

В.М.Бистров, В.А.Декрет, В.С.Зеленський  
**КРАЙОВИЙ ЕФЕКТ ТА ПРИПОВЕРХНЕВА ВТРАТА СТІЙКОСТІ  
В ШАРУВАТОМУ КОМПОЗИТНОМУ МАТЕРІАЛІ  
ПРИ НЕДОСКОНАЛОМУ КОНТАКТІ МІЖ ШАРАМИ**

*Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАНУ,  
вул. Гесстєрова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: numer@inmech.kiev.ua*

**Abstract.** Based on the relations of the three-dimensional linearized theory of stability within the framework of the model of a piecewise-homogeneous medium, the near-surface buckling is studied in the structure of a layered composite material in the inhomogeneous subcritical state associated with the edge effect in the neighborhood of the surface load. The case of imperfect contact between layers is considered, which is modeled by a periodic system of interlayer cracks in the form of a mathematical cut with stress-free edges. The effect of crack size on the decay length of the edge effect, critical loads, and buckling modes are studied. For the numerical solution of the problem, the grid method is used based on a modified variational-difference approach. Within the framework of the computational experiment, the sequential and parallel algorithm of the Cholesky method to solve a system of linear algebraic equations and the subspace iteration method to solve the generalized eigenvalue problem are applied.

**Key words:** layered composite material, surface load, imperfect contact, edge effect, buckling mode, critical load, three-dimensional linearized stability theory, grid method, parallel computing.

**Вступ.**

При експлуатації елементів конструкцій з композитних матеріалів (КМ) силові навантаження, як правило, спрямовують вздовж армуючих елементів. При цьому характеристики міцності композитів при стиску і розтязі істотно відрізняються, оскільки у цих випадках реалізуються різні механізми руйнування. Відзначимо, що випадок стискаючих навантажень є більш складним для прогнозування. Стискаючі напруження можуть призвести до втрати несучої здатності та руйнування КМ, як в цілому, так і на рівні мікроструктури матеріалу. Одним з можливих механізмів їх руйнування -при стиску є втрата стійкості армуючих волокон і шарів [1, 3, 12, 14, 17, 21, 27 – 30]. При стиску односпрямованих КМ поверхневим навантаженням вздовж напрямку армування цей механізм може мати характер приповерхневої втрати стійкості у структурі КМ з формами втрати стійкості, згасаючими при віддаленні від граничної поверхні КМ [1, 3, 12, 14, 21]. Такий механізм відповідає руйнуванню матеріалу у вигляді зминання торців зразків та елементів конструкцій із КМ і його дослідження складає одну із неklasичних проблем механіки руйнування композитів [20].

Отримані у більшості вказаних робіт результати вказують на те, що критичні навантаження і форми втрати стійкості залежать від геометричних та силових факторів, пов'язаних із сумісним впливом структури КМ і граничних умов на завантаженій поверхні. При таких умовах поверхневого навантаження КМ, коли біля граничної поверхні виникає неоднорідний напружено-деформований стан (область крайового ефекту), якому відповідає суттєва зміна полів напружень і деформацій у межах парамет-

*ра структури КМ* (характерного розміру структурної неоднорідності КМ), механізм руйнування КМ може пов'язуватися із концентрацією напружень [11] в області крайового ефекту та призводити до виникнення та розвитку дефектів у структурі КМ на мікрорівні. При умовах навантаження, коли зміна полів напружень і деформацій відбувається *на відстанях, які перевищують параметр структури КМ*, при певному співвідношенні пружних і геометричних властивостей компонентів матеріалу розмір зони крайового ефекту може досягати великих значень внаслідок неоднорідності і конструктивної анізотропії КМ, яка проявляється на мезо- та макрорівні [5, 13, 24, 26, 31 – 34] і може суттєвим чином впливати на критичні навантаження і форми втрати стійкості в структурі КМ [14]. Наявність внаслідок крайового ефекту біля завантаженої поверхні відмінних від нуля зсувних дотичних напружень також істотно впливає на критичні параметри стійкості КМ [27]. Таким чином, дослідження крайових ефектів та втрати стійкості у структурі КМ при неоднорідному докритичному стані, обумовленому крайовим ефектом, становлять комплексну проблему механіки руйнування і відповідні розрахункові моделі для дослідження механізмів руйнування КМ повинні враховувати зв'язок між параметрами згасання крайового ефекту та критичними параметрами стійкості КМ [1].

Наявність технологічних та експлуатаційних дефектів і недосконалостей в структурі КМ потребує розвитку представлених підходів та моделей для урахування їх впливу на втрату стійкості в структурі КМ при неоднорідному докритичному стані, пов'язаному з крайовим ефектом біля граничної поверхні. Зокрема, це стосується випадку ослаблення адгезії між компонентами КМ внаслідок таких дефектів, як непроклеї та розшарування, тріщини тощо. Так, у роботах [32, 33] показано, що ослаблення адгезії при недосконалості контакту між шарами КМ призводить до зменшення швидкості згасання і, відповідно, до збільшення розмірів області неоднорідного напружено-деформованого стану. Вплив цього фактору на критичні параметри стійкості КМ потребує дослідження. Одним із найбільш точних підходів при розгляді вказаної проблеми є застосування тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформованих тіл (ГЛТСДТ) [2, 18] в рамках моделі кусково-однорідного середовища. На основі такого підходу вплив недосконалості міжшарового контакту на втрату стійкості у внутрішній структурі КМ досліджено, зокрема, в роботах [22, 23, 30]. Результати, які стосуються приповерхневої втрати стійкості в структурі КМ за наявності недосконалості контакту між компонентами КМ, практично відсутні.

При моделюванні недосконалості контакту між компонентами КМ найбільш поширеним підходом є застосування моделей типу моделі пружинного шару (spring-layer model) [15, 32], коли вздовж усієї лінії контакту задається пропорційний зв'язок між стрибком переміщень і тангенціальними зусиллями в області контакту. Інший підхід полягає у застосуванні на ділянках лінії контакту компонентів КМ граничних умов, які відповідають ідеальному з'єднанню шарів та дефектам міжшарової адгезії різної природи [22, 23, 30]. Дефекти, зокрема, можуть представлятися або тріщинами з вільними від зусиль берегами, або «дефектами із зв'язаними берегами», які відповідають умовам проковзування, коли умова неперервності зберігається лише для нормальних компонент переміщень і напружень [10].

У статті представлена розрахункова модель для дослідження крайового ефекту в околі поверхневого навантаження шаруватого КМ і приповерхневої втрати стійкості в структурі КМ при недосконалості контакту між шарами КМ, який моделюється системою міжшарових макротріщин з вільними від напружень берегами. Макротріщинами вважаються тріщини, довжина яких є порівняною або перевищує товщину армуючих шарів КМ. Досліджено вплив розміру тріщин на довжину згасання крайового ефекту, критичні навантаження та форми втрати стійкості в структурі КМ. Як репрезентативний елемент КМ використана багатошарова розрахункова область з граничними умовами на її бічних сторонах, які відповідають умовам симетрії [1]. Для чисельного розв'язку задач застосовано метод сіток на основі модифікованого варіаційно-різницевого підходу [6]. При чисельному моделюванні розглянутої у даній роботі задачі в рамках обчислювального експерименту застосовано паралельне програмне забезпечення для розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Холецкого та часткової узагальненої алгебраїчної проблеми власних значень для розріджених симетричних матриць методом ітерацій на підпросторі [9].

## §1. Розрахункова модель для дослідження крайового ефекту і приповерхневої втрати стійкості в структурі шаруватого КМ.

У даній роботі розглядається композитний матеріал, який у континуальному наближенні моделюється ортотропним матеріалом і знаходиться під дією стискаючого поверхневого навантаження вздовж напрямку розташування шарів (нормально до торцевої поверхні). Дослідження механізму руйнування КМ базується на наступній *Загальній концепції*, яка у роботі [20] сформульована наступним чином: «Початковим етапом (стартом) руйнування при зминанні торців є приповерхнева втрата стійкості біля завантаженого торця. При аналізі подальшого розвитку механізму руйнування, що розглядається, необхідно враховувати його можливу взаємодію з іншими механізмами руйнування. Теоретичною границею міцності при приповерхневому руйнуванні біля завантаженого нормальним стиском торця (руйнування при зминанні торців) є величина критичного навантаження і величина критичного вкорочення в рамках застосованого варіанту ТЛТСДТ». За наявності міжшарових тріщин поряд із втратою стійкості в структурі КМ при стиску вздовж тріщин може мати місце такий механізм руйнування як локальна втрата стійкості стану рівноваги матеріалу, який оточує тріщини [3]. При дослідженні руйнування КМ вказані механізми доцільно розглядати одночасно.

Основні характеристики розрахункової моделі, які відповідають *Загальній концепції* та визначають постановку задач визначення критичних параметрів стійкості КМ при неоднорідному докритичному стані, пов'язаному із крайовим ефектом у околі поверхневого навантаження, можна сформулювати наступним чином.

– Матеріали армуючих компонентів і матриці моделюються лінійно-пружними ізотропними тілами; таке моделювання можна вважати прийнятним при порівняно короткостроковій дії зовнішнього навантаження при помірних температурах.

– Застосовується другий варіант теорії малих докритичних деформацій тривимірної лінеаризованої теорії стійкості [2, 18], коли початковий стан визначається за геометрично лінійною теорією; такий підхід вважається прийнятним для порівняно жорстких армованих композитних матеріалів, які переважно руйнуються при порівняно малих деформаціях.

– Розглядається навантаження зовнішніми «мертвими» навантаженнями, у зв'язку з чим виконуються достатні умови застосовності статичного методу ТЛТСДТ (метод Ейлера); усі дослідження виконуються із застосуванням статичного методу (біфуркаційний підхід).

– На границі поділу наповнювача і матриці приймаються умови ідеального контакту (неперервності векторів напружень і переміщень) або недосконалого контакту у вигляді міжшарових тріщин, як при визначенні докритичного стану, так і при дослідженні задач стійкості. Крайні оцінки у разі недосконалого контакту відповідають ідеальному з'єднанню шарів КМ і контакту з ідеальним проковзуванням шарів [23], коли умова неперервності зберігається лише для нормальних компонент переміщень і напружень («perfectly lubricated interfaces» [10]).

– Усі дослідження виконуються в рамках плоскої деформації, коли розглядається поздовжній переріз шаруватих матеріалів.

– При визначенні представницького елемента КМ у разі періодичної системи армуючих елементів на бічних сторонах відповідної розрахункової області можуть застосовуватись умови періодичності або симетрії щодо граничних умов для задач статичної та стійкості; в разі умов симетрії відповідні розміри розрахункової області повинні встановлюватись на основі обчислювального експерименту для визначення тих геометричних характеристик розрахункової області, при яких залежність досліджуваних параметрів докритичного стану та стійкості від розмірів області набуває сталого характеру із задовільною для проведення розрахунків точністю.

– Розв'язки задач стійкості для представницького елемента КМ при граничних умовах, які відповідають умовам симетрії (а не умовам періодичності), призводять до

більш високих значень критичних навантажень і форм втрати стійкості, які відповідають т. зв. «односпрямованим» формам втрати стійкості (unidirectional buckling) [19].

– Область неоднорідного докритичного стану для представницького елемента КМ характеризується параметрами згасання крайового ефекту, до яких відноситься максимальна довжина згасання крайового ефекту, геометрія області та розподіл полів напружень і деформацій у зоні крайового ефекту; ці параметри визначаються із застосуванням кількісного критерію згасання крайового ефекту [13, 26].

– Область неоднорідного докритичного стану для представницького елемента КМ при граничних умовах, які відповідають умовам симетрії (змішані граничні умови на бічних сторонах розрахункової області) має менші розміри у порівнянні із випадком вільних від напружень бічних сторін [13].

– Збільшення періоду поверхневого навантаження при розвантаженні армуючих шарів у порівнянні з параметром структури КМ призводить до збільшення зони крайового ефекту, збільшення довжини хвилі приповерхневої втрати стійкості та зменшення її амплітуди біля граничної поверхні і відповідного зменшення критичних навантажень [1].

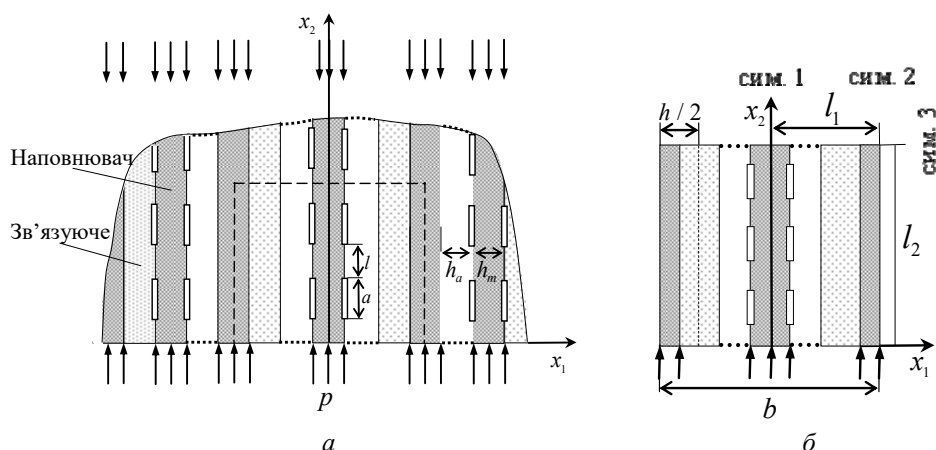


Рис. 1

На рис. 1, а представлено шаруватий КМ із недосконалим контактом між шарами та умови його навантаження при дослідженні статичних крайових ефектів у околі поверхневого навантаження та приповерхневої втрати стійкості. На рис. 1, б показано представницький елемент матеріалу, де сим. 1, сим. 2, сим. 3 – осі симетрії  $x_1 = 0$ ,  $x_1 = l_1$ ,  $x_2 = l_2$ .

## §2. Постановка задачі.

Розглянемо задачу визначення параметрів згасання крайового ефекту і задачу стійкості для двокомпонентного КМ регулярної структури за наявності недосконалого контакту між шарами (рис. 1, а) для схеми навантаження, яка відповідає одновісному стиску шарів наповнювача в напрямку осі  $Ox_2$  поверхневим навантаженням постійної інтенсивності  $p^0$ . Таке навантаження призводить до неоднорідного напружено-деформованого стану в околі навантаження (статичного крайового ефекту) і має наступний вигляд:

$$p(x_1) = \sigma_{22}(x_1, 0) = \begin{cases} p^0, & -h_a/2 + kh \leq x_1 \leq h_a/2 + kh, \quad k = 0, \pm 1, \dots; \\ 0, & \text{для інших } x_1. \end{cases} \quad (2.1)$$

В (2.1)  $h = h_a + h_m$  – параметр структури шаруватого КМ;  $h_a, h_m$  – товщина шару наповнювача (армуючого шару) і шару зв’язуючого (матриці), відповідно. Припускаємо, що на нескінченності навантаження до армуючих шарів прикладається за такою ж схемою. Уздовж осі  $Ox_3$  навантаження не змінюється. Виходячи з умов симетрії навантаження і регулярності структури КМ, задачі розв’язуємо для представницького елемента матеріалу, якому відповідає розрахункова область скінченних розмірів. На підставі результатів роботи [1] розмір цієї області в напрямку осі  $Ox_1$  відповідає періоду  $b$  поверхневого навантаження і складає  $l_1 = b/2 = 8h$ . Розмір у напрямку  $Ox_2$  встановлюється за результатами обчислювального експерименту і відповідає умові сталого значення параметрів згасання крайового ефекту при подальшому зростанні вказаного розміру. Зазначена розрахункова область показана на рис. 1, б. Вважаємо, що для такої геометрії розрахункової області і умов навантаження згасання крайового ефекту набуває сталого характеру щодо подальшого збільшення періоду навантаження і отримані результати будуть відповідати КМ, який моделюється напівнескінченною областю. Крайні шари представницького елемента є армуючими шарами.

Розрахункова схема для визначення зони (довжини згасання) крайового ефекту включає двовимірну (плоска деформація) крайову задачу теорії пружності кусково-однорідних тіл і кількісний критерій визначення крайового ефекту із застосуванням функції згасання напружень [1, 26]. Крайовий ефект досліджується при самоврівноваженому навантаженні, яке отримується шляхом суперпозиції поверхневого навантаження і нормальних напружень для сталого напружено-деформованого стану при згасанні крайового ефекту. Припускаючи, що матеріал наповнювача є досить жорстким відносно зв’язуючого при дослідженні стійкості застосовуватимемо другий варіант теорії малих докритичних деформацій [2, 18]. Поверхнєве навантаження вважаємо «мертвим», що забезпечує виконання достатніх умов застосовності статичного методу дослідження стійкості. При використанні статичного методу задача стійкості зводиться до узагальненої задачі на власні значення, в якій мінімальне власне значення  $\mu$  визначає критичне навантаження, а відповідна власна функція  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  – форму втрати стійкості. Задачу розглядаємо в двовимірній постановці для випадку плоскої деформації в площині  $x_1Ox_2$ . Недосконалий контакт між шарами моделюється міжшаровими тріщинами у вигляді математичних розривів з вільними від напружень берегами.

Напружено-деформований стан із урахуванням симетрії навантаження визначаємо із наступних основних співвідношень лінійної теорії пружності для області

$$\bar{\Omega} = \{(x_1, x_2) | 0 \leq x_1 \leq l_1; 0 \leq x_2 \leq l_2\} :$$

рівняння рівноваги

$$\sigma_{ij,i}^0 = 0 \quad x \in \bar{\Omega}; \quad (2.2)$$

граничні умови

$$\begin{aligned} \sigma_{21}^0 = 0 \wedge u_2^0 = 0, \quad 0 \leq x_1 \leq l_1 \wedge x_2 = l_2; \\ \sigma_{12}^0 = 0 \wedge u_1^0 = 0, \quad (x_1 = 0 \vee x_1 = l_1) \wedge (0 \leq x_2 \leq l_2); \\ \sigma_{22}^0 = p \wedge \sigma_{21}^0 = 0, \quad 0 \leq x_1 \leq l_1 \wedge x_2 = 0; \end{aligned} \quad (2.3)$$

умови ідеального контакту на границі між компонентами КМ

$$\left[ \sigma_{i1}^0 \right] = 0; \quad \left[ u_i^0 \right] = 0; \quad (2.4)$$

умови недосконалого контакту на ділянках границі між центральним армуючим шаром і матрицею, які відповідають наявності на границі поділу компонентів КМ математичних розрізів із вільними від напружень сторонами

$$\sigma_{il}^{(a)} = 0; \quad \sigma_{il}^{(m)} = 0; \quad (2.5)$$

співвідношення між компонентами напружень  $\sigma_{ij}$ , деформацій  $\varepsilon_{ij}$  і переміщень  $u_i$  в межах компонента КМ

$$\sigma_{ij}^0 = \delta_{ij} A_{ik} \varepsilon_{kk}^0 + 2(1 - \delta_{ij}) G \varepsilon_{ij}^0; \quad \varepsilon_{ij}^0 = \frac{1}{2}(u_{i,j}^0 + u_{j,i}^0), \quad i \neq j, \quad (2.6)$$

де

$$A_{11} = A_{22} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad A_{12} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (2.7)$$

$A_{ij}$ ,  $E$ ,  $G$ ,  $\nu$  – модулі пружності, модуль Юнга, модуль зсуву, коефіцієнт Пуассона компонентів КМ.

Границю зони  $\Gamma_\rho$  і довжину згасання  $\lambda_\rho$  крайового ефекту з точністю  $\rho\%$  визначаємо із наступних співвідношень [26]:

$$\rho = \tilde{\rho}(x_1, x_2) \Big|_{x \in \Gamma_\rho}; \quad \lambda_\rho = \max_{x_1, x_2 \in \Gamma_\rho} (x_2), \quad (2.8)$$

де функція згасання напружень  $\tilde{\rho}(x_1, x_2)$  визначається співвідношенням

$$\tilde{\rho} = 100(\sigma_{22}^0(x) - \sigma_{уст}^0) / (p(x_1, 0) - \sigma_{уст}^0). \quad (2.9)$$

Функція  $\tilde{\rho}(x_1, x_2)$  характеризує зміну нормальних напружень в зоні крайового ефекту у порівнянні із значенням самоврівноваженого навантаження на границі  $x_2 = 0$  розрахункової області. В (2.9)  $\sigma_{уст}^0 = \sigma_{22}(x_1, l_2)$  – усталене нормальне напруження на границі  $x_2 = l_2$  розрахункової області у напрямку згасання крайового ефекту.

Основні співвідношення ТЛТСДТ для визначення критичних параметрів стійкості КМ мають такий вигляд:

рівняння в збуреннях

$$(\sigma_{ij} + \mu \sigma_{in}^0 u_{j,n}),_i = 0, \quad x \in \Omega; \quad (2.10)$$

граничні умови

$$(\sigma_{12} + \mu \sigma_{22}^0 u_{1,2}) = 0 \wedge u_2 = 0, \quad 0 \leq x_1 \leq l_1 \wedge x_2 = l_2;$$

$$u_1 = 0 \wedge (\sigma_{12} + \mu \sigma_{11}^0 u_{2,1}) = 0, \quad (x_1 = 0 \vee x_1 = l_1) \wedge (0 \leq x_2 \leq l_2); \quad (2.11)$$

$$(\sigma_{j2} + \mu \sigma_{jn}^0 u_{j,2}) = 0, \quad 0 \leq x_1 \leq l_1 \wedge x_2 = 0;$$

умови ідеального контакту між шарами

$$[\sigma_{1j} + \mu \sigma_{1n}^0 u_{j,n}] = 0, \quad [u_j] = 0; \quad (2.12)$$

умови недосконалого контакту на ділянках границі між центральним армуючим шаром і матрицею, які відповідають наявності на границі поділу компонентів КМ математичних розрізів із вільними від напружень сторонами

$$\sigma_{1j}^{(a)} + \mu \sigma_{1n}^{0(a)} u_{j,n}^{(a)} = 0; \quad \sigma_{1j}^{(m)} + \mu \sigma_{1n}^{0(m)} u_{j,n}^{(m)} = 0. \quad (2.13)$$

Співвідношення між збуреннями напружень  $\sigma_{ij}$ , деформацій  $\varepsilon_{ij}$  і переміщень  $u_i$  у межах компонента КМ мають вигляд (2.6), (2.7).

Критичне навантаження визначається наступним чином:

$$p_{кр} = \min |\mu| / l_1 \int_{0 \leq x_1 \leq l_1} p(x_1) dx_1 = \min |\mu| p^0 h_a / h, \quad (2.14)$$

де  $\min |\mu|$  – мінімальне за модулем власне число задачі (2.10) – (2.13). Вигляд співвідношення (2.14) відображає той факт, що стискаюче навантаження прикладене тільки до армуючих шарів.

Позначення в (2.10) – (2.13) є загальноприйнятими і індекси змінюються від 1 до 2 ( $\wedge, \vee$  – знаки логічного множення і додавання). Верхнім індексом «0» позначені компоненти напружень для докритичного стану, які визначаються шляхом розв’язання задачі (2.2) – (2.7). Індекс, що позначає приналежність до шару КМ, у співвідношеннях (2.10) – (2.13) для зручності опущений; у співвідношеннях (2.5), (2.13) позначення «(a)» для верхнього індексу відноситься до армуючого шару, позначення «(m)» – до матриці. У співвідношеннях (2.4), (2.12)  $[f(x)] = f(x-0) - f(x+0)$  – стрибок функції  $f(x)$ .

### §3. Результати розв’язку задачі.

**3.1 Аналіз впливу недосконалого контакту на згасання крайового ефекту.** Результати отримані для розрахункової моделі, представленої на рис. 1, б. Розрахунки були проведені для наступних механічних та геометричних характеристик КМ: відношення модулів Юнга армуючих шарів і матриці  $E_a E_m^{-1} = 100, 1000$ ; коефіцієнти Пуассона  $\nu_a = \nu_m = 0,3$ ; довжини макротріщин склали  $a = h, 2h, 3h$ , де  $h = h_a + h_m$ . Розмір розрахункової області у напрямку осі  $Ox_2$ , визначений за результатами обчислювального експерименту, становив  $l_2 = 20l_1 = 160h$ .

На рис. 2 показано поведінку функції згасання напружень  $\tilde{\rho}(0, x_2^*) = \tilde{\rho}(0, x_2/h)$ , заданою співвідношенням (2.9), у армуючому шарі для діапазонів згасання крайового ефекту  $\rho = 5 \div 20\%$  (рис. 2, а, в) і  $\rho = 1 \div 5\%$  (рис. 2, б, г): (а), (б) – для  $E_a / E_m = 100$ ; (в), (г) – для  $E_a / E_m = 1000$ . Довжина  $\lambda_\rho$  згасання крайового ефекту, для якої значення нормального напруження при згасанні крайового ефекту складає  $\rho$  відсотків від значення самоврівноваженого поверхневого навантаження, визначається як така, що дорівнює відповідному значенню  $x_2^*$ . На рис. 2, а, в криві 1 відповідають ідеальному контакту, криві 2, 4 – недосконалому контакту при довжині тріщин  $a = 2h$  і  $a = 3h$ . На рис. 2, б, г криві 1 відповідають ідеальному контакту, криві 2 – недосконалому контакту при довжині тріщин  $a = 3h$ . Наведені залежності для більш сприйнятливої візуалізації результатів представлені згладженими кривими шляхом їх інтерполяції. Вихідні залежності показані тільки на рис. 2, а, в для значення  $a = 2h$  (суцільні лінії – криві 3).

Із наведеної графічної інформації видно, що при ослабленні адгезії внаслідок наявності тріщин і збільшенні їх розміру довжина згасання крайового ефекту  $\lambda_\rho$  зростає. Так, довжина згасання крайового ефекту  $\lambda_{\rho=5\%}$  при ідеальному і недосконалому ( $a = 3h$ ) контакті відповідно складає:  $17,4h$  і  $19,47h$  для  $E_a / E_m = 100$ ;  $42h$  і  $43,4h$  для  $E_a / E_m = 1000$ .

Збільшення відношення  $E_a / E_m$  призводить до збільшення розмірів області згасання крайового ефекту як при ідеальному контакті, так і при недосконалому, але у разі більш жорстких армуючих шарів таке збільшення є менш значним.

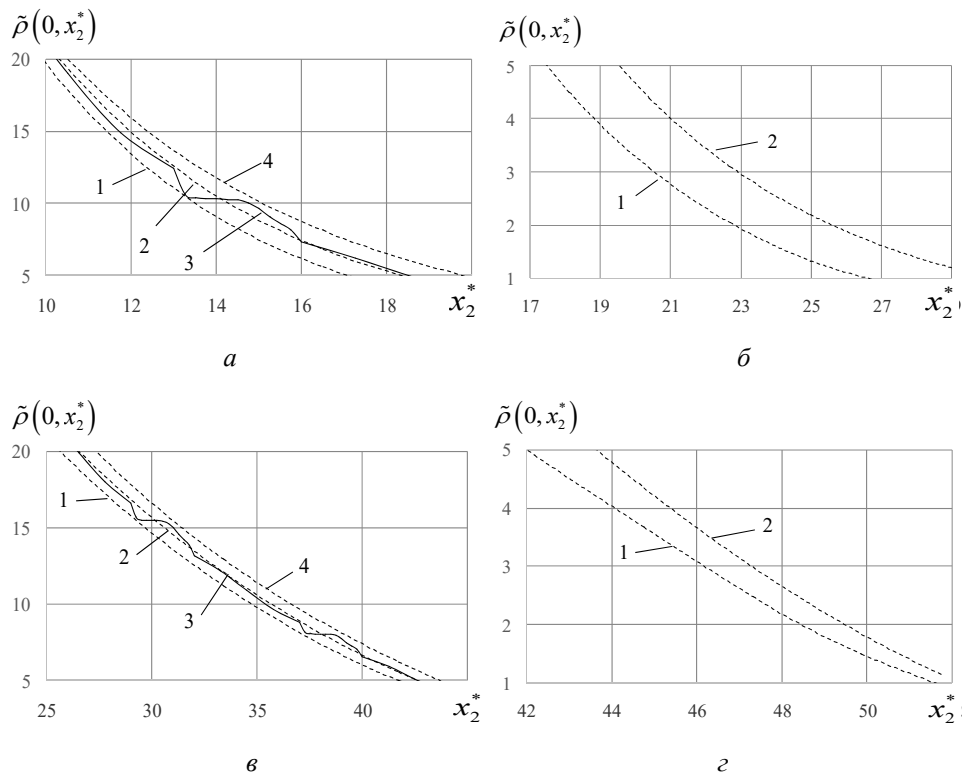


Рис. 2

Отримані результати дозволяють зробити наступні висновки.

Моделювання недосконалого контакту шляхом застосування граничних умов на ділянках контакту компонентів КМ, які відповідають дефектам міжшарової адгезії у вигляді макротріщин з вільними від зусиль берегами, дозволяє досліджувати вплив ослаблення адгезії на швидкість згасання крайового ефекту.

Наявність недосконалого контакту і послаблення адгезії при збільшенні розміру макротріщин призводить до збільшення довжини згасання крайового ефекту та більш повільного його згасання.

**3.2. Аналіз впливу недосконалого контакту на критичні навантаження і форми втрати стійкості.** Результати отримані для розрахункової моделі, представленої на рис. 1, б. Розрахунки були проведені для наступних механічних та геометричних характеристик КМ: відношення модулів Юнга армуючих шарів і матриці  $E_a E_m^{-1} = 50, 100, 500$ ; коефіцієнти Пуассона  $\nu_a = \nu_m = 0,3$ ; довжини макротріщин складали  $a = h, 2h, 3h$ . Розмір розрахункової області у напрямку осі  $Ox_2$  становив  $l_2 = 20l_1 = 160h$ .

На рис. 3, 4 представлено форми втрати стійкості  $u_2^*(l_1/2, x_2^*) = u_2(l_1/2, x_2/h) / u_2^{\max}$  в перерізі  $x_1 = l_1/2$  середнього армуючого шару представницького елемента КМ, де  $u_2^{\max}$  – максимальне значення збурення переміщень в зазначеному перерізі. Графіки відображають залежність форм втрати стійкості від розміру  $a$  макротріщин та відношення  $E_a / E_m$  модулів Юнга армуючого шару та матриці. На рис. 3 показані приповерхневі форми втрати стійкості в середньому армуючому шарі представницького



елементу КМ при ідеальному контакті (а), за наявності міжшарових тріщин розміру  $a = 2h$  (б), за наявності міжшарових тріщин розміру  $a = 3h$  (в) для різних значень  $E_a / E_m$ : 1 – 50; 2 – 100; 3 – 500. На рис. 4 показано приповерхневі форми втрати стійкості у середньому армуючому шарі представницького елемента КМ для значень  $E_a / E_m = 100$  (а) та  $E_a / E_m = 500$  (б) при різних умовах на контакті: 1 – ідеальний контакт; 2 – ряд міжшарових тріщин розміру  $a = h$ ; 3 – розміру  $a = 2h$ .

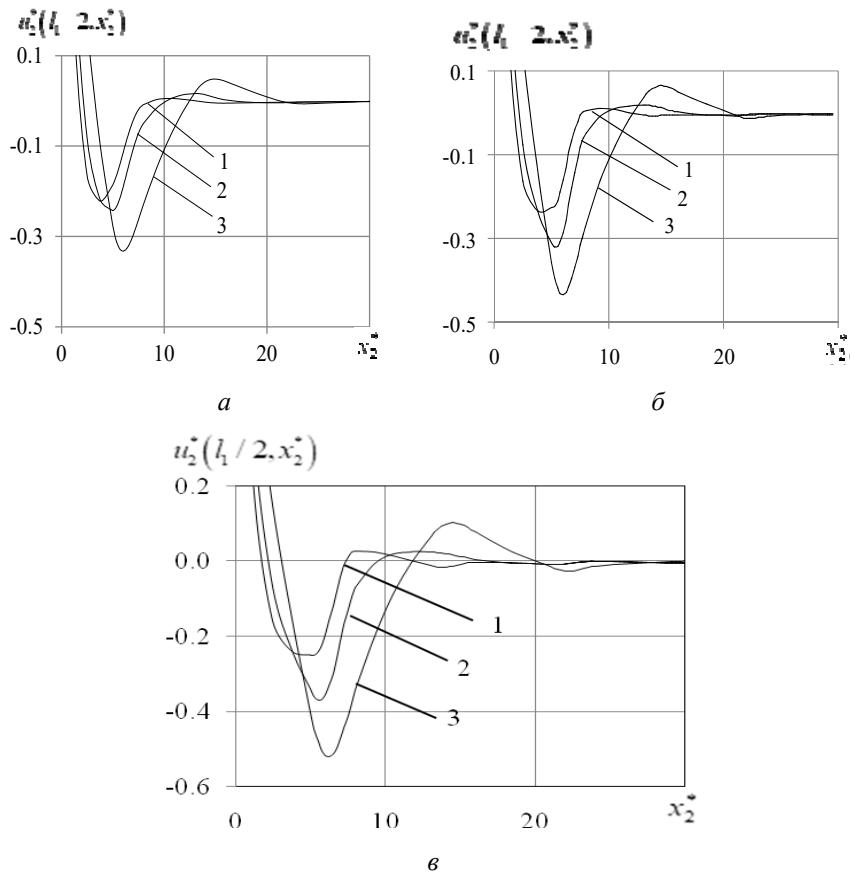


Рис. 3

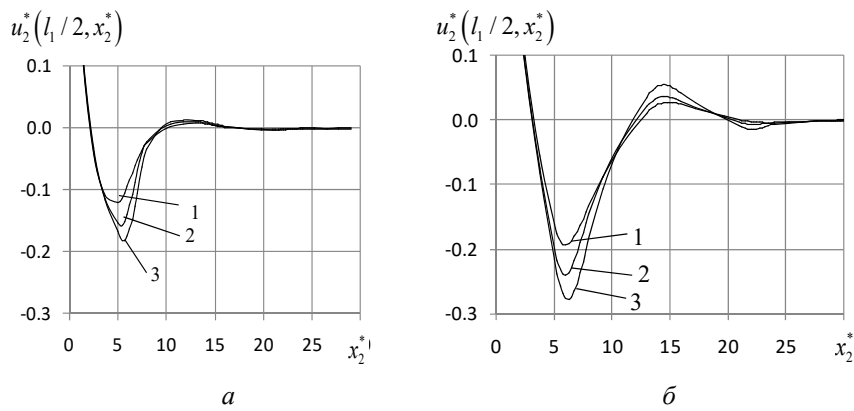


Рис. 4

Форми втрати стійкості мають хвилеподібний характер із згасаючою амплітудою при віддаленні від завантаженої граничної поверхні КМ. За наявності тріщин та при збільшенні їх довжини таке згасання відбувається повільніше та проявляється у більш значній мірі для випадку більш жорстких армуючих шарів.

На рис. 5 показана залежність критичних навантажень для випадку ідеального контакту та недосконалого контакту між армуючими шарами та матрицею від величини відношення  $E_a/E_m$  для різних значень розміру  $a$  макротріщин: 1 – ідеальний контакт; 2 – ряд міжшарових тріщин розміру  $a = h$ , 3 –  $a = 2h$ , 4 –  $a = 3h$ .

Наявність недосконалого контакту між шарами КМ і збільшення розміру тріщин призводить до зменшення критичних навантажень та впливає більшою мірою на критичні навантаження у порівнянні з ідеальним контактом при більш високих значеннях відношення  $E_a/E_m$ .

Порівняльний аналіз результатів визначення параметрів згасання крайового ефекту і критичних параметрів стійкості вказує на те, що наявність неідеального контакту і збільшення розміру тріщин призводить до збільшення області неоднорідного напруженого стану в околі поверхневого навантаження та відповідного зростання довжини згасання форм втрати стійкості при зростанні їх амплітуди.

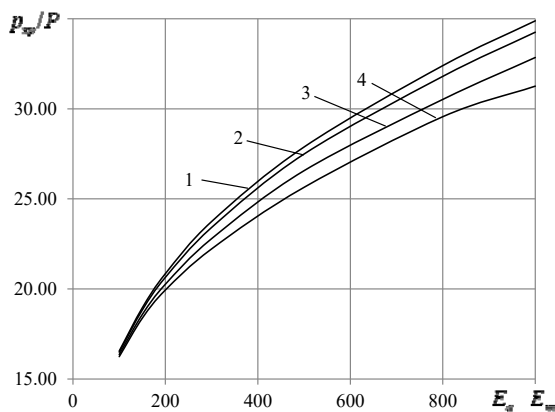


Рис. 5

#### §4. Чисельний розв'язок та обчислювальний алгоритм.

Задачі визначення докритичного стану на основі співвідношень (2.2) – (2.7) і задача визначення критичних параметрів стійкості КМ (2.10) – (2.14) розв'язані методом сіток з використанням концепції базової схеми. При такому підході різницева схема для розрахункової області будується в кожному сітковому вузлі як певна сума значень базової схеми, що представляє собою різницеву схему, отриману варіаційно-різницевим способом на шаблоні комірки різницевої сітки [6].

При чисельному розв'язку задачі методом сіток в розрахунковій області  $\bar{\Omega}$  вводиться нерівномірна різницева сітка, що складається з множини  $\omega$  внутрішніх і множини  $\gamma$  граничних вузлів та вузлів на контакті компонентів КМ, і задачам (2.2) – (2.7), (2.10) – (2.13) ставляться у відповідність задача на розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) та алгебраїчна задача на власні значення із розрідженими симетричними додатно визначеними матрицями. Ці задачі мають наступний вигляд:

$$Au^0 = \Phi, x \in \bar{\omega}; \quad (4.1)$$

$$Au = \lambda Bu, x \in \bar{\omega}. \quad (4.2)$$

У (4.1), (4.2)  $u^0$ ,  $u$  – вектори-стовпці значень переміщень і збурень у вузлах різницевої сітки  $\bar{\omega}$ ;  $\Phi$  – вектор-стовпець значень масової сили у вузлах  $\omega$  та значень поверхневої сили і заданих переміщень у вузлах  $x \in \gamma$  відповідно до граничних умов (2.3), (2.11), умов ідеального контакту між шарами КМ (2.4), (2.12) і умов недосконалого контакту (2.5), (2.13). Матриці  $A$ ,  $B$  для врахування граничних умов у переміщеннях відповідним чином корегуються [6]. Недосконалому контакту між шарами КМ відповідають однорідні граничні умови, задані у напруженнях, для кожного компонента КМ.

Відповідно до концепції базових схем [6] матриці  $A$ ,  $B$  та вектор правої частини  $\Phi$  задач (4.1), (4.2) отримуються шляхом підсумовування матриць  $A^q$ ,  $B^q$  та векторів  $\Phi^q$ , що відповідають різницеvim схемам на комірки різничевої сітки  $\bar{\omega}$ , по усім коміркам  $q = 1, Q$ :

$$A = \sum_{q=1}^Q A^q, A^q = (A_{ij}^q)_{2 \times 2}; B = \sum_{q=1}^Q B^q, B^q = (B_{ij}^q)_{2 \times 2}; \Phi = \sum_{q=1}^Q \Phi^q, \Phi^q = (\Phi_1^q, \Phi_2^q)^T. \quad (4.3)$$

Вирази для різницевих операторів та відповідних матриць алгебраїчних задач представлені в [14, 16]. Для розв'язку дискретних задач застосовано чисельні методи відповідно до методики, представлені в роботах [4, 16]. В даному випадку для визначення початкового стану при розв'язанні системи лінійних алгебраїчних рівнянь було застосовано прямий метод Холецкого, а для визначення критичних параметрів стійкості при розв'язанні узагальненої задачі на власні значення застосовано метод ітерування підпростору. В рамках обчислювального експерименту застосовані послідовні [7] та паралельні [9] алгоритми вказаних методів.

Алгоритм чисельного дослідження докритичного стану та стійкості армованих КМ розроблений для проведення розрахунків у обчислювальному середовищі, яке включає локальний ПК та суперкомп'ютер, об'єднаних мережею Internet. На рис. 6 представлені компоненти обчислювального середовища для проведення розрахунків в рамках обчислювального експерименту. Такими компонентами є проблемно-орієнтований комплекс програм [4] для проведення обчислень на локальному ПК та підготовки даних і обробки результатів обчислень на суперкомп'ютері СКІТ [8], SSH-клієнти для виділення обчислювальних ресурсів (PuTTY [35]) та обміну даними (WinSCP [36]) між локальним ПК та суперкомп'ютером, спеціальне та прикладне програмне забезпечення [9] для проведення паралельних обчислень на суперкомп'ютері.

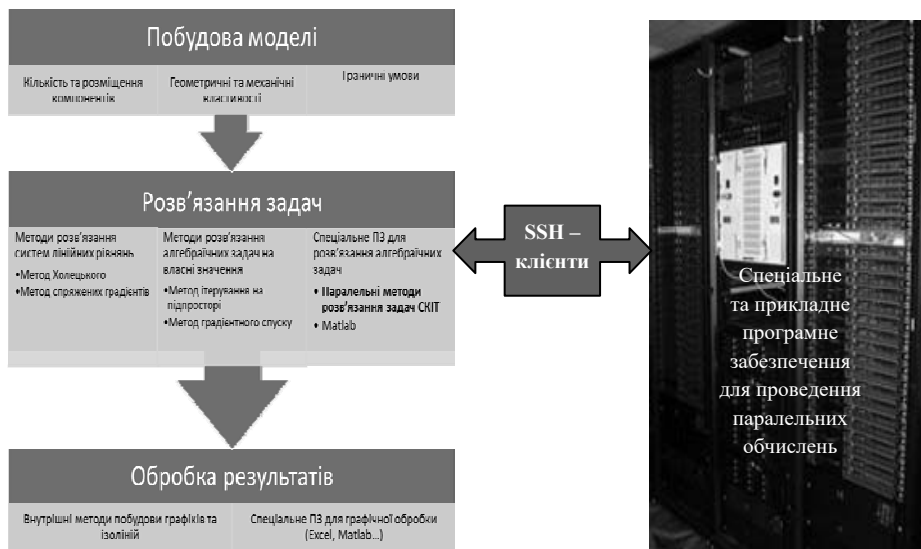


Рис. 6

На локальному ПК формується дискретна модель та в рамках обчислювального експерименту досліджується практична збіжність розв'язку дискретних задач, визначаються потрібні обчислювальні ресурси щодо застосування традиційних або паралельних комп'ютерів для отримання розв'язків з необхідною точністю. За результатами обчислювального експерименту на локальному ПК розв'язуються задачі невеликої розмірності на основі послідовних алгоритмів розв'язку СЛАР і алгебраїчної задачі на власні значення та здійснюється препроцесінг даних для їх передачі на відповідний

обчислювальний вузол суперкомп'ютера для проведення обчислень на основі паралельних алгоритмів.

Таким чином, обчислювальний алгоритм розв'язання задачі визначення початкового стану і параметрів згасання крайового ефекту (2.2) – (2.9) та задачі стійкості (2.10) – (2.14) у зазначеному обчислювальному середовищі включає наступні етапи:

побудова дискретної задачі (4.1), (4.2) у частині формування матриці  $A$  та вектору  $\Phi$  відповідно до співвідношення (4.3) та препроцесінг даних щодо необхідного формату представлення матриці  $A$  та вектору  $\Phi$  для їх передачі на суперкомп'ютер для паралельних обчислень;

розв'язування системи алгебраїчних рівнянь, яка відповідає різницевій задачі (4.1) на основі послідовного або паралельного алгоритму методу Холецького;

обчислення компонент напружень  $\sigma_{ij}^0$  і параметрів згасання крайового ефекту на основі отриманих значень компонент переміщень  $u_i^0$  відповідно до дискретного аналогу співвідношень (2.6) – (2.9), побудова дискретної моделі у частині формування матриці  $B$  відповідно до співвідношення (4.3) та препроцесінг даних щодо необхідного формату представлення матриці  $B$  для паралельних обчислень;

розв'язання алгебраїчної задачі на власні значення, яка відповідає різницевій задачі (4.2) на основі послідовного або паралельного алгоритму методу ітерування підпростору та обчислення критичних навантажень відповідно до співвідношення (2.14).

У даній роботі розрахунки проводились на обчислювальному вузлі суперкомп'ютера СКІТ [8] (один обчислювальний вузол, два восьмиядерних процесора серії Xeon E5 2600, 2 GPU Tesla M2075). Оцінка ефективності застосованого алгоритму є порівняною із результатами для чисельного дослідження стійкості КМ, армованих короткими волокнами [16, 25].

#### **Висновки.**

Отримані результати проведених розрахунків дозволяють зробити наступні висновки.

Розрахункова схема на основі ТЛТСДТ і моделі кусково-однорідного середовища, коли як представницький елемент КМ використовується багатшарова розрахункова область з граничними умовами на її бічних сторонах, які відповідають умовам симетрії, дозволяє досліджувати механізм руйнування при зминанні торців зразків і елементів конструкцій з КМ шаруватої структури з урахуванням недосконалого контакту між шарами.

Моделювання недосконалого контакту шляхом застосування граничних умов на ділянках контакту компонентів КМ, які відповідають дефектам міжшарової адгезії у вигляді макротріщин з вільними від напружень берегами, дозволяє досліджувати вплив ослаблення адгезії на швидкість згасання крайового ефекту, критичні навантаження та форми втрати стійкості у структурі КМ.

Ослаблення міжшарової адгезії за наявності міжшарових тріщин та при збільшенні їх довжини призводить до зменшення швидкості згасання крайового ефекту, зростання амплітуди форм втрати стійкості у околі поверхневого навантаження та повільнішого їх згасання при віддаленні від поверхні і такий вплив проявляється більшою мірою для випадку більш жорстких армуючих шарів.

Ослаблення міжшарової адгезії за наявності міжшарових тріщин та при збільшенні їх довжини призводить до зменшення критичних навантажень та впливає більшою мірою на таке зменшення для випадку більш жорстких армуючих шарів.

Таким чином, ослаблення міжшарової адгезії призводить до збільшення впливу неоднорідного докритичного стану на критичні параметри стійкості КМ, зменшення міцності КМ та їх руйнуванню внаслідок такого механізму, як приповерхнева втрата стійкості у структурі КМ при зменшених значеннях критичних навантажень.

При математичному моделюванні задач стійкості армованих КМ застосування паралельних алгоритмів розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь та алгебраїчних задач на власні значення на базі суперкомп'ютерних технологій забезпечує мож-

ливість отримання з необхідною точністю розв'язку дискретних задач великої розмірності при ефективному використанні обчислювальних ресурсів.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за рахунок коштів конкурсної бюджетної програми «Математичне моделювання у між-дисциплінарних дослідженнях процесів та систем на основі інтелектуальних суперкомп'ютерних, грид- і хмарних технологій» (КПКВК 6541030).

**РЕЗЮМЕ.** На основі співвідношень тривимірної лінеаризованої теорії стійкості в рамках моделі кусково-однорідного середовища досліджено приповерхневу втрату стійкості у структурі шаруватого композитного матеріалу при неоднорідному докритичному стані, пов'язаному із крайовим ефектом у околі поверхневого навантаження. Розглянуто випадок недосконалого контакту між шарами, який моделюється періодичною системою міжшарових тріщин у вигляді математичного розриву з вільними від напружень берегами. Досліджено вплив розміру тріщин на довжину згасання напружень, критичні навантаження та форми втрати стійкості. Для чисельного розв'язку задачі використано метод сіток на основі модифікованого варіаційно-різницевого підходу. В рамках обчислювального експерименту застосовані послідовний і паралельний алгоритми методу Холецького для розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь і методу ітерування підпростору для розв'язання узагальненої задачі на власні значення.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** шаруватий композитний матеріал, поверхневе навантаження, недосконалий контакт, крайовий ефект, форма втрати стійкості, критичне навантаження, тривимірна лінеаризована теорія стійкості, метод сіток, паралельні обчислення.

1. Быстров В.М. Краевой эффект и приповерхностная потеря устойчивости в слоистом композитном материале при сжатии поверхностной нагрузкой // Доп. НАН України. – 2019. – № 10. – С. 29 – 37.
2. Гузь А.Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. – Киев: Вища школа, 1986. – 512 с.
3. Гузь А.Н. Основы механики разрушения композитов при сжатии: в 2-х томах. (Т. 1. Разрушение в структуре материала. – 592 с. Т. 2. Родственные механизмы разрушения. – 736 с.). – Киев: «ЛИТЕРА», 2008.
4. Гузь А.Н., Декрет В.А. Модель коротких волокон в теории устойчивости композитов. – Saarbrücken : LAP Lambert Acad. Publ., 2015. – 315 с.
5. Механика композитов: в 12-и томах. (Под общей ред. А.Н. Гузя.). Т.1. Головчан В.Т., Гузь А.Н., Коханенко Ю.В., Куц В.И. Статика материалов. – Киев: Наук. думка, 1993. – 455 с.
6. Механика композитов: в 12-и томах. (Под общей ред. А.Н. Гузя.). Т.11. Григоренко Я.М., Шевченко Ю.В., Василенко А.Т. и др. Численные методы. – Киев: «А.С.К.», 2002. – 448 с.
7. Писсанецки С. Технология разреженных матриц. – Москва: Мир, 1988. – 410 с.
8. Суперкомп'ютер ІК НАН України / <http://icybcluster.org.ua/>
9. Химич А.Н., Молчанов И.Н., Попов А.В., Чистякова Т.В., Яковлев М.Ф. Параллельные алгоритмы решения задач вычислительной математики. – Киев: Наук. думка, 2008. – 247 с.
10. Aboudi J. Damage in composites-modelling of imperfect bonding // Compos. Sci. Technol. – 1987. – **28**, N 2. – P. 103 – 128.
11. Andrianov I.V., Danishevs'kyi V.V., Weichert D. Analytical study of the load transfer in fiber-reinforced 2D composite materials // Int. J. Solids Struct. – 2008. – **45**. – P. 1217 – 1243.
12. Biot M.A. Edge Buckling of Laminated Medium // Int. J. Solids Struct. – 1968. – **4**, N 1. – P. 125 – 137.
13. Bystrov V.M., Dekret V.A., Zelenskii V.S. Numerical Analysis of the Edge Effect in a Composite Laminate with Compressed Reinforcement Plies. // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 5. – P. 561 – 566.
14. Bystrov V.M., Dekret V.A., Zelenskii V.S. Loss of Stability in a Composite Laminate Compressed by a Surface Load // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 2. – P. 156 – 163.
15. Cheng Z., Kennedy D., Williams, W.F. Effect of interfacial imperfection on buckling and bending behavior of composite laminates // AIAA Journal. – 1996. – **34**, N 12. – P. 2590 – 2595.
16. Dekret V.A., Bystrov V.M., Zelenskii V.S. Numerical analysis of the buckling of near-surface short fibers in a weakly reinforced composite material // Int. Appl. Mech. – 2021. – **57**, N 11. – P. 687 – 699.
17. Fleck N.A. Compressive failure of fiber composites // Advances in Appl. Mech. – 1997. – **33**. – P. 43 – 117.

18. *Guz A.N.* Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies. – Berlin: Springer-Verlag Heilberg, 1999. – 555 p.
19. *Guz A.N.* Stability of Elastic Bodies under Uniform Compression. Review // *Int. Appl. Mech.* – 2012. – **48**, N 3. – P. 241 – 293.
20. *Guz A.N.* Nonclassical Problems of Fracture/Failure Mechanics: On the Occasion of the 50th Anniversary of Research (Review). II. // *Int. Appl. Mech.* – 2019. – **55**, N 3. – P. 239 – 295.
21. *Guz A.N., Kokhanenko Yu.V.* Numerical Solution of Three-Dimensional Stability Problems for Elastic Bodies // *Int. Appl. Mech.* – 2001. – **37**, N 11. – P. 1369 – 1399.
22. *Guz I.A.* Plane problem of the stability of composites with slipping layers // *Mech. Compos. Mater.* – 1991. – **27**, N 5. – P. 547 – 551.
23. *Guz I.A.* Composites with interlaminar imperfections: substantiation of the bounds for failure parameters in compression // *Compos. Part B.* – 1998. – **29**, N 4. – P. 343 – 350.
24. *Horgan C.O., Carlsson L.A.* Saint-Venant End Effects for Anisotropic Materials // *Comprehensive Compos. Mater. II.* – 2018. – **7**. – P. 38 – 55.
25. *Khimich A.N., Dekret V.A., Popov A.V., Chistyakov A.V.* Numerical Study of the Stability of Composite Materials on Computers of Hybrid Architecture // *J. of Automation and Information Sci.* – 2018. – **50**, N 7. – P. 7 – 24.
26. *Kokhanenko Yu.V., Bystrov V.M.* Edge Effect in a Laminated Composite with Longitudinally Compressed Laminas // *Int. Appl. Mech.* – 2006. – **42**, N 8. – P. 922 – 928.
27. *Nestorovic M.D., Triantafyllidis N.* Onset of failure in finitely strained layered composites subjected to combined normal and shear loading // *J. Mech. Phys. Solids.* – 2004. – **52**. – P. 941 – 974.
28. *Schultheisz C.R., Waas A.M.* Compressive Failure of Composites. Part 1: Testing and Micromechanical Theories // *Progr. Aerospace Sci.* – 1996. – **32**. – P. 1 – 42.
29. *Soutis C., Guz I.A.* Predicting fracture of layered composites caused by internal instability // *Composite Part A.: Applied Science and Manufacturing.* – 2001. – **39**, N 9. – P. 1243 – 1253.
30. *Soutis C., Guz I.A.* Fracture of layered composites by internal fibre instability: Effect of interfacial adhesion // *Aeronaut J.* – 2006. – **110**, N 1105. – P. 185 – 195.
31. *Tullini N., Savoia M.* Decay rates for Saint-Venant end effect for multilayered orthotropic strip // *Int. J. Solids Struct.* – 1997. – **34**, N 33. – P. 4263 – 4280.
32. *Tullini N., Savoia M., Horgan C.O.* End effect in multilayered strips with imperfect bonding // *Mechanics of Materials.* – 1997. – **26**, N 1. – P. 23 – 34.
33. *Wijeyewickrema A.C., Keer L.M.* Axial decay of stresses in a layered composite with slipping interfaces // *Composite Eng.* – 1994. – **4**, N 9. – P. 895 – 899.
34. *Wijeyewickrema A.C.* Decay of stresses induced by self-equilibrated end loads in a multilayered composite // *Int. J. Solids Struct.* – 1995. – **32**, N 3/4. – P. 515 – 523.
35. <https://www.chiark.greenend.org.uk/~sgtatham/putty/>
36. <https://winscp.net/eng/index.php>

Надійшла 28.12.2021

Затверджена до друку 19.07.2022