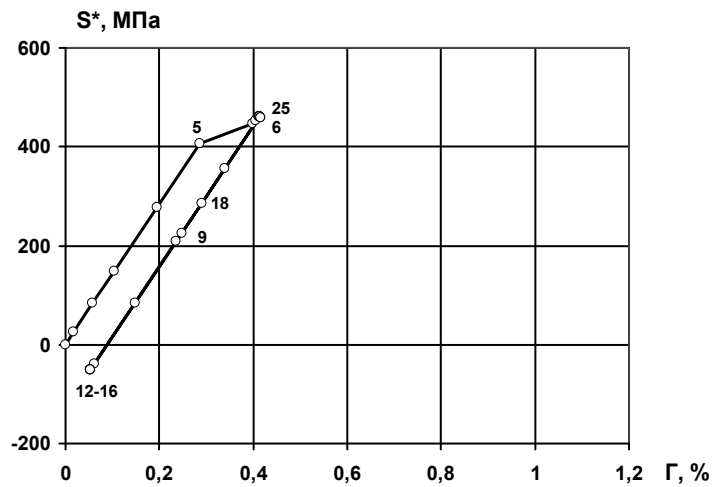


Рис. 10

Виконані розрахунки показали, що при значенні тиску $q_c = 38$ МПа при початковому навантаженні НДС оболонки ще не досяг рівня руйнування; цього рівня було досягнуто при повторному навантаженні, коли в найбільш навантажених елементах оболонки температура піднялася до $T = 399$ К.

Висновки.

Розроблено метод визначення напружено-деформованого стану і руйнівного навантаження тонкостінних елементів конструкцій у вигляді складених оболонок обертання при повторному неізотермічному навантаженні в осесиметричній постановці. В ньому послідовно використано методи розв'язування задачі теплопровідності для визначення температури і задачі по визначенню пружнопластичного напружено-деформованого стану тонких оболонок в процесі термосилового навантаження з урахуванням історії навантаження. Для визначення руйнівного навантаження використано відомі з літератури критерії міцності. При розв'язуванні задачі теплопровідності використано метод скінченних різниць. Метод розв'язування задачі термопластичності оснований на використанні модифікованих рівнянь теорії процесів деформування ізотропних матеріалів вздовж траєкторій малої кривизни. Враховано можливість часткового чи повного розвантаження в зонах пластичного деформування і появи вторинних пластичних деформацій. Для цього було вдосконалено розроблені авторами раніше ефективні алгоритми і відповідні програмні засоби конкретизації зв'язку між другими інваріантами девіаторів напружень і деформацій в процесах змінного термосилового навантаження з урахуванням ідеального ефекту Баушингера. Наведено числовий приклад по розв'язуванню задач теплопровідності та термопластичності в процесі змінного повторного термосилового навантаження конкретної оболонки і визначено її руйнівне навантаження.

РЕЗЮМЕ. Запропоновано методичку чисельного дослідження температурних полів та термопружнопластичного напружено-деформованого стану тонких оболонок з оцінкою міцності при повторному навантаженні. Використано модифіковані визначальні рівняння теорії процесів деформування вздовж траєкторій малої кривизни з урахуванням ідеального ефекту Баушингера. Наведено числовий приклад.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: термопружнопластичний напружено-деформований стан, тонка оболонка, процес неізотермічного деформування, міцність, повторне навантаження.

1. Галишин А.З., Стеблянюк П.А., Шевченко Ю.Н. Определение нестационарных температурных полей в тонких слоистых оболочках вращения при осесимметричном нагреве // Матем. проблемы техн. механики. Зб. наукових праць Дніпродзержинського держ. техн. ун-ту: (техн. науки). Тематичний випуск. – 2012. – Вип. 2 (19). – С. 3 – 12.
2. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – Москва: Высш. школа. 1967. – 600 с.
3. Малинин Н.Н. Прочность турбомашин. – Москва: Машгиз, 1962. – 292 с.
4. Методы расчета оболочек: в 5-ти томах. Т. 4. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Теория оболочек переменной жесткости. – Киев: Наук. думка, 1981. – 544 с.
5. Методы расчета оболочек: в 5-ти томах. Т. 3. Шевченко Ю.Н., Прохоренко И.В. Теория упруго-пластических оболочек при неизотермических процессах нагружения. – Киев: Наук. думка, 1981. – 296 с.
6. Механика связанных полей в элементах конструкций: в 5-ти томах. Т.2. Шевченко Ю.Н., Савченко В.Г. Термовязкопластичность. – Киев: Наук. думка, 1987. – 264 с.
7. Новожиллов В.В. Теория тонких оболочек. – Ленинград: Судпромгиз, 1962. – 432 с.
8. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. – Киев: Наук. думка, 1988. – 736 с.
9. Сообырев В.П. Длительная прочность сплава ЭИ 437Б при сложном напряженном состоянии // Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение. – 1958. – № 4. – С. 92 – 97.
10. Шевченко Ю.Н. Термопластичность при переменных нагружениях. – Киев: Наук. думка, 1970. – 288 с.
11. Шевченко Ю.Н., Бабешко М.Е., Терехов Р.Г. Термовязкоупругопластические процессы сложного деформирования элементов конструкций. – Киев: Наук. думка, 1992. – 328 с.
12. Шевченко Ю.Н., Галишин А.З., Стеблянюк П.А., Баяня М.В., Десяренко П.Г., Тонконоженко А.М. Определение нестационарных температурных полей в тонких слоистых оболочках вращения при комбинированном теплообмене с окружающей средой // Математичні проблеми технічної механіки. Зб. наукових праць Дніпродзержинського держ. техн. ун-ту: (техн. науки). Тематичний випуск: додаток. – 2014. – Вип. 2(25) – С. 85 – 90.
13. Babeshko M.E., Galishin A.Z., Semenets A.I., Shevchenko Yu.N. Influence of the Stress Mode on the Strength of High-Pressure Vessels // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 3. – P. 319 – 325.
14. Babeshko M.E., Savchenko V.G. Analyzing Processes of Nonisothermal Loading of Shells of Revolution with Allowance for Repeated Plastic Strain // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 6. – P. 639 – 646.
15. Babeshko M.E., Savchenko V.G. Method of Solving the Problem of Thermoradiation Plasticity for Layered Axisymmetric Bodies Made of Isotropic and Orthotropic Materials // Int. Appl. Mech. – 2021. – **57**, N 3. – P. 306 – 319.
16. Babeshko M.E., Savchenko V.G. Elastoplastic Axisymmetric Stress–Strain State of Thin Shells Made of Materials with Different Compressive and Tensile Moduli // Int. Appl. Mech. – 2021. – **57**, N 4. – P. 414 – 423.
17. Carslaw H.S., Jaeger J.C. Conduction of Heat in Solids. – Oxford: Oxford University Press, 1947. – 488 с.
18. Hill R. The Mathematical Theory of Plasticity. – Oxford: Clarendon Press, 1950. – 350 p.
19. Savchenko V.G., Babeshko M.E. Technique of Allowing for Plastic Strain under Unloading in Thermo-plasticity Problems for Axisymmetric Bodies // Int. Appl. Mech. – 2019. – **55**, N 4. – P. 416 – 425.
20. Shevchenko Yu.N., Andrushko N.F., Babeshko M.E., Banyas M.V., Galishin A.Z., Dehtyarenko P.G., Savchenko V.G., Tonkonozhenko A.V., Tormakhov N.N. Development of Mathematical Models and Computer Technologies for the Virtual Destructive Testing of Shell Structures // Sci. and Innovation. – 2013. – **9**, N 6. – P. 23 – 30.
21. Shevchenko Yu.N., Andrushko N.F., Babeshko M.E., Banyas M.V., Galishin A.Z., Dehtyarenko P.G., Savchenko V.G., Tonkonozhenko A.V., Tormakhov N.N. Procedure of Forecasting Operation and Extremal State of Critical Systems of the Rocket Technique under Repeated Thermo-Force Loading // Sci. and Innovation. – 2015. – **11**, N 5. – P. 25 – 36.
22. Shevchenko Yu.N., Savchenko V.G. Three-Dimensional Problems of Thermoviscoplasticity: Focus on Ukrainian Research (Review) // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 3. – P. 217 – 271.
23. Steblyanko P.A., Shevchenko Yu.N. Computational Methods in Stationary and Nonstationary Thermal – Plasticity Problems. In.: «Encyclopedia of Thermal Stresses. In. 11 volumes (Ed. R.B. Hetnarski). – New York, Dordrecht: Springer, 2014. – Vol. 2, C – D. – P. 507 – 1084». – P. 623 – 630.
24. Zyczkowski M. Combined Loadings in the Theory of Plasticity. – Warsaw: PWN – Polish Sci. Publishers, 1981. – 714 p.

Надійшла 09.11.2021

Затверджена до друку 19.07.2022