

Я. М. Григоренко, О. І. Беспалова, О. Я. Григоренко

ПРО ОДИН НАПРЯМОК РОЗВИТКУ ПРОЕКЦІЙНОГО МЕТОДУ
ГАЛЬОРКІНА В ЗАДАЧАХ СТАЦІОНАРНОЇ МЕХАНІКИ
ДЕФОРМІВНОГО ТВЕРДОГО ТІЛА (ОГЛЯД)

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: ayagrigorenko1991@gmail.com*

Abstract. Some trends in the development of the Galerkin projective method are discussed which is devoted to the effective solving of problems with a great number of independent variables and an application of its modifications in the studies of stationary processes of solid mechanics. As the object of study, the three sequential stages of the development of the method are chosen, which are characterized by widening of the class of unknowns in an approximating expression: first, it is the class of real numbers, then it is the class of continuous functions (being differentiated several times) of one variable (“one-dimensional functions”) and, finally, it is the collection of such “one-dimensional” functions, which cover all the variables of a domain. In these cases, the structure of the projective image of the original many-dimensional problem is changed, respectively, from first the system of algebraic equations, then the system of ordinary differential equations, and, finally, the system of one-dimensional problems concerning the different variables of the domain. According to the development of the Galerkin method, the classes of problems of stationary solid mechanics are also expanded in terms of removing certain restrictions on the shape of the object, conditions on the boundary contour, physical and mechanical properties of the elastic medium, and others. The application of Galerkin-type methods at different stages of its development is illustrated by solving the two-dimensional and three-dimensional problems of statics and vibrations of a wide class of shell elements and spatial bodies.

Key words: Galerkin method, three stages of development, linear and nonlinear boundary value problems, eigenvalue problems, stationary deformation, shell elements, spatial bodies.

«Механіка – це рай математичної науки, оскільки ми отримуємо в ній плоди математики» Леонардо да Вінчі [53].

Вступ.

Багато математичних методів, що входять до скарбниці прикладної математики, розроблено і названо іменами інженерів, механіків, фізиків, вчених різних галузей науки. На сьогодні маємо: методи Бубнова – Гальоркіна, Рітца, Канторовича – Власова, Дородніцина, Ньютона – Рафсона, Хартрі – Фока тощо. Це мала децима того, що дало науці плідне взаємопроникнення інженерних і математичних підходів.

Основи механіки як науки взагалі і механіки деформівного твердого тіла (МДТТ) зокрема, були закладені експериментальними роботами всесвітньо відомих вчених: Галілео Галілея, Ісаака Ньютона, Роберта Гука, Адамара Жан-Клода, Барре де Сен-Венана та ін., які встановили її фундаментальні положення, визначальні співвідношення, основоположні закони і принципи. Роль математики на цьому початковому етапі розвитку механіки полягала в адекватному відображенні результатів експеримен-

ту, побудові відповідних математичних моделей і методів їх реалізації. Результати дослідів описувалися простими лінійними залежностями, а застосування математичного апарату обмежувалось здебільшого операціями диференціювання та лінійної алгебри.

З розвитком і поглибленням експериментальних досліджень розширилась область задач стаціонарної і нестаціонарної динаміки, а їх математичний зміст знайшов відображення у формі крайових, початкових, початково-крайових (лінійних і нелінійних) задач і задач на власні значення для систем диференціальних рівнянь з частинними похідними (диференціальна постановка) або у вигляді умов мінімальності (стаціонарності) квадратичних або неквадратичних функціоналів (варіаційна постановка).

На даний час прикладна і обчислювальна математика накопичила багатий арсенал методів розв'язання таких задач. Ці методи за своїми методологічними основами можна умовно поділити на окремі групи.

Дискретні методи. Найчисельнішу групу з застосування в практичних розрахунках складають дискретні методи, що є різними модифікаціями методів скінченних різниць (сіток, МСР) і скінченних елементів (МСЕ). Дискретне представлення вихідної континуальної задачі – різницева апроксимація на основі рядів Тейлора в МСР і поліноміальна апроксимація на скінченному носіїві в МСЕ – дозволяє раціонально описати складну область незалежних змінних, що в значній мірі обумовлює універсальність цих підходів. На основі методології МСЕ створено багато програм розрахунку просторових і тонкостінних конструкцій – NASTRAN, ANSYS, SIMULA, ABAQUS, PLAXIS, що широко використовуються як в наукових цілях, так і в обчислювальній практиці дослідження міцності і надійності реальних об'єктів сучасної техніки.

Проекційні методи. Як альтернативу суто дискретним підходам можна назвати класичні проекційні і варіаційні методи, зокрема методи типу Гальоркіна і Рітца. Сутність цих методів полягає в збереженні континуальності вихідних положень механіки, що досягається шляхом використання апарату апроксимації на основі неперервних носіїв по аналогії з конструктивною теорією функцій [46].

І дискретні, і континуальні підходи мають одну спільну ознаку: їх ефективність суттєво знижується зі збільшенням розмірності задачі ($N \geq 2$), а підвищені вимоги до точності розв'язку, що досягаються збільшенням дискретизації області або кількості базових функцій в апроксимуючому виразі, можуть привести до погано обумовлених систем алгебраїчних рівнянь і, як наслідок, до невірних результатів. Ці обставини, пов'язані зі скінченною арифметикою хоч і великою, але обмеженою пам'яттю обчислювальних засобів, ініціювали відому наприкінці минулого століття проблему «прокляття вимірності», що й до сьогодні не втратила своєї актуальності [33, 52, 58]. «Бар'єр багатовимірності» може бути успішно подоланий як ростом потужностей обчислювальної техніки, невинний прогрес якої спостерігається зараз, так і за умов вдосконалення і розвитку існуючих методів прикладної математики.

Подальші напрямки розвитку класичних проекційних методів. Щодо класичних проекційних методів типу Гальоркіна, то два напрямки їх подальшого розвитку вказані в книзі Флетчера [53]. Один з них – спектральні методи – є поєднанням методу Гальоркіна з представленням Фур'є для нелінійних задач зі складними фізичними властивостями і простою формою границі. Другий напрямок пов'язаний з використанням фінітних (атомарних) функцій для апроксимації розв'язку задачі, що є по суті основою методу скінченних елементів (МСЕ). Таким чином, досить перспективний і поширений в розрахунковій практиці МСЕ можна трактувати як різновид методу Гальоркіна в класі функцій, заданих на скінченному носіїві.

Паралельно з цими двома напрямками розвитку проекційних методів слід вказати ще один, третій. Саме він орієнтований на ефективне розв'язування N -вимірних задач з великим числом незалежних змінних ($N \geq 2$), образно кажучи – на подолання в деякому сенсі «прокляття вимірності».

Основні стадії розвитку цього напрямку, що націлені на зменшення апіорних елементів при розв'язуванні задачі, визначаються особливостями прийнятої апроксимації шуканого розв'язку. Тезисно їх можна представити так.

На початковій (вихідній) стадії, що включає класичні методи типу Гальоркіна, шуканий розв'язок N -вимірної задачі приймається у вигляді:

$$U(x_1, x_2, \dots, x_N) \cong \Phi_0 = \sum_{i=1}^M \alpha_i \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_N), \quad (B.1)$$

де α_i – невідомі числові коефіцієнти, $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_N)$ – базисні функції, що залежать від усіх змінних області, обираються заздалегідь і зазвичай задовольняють граничні умови, M – їх кількість; вихідна N -вимірна задача зводиться до системи алгебраїчних рівнянь M -го порядку відносно невідомих α_i .

На другій стадії (методи зниження вимірності типу Канторовича – Власова, інтегральних співвідношень Дородніцина та інші) розв'язок N -вимірної задачі приймається у вигляді:

$$U(x_1, x_2, \dots, x_N) \cong \Phi_1 = \sum_{i=1}^M X_{1i}(x_1) \varphi_i(x_2, \dots, x_N), \quad (B.2)$$

де $X_{1i}(x_1)$ – невідомі функції однієї зі змінних області (нехай x_1) у кількості M ; $\varphi_i(x_2, \dots, x_N)$ – базисні функції, які в цьому випадку можуть не залежати від вибраної змінної; вихідна N -вимірна задача зводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь M -го порядку відносно невідомих $X_{1i}(x_1)$ ($i = \overline{1, M}$) з відповідними граничними умовами, тобто до однієї одновимірної крайової задачі.

На наступній стадії (методи типу Хартрі – Фока, варіаційних ітерацій, повних систем) як невідомі в апроксимацію розв'язку природньо ввести одновимірні функції (функції однієї змінної) всіх інших змінних області, тобто прийняти:

$$U(x_1, x_2, \dots, x_N) \cong \Phi_N = \sum_{i=1}^M X_{1i}(x_1) X_{2i}(x_2) \dots X_{Ni}(x_N), \quad (B.3)$$

де $X_{1i}(x_1), X_{2i}(x_2), \dots, X_{Ni}(x_N)$ – невідомі функції різних змінних x_n , і оскільки ними охоплені всі змінні області $n = \overline{1, N}$, базисні функції втрачають сенс ($\varphi_i = 1$), а вихідна N -вимірна задача згідно класу задіяних невідомих зводиться до нової структури – системи з N одновимірних задач за різними змінними області відносно функцій $X_{1i}(x_1), X_{2i}(x_2), \dots, X_{Ni}(x_N)$.

Розгляд виділених стадій розвитку проєкційних підходів типу Гальоркіна, що ілюструють поступове розширення класу функцій для знаходження шуканого розв'язку, і подальше застосування відповідних методів в двовимірних і тривимірних стаціонарних задачах механіки деформівного твердого тіла становить основний зміст даної роботи.

1. Методи зведення до системи алгебраїчних рівнянь та їх застосування в задачах стаціонарного деформування пружних об'єктів.

1.1. Основи методу Гальоркіна та його різновиди. Загальна схема проєкційних методів типу Гальоркіна дозволяє трактувати більшість чисельних підходів до розв'язування задач континуальної механіки як їх частинні випадки.

Суть цих методів у застосуванні до одновимірної крайової задачі виду

$$Lu - f = 0, \quad x \in (x_0, x_1); \quad (1.1)$$

$$Bu = 0, \quad x = x_0, x = x_1 \quad (1.2)$$

(L, B – диференціальні або алгебраїчні вирази відповідного порядку, $u = u(x)$, $f = f(x)$, – невідома і задана функції) полягає в наступному.

Шуканий розв'язок задачі приймаємо у вигляді:

$$u(x) \cong u_M(x) = \sum_{i=1}^M \alpha_i \varphi_i(x), \quad (1.3)$$

де $\varphi_i(x)$ апроксимуючі (базисні) функції (апроксимуючий базис), що задовольняють звичайним граничним умовам і вибираються заздалегідь; α_i ($i = \overline{1, M}$) – невідомі числові коефіцієнти, що визначаються в ході розв’язання задачі.

Ці коефіцієнти знаходяться з системи алгебраїчних рівнянь, яка одержана при проектуванні нев’язки диференціального рівняння (1.1) – $\varepsilon_M = Lu_M - f$ – на перші M функцій ψ_k деякої повної системи (проекційний базис)

$$\int_{x_0}^{x_1} (Lu_M - f)\psi_k dx = 0, \quad k = \overline{1, M}. \quad (1.4)$$

Таким чином, апроксимація шуканої функції $u(x)$ у формі (1.3) задовольняє рівняння (1.1) інтегрально з ваговими елементами ψ_k .

Обґрунтування методу Гальоркіна в конкретних класах крайових задач можна знайти в спеціальній літературі [37, 40, 45, 84, 102].

Як впливає із загальної схеми методу Гальоркіна, численні його модифікації зумовлені можливістю вільного вибору різних систем базисних φ_i і вагових ψ_k функцій.

Так, класичний метод Бубнова – Гальоркіна одержуємо при виборі апроксимуючих і вагових елементів з однієї і тієї ж послідовності лінійно незалежних функцій:

$$\psi_k = \varphi_k, \quad k = \overline{1, M}. \quad (1.5)$$

Зауважимо, що для самоспряжених і додатно визначених операторів задачі цей метод і варіаційний метод Рітца, маючи різні методологічні основи, еквівалентні між собою в плані одержання однієї і тієї ж розв’язувальної системи алгебраїчних рівнянь. При цьому метод Бубнова – Гальоркіна є більш загальним, ніж метод Рітца, оскільки не потребує існування функціоналу енергії і відповідно додатної визначеності і самоспряженості оператора задачі. В таких випадках будемо інколи ототожнювати методи Бубнова – Гальоркіна і Рітца.

В методах Гальоркіна – Петрова базисні і вагові функції вибираються з різних систем лінійно незалежних функцій:

$$\psi_k \neq \varphi_k, \quad k = \overline{1, M}. \quad (1.6)$$

Метод моментів характеризується тим, що за вагові приймаються степеневі функції:

$$\psi_k = x^k, \quad k = \overline{1, M}. \quad (1.7)$$

Якщо вагові функції ψ_k визначити через апроксимуючі функції φ_k таким чином

$$\psi_k = L(\varphi_k), \quad k = \overline{1, M}, \quad (1.8)$$

то одержимо різновид методу Гальоркіна під назвою метод найменших квадратів.

Метод колокацій, який значно простіший в реалізації, ніж метод Бубнова – Гальоркіна (1.5), оскільки не потребує обчислення інтегралів (1.4), одержимо при виборі вагових елементів у вигляді дельта-функцій:

$$\psi_k = \delta(x - x_k), \quad k = \overline{1, M}. \quad (1.9)$$

В цьому частинному випадку методу Гальоркіна вихідне рівняння (1.1) виконується точно в M вибраних точках заданого інтервалу $x \in (x_0, x_1)$.

Наведені окремі різновиди методу Гальоркіна (1.6) – (1.9) підкреслюють широту методологічних основ цього підходу при розв’язанні задач в класі неперервних потрібне число разів диференційованих функцій.

Прозорість основ і відносна простота методу Гальоркіна сприяли широкому його застосуванню при розв’язуванні прикладних задач різних областей фізики. Практично неможливо охопити всі задачі стаціонарної механіки деформівного тіла, що розв’язувались методами типу Гальоркіна, оскільки на початку становлення науки про деформування пружних тіл це був (разом з методом сіток) чи не найуживаніший метод розв’язування крайових, початково-крайових задач і задач на власні значення.

1.2. Деякі приклади застосування методу Гальоркіна в стаціонарних задачах МДГТ. Перші роботи з розв'язування задач пружної рівноваги стержнів та пластин стосовно проектування судових конструкцій належать інженеру-механіку, видатному кораблебудівнику Бубнову та академіку АН СРСР математику і механіку Гальоркіну. Ними розроблено ефективні методи точного та наближеного інтегрування рівнянь теорії пружності, одержано розв'язки багатьох задач будівельної механіки, термопружності, стійкості стержнів та пластин різної форми тощо [12, 15].

Енергетичним методом (варіаційний метод Рітца), який, як уже відзначалось в класі самоспряжених задач еквівалентний класичному методу Бубнова – Гальоркіна, розв'язано задачі по визначенню напружено-деформованого стану (НДС) та стійкості пластин з різними граничними умовами та при наявності підкріплюючих ребер [31, 41].

При дослідженні складних процесів стаціонарного і нестаціонарного деформування пружних тіл на тому чи іншому етапі розв'язання відповідних крайових задач і задач на власні значення застосовувалась редукція до систем алгебраїчних рівнянь за процедурою Бубнова – Гальоркіна. Серед таких задач слід відзначити [44]: розповсюдження стаціонарних хвиль в ребрих циліндричних оболонках (Розділ 3); розрахунок нелінійних (резонансних) коливань ортотропних циліндричних оболонок з початковими неправильностями (Розділ 7); динамічна нестійкість оболонок при спільній дії осьовому стиску та зовнішнього навантаження (Розділ 8); нестаціонарна аерогідропружність сферичних і циліндричних тіл багатошарової структури (Розділ 11) тощо.

Певні обмеження щодо застосування методу Бубнова-Гальоркіна пов'язані з необхідністю вибору базисних функцій, що задовольняють заданим умовам на обмежуючому контурі об'єкту. Важливий крок в подоланні цих обмежень і поширенні методів на області складної форми зроблений в роботах академіка Рвачова на основі створеного ним нового класу спеціальних функцій – R -функцій [51]. Для лінійних і нелінійних задач динаміки багатошарових пластин, пологих оболонок складної форми в плані, пологих панелей з отворами в диференціальній і варіаційній постановках були розв'язані ряд важливих задач статичної, коливної, статичної і динамічної стійкості (наприклад, [59]).

Підсумовуючи короткий огляд класичних методів типу Гальоркіна слід відзначити, що основною вразливою їх стороною (ланкою) є неформалізованість вибору базисних і вагових функцій, який відданий, фактично, на розсуд інтуїції дослідника. Теоретичні дослідження методу і практика розв'язування численних задач різного типу показали, що вибір апроксимуючого і проєкційного базисів є визначальним і навіть критичним, оскільки впливає на швидкість збіжності наближених розв'язків та обумовленість систем алгебраїчних рівнянь, одержаних в процесі проектування вихідної задачі.

Перший суттєвий крок в подоланні цієї вразливої сторони методів Гальоркіна зроблено в методах зведення до систем звичайних диференціальних рівнянь, коли невідомими в апроксимуючому виразі є функції однієї із змінних області (В.2). Основи цих методів і застосування до стаціонарних задач МДГТ розглядаються в частині 2 даної роботи.

2. Методи зведення до системи звичайних диференціальних рівнянь та їх застосування в стаціонарних задачах оболонок обертання та некругових циліндричних оболонок.

В цій частині розглядаються методи другої стадії розвитку проєкційних підходів типу Гальоркіна, коли апроксимація розв'язку приймається у вигляді (В.2) і шуканими є вже не числові коефіцієнти, як в (В.1) метода Бубнова – Гальоркіна, а функціональні коефіцієнти цього представлення – функції якоїсь однієї змінної.

Вперше такий підхід був майже одночасно запропонований в роботах Власова [13, 14] та Канторовича [35, 36]. В подальшому ця методологія лягла в основу цілої низки методів: інтегральних співвідношень Дородніцина, метода прямих, сплайн-колокацій тощо [2, 18, 32]. Успіх цих методів і надзвичайне їх розповсюдження в розрахунковій практиці прикладних задач різних областей фізики базується на наявності добре розробленого апарату чисельного розв'язання одновимірних лінійних крайових задач [1, 16].

Слід відзначити, що на основі підходів пониження розмірності задачі типу Канторовича – Власова, Дородніцина, сплайн-колокацій розв'язано широкий клас стаціонарних

рних задач механіки деформівного твердого тіла, стислий огляд яких представлений в цьому розділі. Застосування вказаних методів розглядається для двох основних задач стаціонарного деформування – задачі статички (лінійна і нелінійна постановки) та задачі про коливання (вільні коливання та коливання при наявності попереднього навантаження). Ці задачі розглядаються в двовимірній ($N = 2$) та тривимірній ($N = 3$) постановках. Розв’язки задач в обох постановках одержано за єдиною схемою розрахунку в межах зведення до одновимірного випадку, а відрізняються запропоновані методики задіяними системами апроксимуючих (апроксимуючий базис) та вагових (проекційний базис) функцій.

2.1. Двовимірні задачі статички та коливань ($N = 2$).

2.1.1. Постановка задач. За геометричною формою в цьому огляді представлено два типи пружних об’єктів:

K1 – системи спряжених між собою співвісних оболонок обертання різної кривизни:

1. K1(a) – замкнені;
2. K1(б) – незамкнені при жорсткому закріпленні меридіональних країв;

K2 – циліндричні оболонки довільного поперечного перерізу при таких умовах на торцях:

3. K2(a) – шарнірне опирання;
4. K2(б) – жорстке закріплення;
5. K2(в), K2(г) – жорстке закріплення та інші види граничних умов (комбінації шарнірного і жорсткого закріплення).

Загальний вигляд твірної-меридіану в оболонках обертання (K1) та напрямної в циліндричних оболонках довільного поперечного перерізу (K2) представлено на рис 1.

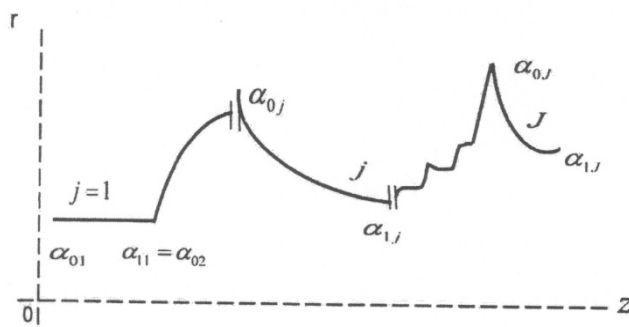


Рис. 1

Деяка вихідна по товщині поверхня (середина, координатна) цих об’єктів віднесена до ортогональної системи координат α, β , де $\alpha \in [\alpha_{01}, \alpha_{1J}]$ координата, що змінюється за меридіаном оболонок обертання та за напрямною для циліндричних оболонок, а координата $\beta \in [\beta_0, \beta_1]$ змінюється в коловому напрямку для оболонок обертання ($\beta = \theta \in [0; 2\pi]$) і за твірною для циліндричних оболонок ($\beta = z \in [0; l]$). Тут J – кількість складових оболонок у випадку спряжених систем.

Оболонки знаходяться в полі статичних навантажень різного виду: силових, розподілених за заданим законом по вихідній поверхні, температурних, зусиллях-моментах, зосереджених на краях $\alpha = \alpha_{01}, \alpha = \alpha_{1J}$, або у випадку спряжених систем – на лініях стику сусідніх оболонок $\alpha = \alpha_j$ ($j = \overline{1, J-1}$).

За товщиною оболонки можуть бути однорідними, неперервно або дискретно неоднорідними та виготовленими з ізотропного або ортотропного матеріалів, що є лінійно пружними і відповідають узагальненому закону Гука в усьому діапазоні діючих навантажень.

НДС оболонки в лінійній постановці розглядається за трьома моделями: класичною Кірхгофа – Лява, уточненою типу Тимошенка з врахуванням поперечних зсувів та уточненою з додатковим врахуванням поперечного обтиску [24, 42, 56, 57]. Температурні навантаження враховуються за гіпотезою Дюгамеля – Неймана, а інерційні сили – за принципом Д’Аламбера. За цими ж моделями розглядається НДС в нелінійній постановці в межах геометрично нелінійної теорії середнього згину. Коливання оболонки вважаються малими, незатухаючими, гармонічними за часом, синхронними і синфазними.

Вихідна нелінійна двовимірна задача про НДС та коливання оболонки може бути представлена для системи диференціальних рівнянь в частинних похідних, що включає лінійну $(-\partial/\partial\alpha + L)\bar{N}$ і нелінійну (\bar{G}) частини, розподілені силові (температурні) навантаження (\bar{q}^0) та інерційні сили $(C\partial^2\bar{N}/\partial t^2)$ в такому матрично-векторному вигляді:

$$D_{\alpha\beta} = \left(-\frac{\partial}{\partial\alpha} + L\right)\bar{N} + \bar{G} + \bar{q}^0 + C\frac{\partial^2\bar{N}}{\partial t^2} = 0, \quad \alpha \in (\alpha_{01}, \alpha_{1J}), \quad \beta \in [\beta_0, \beta_1]. \quad (2.1)$$

До (2.1) додаються умови спряження у випадку складених оболонкових систем, що включають матриці переходу до змінених геометричних і жорсткісних характеристик оболонки (S_{1j}, S_{0j+1}) та задані зосереджені зусилля – моменти (\bar{F}_j^0) –

$$S_{1j}\bar{N} = S_{0j+1}\bar{N} + \bar{F}_j^0; \quad \alpha = \alpha_{1j} = \alpha_{0j+1}, \quad (2.2)$$

граничні умови на контурах $\alpha = \alpha_{01}, \alpha = \alpha_{1J}$ (однорідні $(\bar{b}_{01}^0 = 0, \bar{b}_{1J}^0 = 0)$, неоднорідні $(\bar{b}_{01}^0 \neq 0, \bar{b}_{1J}^0 \neq 0)$), що відображають зв’язок статичних і кінематичних факторів НДС та їх комбінацій на торцях оболонкової системи:

$$B_{01}\bar{N} = \bar{b}_{01}^0, \quad \alpha = \alpha_{01}; \quad (2.3)$$

$$B_{1J}\bar{N} = \bar{b}_{1J}^0, \quad \alpha = \alpha_{1J} \quad (2.4)$$

та прийняті до розгляду умови на обмежуючих контурах $\beta = \beta_0, \beta = \beta_1$.

Задача формулюється відносно шуканої вектор-функції $N = \{\bar{U}, \bar{Q}\} = \{N_n(\alpha, \beta), n = \overline{1, nn}\}$ із кінематичними (\bar{U}) та статичними (\bar{Q}) характеристиками НДС відповідної оболонкової моделі, в яких зручно задавати граничні умови на контурах $\alpha = \alpha_{01}, \alpha = \alpha_{1J}$

$$\bar{N} = \{\bar{U}, \bar{Q}\} = \{N_n(\alpha, \beta), n = \overline{1, nn}\} = \begin{cases} nn = 8, \quad qq = 4 - \text{класична модель;} \\ nn = 10, \quad qq = 2 - \text{уточнена модель;} \\ nn = 12, \quad qq = 2 - \text{уточнена модель} \\ \text{з врахуванням поперечного обтиску} \end{cases} \quad (2.5)$$

(види оболонки 1. K1(a) – 4. K2(б); qq – вищий порядок похідної за змінною β);

$$N = \{\bar{U}, \bar{U}_\beta, \dots\} = \{N_n(\alpha, \beta), n = \overline{1, nn}\} = \begin{cases} nn = 8, \quad qq = 4 - \text{класична модель;} \\ nn = 10, \quad qq = 2 - \text{уточнена модель} \end{cases} \quad (2.6)$$

(оболонки виду 5. K2(б), K2(в) – циліндричні оболонки при жорсткому закріпленні торців та інших типах граничних умов).

2.1.2. Задачі стативи. Лінійна постановка ($\bar{G} = 0; C = 0$). Розв'язання двовимірної крайової задачі стативи по визначенню НДС обох класів пружних оболонок за названими оболонковими моделями базується на зведенні до одновимірної задачі за методом Канторовича – Власова. За апроксимуючий напрямок обрано напрямок по координаті β – коловому для оболонок обертання і за твірною для циліндричних оболонок.

Шуканий розв'язок $\bar{N} = \{N_i(\alpha, \beta), i = \overline{1, nn}\}$ двовимірної задачі для системи (2.1) з відповідними граничними (2.3), (2.4) і додатковими умовами (2.2) наближено приймається у вигляді скінченного відрізка ряду за функціями апроксимуючого базису $\Phi_\beta = \{\varphi_i(\beta)\}, i = \overline{1, M}$:

$$\bar{N} = \left\{ N_n(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^M N_{ni}(\alpha) \varphi_{ni}(\beta), n = \overline{1, nn} \right\}, \quad (2.7)$$

де функціональні коефіцієнти $\bar{N}_{ai} = \{N_{ni}(\alpha), n = \overline{1, nn}\}$, як компоненти вектор-функцій $\bar{N}_{ai}, i = \overline{1, M}$, є невідомими.

Для знаходження цих функцій вихідна задача шляхом її проектування на напрямки α зводиться до одновимірної за проекційним базисом $\Psi_\beta = \{\psi_k(\beta)\}, k = \overline{1, M}$ з ваговими функціями $\psi_k(\beta)$.

Вибір апроксимуючого $\Phi = \{\varphi_i(\beta)\}, i = \overline{1, M}$ та проекційного $\Psi = \{\psi_k(\beta)\}, k = \overline{1, M}$ базисів для виділених класів пружних оболонок 1. K1(a) – 5. K2(б), K2(в) представлено в табл. 1.

Таблиця 1

Класи оболонок	Апроксимаційний базис $\Phi_\beta = \{\varphi_i(\beta)\},$ $i = \overline{1, M}$	Проекційний базис $\Psi_\beta = \{\psi_k(\beta)\},$ $k = \overline{1, M}$
1. K1(a)	$\{\varphi_i(\beta)\} = \{\sin i\beta, \cos i\beta\}$	$\{\psi_k(\beta)\} = \{\varphi_k(\beta)\}$
2. K1(б)	$\{\varphi_i(\beta)\}$ – поліноми Хорві (Harvej) (визначаються за рекурентними формулами)	$\{\psi_k(\beta)\} = \{\varphi_k(\beta)\}$
3. K2(a)	$\{\varphi_i(\beta)\} = \{\sin(i\pi/l)\beta, \cos(i\pi/l)\beta\}$	$\{\psi_k(\beta)\} = \{\varphi_k(\beta)\}$
4. K2(б)	$\{\varphi_i(\beta)\}$ – поліноми Хорві (Harvej)	$\{\psi_k(\beta)\} = \{\varphi_k(\beta)\}$
5. K2(б), K2(в)	$\{\varphi_i(\beta)\} = \{B_m^i(\beta)\}$ – комбінації B-сплайнів третьої (п'ятої) степені	$\{\psi_k(\beta)\} = \{\delta(\beta - \beta_k)\}$

Методи для 1. K1(a), 3. K2(a), де використані тригонометричні функції як апроксимуючі і як вагові, є по суті методами відокремлення змінних Фур'є; метод для оболонок 2. K1(б), 4. K2(б) є методом інтегральних співвідношень в формі метода Канторовича – Власова, а метод для 5. K2(б), K2(в) відомий як метод сплайн-колокацій.

В результаті застосування цих методів вихідна двовимірна задача (2.1) – (2.4) зводиться до одновимірної з відповідними граничними і додатковими умовами: $D_{\alpha\beta} \rightarrow \widetilde{D}_\alpha$.

Якщо ввести до розгляду вектор-функцію $\bar{N}_\alpha = \{\bar{N}_{ai}\}, i = \overline{1, M}$ з розмірністю $nn \times M$ як сукупністю шуканих векторів $\{N_{ai}\}$, то система звичайних диференціальних рівнянь \widetilde{D}_α матиме такий загальний вигляд:

$$\widetilde{D}_\alpha = \left(-I_\alpha \frac{d}{Ad\alpha} + L_\alpha \right) \bar{N}_\alpha + \bar{q}_\alpha^0 = 0, \quad \alpha \in (\alpha_{01}, \alpha_{1J}) \quad (2.8)$$

(знак «тільда» та індекс α означають, що позначені ними оператори і вектори перетворені з операторів і векторів вихідної задачі процедурою проектування з базисом $\Psi = \{\psi_k(\beta)\}, k = \overline{1, M}$).

В загальному випадку квадратні матриці I_α та L_α мають клітинну структуру і порядок їх рівний $nm \times M$, а шуканий вектор-функція \bar{N}_α знаходиться зі «зв'язаної» системи звичайних диференціальних рівнянь для всіх вектор-функцій $\bar{N}_{\alpha i}, i = \overline{1, M}$ разом. Зауважимо, що матриця I_α в усіх розглянутих випадках вибору апроксимуючого і проєкційного базисів для виділених класів пружних оболонок 1. K1(a) – 5. K2(б), K2(в) є клітинно-діагональною.

В окремому випадку, коли властивості жорсткості оболонок обертання (1. K1(a), 2. K1(б)) та циліндричних оболонок при спеціальних умовах шарнірного опирання (жорсткого закріплення) на торцях (3. K2(a), 4. K2(б)) не змінюються в апроксимуючому напрямку β , матриця L_α «розпадається» і задача зводиться до розв'язування послідовності з M «незв'язаних» крайових задач порядку nm для кожного члена апроксимації (2.7) $\bar{N}_{\alpha i} = \{N_{ni}(\alpha), n = \overline{1, nm}\}$ незалежно одна від одної.

Для розв'язання одновимірних лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами виду (2.8) застосовується метод дискретної ортогоналізації (метод ортогональної прогонки) [1, 16], що добре зарекомендував себе в стаціонарних задачах механіки деформівного твердого тіла [18, 56, 57].

Розв'язання задач статки на основі різних моделей деформування (класичної, уточненої типу Тимошенка, уточненої з врахуванням поперечного обтиску) для спряжених оболонок обертання (1. K1(a)) та некругових циліндричних оболонок при спеціальних умовах на торцях (3. K2(a)) зі сталими характеристиками жорсткості в апроксимуючому напрямку представлено, наприклад в роботах [10, 17, 22, 23, 54, 67]. В цьому випадку вихідна задача зводиться до послідовності M незв'язаних одновимірних крайових задач nm -го порядку.

НДС оболонок обертання (1. K1(a), 2. K1(б)) та циліндричних оболонок довільного поперечного перерізу з жорстким або комбінаціями шарнірного та жорсткого закріплення торців (5. K2(б), K2(в)) при змінній товщині в обох координатних напрямках розглянуто в статтях [3, 19, 57, 88, 90]. Вихідна задача для цих класів оболонок зводиться до «зв'язаної» системи звичайних диференціальних рівнянь $nm \times M$ порядку з відповідними умовами однозначності (граничними та додатковими).

2.1.3. Задачі статки. Нелінійна постановка ($\bar{G} \neq 0; C = 0$ в (2.1)). НДС пружних систем зі спряжених оболонок обертання при осесиметричних навантаженнях в докритичній стадії деформування описується нелінійною одновимірною крайовою задачею відносно вектор-функції $\bar{N}^0 = \{N_n^0(\alpha)\}$ для системи звичайних диференціальних рівнянь виду:

$$D_\alpha = \left(-\frac{d}{Ad\alpha} + L^0 \right) \bar{N}^0 + \bar{G}(\alpha, \bar{N}^0, \dots) + \bar{q}^0 = 0, \quad \alpha \in (\alpha_{01}, \alpha_{1J}) \quad (2.9)$$

при відповідних граничних умовах та умовах спряження на лініях стику різнорідних оболонок [11].

Для розв'язання цієї задачі використовується процедура лінеаризації в формі Ньютона – Канторовича – Рафсона [1] (метод квазілінеаризації), в результаті якої нелінійна вихідна задача для системи (2.9) зводиться до ітеративної послідовності лінеаризованих крайових задач $D_\alpha \rightarrow D_\alpha^{(m)}, m = 1, 2, \dots$.

$$D_{\alpha}^{(m)} = D_{\alpha}^{(m)} \left(\overline{N^{0(m)}}, \overline{N^{0(m-1)}}, \overline{N_{,\alpha}^{0(m)}}, \overline{N_{,\alpha}^{0(m-1)}}, \dots \right) = 0, \quad \alpha \in (\alpha_{01}, \alpha_{1J})$$

(нижній індекс після коми означає похідну від компонент вектор-функцій $\overline{N^{0(m)}}$, $\overline{N^{0(m-1)}}$).

На кожному кроці наближення m ($m = 1, 2, \dots$) для розв'язання лінеаризованої задачі застосовується метод ортогональної прогонки.

В статті [21] показано, що процес квазілінеаризації в даному класі задач теорії оболонок збігається в докритичній стадії деформування.

Дослідження двовимірних нелінійних задач для гнучких оболонок обертання, пологих оболонок, пластин та некругових циліндричних оболонок відмічені в оглядах [29, 89] та проведені в роботі [30].

В монографії [30] викладено підходи до чисельного розв'язання крайових задач статички оболонок і пластин в геометрично нелінійній постановці. В докритичній області деформування досліджується НДС пружних систем з гнучких оболонок обертання різної геометрії і структури за товщиною зі змінною в обох координатних напрямках жорсткістю та некругових циліндричних оболонок зі змінними параметрами за напрямною. Розв'язання відповідних нелінійних двовимірних крайових задач базується на зведенні їх до одновимірних із застосуванням методу прямих, методу Канторовича – Власова в поєднанні з методами квазілінеаризації та дискретної ортогоналізації.

2.1.4. Вільні коливання оболонкових систем ($G = 0; C \neq 0$). В межах прийнятих припущень щодо малості, гармонічності за часом, синхронності та синфазності коливань розглянутих оболонкових систем задача визначення їх частотних характеристик без врахування дисипативних сил є однорідною і після відокремлення часового множника $e^{i\omega t}$ запишеться в такому вигляді:

$$D_{\alpha\beta}(\lambda) = \left(-\frac{\partial}{\partial \alpha} + L - \lambda C \right) \overline{N} = 0, \quad \alpha \in (\alpha_{01}, \alpha_{1J}), \quad \beta \in [\beta_0, \beta_1] \quad (2.10)$$

при відсутності контурних навантажень та навантажень, зосереджених в окремих поперечних перерізах.

Тут $\lambda = \omega^2$, $\omega, \overline{N} = \{N_n(\alpha, \beta, \lambda)\}$ ($n = \overline{1, nm}$) – шукана частота та відповідна їй форма вільних коливань оболонок. Частотні характеристики, як і в задачах статички, визначаються на основі класичної Кірхгофа – Лява ($nm = 8$), уточненої типу Тимошенка ($nm = 10$) та уточненої з врахуванням поперечного обтиску ($nm = 12$) оболонкових моделей.

Застосовуючи процедуру проектування Канторовича – Власова з поданням шуканого розв'язку $\overline{N} = \{N_n(\alpha, \beta, \lambda)\}$ за тими ж апроксимуючим $\Phi = \{\varphi_i(\beta)\}$, $i = \overline{1, M}$ та проєкційним $\Psi = \{\psi_k(\beta)\}$, $k = \overline{1, M}$ базисами, що і в задачі статички (табл. 1)

$$\overline{N} = \left\{ N_n(\alpha, \beta, \lambda) = \sum_{i=1}^M N_{ni}(\alpha, \lambda) \varphi_{ni}(\beta), n = \overline{1, nm} \right\}, \quad (2.11)$$

одержуємо відповідну одновимірну однорідну задачу для системи звичайних диференціальних рівнянь з шуканим частотним параметром λ ($D_{\alpha\beta}(\lambda) \rightarrow D_{\alpha}(\lambda)$), що має вигляд

$$D_{\alpha}(\lambda) = \left(-I_{\alpha} \frac{d}{d\alpha} + L_{\alpha}(\alpha, \lambda) \right) \overline{N}_{\alpha} = 0, \quad \alpha \in (\alpha_{01}, \alpha_{1J}) \quad (2.12)$$

при однорідних граничних і додаткових умовах в місцях спряження оболонок.

Аналогічно до задачі статички (п. 2.1.2) диференціальний матричний оператор $L_{\alpha}(\alpha, \lambda)$ в загальному випадку (змінні коефіцієнти за обома координатними напрям-

ками α і β , циліндричні оболонки при інших умовах на торцях (5. К2(б), К2(в)) є «зв'язаним», тобто формулюється для всіх M шуканих форм коливань в представленні (2.11). В окремому випадку сталих характеристик жорсткості по β для оболонок обертання 1. К1(а), 2. К1(б) та циліндричних оболонок при умовах 3. К2(а) і 4. К2(б) вихідна задача визначення частотного параметра λ «розпадається» на M окремих однорідних задач порядку $n = mn$.

Знаходження частот і форм вільних коливань, як нетривіальний розв'язок однорідної задачі для системи (2.12) базується на застосуванні таких методів:

послідовних наближень в варіанті оберненої ітерації для зведення однорідної задачі з невідомим числовим параметром до послідовності неоднорідних крайових задач [39];

покрокового пошуку ($\Delta(\lambda)$ – метод) [34];

метода ортогональної прогонки [1, 16].

Для розрахунку частотних характеристик пружних систем з оболонок обертання різної геометрії і структури за товщиною, а також зі спряжених вздовж напрямної циліндричних елементів різного поперечного перерізу пропонується такий підхід.

Визначення власних частот об'єкту за класичною моделлю оболонок з застосуванням методу послідовних наближень в варіанті оберненої ітерації.

Уточненні одержаних значень власних частот за моделлю типу Тимошенка із застосуванням методу покрокового пошуку.

При наявності в системі спряжених оболонок товстостінних елементів складної неоднорідної структури за товщиною проведення оцінки правомірності застосування наближених оболонкових моделей на прикладі модельного циліндра заданої будови з залученням просторової постановки задачі.

Ця тематика висвітлена в роботах [4, 7, 17, 22, 68, 75, 83, 86, 92, 93].

2.1.5. Коливання спряжених оболонок обертання при статичних навантаженнях. У порівнянні з загальною постановкою задач статичних та коливань, наведеною в пункті 2.1.1, тут при дослідженні коливань тонкостінних елементів в полі статичних навантажень приймаються деякі обмеження і додаткові припущення.

Розглядаються лише пружні системи з оболонок обертання описаної форми і структури ($\beta = \theta$, позначення (2.5));

діючі статичні консервативні поля є осесиметричними $\bar{q}^0(\alpha, \theta) = \bar{q}^0(\alpha)$, $\bar{F}_j^0(\alpha_j, \theta) = \bar{F}_j^0(\alpha_j) = \text{const}$, $\bar{b}_{01}^0(\alpha_{01}, \theta) = \bar{b}_{01}^0(\alpha_{01}) = \text{const}$, $\bar{b}_{1j}^0(\alpha_{1j}, \theta) = \bar{b}_{1j}^0(\alpha_{1j}) = \text{const}$;

за основний НДС приймається такий, що зумовлений або окремими осесиметричними навантаженнями, або їх комбінацією;

коливання вважаються малими збуреннями цього основного стану.

Таким чином, задача про коливання спряжених оболонок обертання в полі статичних осесиметричних навантажень формулюється у вигляді (2.1) – (2.4) при прийнятих додаткових припущеннях.

Загальну схему розв'язування цієї задачі наведемо як послідовність виконання таких процедур.

1. Декомпозиція шуканого стану оболонок (вектор \bar{N}) на основний статичний (вектор \bar{N}^0) і динамічний (вектор \bar{N}^d) стани з огляду на припущення щодо малості коливань, що розглядаються:

$$\bar{N} = \bar{N}^0 + \bar{N}^d; \bar{N}^d \ll \bar{N}^0. \quad (2.13)$$

2. Декомпозиція нелінійної задачі (2.1) – (2.4) відповідно до подання (2.13) на дві взаємозв'язані задачі:

(i) задача про основний попередньо напружений стан при заданих статичних осесиметричних навантаженнях, яка є одновимірною нелінійною задачею і формулюється відносно вектор-функції $\bar{N}^0 = \{N_n^0(\alpha)\}$:

$$D_{\alpha 0} = \left(-\frac{d}{Ad\alpha} + L^0 \right) \bar{N}^0 + \bar{G}(\alpha, \bar{N}^0, \dots) + \bar{q}^0 = 0, \quad \alpha \in (\alpha_{01}, \alpha_{1J}); \quad (2.14)$$

$$S_{1j} \bar{N}^0 = S_{0j+1} \bar{N}^0 + \bar{F}_j^0; \quad \alpha = \alpha_j; \quad j = 1, \dots, J-1; \quad (2.15)$$

$$B_{01} \bar{N}^0 = \bar{b}_{01}^0; \quad \alpha = \alpha_{01}; \quad (2.16)$$

$$B_{1J} \bar{N}^0 = \bar{b}_{1J}^0; \quad \alpha = \alpha_{1J} \quad (2.17)$$

(тут L^0 – матричний диференціальний оператор нульового порядку);

(ii) задача про малі гармонічні коливання оболонок відносно основного стану, що одержана в результаті лінеаризації вихідної задачі (2.1) – (2.4) по вектор-функції $\bar{N}^d = \{N_n^d(\alpha, \theta, t)\}$ і є двовимірною лінійною однорідною крайовою задачею:

$$D_{\alpha\theta} = \left(-\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \tilde{L} + C \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \bar{N}^d = 0; \quad \alpha \in (\alpha_{01}, \alpha_{1J}); \quad \theta \in [0, 2\pi]; \quad (2.18)$$

$$S_{1j} \bar{N}^d = S_{0j+1} \bar{N}^d; \quad \alpha = \alpha_{1j} = \alpha_{0j+1}; \quad j = 1, \dots, J-1; \quad (2.19)$$

$$B_{01} \bar{N}^d = 0; \quad \alpha = \alpha_{01}; \quad (2.20)$$

$$B_{1J} \bar{N}^d = 0; \quad \alpha = \alpha_{1J} \quad (2.21)$$

(тут $\tilde{L} = L + (\partial \bar{G}) / (\partial \bar{N}^0)$ – диференціальний матричний оператор, що містить як параметричні члени компоненти НДС основного стану $\bar{N}^0 = \{N_n^0(\alpha)\}$).

3°. Розв’язання одновимірної нелінійної крайової задачі (2.14) – (2.17) із застосуванням процедури лінеаризації у формі Ньютона – Канторовича – Рафсона в поєднанні з методом ортогональної прогонки (п. 2.1.3).

4°. Зведення двовимірної крайової задачі (2.18) – (2.21) після відокремлення часового множника $e^{i\omega t}$ в компонентах вектора \bar{N}^d і подання їх у вигляді тригонометричних рядів Фур’є за коловою координатою θ

$$\bar{N}^d = \left\{ N_n^d(\alpha, \theta, t) = \sum_{k=0,1,2,\dots} N_{nk}^d(\alpha) \right\} \begin{bmatrix} \sin k\theta \\ \cos k\theta \end{bmatrix} e^{i\omega t} \quad (n = mn) \quad (2.22)$$

до послідовності однопараметричних однорідних крайових задач з однорідними граничними і додатковими умовами (2.19) – (2.21), що формулюються відносно функціональних коефіцієнтів $\bar{N}_k^d = \{N_{nk}^d(\alpha)\}$ в (2.22):

$$D_{\alpha k}(\lambda) = \left(-\frac{d}{Ad\alpha} + \tilde{L}_k \right) \bar{N}_k^d = 0 \quad (\alpha \in (\alpha_{01}, \alpha_{1J})), \quad (2.23)$$

де $\tilde{L}_k = \{\tilde{l}_{ij}^k(\alpha, k, \bar{N}^0, \omega_k)\}$ – матричний алгебраїчний оператор, одержаний з диференціального оператора \tilde{L} в (2.18) з урахуванням подання (2.22). Оператори цих задач містять невідомий числовий параметр $\lambda_k = \omega_k^2$, де ω_k , N_k^d – шукані власні частоти та форми коливань оболонкової системи; параметр k характеризує форму хвилеутворення в коловому напрямку (як при дослідженні вільних коливань в пункті 2.1.4).

5°. Знаходження числового параметра $\lambda_k = \omega_k^2$ для кожного значення гармоніки k в (2.22) з умови існування нетривіального розв'язку $\bar{N}_k^d = \{N_{nk}^d(\alpha)\}$ однорідної задачі для системи (2.23) із застосуванням методу послідовних наближень у варіанті оберненої ітерації і процедури покрокового пошуку (п. 2.1.4) [34, 39].

Таким чином, дослідження динамічних характеристик спряжених оболонкових систем при комбінованих статичних навантаженнях складається з двох головних етапів: визначення основного НДС при заданих комбінаціях статичних навантажень; розрахунок частотного спектра оболонок з урахуванням основного НДС.

Цей підхід, який відображає повну інформацію як про геометричні і структурні особливості конструкції, так і про вплив діючих полів у їх заданій комбінації, дозволяє побудувати спектральний портрет (характеристику) конструкції в цілому.

Дослідження, представлені в роботах [8, 20, 23, 76], частково ілюструють застосування запропонованого підходу до аналізу коливань попередньо навантажених оболонок.

2.2. Тривимірні задачі статичної та динамічної механіки ($N = 3$).

2.2.1. Постановка задачі. Задачі статичної та динамічної механіки в тривимірній постановці представлені в роботі для двох класів пружних циліндричних об'єктів:

замкнуті кругові порожнисті циліндри;

нетонкі некругові циліндричні оболонки.

Обидва класи циліндричних тіл можуть бути неперервно або дискретно неоднорідними за радіусом і розглядаються при спеціальних умовах на торцях.

Геометрична форма вказаних об'єктів може бути описана ковзанням прямої (твірної) по деякій гладкій кривій (напрямній) – поверхнею G та нормаллю γ до неї. Поверхня G віднесена до ортогональної самоспряженої системи координат α, β , де $\alpha = z \in [0, l]$ і $\beta = \theta \in [0, 2\pi]$ – координати, що змінюються відповідно за довжиною циліндричного тіла та за напрямною (θ – центральний кут в площині поперечного перерізу $\alpha = z = \text{const}$). Положення точок тіла за нормаллю до поверхні G визначається координатою γ , що у випадку дискретно неоднорідної структури з J шарів, змінюється таким чином $\gamma = \{\gamma_j \in [\gamma_{0j}, \gamma_{1j}], j = \overline{1, J}\}$ ($\gamma_{1j} = \gamma_{0j+1} = \text{const}$ ($j = \overline{1, J-1}$) – є поверхнями контакту суміжних j -го і $(j+1)$ -го шарів).

Для кругових циліндрів напрямна є колом, а нормаллю до циліндричної поверхні G є радіус циліндра $\gamma = r = \{r_j \in [r_{0j}, r_{1j}], j = \overline{1, J}\}$ (r_{01}, r_{1J} – радіуси лицевих поверхонь).

В цьому випадку система координат α, β, γ є просторовою циліндричною ортогональною системою координат.

Описані циліндричні тіла знаходяться при статичних впливах різної природи: температурного поля $T = T(\alpha, \beta, \gamma)$, силових навантажень, розподілених певним чином на лицевих поверхнях або торцевих площинах $z = \text{const}$. На частині граничної поверхні можуть бути задані певні кінематичні обмеження.

НДС і коливання кругових і некругових циліндрів розглядаються в лінійній постановці тривимірної теорії пружності неоднорідного анізотропного (ортотропного) тіла з урахуванням температурних навантажень за гіпотезою Дюгамеля – Неймана та інерційних сил за принципом Д'Аламбера. При всіх видах і величинах діючих навантажень матеріал оболонок є ортотропним (ізотропним), лінійно-пружним і відповідає узагальненому закону Гука, а суміжні шари шаруватих циліндрів деформуються без відриву і проковзування. На торцях порожнистих циліндрів приймаються граничні умови типу шарнірного опирання (ковзання) або жорсткого закріплення. Розглянуті такі класи циліндричних тіл:

1. K1(a) – кругові порожнисті циліндри при шарнірному закріпленні торців;
2. K1(б) – кругові порожнисті циліндри при жорсткому закріпленні торців;
3. K2(a) – некругові нетонкі циліндричні оболонки при шарнірному закріпленні торців.

Загальна структура вихідної тривимірної задачі про НДС та вільні коливання для порожнистих циліндрів і нетонких некругових циліндричних оболонок може бути представлена в такому матрично-векторному вигляді:

система диференціальних рівнянь в частинних похідних –

$$D_{z\theta\gamma} = \left(-\frac{\partial}{\partial\gamma} + \sum_{q_1=0}^2 B_{zq_1} \frac{\partial^{q_1}}{\partial z^{q_1}} + \sum_{q_2=0}^2 B_{\theta q_2} \frac{\partial^{q_2}}{\partial \theta^{q_2}} + B_{z\theta} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \theta} + C \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \bar{\sigma} + \bar{f} = 0;$$

$$\gamma \in (\gamma_{01}, \gamma_{1J}), \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad z \in (0, l); \quad (2.24)$$

умови сумісної роботи шарів на поверхнях їх контакту –

$$\bar{\sigma}^- = \bar{\sigma}^+; \quad \gamma = \gamma_{1j} = \gamma_{0j+1} \quad (j = \overline{1, J-1}); \quad (2.25)$$

граничні умови на лицевих поверхнях –

$$R_{01} \bar{\sigma} = \bar{b}^0; \quad \gamma = \gamma_{01}; \quad (2.26)$$

$$R_{1J} \bar{\sigma} = \bar{b}^J; \quad \gamma = \gamma_{1J} \quad (2.27)$$

з умовами типу шарнірного опирання або жорсткого закріплення на торцевих площинах $z = 0$; $z = l$ та умовами періодичності за напрямною.

Задача формулюється відносно шуканої вектор-функції $\bar{\sigma} = \{\bar{U}, \bar{Q}\} = \{\sigma_n(z, \theta, \gamma), n = \overline{1, 6}\}$ з кінематичними (\bar{U}) та статичними (\bar{Q}) характеристиками НДС, в яких зручно задавати граничні умови на лицевих поверхнях $\gamma = \gamma_{01}, \gamma = \gamma_{1J}$ та умови ідеального контакту між суміжними шарами.

2.2.2. Задачі статики. Для розв'язання тривимірної задачі (2.24) – (2.27) (як і у випадку двовимірних задач, п. 2.1.2) застосовується проєкційний метод зведення до одновимірної задачі в формі Канторовича – Власова при апроксимації за двома координатними напрямками: за довжиною $\alpha = z \in [0, l]$ і за напрямною $\beta = \theta \in [0, 2\pi]$, так що шуканий розв'язок наближено подається у вигляді подвійних рядів скінченної довжини:

$$\bar{\sigma} = \left\{ \sigma_n(z, \theta, \gamma) = \sum_{i=1, 2, \dots, I} \sum_{k=1, 2, \dots, K} \sigma_{nik}(\gamma) \varphi_{1i}(\theta) \varphi_{2k}(z) \right\} \quad (n = \overline{1, 6}), \quad (2.28)$$

де функції $\{\sigma_{nik}(\gamma), n = \overline{1, 6}\} = \overline{\sigma_{\gamma ik}}$ є невідомими, а функції $\varphi_{1i}(\theta), \varphi_{2k}(z)$ ($i = \overline{1, I}; k = \overline{1, K}$) є заздалегідь вибраними базисними функціями.

Вибір апроксимаційних ($\Phi_\theta(\varphi_{1i}(\theta)), i = \overline{1, I}, \Phi_z(\varphi_{2k}(z)), k = \overline{1, K}$) та проєкційних ($\Psi_\theta(\psi_{1i}(\theta)), i = \overline{1, I}, \Psi_z(\psi_{2k}(z)), k = \overline{1, K}$) базисів для класів циліндрів 1. K1(a), 2. K1(б), 3. K2(a) представлений в табл. 2.

Враховуючи для циліндрів 1. K1(a) і 3. K2(a) однорідність фізико-механічних і геометричних параметрів обох класів циліндричних тіл за твірною z , вихідна тривимірна задача (2.24) – (2.27) за процедурою Канторовича – Власова зводиться для кожного k -го члену ряду (2.28) ($k = 1, 2, \dots, K$) до двовимірної задачі за коловою координатою θ та координатою γ , яка в свою чергу зводиться до одновимірної задачі з неві-

домою вектор-функцією $\overline{\sigma_{\gamma i}^{(k)}} = \left\{ \sigma_{ni}^{(k)}(\gamma); n = \overline{1, 6}; i = \overline{1, I} \right\}$, тобто до послідовності K одновимірних задач $6I$ -го порядку ($D_{z\theta\gamma} \rightarrow D_{\gamma}^{(k)}$).

Таблиця 2

Класи циліндрів	Апроксимаційні базиси $\Phi_{\theta}(\varphi_{1i}(\theta)), i = \overline{1, I}$ $\Phi_z(\varphi_{2k}(z)), k = \overline{1, K}$	Проекційні базиси $\Psi_{\theta}(\psi_{1i}(\theta)), i = \overline{1, I}$ $\Psi_z(\psi_{2k}(z)), k = \overline{1, K}$	Література. Окремі роботи
1. K1(a)	$\{\varphi_{1i}(\theta)\} = \{\sin i\theta, \cos i\theta\},$ $\{\varphi_{2k}(z)\} = \left\{ \sin \frac{k\pi}{l} z, \cos \frac{k\pi}{l} z \right\}$	$\{\psi_{1k}(\theta)\} = \{\varphi_{1k}(\theta)\},$ $\{\psi_{2k}(z)\} = \{\varphi_{2k}(z)\}$	[26]
2. K1(б)	$\{\varphi_{1i}(\theta)\} = \{\sin i\theta, \cos i\theta\},$ $\{\varphi_{2k}(z)\} = \{B_m^k(z)\} -$ комбінації B -сплайнів третьої степені	$\{\psi_{1k}(\theta)\} = \{\varphi_{1k}(\theta)\},$ $\{\psi_{2k}(z)\} = \{\delta(z - z_k)\}$	[95]
3. K2(a)	$\{\varphi_{1i}(\theta)\} = \{\sin i\theta, \cos i\theta\},$ $\{\varphi_{2k}(z)\} = \left\{ \sin \frac{k\pi}{l} z, \cos \frac{k\pi}{l} z \right\}$	$\{\psi_{1k}(\theta)\} = \{\varphi_{1k}(\theta)\},$ $\{\psi_{2k}(z)\} = \{\varphi_{2k}(z)\},$	[96]

Якщо ввести до розгляду вектор-функцію $\overline{\sigma_{\gamma}^{(k)}} = \left\{ \overline{\sigma_{\gamma i}^{(k)}} \right\}, i = \overline{1, I}$ з розмірністю $n \times I$ як сукупність шуканих векторів $\left\{ \overline{\sigma_{\gamma i}^{(k)}} \right\}, i = \overline{1, I}$, то для її знаходження одновимірної задачі за змінною γ для кожного члена k в (2.28) можна подати в такому вигляді:

$$D_{\gamma}^{(k)} = \left(-I_{\gamma}^{(k)} \frac{d}{d\gamma} + L_{\gamma}^{(k)} \right) \overline{\sigma_{\gamma}^{(k)}} + f_{\gamma}^{(k)} = 0, \quad \gamma \in (\gamma_{01}, \gamma_{1J}) \quad (2.29)$$

при відповідних умовах спряження між контактуючими шарами та граничними умовами на лицевих поверхнях.

Оператори і вектори з нижнім індексом γ в диференціальному виразі $D_{\gamma}^{(k)}$ означають, що для кожного k в (2.28) вони відповідають операторам і векторам вихідної задачі (2.24) – (2.27), які перетворені процедурою Канторовича – Власова з вибраними базисними і ваговими функціями. Всі квадратні оператори-матриці в (2.29) мають клітинну структуру з клітинами-матрицями порядку $n = 6$. Завдяки ортогональності вибраних базисних і вагових функцій (табл. 2) матриці $I_{\gamma}^{(k)}$ є клітинно-діагональними; таку діагональну будову мають і матриці $L_{\gamma}^{(k)}$ для кругових порожнистих циліндрів з однорідними властивостями в коловому напрямку, так що вихідна задача в цьому випадку для кожного k в (2.28) зводиться до послідовності I окремих одновимірних задач 6-го порядку за змінною γ при відповідних граничних умовах [26]. Для нетонких циліндричних оболонок складного поперечного перерізу матриця $L_{\gamma}^{(k)}$ не буде клітинно-діагональною і задача не «розпадатиметься» на незв'язані і одновимірні задачі, а буде формулюватися для всіх I невідомих вектор-функцій $\left\{ \overline{\sigma_{\gamma i}^{(k)}} \right\}, i = \overline{1, I}$ у сукупності [96].

Аналогічні процедури проводяться для кругових циліндрів 2. K1(б) при жорсткому закріпленні торцевих площин.

Враховуючи періодичність всіх факторів НДС за коловою координатою θ , вихідна тривимірна задача (2.24) – (2.27) за процедурою Канторовича – Власова зводиться для кожного i -го члену ряду (2.28) ($i = 1, 2, \dots, I$) до двовимірної задачі за змінними z і γ , яка в свою чергу, зводиться до одновимірної задачі з невідомою вектор-функцією $\overline{\sigma}_{\gamma i}^{(i)} = \left\{ \overline{\sigma}_{ni}^{(i)}(\gamma); n = \overline{1, 6}; k = \overline{1, K} \right\}$, тобто до послідовності I одновимірних задач $6K$ -го порядку ($D_{z\theta\gamma} \rightarrow D_{\gamma}^{(i)}$).

Якщо ввести до розгляду вектор-функцію $\overline{\sigma}_{\gamma}^{(i)} = \left\{ \overline{\sigma}_{\gamma k}^{(i)} \right\}, k = \overline{1, K}$ з розмірністю $n \times K$ як сукупність шуканих векторів $\left\{ \overline{\sigma}_{\gamma k}^{(i)} \right\}, k = \overline{1, K}$, то для її знаходження одновимірну задачу за змінною γ для кожного члена i в (2.28) можна подати у вигляді, аналогічному (2.29):

$$D_{\gamma}^{(i)} = \left(-I_{\gamma}^{(i)} \frac{d}{d\gamma} + L_{\gamma}^{(i)} \right) \overline{\sigma}_{\gamma}^{(i)} + f_{\gamma}^{(i)} = 0, \quad \gamma \in (\gamma_{01}, \gamma_{1J}) \quad (2.30)$$

з відповідними граничними умовами і умовами спряження суміжних шарів за змінною γ .

Коментарі до векторів і операторів цієї системи аналогічні наведеним для (2.29), а саме. Оператори і вектори з нижнім індексом γ в диференціальному виразі $D_{\gamma}^{(i)}$ означають, що для кожного i в поданні (2.28) вони відповідають операторам і векторам вихідної задачі (2.24) – (2.27), які перетворені процедурою Канторовича – Власова з вибраними апроксимаційними і проєкційними базисами (табл. 2, 2. К1(б)). Всі квадратні оператори-матриці в (2.30) мають клітинну структуру з клітинами-матрицями порядку $n = 6$. Завдяки ортогональності вибраних базисних і вагових функцій (табл. 2, 2. К1(б)) матриці $L_{\gamma}^{(i)}$ є клітинно-діагональними, а матриці $L_{\gamma}^{(i)}$ формуються для всіх K невідомих вектор-функцій $\left\{ \overline{\sigma}_{\gamma i}^{(i)} \right\}, k = \overline{1, K}$ у сукупності [95].

Таким чином, розв'язання тривимірних задач статки для порожнистих кругових циліндрів та нетонких циліндричних оболонок некругового поперечного перерізу при шарнірному закріпленні торців за методом Канторовича – Власова зводиться до K окремих двовимірних задач за змінними γ (за радіусом) та θ (за напрямною). Кожна з них формується для всіх I задач в (2.28) одночасно для зв'язаної задачі (2.30) (нетонкі циліндри складного поперечного перерізу [96]), або для послідовності окремих I задач (порожністі кругові замкнуті циліндри [26]).

Для циліндрів з жорстким закріпленням торців вихідна 3D задача (2.24) – (2.27) зводиться до послідовності з I двовимірних задач за товщинною координатою γ та за твірною z , кожна з яких формується для всіх K задач в (2.28) одночасно для «зв'язаної» системи (2.30).

2.2.3. Вільні коливання. Задачі про вільні коливання пружних тіл в просторовій постановці представлені тут для кругових порожнистих циліндрів неоднорідної в радіальному напрямку структури при умовах типу шарнірного та жорсткого закріплення торцевих площин (1. К1(а), 2. К1(б)). При цьому, як і у випадку двовимірних задач (пункт 2.1.1) приймається, що коливання є малими, гармонічними за часом, незатухаючими, синфазними і синхронними для всіх точок тіла. Прийняті припущення дозволяють відокремити в шуканому розв'язку часовий множник $e^{i\omega t}$ і визначити частотні характеристики циліндрів з тривимірної однорідної задачі для системи диференціальних рівнянь виду

$$D_{z\theta\gamma}(\lambda) = \left(-\frac{\partial}{\partial\gamma} + \sum_{q_1=0}^2 B_{zq_1} \frac{\partial^{q_1}}{\partial z^{q_1}} + \sum_{q_2=0}^2 \frac{\partial^{q_2}}{\partial \theta^{q_2}} + B_{z\theta} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \theta} - \lambda C \right) \bar{\sigma} = 0;$$

$$\gamma \in (\gamma_{01}, \gamma_{1J}); \quad z \in (0, l); \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad (2.31)$$

при відсутності навантажень на лицевих поверхнях $\bar{b}^0 = 0$, $\bar{b}^J = 0$ в (2.26), (2.27) та тих же умовах в коловому напрямку і на торцях циліндрів. Тут $\lambda = \omega^2$, $\omega, \bar{\sigma}$ – шукана частота та відповідна їй форма вільних коливань циліндра.

За аналогією із задачею статки для розв'язання задачі проводиться пониження її вимірності за процедурою зведення Канторовича – Власова за певним чином вибраними апроксимуючими (функції $\varphi_{1i}(\theta)$, $\varphi_{2i}(z)$) та проєкційними (функції $\psi_{1i}(\theta)$, $\psi_{2i}(z)$) базисами. Шуканий розв'язок $\bar{\sigma}(z, \theta, \gamma, \lambda)$, як і в задачі статки (2.28), апроксимується за двома координатними напрямками: за твірною $z \in [0, l]$, за напрямною $\theta \in [0, 2\pi]$ і наближено подається у вигляді подвійних рядів скінченної довжини:

$$\bar{\sigma} = \left\{ \sigma_n(z, \theta, \gamma, \lambda) = \sum_{i=1,2,\dots,I} \sum_{k=1,2,\dots,K} \sigma_{nik}(\gamma, \lambda) \varphi_{1i}(\theta) \varphi_{2k}(z) \right\} \quad (n = \overline{1,6}), \quad (2.32)$$

де функції $\left\{ \sigma_{nik}(\gamma, \lambda), n = \overline{1,6} \right\} = \overline{\sigma_{\gamma ik}}$ є невідомими, а функції $\varphi_{1i}(\theta)$, $\varphi_{2k}(z)$, ($i = 1, 2, \dots, I$, $k = 1, 2, \dots, K$) є заздалегідь вибраними базисними функціями.

Вибір апроксимуючих і проєкційних базисів проводиться, як і в задачі статки для циліндрів 1. К1(а) і 1. К1(б), згідно табл. 2.

Таким чином, для зведення вихідної задачі до одновимірної по γ при шарнірному закріпленні торців циліндрів використовується метод відокремлення змінних за обома координатними напрямками θ і z [43, 70], а при жорсткому їх закріпленні – комбінація методу відокремлення змінних за напрямною θ та метод сплайн-колокацій за твірною z [85].

В результаті, вихідна тривимірна задача для системи (2.31), якщо, як і в задачі статки (2.24) – (2.27), ввести до розгляду вектор-функцію $\overline{\sigma_{\gamma}^{(i)}} = \left\{ \overline{\sigma_{\gamma k}^{(i)}} \right\}$, $k = \overline{1, K}$ з розмірністю $6K$ як сукупність шуканих векторів $\left\{ \overline{\sigma_{\gamma k}^{(i)}} \right\}$, $k = \overline{1, K}$, зводиться до відповідної одновимірної задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь вигляду ($D_{z\theta\gamma}(\lambda) \rightarrow D_{\gamma}^{(i)}(\lambda)$):

$$D_{\gamma}^{(i)}(\lambda) = \left(-I_{\gamma}^{(i)} \frac{d}{d\gamma} + L_{\gamma}^{(i)} - \lambda \right) \overline{\sigma_{\gamma}^{(i)}} = 0 \quad (\gamma \in (\gamma_{01}, \gamma_{1J})) \quad (2.33)$$

з відповідними однорідними граничними умовами та умовами спряження на границях шарів.

Оператори $I_{\gamma}^{(i)}$ і $L_{\gamma}^{(i)}$ в системі (2.33) за своєю структурою такі ж, як і в задачі статки (2.30): матриці $I_{\gamma}^{(i)}$ є клітинно-діагональними, а матриці $L_{\gamma}^{(i)}$ в загальному випадку формуються для всіх K невідомих вектор-функцій $\left\{ \overline{\sigma_{\gamma i}^{(i)}} \right\}$, $k = \overline{1, K}$ разом.

В частинному випадку шарнірного закріплення торців (1. К1(а)) вихідна задача для кожного i ($i = \overline{1, I}$) в (2.33) зводиться до послідовності K окремих однорідних

задач з невідомим числовим параметром λ 6-го порядку за змінною γ при відповідних граничних умовах (матриця $L_\gamma^{(i)}$ є клітинно-діагональною і розпадається) [43, 70].

При жорсткому закріпленні торців визначення частот і форм вільних коливань кругових циліндрів зводиться для кожного i ($i = \overline{1, I}$) в (2.33) до однорідної одновимірної задачі 6K порядку [85].

Знаходження динамічних характеристик вільних коливань, як нетривіальний розв'язок одновимірної однорідної задачі для системи диференціальних рівнянь (2.33) базується, як і в пункті 2.1.4, на застосуванні таких методів:

методу послідовних наближень в варіанті оберненої ітерації для зведення однорідної задачі з невідомим числовим параметром до послідовності неоднорідних крайових задач [39];

покрокового пошуку ($\Delta(\lambda)$ -метод) [34];

методу ортогональної прогонки [1, 16].

2.3. Приклади.

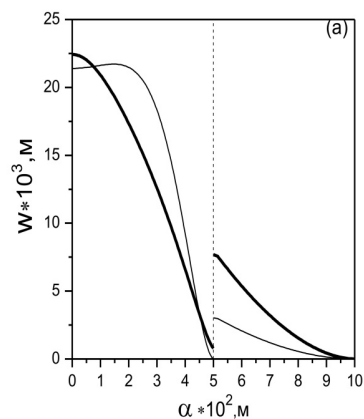
Приклад 2.3.1. В докритичній стадії деформування досліджується пружна система знакозмінної гауссової кривизни типу елемента компенсуючого пристрою. Розглядається гофрована циліндрична оболонка з приєднаними до неї по краях кільцевими пластинами, ортогонально орієнтованими до осі обертання. Циліндрична частина знаходиться під внутрішнім тиском інтенсивності q_0 , пластини жорстко закріплені по зовнішньому контуру. В силу симетрії даної конструкції розглядається її половина, що складається з двох оболонок: гофрованого циліндра синусоїдального профілю (R, L_{cor} і h_{cor} – радіус циліндра, довжина по осі Oz і товщина; a_α, l_α – амплітуда і довжина періоду синусоїди) і кільцевої пластини (R, L_{pl} і h_{pl} – внутрішній радіус, довжина за твірною і товщина пластини). Гофр і пластину виконано з різних ізотропних матеріалів з пружними характеристиками E_{cor}, μ_{cor} і E_{pl}, μ_{pl} , відповідно. Амплітуду гофра характеризуватимемо параметром $\gamma = a_\alpha / R$.

Задача розв'язується при таких вихідних даних: $L_{cor} = L_{pl} = 0,05$ м; $R = 0,1$ м; $l_s = 0,02$ м; $E_{cor} = 1,0 \cdot 10^9$ Па; $\mu_{cor} = 0,4$; $E_{pl} = 2,2 \cdot 10^{11}$ Па; $\mu_{pl} = 0,3$; $h_{cor} = 2 \cdot 10^{-3}$ м; $h_{pl} = 8 \cdot 10^{-3}$ м; $q_0 = 6 \cdot 10^5$ Па.

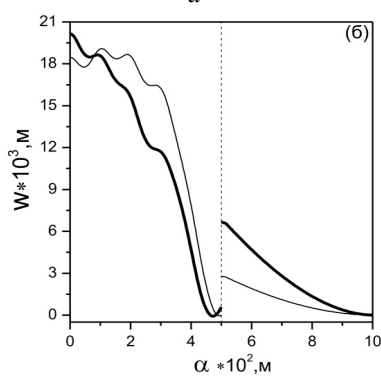
На рис. 2 представлено прогини вказаної оболонкової системи за лінійною та нелінійною теоріями при різних значеннях параметра гофра γ , при навантаженнях, близьких до його граничного критичного значення. Змінна α відраховується за довжиною циліндра ($\alpha \in [0; L_{cor}]$), а далі – за довжиною пластини ($\alpha \in [L_{cor}; L_{cor} + L_{pl}]$); лінію перерізу спряжених оболонок умовно нанесено штриховою лінією; тонкими лініями позначено результати за лінійною теорією, а товстими – за нелінійною.

Вплив амплітуди гофра на напружено-деформований стан системи для різних значень параметра γ ілюструється графіками на рис. 3. Тут наведено розподіл прогину $w = w(\alpha)$ (рис. 3, а), меридіональних $\sigma_\alpha = \sigma_\alpha(\alpha)$ і колових $\sigma_\theta = \sigma_\theta(\alpha)$ напружень для $\gamma = 0$ (гладкий циліндр, рис. 3, б), для $\gamma = 0,1$ (рис. 3, в). Конфігурація гофра і лінія перерізу спряжених оболонок, як і на рис. 2, умовно нанесені штриховими лініями.

Аналіз отриманих результатів показав: наявність гофра суттєво впливає на напруження не тільки на гофрованому елементі (з'являються зони стискаючих меридіональних напружень в місцях найменшої кривизни гофра), що природно, але і на пластині (на відміну від гладкого циліндра напруження $\sigma_\alpha = \sigma_\alpha(\alpha)$ практично по всій довжині пластини стають стискаючими), хоча ці елементи суттєво відрізняються за жорсткостями. Вплив γ на розподіл прогину значно слабший і практично не позначається на пластині.



a



б

Рис. 2

Таким чином, зміна геометричних параметрів на одному з елементів системи може внести суттєві якісні і кількісні зміни в напружено-деформований стан інших елементів системи і, відтак, системи в цілому.

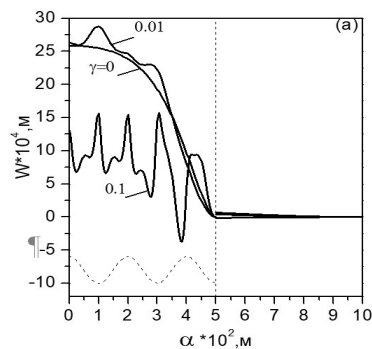
Приклад 2.3.2. Розглядається оболонкова система типу корпусу космічного апарату, представлена такими 4-ма складовими елементами (рис. 4):

1) елемент сферичної оболонки радіуса R_{sph} , довжини l_{sph} з центром на осі обертання;

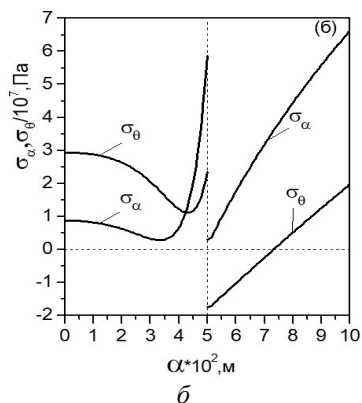
2) перша зрізана конічна оболонка з радіусами R_{con10} (початковий), $R_{con11} = R_{cyl}$ (кінцевий) та довжиною l_{con1} ;

3) циліндр радіуса $R_{cyl} = R_{con11}$ та довжини l_{cyl} ;

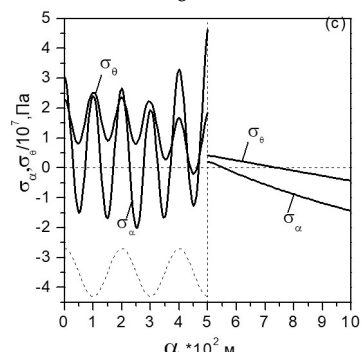
4) друга зрізана конічна оболонка з радіусами $R_{con20} = R_{cyl}$ (початковий), R_{con21} (кінцевий) та довжиною (l_{con2}).



a



б



в

Рис. 3

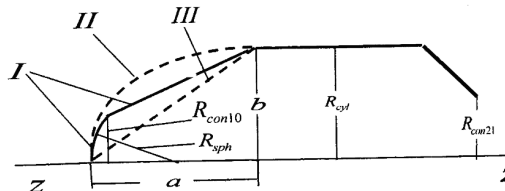


Рис. 4

Окрім цієї основної (базової) системи – системи I – розглянуто випадки, коли замість її перших двох елементів приймаються такі:

еліптична оболонка з півосями a (по осі z) та $b = R_{cyl}$ (по осі r), центром на осі обертання і центральним кутом $\alpha \in (0, \alpha_1]$, що відраховується від осі обертання за часовою стрілкою (система II, штрихова крива);

замкнута конічна оболонка з радіусом R_{cyl} при основі і довжиною l_{con3} (система III, штрихова лінія).

Дві інші складові базової системи – циліндр і другий конус – лишаються незмінними.

Всі елементи розглянутих систем є тришаровими оболонками симетричної будови відносно серединної поверхні з товщиною зовнішніх шарів h і загальною товщиною Δ . Шари оболонок є ізотропними з модулем пружності $E = E_0$, коефіцієнтом Пуассона μ та густиною $\rho = \rho_0$ для зовнішніх шарів і $E = 0,1E_0$ та тих же значеннях μ та ρ для внутрішнього шару. На початку першої оболонки – сферичної для системи I, еліптичної для системи II і конічної для системи III) приймаються умови симетрії (або вільного краю), другий торцевий контур приймається жорстко закріпленим

Розрахунок нижчих частот вільних коливань приводиться при таких вихідних даних:

$$R_{sph} / l_0 = 1,0; l_{sph} / R_{sph} = 1,047; R_{con10} / R_{sph} = 0,866; R_{con11} / R_{sph} = 2,0;$$

$$l_{con1} / R_{sph} = 1,4141;$$

$$R_{cyl} / R_{sph} = R_{con20} / R_{sph} = 2,0; R_{con21} / R_{sph} = 1,5; l_{con2} / R_{sph} = 1,118;$$

$$2h / R_{sph} = 0,2 \cdot 10^{-2};$$

$$\Delta / R_{sph} = 2,0 \cdot 10^{-2}; a / R_{sph} = 1,5; b / R_{sph} = 2,0; l_{con3} / R_{sph} = 2,5; \alpha_1 = \pi / 2; \mu = 0,3.$$

Уточнення значень власних частот за моделлю Тимошенка та із застосуванням методу покорокового пошуку перебуває в межах 0,5%.

Результати дослідження у вигляді частотної залежності $f = f(k) = \frac{\omega(k)l_0}{2\pi} \times 10^2 \sqrt{\rho_0 / E_0}$ Гц представлені на рис. 5 а, б, в для систем I, II і III, відповідно (k – параметр хвилеутворення в коловому напрямку; ω – мінімальна власна частота коливань; l_0 – характерний лінійний розмір).

Наведені на рис. 5 умовні криві $f = f(k)$ ілюструють вплив зміни геометрії початкового елемента оболонкової системи на цю залежність. Спільним для всіх кривих є наявність двох локальних мінімумів при $k = 1$ (антисиметрична форма коли-

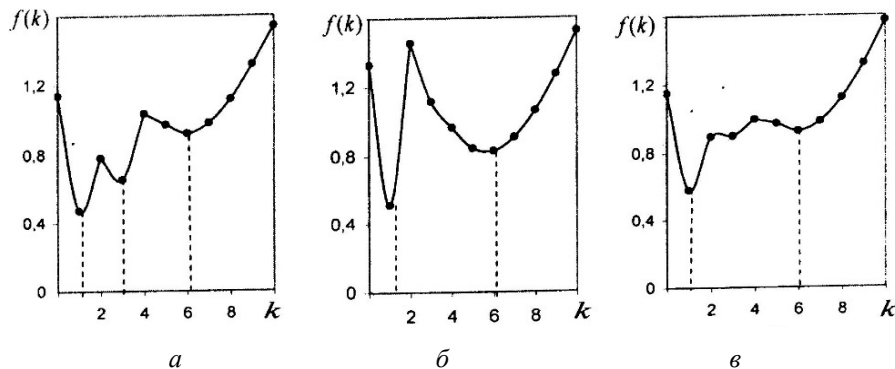


Рис. 5

вань) та при $k = 6$ (форма коливань з 6-ма вузловими діаметрами в коловому напрямку). При цьому система I має явно виражений мінімум ще і при $k = 3$, а система III – дуже близькі частоти при $k = 2$ і $k = 3$ (деяке плато). Таким чином, всі три випадки, коли початкова ділянка елемент-системи представлена сферичним і конічним елементами (I), сплющеним по осі Oz напівеліпсом $a/b = 0,75$ (II) та замкнутим конусом (III), якісно відрізняються між собою по залежності $f = f(k)$.

Значення локальних мінімальних частот при $k = k^*$ для розглянутих систем наведено в табл. 3.

Таблиця 3

$f_{\min} = f_{\min}(k^*) \cdot 10^2$			
k^*	1	3	6
1	0,471	0,652	0,925
2	0,515		0,828
3	0,582	0,892	0,924

Абсолютний мінімум для всіх систем має місце при $k^* = 1$.

Таким чином, зміна геометрії окремого елемента системи впливає не тільки кількісно на власні частоти (табл. 3), але й на якісний характер залежності $f = f(k)$ (рис. 5, а, б, в).

Приклад 2.3.3. Приведемо результати дослідження нижчих частот коливань спряжених оболонок обертання від їхньої геометричної форми і основного НДС, зумовленого як окремими навантаженнями, так і їхньою сумісною дією.

Результати дослідження наведемо для пружної системи, зображеної на рис. 6 ($n = 4, \Pi$: cyl1–ts1–ts2–cyl2), що складається з двох циліндрів та двох торо-сферичних елементів, тобто з оболонок з різними гауссовими кривизнами $K_j = k_{\alpha_j} k_{\theta_j}$, $j = 1, 2, 3, 4$ – нульової (cyl1, cyl2), від'ємної (ts1) і додатної (ts2) штриховими нанесено лінії спряження окремих оболонок.

Приймаємо, що обидва торці $z = 0$, $z = L_2$ системи жорстко закріплені.

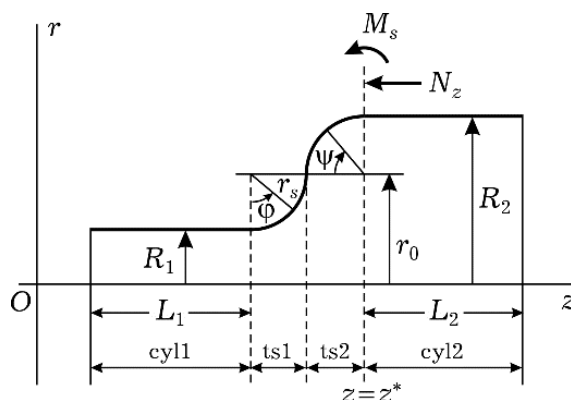


Рис. 6

Система знаходиться в полі осесиметричних навантажень N_z і M_s , зосереджених на лінії контакту $z = z^*$ оболонок ts2 і cyl2. Осьове зусилля $N_z < 0$ викликає стиск оболонки ts2 і розтяг циліндра cyl2, а згинний момент $M_s > 0$ викликає згин перерізу $z = z^*$ до осі обертання Oz (подібні навантаження можна спостерігати при

переміщенні вздовж осі тих чи інших агрегатів за допомогою бандажного кріплення). Зауважимо, що в літературі найчастіше досліджувалась комбінація зовнішнього (внутрішнього) тиску та контурних зусиль-моментів. Роботи з аналізу спряжених оболонок при дії навантаження на лінії їх з'єднання авторам не зустрічались.

Значення навантажень N_z і M_s змінюються в діапазонах $N_z \in [0, N_z^*]$, $M_s \in [0, M_s^*]$, що відповідають докритичній стадії деформування. Їхні величини задаються безрозмірними параметрами $\alpha N_z = N_z / N_z^*$, $\alpha M_s = M_s / M_s^*$.

Для порівняння результатів дослідження дії таких навантажень, крім системи оболонок, додатково розглянемо випадок циліндричної оболонки радіуса R і довжини L , коли зусилля і момент прикладені в перерізі $z = z^*$.

Розрахунки основного НДС і коливань виконано для таких значень вихідних даних:

– для системи оболонок:

$$R_2 = 0,6 \text{ м}; \quad L_1 = 0,2 \text{ м}; \quad L_2 = 0,3 \text{ м}; \quad r_s = 0,2 \text{ м}; \quad \ell_s = 0,31416 \text{ м}; \quad r_0 = R_1 + r_s; \\ h = 0,003 \text{ м}; \quad E = 5,0285 \cdot 10^9 \text{ Па}; \quad \mu = 0,33; \quad \rho = \rho_0;$$

– для окремого циліндра:

$$R = 0,1 \ell_0; \quad L / R = 4; \quad h / R = 0,01; \quad z^* / R = 2,5; \quad E = E_0; \quad \mu = 0,3; \quad \rho = \rho_0$$

(ℓ_0 – характерний лінійний розмір).

Дослідження проводимо послідовно в міру ускладнення основного НДС для таких трьох варіантів:

I: відсутність навантажень: $\{N_z, M_s\} = \{0, 0\}$ – (вільні коливання);

II: дія одного з навантажень: $\{N_z, M_s\} = \{\alpha N_z, 0\}$ і $\{N_z, M_s\} = \{0, \alpha M_s\}$;

III: сумісна дія обох навантажень для таких чотирьох випадків їх комбінацій

– для спряженої системи:

$$1^\circ: \{N_z, M_s\} = \{\alpha N_z, \alpha M_s\} = \{0,96, 0,23\};$$

$$2^\circ: \{N_z, M_s\} = \{\alpha N_z, \alpha M_s\} = \{0,80, 0,19\};$$

$$3^\circ: \{N_z, M_s\} = \{\alpha N_z, \alpha M_s\} = \{0,75, 0,80\};$$

$$4^\circ: \{N_z, M_s\} = \{\alpha N_z, \alpha M_s\} = \{0,95, 0,95\}$$

$$(N_z^* = -2,73 \cdot 10^4, \{k, m\} = \{16, 9\}; \quad M_s^* = 5,25 \cdot 10^2, \{k, m\} = \{23, 11\});$$

– для окремого циліндра:

$$1^\circ: \{N_z, M_s\} = \{\alpha N_z, \alpha M_s\} = \{0,78, 0,32\};$$

$$2^\circ: \{N_z, M_s\} = \{\alpha N_z, \alpha M_s\} = \{0,40, 0,40\};$$

$$3^\circ: \{N_z, M_s\} = \{\alpha N_z, \alpha M_s\} = \{0,05, 0,36\};$$

$$4^\circ: \{N_z, M_s\} = \{\alpha N_z, \alpha M_s\} = \{0,45, 0,45\}$$

($N_z^* = -6,56 \cdot 10^{-3}, \{k, m\} = \{9, 4\}; \quad M_s^* = -1,547 \cdot 10^{-2}, \{k, m\} = \{8, 3\}; \quad k, m$ – кількість вузлових діаметрів форми коливань в коловому напрямку та півхвиль – за твірною).

Згідно з розробленим підходом, спочатку визначається основний НДС для наведених варіантів дослідження і випадків комбінованого навантаження.

Для варіанта навантаження III у випадку 1° , коли $\{N_z, M_s\} = \{\alpha N_z, \alpha M_s\} = \{0,96, 0,23\}$, картина НДС у вигляді розподілів прогину і напружень у точках твірної оболонкової системи представлена на рис. 7 і 8, відповідно. Максимальні значення як прогину, так і напружень зосереджені, природньо, в околі прикладених навантажень N_z і M_s , тобто в перерізі $z = z^* = 0,8$ м.

Розподіл прогину w наведено окремо у випадках осьового зусилля N_z , згинного моменту M_s і їхньої сумісної дії $N_z + M_s$ (рис. 7). Як видно на графіках, осьове зусилля N_z і згинний момент M_s по-різному впливають на деформування дотичних елементів ts2, cyl2. При комбінації цих навантажень $N_z + M_s$ домінуюча роль моменту M_s проявляється в безпосередній близькості лінії з'єднання оболонок, а на решті частин домінуючий вплив має осьове зусилля N_z .

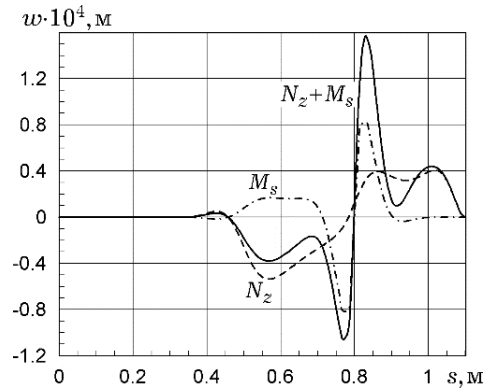


Рис. 7

Картина напруженого стану зображена у вигляді меридіональних і колових напружень σ_s^+ , σ_θ^+ на зовнішній (рис. 8, а) і внутрішній σ_s^- , σ_θ^- (рис. 8, б) поверхнях елементів ts2 і cyl2 ($s \in [0,5, 1,1]$) при комбінації навантажень $N_z + M_s$, вплив яких позначається тільки на прилеглих елементах системи. Природний стрибок напружень обумовлений прикладеними навантаженнями і більшою мірою проявляється для меридіональних напружень на обох поверхнях оболонок.

Таким чином, основний напружено-деформований стан спряженої системи оболонок за сумісної дії осьового зусилля і згинного моменту, які зосереджені на лінії контакту елементів ts2 і cyl2, характеризується суттєво нерівномірним розподілом за меридіаном-твірною.

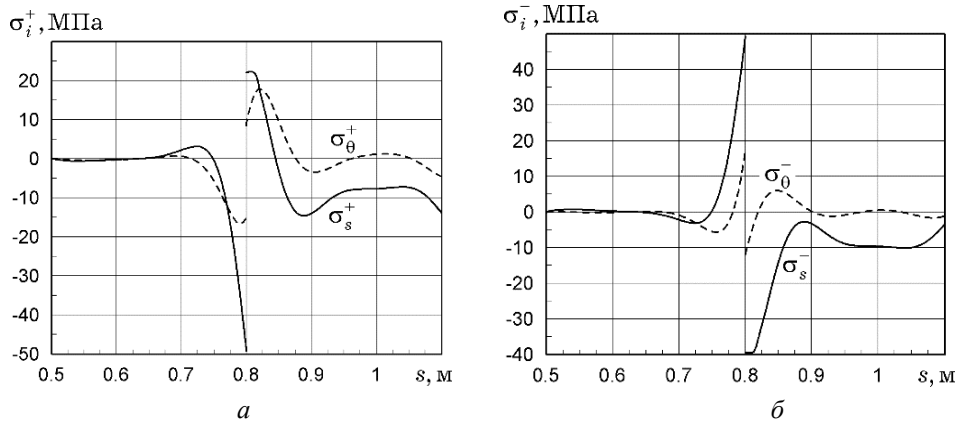


Рис. 8

Коливання оболонкової системи будемо аналізувати, порівнюючи їх з коливаннями окремого циліндра, за залежністю $\hat{f} = \hat{f}(k)$, яка представлена у вигляді умовної згладженої кривої дискретного аргументу k . Ця залежність характеризує зміну мінімальної власної частоти ω від параметра хвилеутворення k в коловому напрямку і є традиційною для оболонок обертання. Графіки $\hat{f} = \hat{f}(k)$ для варіантів навантаження I, II, III для спряженої системи представлено на рис. 9, а, в та 9, д (лівий стовпчик рисунків, $\hat{f} = (10^{-4}/2\pi)\omega\sqrt{\rho_0}$ [Гц]), а для окремого циліндра – на рис. 9, б, г та 9, е (правий стовпчик рисунків, $\hat{f} = (10^{-3}/2\pi)\omega\sqrt{\rho_{00}/E_0}$ [Гц]). Особливо наглядно вплив власне геометричної форми спряженої системи оболонок на її частотні характеристики проявляється при вільних коливаннях (варіант навантаження I) у порівнянні з відповідними результатами для циліндра (рис. 9, а і 9, б). У випадку циліндра крива

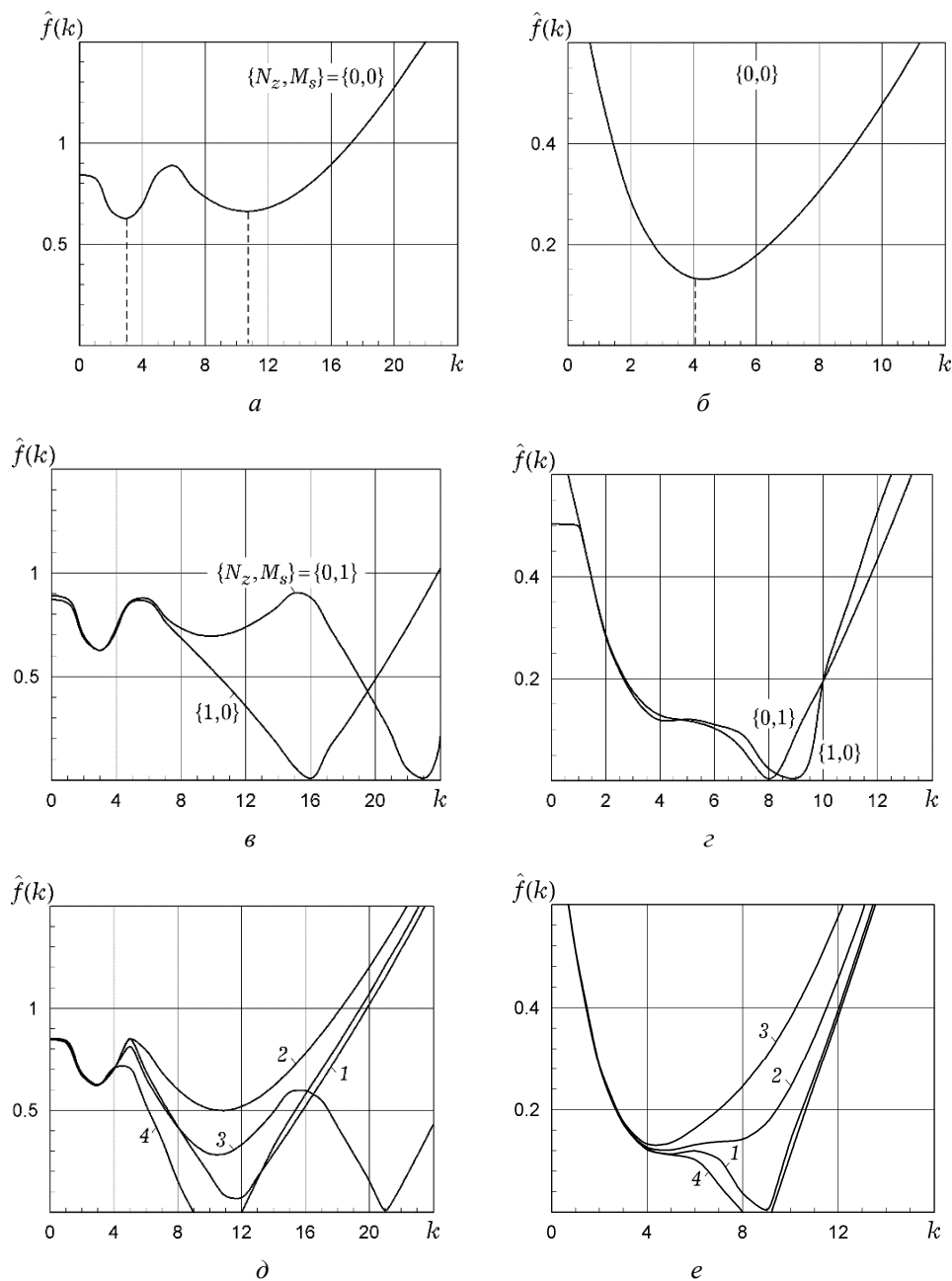


Рис. 9

$\hat{f} = \hat{f}(k)$ має звичайний вигляд (рис. 9, б) з одним мінімумом $\{k, m\} = \{4, 1\}$, а для оболонкової системи (рис. 9, а) ця крива має якісно інший характер і може мати декілька локальних мінімумів, у розглянутому випадку – два: $\{k, m\} = \{3, 4\}$ і $\{k, m\} = \{11, 5\}$. Ця особливість нижчих частот оболонкових систем різних конфігурацій детально обговорювалась в [83] та в Прикладі 2.3.2.

Фактор врахування основного НДС оболонки надає залежності $\hat{f} = \hat{f}(k)$ важливу інформаційну роль як у плані можливості відстеження резонансних частот в реальних умовах динамічних навантажень, так і в плані оцінки стійкості їхніх рівноважних ста-

нів при заданих значеннях статичних навантажень. Так, якщо для конкретного значення навантаження залежність $\hat{f} = \hat{f}(k)$ при деякому k знаходиться в малому околі нуля, то згідно з динамічним критерієм стійкості ця величина близька до його критичного значення. Така ситуація показана на рис. 9, в (оболонкова система) і рис. 9, з (окремий циліндр) при дії осьового зусилля $\{N_z, M_s\} = \{\alpha N_z, 0\} = \{1, 0\}$ і згинного моменту $\{N_z, M_s\} = \{0, \alpha M_s\} = \{0, 1\}$. Форма випинання $\{k, m\}$ відповідає при цьому таким параметрам

– при зусиллі N_z :

$\{k, m\} = \{16, 9\}$ (оболонкова система) і $\{k, m\} = \{9, 4\}$ (циліндр);

– при моменті M_s :

$\{k, m\} = \{23, 11\}$ (оболонкова система) і $\{k, m\} = \{8, 4\}$ (циліндр).

За характером кривої $\hat{f} = \hat{f}(k)$ можна передбачати стійкість оболонок при сумісній дії навантажень залежно від їхніх конкретних значень. Ці результати для випадків 1° – 4° комбінації зусилля N_z і моменту M_s наведено на рис. 9, д для оболонкової системи і на рис. 9, е – для окремого циліндра, відповідно. Комбінації навантажень у випадках 1° , 2° для системи оболонок і 2° , 3° для циліндра не є загрозливими щодо втрати стійкості оболонок (частоти $\hat{f} = \hat{f}(k)$ в усьому діапазоні зміни k є додатними).

Номери кривих на рис. 9, д і 9, е відповідають випадкам 1° – 4° комбінацій зусиль і моментів.

Взаємодія навантажень у випадку 3° для системи оболонок і 1° для циліндра свідчать про те, що оболонки перебувають на межі між областями стійкості і нестійкості з формами випинання $\{k, m\} = \{21, 11\}$ (оболонкова система) і $\{k, m\} = \{9, 4\}$ (циліндр). У випадку навантажень 4° рівноважний стан і оболонкової системи, і окремого циліндра є нестійким (існує діапазон значень k , для якого частоти $\hat{f} = \hat{f}(k)$ є від'ємними).

Таким чином, проведений аналіз ілюструє вплив окремих статичних навантажень і ряду їх комбінацій на низькочастотні коливання спряжених оболонкових систем і можливі випадки статичної стійкості їхніх рівноважних станів.

Приклад 2.3.4. Розглянемо задачу про згин неоднорідного в радіальному напрямку тришарового консольного циліндра при дії на незакріпленому торці поперечної сили P . Матеріали несучих шарів і заповнювача мають такі значення пружних сталей узагальненого закону Гука:

$$\begin{aligned} \text{несучі шари} - a_{11} &= \frac{1}{48}E_0; \quad a_{22} = a_{33} = \frac{1}{18}E_0; \quad a_{44} = \frac{1}{5,5}E_0; \quad a_{55} = a_{66} = \frac{1}{9}E_0; \\ a_{12} = a_{13} &= -\frac{0,25}{48}E_0; \quad a_{23} = -\frac{0,63}{18}E_0; \\ \text{заповнювач} - a_{11} = a_{22} = a_{33} &= \frac{1}{3,1}E_0; \quad a_{44} = a_{55} = a_{66} = \frac{1}{1,2}E_0; \quad a_{12} = a_{13} = a_{23} = \\ &= -\frac{0,3}{3,1}E_0; \quad E_0 = \text{const.} \end{aligned}$$

Радіус серединної поверхні заповнювача – R , його товщина – H . Товщина кожного несучого шару – h_0 , при чому $h_0/R = 0,01$.

Розв'язання задачі проводилось для ряду значень товщини заповнювача H при незмінному радіусові його серединної поверхні. Результати дослідження наведені на рис. 10 для амплітудних значень напружень. На цих рисунках дано розподіл за товщиною меридіональних σ_1 та дотичних τ_1 напружень відповідно для двох значень товщини заповнювача $H = 10h_0$ (рис. 10, а) та $H = 20h_0$ (рис. 10, б).

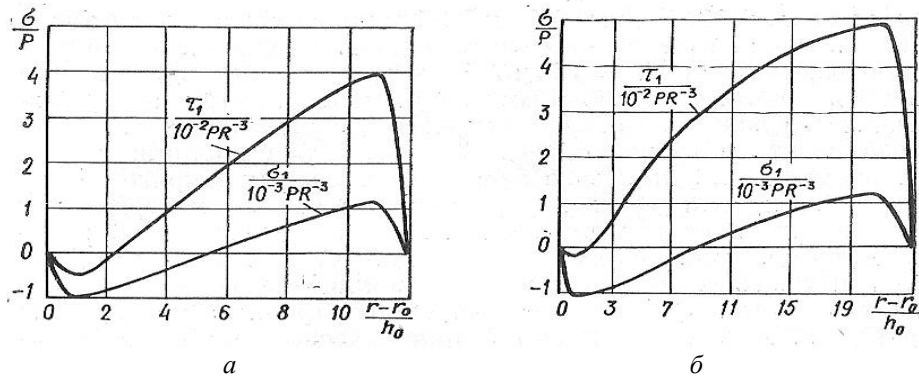


Рис. 10

Наведені залежності мають складний характер і несиметричну будову відносно серединної поверхні. Максимальні їх значення спостерігаються в околі контакту заповнювача із зовнішнім шаром.

Приклад 2.3.5. Аналіз напруженого стану порожнистих ортотропних циліндрів з овальним поперечним перетином. Розглянемо пружні тіла у вигляді порожнистих циліндрів в криволінійній системі координат (s, t, γ) , яку побудовано таким чином: в ортогональній криволінійній системі координат (s, t) вибрано некругову циліндричну поверхню за поверхню відліку, а координата γ напрямлена вздовж нормалі до цієї поверхні.

За координатну поверхню таких циліндрів обрано серединну поверхню, рівновіддалену від бічних поверхонь. Серединна поверхня в поперечному перетині задається рівнянням овалів Кассіні в полярній системі координат ρ, ψ :

$$\rho = c \sqrt{\cos 2\psi + \sqrt{\cos^2 2\psi + \left(\frac{a^4}{c^4} - 1\right)}}, \quad 0 \leq \frac{c}{a} < 1, a \neq 0, \quad (2.34)$$

де ρ – полярний радіус; ψ – деякий кут в поперечному перетині ($0 \leq \psi \leq 2\pi$); c – половина відстані між фокусами; a – добуток відстаней між фокусами та довільною точкою. Відношення параметрів c та a дозволяє варіювати формою поперечного перетину, розглядаючи кругову, еліптичні та овальні форми. Так, при $c = 0$ маємо кругову форму поперечного перетину (крива 1, рис. 11, а); при $0 < c/a < 1/\sqrt{2}$ – еліптичні форми (криві 2, 3 рис. 11, а); при $1/\sqrt{2} \leq c/a < 1$ – овальні (криві 4–6, рис. 11, б).

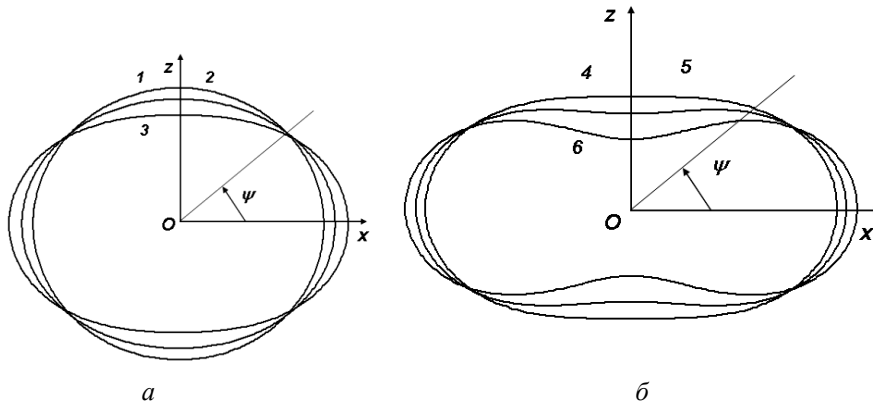


Рис. 11

На торцях циліндра розглядається діафрагма, абсолютно жорстка в своїй площині і гнучка при виході з неї. Граничні умови на торцях будуть:

$$\sigma_s = 0; u_t = 0; u_\gamma = 0 \quad \text{при} \quad s = 0, s = l. \quad (2.35)$$

Циліндри перебувають під дією внутрішнього тиску, розподіленого рівномірно вздовж координати t , який в напрямку твірної змінюється за законом $q_\gamma = q_0 \sin(\pi s/l)$ ($q_0 = \text{const}$).

Таким чином, граничні умови на бічних поверхнях приймають вигляд:

$$\begin{aligned} \sigma_\gamma = q_\gamma; \tau_{s\gamma} = 0; \tau_{t\gamma} = 0 \quad \text{при} \quad \gamma = \gamma_1; \\ \sigma_\gamma = 0; \tau_{s\gamma} = 0; \tau_{t\gamma} = 0 \quad \text{при} \quad \gamma = \gamma_2. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Для циліндрів даного класу мають місце умови періодичності вздовж напрямної для всіх факторів напруженого стану (T – період)

$$\sigma_\gamma(s, t, \gamma) = \sigma_\gamma(s, t + T, \gamma); \tau_{s\gamma}(s, t, \gamma) = \tau_{s\gamma}(s, t + T, \gamma);$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots; u_t(s, t, \gamma) = u_t(s, t + T, \gamma).$$

За основні прийнято рівняння просторової лінійної теорії пружності для ортотропного тіла. При побудові розв'язувальної системи диференціальних рівнянь прийнято наступні припущення: напрямна серединної поверхні є довільною неперервною кривою без особливостей і розривів; механічні характеристики можуть бути змінними по товщині, залишаючись сталими вздовж твірної; закон розподілу прикладеного навантаження може бути заданий довільним чином.

За розв'язувальні прийнято функції, в яких формулюються граничні умови на бічних поверхнях (2.36) – три компоненти напруження $\sigma_\gamma, \tau_{s\gamma}, \tau_{t\gamma}$, а також три компоненти переміщень u_γ, u_s, u_t .

З основних рівнянь отримано розв'язувальну систему диференціальних рівнянь в частинних похідних шостого порядку зі змінними коефіцієнтами, що описує тривимірну крайову задачу в області $0 \leq s \leq l; t_1 \leq t \leq t_2; \gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_2$.

Методика її розв'язування будується на використанні методу відокремлення змінних по Фур'є за позадовжною s та напрямною t координатами, введення доповняльних функцій, апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є і складається з таких п'яти етапів (рис. 12):

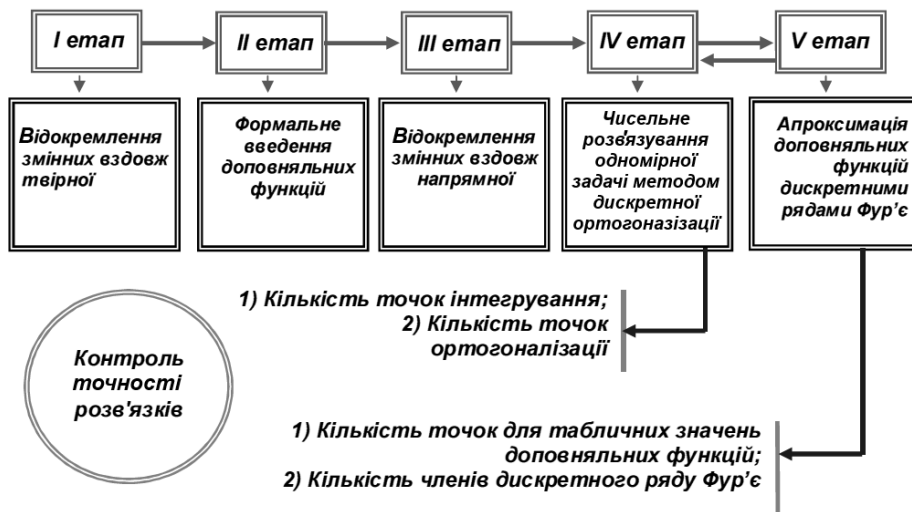


Рис. 12

Похибка розв'язку виникає на двох останніх етапах за рахунок використання чисельного методу і апроксимації доповняльних функцій дискретними рядами Фур'є. Контроль точності отримуваних результатів здійснюється за рахунок варіації кількості точок інтегрування та ортогоналізації при застосуванні чисельного методу і за рахунок варіації кількості точок напрямної для побудови табличних значень доповняльних функцій та кількості членів відповідних дискретних рядів Фур'є.

Для оцінки точності отримуваних результатів розв'язано задачу про напружений стан порожнистих циліндрів з поперечним перерізом, який описаний рівнянням овалів Касіні (2.34), виготовлених з ортотропного матеріалу при дії внутрішнього тиску.

Задачу розв'язано за таких вихідних даних: довжина циліндрів

$l = 40$, товщина $h = 2$, параметри $a = 20$, $c = 12; 16$ (криві 3, 5 відповідно, рис. 11).

Для механічних характеристик ортотропного матеріалу обрано:

$E_s = 3,68E_0$; $E_\psi = 2,68E_0$; $E_\gamma = 1,1E_0$; $\nu_{s\psi} = 0,105$; $\nu_{s\gamma} = 0,405$; $\nu_{\psi\gamma} = 0,431$.

Результати розв'язання задачі представлено в середньому перетині довжини циліндра в табл. 4 – 7. В табл. 4, 5 представлено результати оцінки точності отримуваних результатів при застосуванні чисельного методу дискретної ортогоналізації, в табл. 6, 7 – при апроксимації доповняльних функцій дискретними рядами Фур'є.

В табл. 4, 6 представлені значення нормальних переміщень u_γ , в табл. 5, 7 – напруження σ_ψ в деяких перетинах товщини. Значення переміщень указано для поверхні відліку ($\gamma = 0$), значення напружень для циліндрів з параметром $c = 12$ – на зовнішній поверхні ($\gamma = h/2$), а для циліндрів з параметром $c = 16$ – на внутрішній ($\gamma = -h/2$), де вони набувають максимальних амплітудних значень.

З даних табл. 4, 5 видно, що точність отримуваних результатів до 5-6 знаків спостерігається при 32-х точках інтегрування (Li) та 16-и точках ортогоналізації (Lo).

Таблиця 4

$u_\gamma E_0 / q_0$ ($\gamma = 0$)					
Li	Lo	$c = 12$		$c = 16$	
		$\psi = 0$	$\psi = \pi / 2$	$\psi = 0$	$\psi = \pi / 2$
4	4	-255,367	841,678	-600,247	3066,88
8	4	-254,360	842,721	-599,232	3067,19
	8	-254,359	842,720	-599,219	3067,09
32	8	-254,356	842,720	-599,228	3067,15
	16	-254,360	842,721	-599,226	3067,12
	32	-254,360	842,721	-599,225	3067,12

Таблиця 5

σ_ψ / q_0					
Li	Lo	$c = 12$ ($\gamma = h/2$)		$c = 16$ ($\gamma = -h/2$)	
		$\psi = 0$	$\psi = \pi / 2$	$\psi = 0$	$\psi = \pi / 2$
4	4	-14,3303	26,5745	-4,64614	-92,2256
8	4	-14,2300	27,5761	-4,74678	-92,3335
	8	-14,2299	27,5670	-4,74677	-92,3325
32	8	-14,2298	27,5761	-4,74698	-92,3342
	16	-14,2299	27,5761	-4,74679	-92,3334
	32	-14,2299	27,5761	-4,74679	-92,3334

Таблиця 6

$u_\gamma E_0 / q_0 (\gamma = 0)$					
M	R	c = 12		c = 16	
		$\psi = 0$	$\psi = \pi / 2$	$\psi = 0$	$\psi = \pi / 2$
4	20	-90,6204	446,946	6,85213	495,954
	60	-90,6214	446,967	6,85237	495,951
	80	-90,6225	446,987	6,85234	495,950
12	20	-254,579	843,080	-627,839	3103,92
	60	-254,396	842,733	-596,458	3066,04
	80	-254,346	842,727	-596,461	3067,06
17	60	-254,361	842,723	-599,227	3067,14
	80	-254,360	842,721	-599,226	3067,12
	100	-254,360	842,721	-599,226	3067,12

Таблиця 7

σ_ψ / q_0					
M	R	c = 12 ($\gamma = h/2$)		c = 16 ($\gamma = -h/2$)	
		$\psi = 0$	$\psi = \pi / 2$	$\psi = 0$	$\psi = \pi / 2$
4	20	-6,46957	12,9310	-1,37431	-18,8625
	60	-6,46950	12,9318	-1,37410	-18,8624
	80	-6,46948	12,9326	-1,37426	-18,8620
12	20	-14,2410	27,5935	-5,46985	-92,1152
	60	-14,2304	27,5833	-5,02654	-93,4312
	80	-14,2300	27,5756	-5,02659	-92,4316
17	60	-14,2298	27,5760	-4,74677	-92,3332
	80	-14,2299	27,5761	-4,74679	-92,3334
	100	-14,2299	27,5761	-4,74679	-92,3334

З наведених у табл. 6, 7 даних випливає, що точність отримуваних результатів до 4-5 знаків має місце при 80-ти точках (R) напрямної для табличних значень доповняльних функцій і 17-ти утримуваних членах (M) дискретного ряду Фур'є.

На основі викладеного підходу розв'язана задача про напружений стан порожнистих ортотропних циліндрів з овальним поперечним перерізом, серединна поверхня яких описана рівнянням овалів Кассіні (2.34). Циліндри знаходяться під дією внутрішнього тиску.

Задачу розв'язано за таких значень геометричних і механічних параметрів: довжина циліндрів $l = 40$; товщина $h = 2$; параметри $a = 20$, $c = 0; 8; 12; 14, 14; 16; 18$; механічні характеристики ортотропного матеріалу $E_s = 3,68E_0$; $E_\psi = 2,68E_0$; $E_\gamma = 1,1E_0$; $G_{s\psi} = 0,5E_0$; $G_{s\gamma} = 0,41E_0$; $G_{\psi\gamma} = 0,45E_0$; $\nu_{s\psi} = 0,105$; $\nu_{s\gamma} = 0,405$; $\nu_{\psi\gamma} = 0,431$.

Проведено порівняння характеристик напруженого стану розглянутих циліндрів з циліндрами, виготовленими з ізотропного матеріалу з механічними параметрами: модуль Юнга $E = E_0$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,3$.

Результати розв'язання задачі в середньому перерізі довжини циліндра вздовж напрямної для полів нормальних переміщень u_γ поверхні відліку ($\gamma = 0$) наведено на

рис. 13, для напружень σ_ψ на внутрішній поверхні ($\gamma = -h/2$) – на рис. 14 та на зовнішній ($\gamma = h/2$) – на рис. 15. Штриховими лініями позначено криві для ізотропних циліндрів, суцільними – для ортотропних. Криві 1 – 6 відповідають різним формам поперечного перерізу циліндрів (рис. 11).

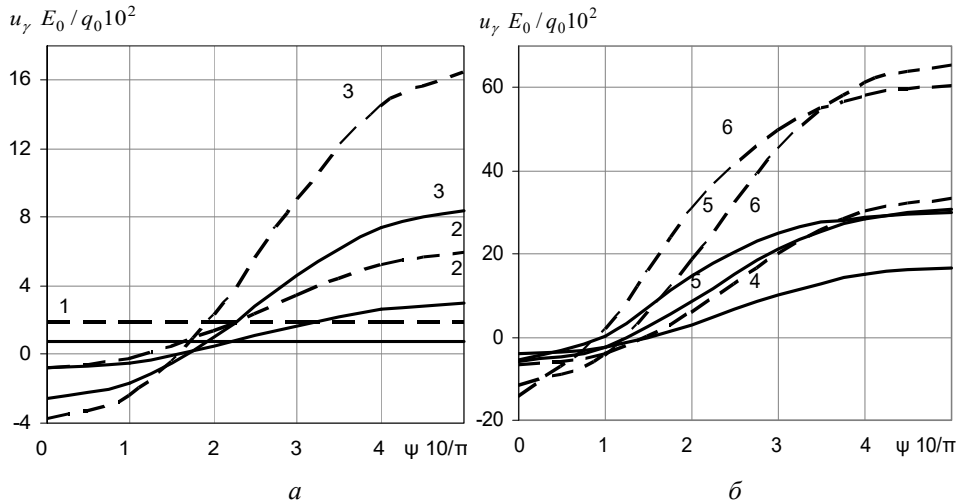


Рис. 13

З графіків, наведених на рис. 13 видно, що використання ортотропного матеріалу веде до зменшення максимальної величини нормальних переміщень приблизно в 2 – 2,5 рази для всіх форм поперечних перетинів розглянутих циліндрів.

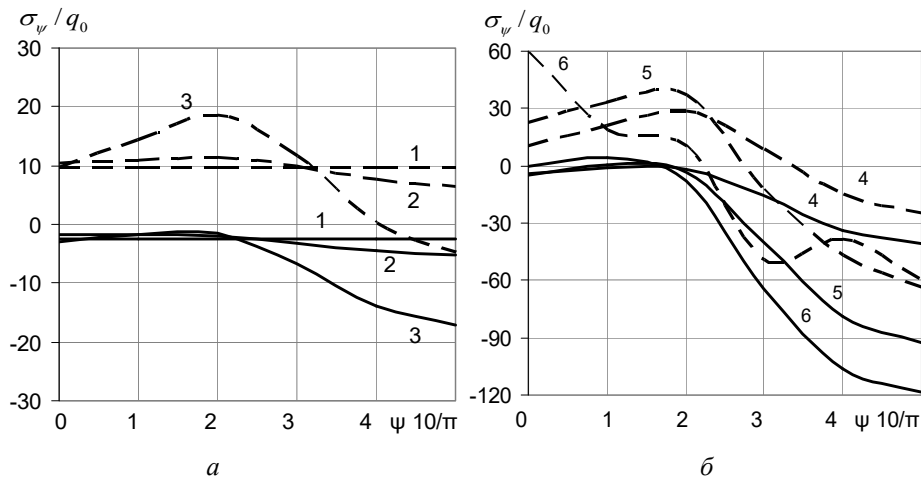


Рис. 14

Відхилення форми поперечного перетину від кругової призводить до перерозподілу величини переміщень u_γ вздовж напрямної. В перетині $\psi = \pi/2$ амплітудна величина нормальних переміщень збільшується порівняно з їх величиною в перетині $\psi = 0$ в 3,7 рази для циліндрів форми № 2; в 3,3 рази – для форми № 3; в 4,1 рази – для форми № 4; в 5 разів – для форми № 5 в 5,4 рази – для форми № 6. При цьому, максимальна величина переміщень збільшується для циліндрів форми № 2 в 4 рази; для форми № 3 – в 11,3 рази; для форми № 4 – у 22,5 рази; для форми № 5 – в 41,4 рази та для форми № 6 – в 40,4 рази, порівняно з круговими циліндрами (форма № 1).

Розподіл напружень уздовж напрямної носить такий характер (рис. 14, 15). Своїх максимальних амплітудних значень напруження σ_ψ для ізотропного матеріалу досягають на зовнішній поверхні, вільній від навантаження, в перерізі $\psi = \pi/2$ для форм № 2 – № 5; для форми № 6 – в перерізі $\psi = 2\pi/5$. При використанні ортотропного матеріалу максимальні амплітудні значення напружень мають місце в перерізі $\psi = \pi/2$ для форм № 2 – № 5 на зовнішній, а для форм № 5 і № 6 – на внутрішній, навантаженій поверхні циліндра. При цьому для циліндрів форм № 2 – № 4 використання ортотропного матеріалу призводить до зменшення максимальних амплітудних значень приблизно в 1,5 – 1,2 рази і до збільшення – для форм № 5, № 6 в 1,2 – 1,8 рази.

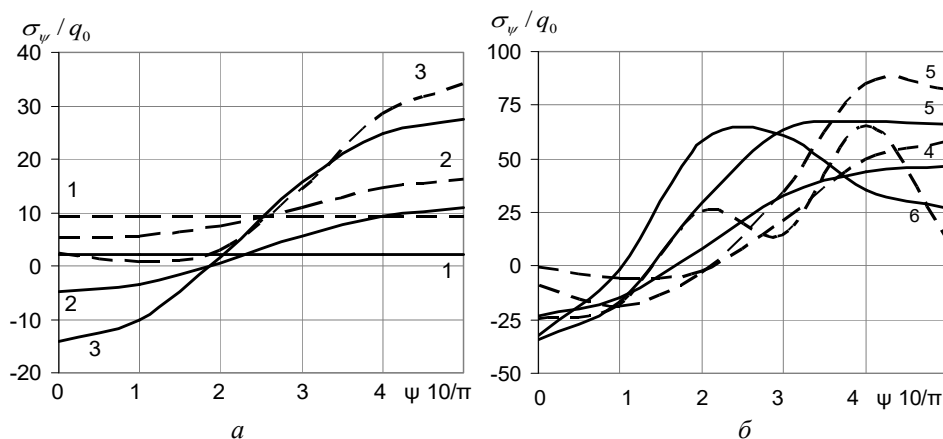


Рис. 15

Зі збільшенням відхилення форми поперечного перетину від кругової посилюється нелінійність в розподілі кривих напружень σ_ψ для циліндрів, виготовлених як з ізотропного, так і з ортотропного матеріалу.

Приклад 2.3.6. Як об'єкт складної за товщиною структури вибрана пневматична шина, розрахункова схема якої представлена на рис. 16, а.

Твірна внутрішньої поверхні оболонки-шини приймається за вихідну координатну поверхню $\gamma = 0$, а її половина в силу симетрії відносно вертикальної осі моделюється 8-ма елементами торо-сферичного типу з координатами центру r_{0j}, z_{0j} , радіусами кіл R_j та довжинами дуг s_j . Ці геометричні параметри розрахункової схеми шини ($j = \overline{1,8}$) наведені в табл. 8.

На граничному контурі приймаються умови жорсткого закріплення, а в центрі – умови симетрії.

Таблиця 8

№ обол. (j)	$r_{0j} \cdot 10^2, \text{м}$	$z_{0j} \cdot 10, \text{м}$	$R_j \cdot 10, \text{м}$	$s_j \cdot 10, \text{м}$
1	0	-0,227	2,830	1,300
2	-0,299	-0,875	3,480	0,785
3	0,438	1,980	2,400	1,320
4	1,830	1,720	1,280	1,760
5	3,900	2,090	0,473	0,893
6	4,010	2,110	0,449	2,910
7	4,870	2,160	0,352	2,710
8	-0,602	2,320	0,924	2,810

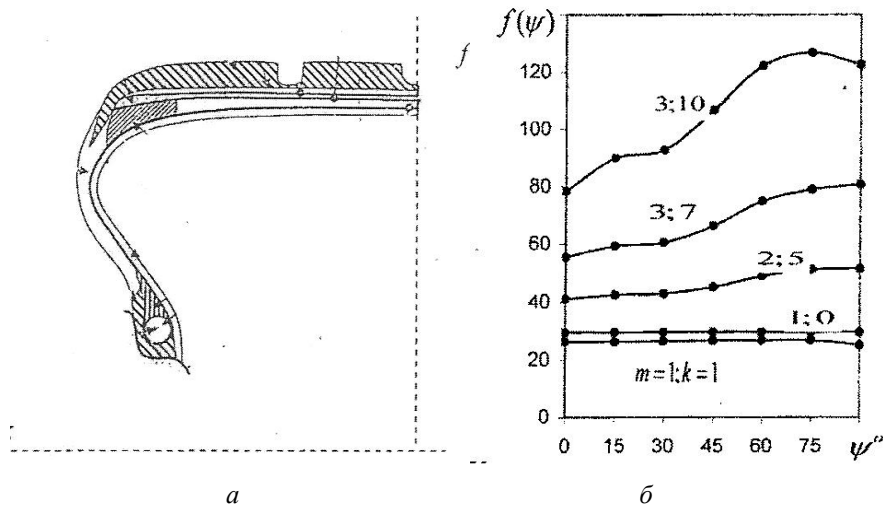


Рис. 16

Таблиця 9

№ обол. (j)	№ шару (m)	$h_{0j} \cdot 10^3, \text{м}$	$E_1, \text{МПа}$	$E_2, \text{МПа}$	μ_{12}	$G_{12}, \text{МПа}$	$G_{13} = G_{23}, \text{МПа}$	$\rho \cdot 10^{-3}, \text{кг/м}^3$
1	1	0,75	$5,81 \cdot 10^2$	$1,18 \cdot 10$	0,42	4,33	3,01	1,00
	2	1,40	$1,84 \cdot 10^3$	7,36	0,47	2,08	1,88	1,54
	3	1,40	$1,84 \cdot 10^3$	7,36	0,47	2,08	1,88	1,54
	4	5,86	5,00	5,00	0,49	1,68	1,68	1,00
2	1	0,75	$5,81 \cdot 10^2$	$1,18 \cdot 10$	0,42	4,33	3,01	1,00
	2	1,40	$1,84 \cdot 10^3$	7,36	0,47	2,08	1,88	1,54
	3	1,40	$1,84 \cdot 10^3$	7,36	0,47	2,08	1,88	1,54
3,4	1	0,75	$5,81 \cdot 10^2$	$1,18 \cdot 10$	0,42	4,33	3,01	1,00
	2	1,40	$1,84 \cdot 10^3$	7,36	0,47	2,08	1,88	1,54
	3	1,40	$1,84 \cdot 10^3$	7,36	0,47	2,08	1,88	1,54
	4	6,05	5,00	5,00	0,49	1,68	1,68	1,00
5	1	0,75	$5,81 \cdot 10^2$	$1,18 \cdot 10$	0,42	4,33	3,01	1,00
	2	5,78	5,00	5,00	0,49	1,68	1,88	1,00
6,7,8	1	0,75	$5,81 \cdot 10^2$	$1,18 \cdot 10$	0,42	4,33	3,01	1,00

Кожна складова оболонка шини має різну кількість шарів з різними фізико-механічними властивостями. Так, по всій твірній системі оболонок ($j = \overline{1,8}$) внутрішній шар (каркас) утворений волокнами одного й того ж резинокордного матеріалу; для оболонок $j = \overline{1,4}$ наступний шар (брекер) складається з двох перехресно армованих під кутами $\pm\psi$ резинокордів; оболонки $j = 1; 3; 4; 5$ мають додатковий шар гуми (протектор). Розташування шарів, їх товщини на початку кожної оболонки (h_{0j}) та пружні характеристики матеріалів наведені в табл. 9.

Для оцінки правомірності застосування наближених оболонкових моделей щодо врахування заданої складної структури шини за товщиною проводиться порівняння з результатами, одержаними на основі просторової постановки. Для цього розглядається циліндрична оболонка довжиною $l_{cyl} = 0,6 \text{ м}$, радіусом $R_{cyl} = 0,26 \text{ м}$ з такою ж структурою, як і задана шина в її центральному перерізі (табл. 9, $j = 1, m = \overline{1,4}$). Ре-

зультати порівняння для частоти $f = \omega/2\pi$ при кутах укладки перехресно армованих резинокордів $\psi = \pm 65^\circ$ та похибка $\varepsilon, \%$ наближених моделей у порівнянні з 3D постановкою задачі представлені в табл. 10 для осесиметричної ($k = 0$) та мінімальної ($k = 4$) частот [67].

Таблиця 10

$k; m$	Моделі деформування		
	Kir	Tim	3D
	$f; \varepsilon, \%$	$f; \varepsilon, \%$	$f; \varepsilon, \%$
0;1	5,247; 0,75	5,230; 0,42	5,208
4;1	0,702; 1,30	0,695; 0,30	0,693

Як видно з таблиці при розрахунку власних частот даної чотиришарової структури похибка наближених оболонкових моделей по відношенню до результатів 3D теорії пружності знаходиться в межах 2%. Слід зауважити, що ці оцінки є лише орієнтовними при аналізі коливань оболонок, що моделюють роботу реальних шин.

Для даної оболонкової системи проведено також дослідження її декількох власних частот в залежності від кута укладки армуючих шарів $\pm\psi$. Ці дані наведено на рис. 16. б у вигляді кривої $f = f(\psi)$ в діапазоні зміни $\pm\psi \in [0^\circ; 90^\circ]$ для різних частот з формами коливань з m півхвилями за твірною та k вузловими діаметрами в колловому напрямку. Як видно з рисунка, зміна кута армування середніх шарів в оболонках $j = \overline{1,4}$ практично не впливає на значення мінімальної ($m = 1; k = 1$) та осесиметричної ($m = 1; k = 0$) частот системи в цілому. В той же час, для більш високих частот ($m = 3, k = 7; m = 3, k = 10$) їх значення можуть суттєво (до 50%) збільшитись.

3. Методи зведення до системи одновимірних задач та їх застосування в задачах статки та коливань оболонкових елементів та анізотропних тіл.

В цій частині розглядаються методи третьої стадії розвитку проєкційних підходів типу Гальоркіна в напрямку подальшої відмови від довільного вибору базисних функцій. В методах цієї групи апроксимуючий вираз шуканого розв'язку містить, як невідомі, одновимірні функції всіх змінних заданої області, а вихідна N -вимірна задача ($N \geq 2$) зводиться до нової структури – системи з N взаємопов'язаних одновимірних задач, що формуються за різними змінними області.

Зауважимо, що класи функцій, в яких шукаються розв'язки багатовимірної задачі в класичних методах Бубнова – Гальоркіна, методах зниження вимірності Канторовича – Власова (прямих, інтегральних співвідношень Дородніцина) та в методах зведення до систем одновимірних задач, якісно різні в плані їх розширення: спочатку це числові коефіцієнти (клас дійсних чисел), далі – функції однієї змінної (клас неперервних функцій потрібне число раз диференційованих) і, нарешті, сукупність функцій, кожна з яких залежать від однієї змінної, але всі вони разом охоплюють всі змінні заданої області.

Окремі спроби роз'язання задач такими методами, ще до формулювання загальних принципів їх побудови [6, 49, 50], стосуються задачі згину жорстко закріпленої по всьому контуру прямокутної пластини [38, 47, 98]. Подальший розвиток вони одержали в скалярних задачах теплопровідності та теплопереносу [48, 49] та при розв'язанні бігармонічної задачі в загальній постановці [74] з ілюстрацією ефективності у порівнянні з методами зведення до систем алгебраїчних (методи Фур'є, Гальоркіна) та звичайних диференціальних (метод Канторовича – Власова) рівнянь.

Наступний крок в поширенні методів цієї (третьої) стадії розвитку проєкційних підходів був зроблений у векторних стаціонарних лінійних (нелінійних) задачах статки та коливань тонкостінних оболонок, наприклад [5, 62, 65, 67, 94], і теорії пружності для анізотропних тіл [6, 9, 63, 66, 69, 71, 73, 77, 79, 80]. В одних роботах розгля-

нутий метод був названий методом повних систем [6, 48, 49, 62, 67, 69, 73, 79, 94], в інших – узагальненим методом Канторовича або Канторовича – Власова [65, 66, 74, 77], в роботі [38] – методом варіаційних ітерацій.

Зауважимо, що подібна до апроксимації (В.3) форма подання шуканого розв'язку була запропонована, наскільки вдалося прослідкувати авторам, в роботах Хартри і Фока при розв'язанні багатовимірного рівняння Шредінгера [55].

В подальшому такі методи називатимемо методами повних систем (МПС). Ця назва в значній мірі відображає їх суть і фігурує в статтях англomовного видавництва [67, 73, 79, 94].

Застосування методів зведення до системи одновимірних задач в формі МПС розглядається, як і в попередній частині, для двох основних задач стаціонарного деформування – задачі статички (лінійна і нелінійна постановки) та задачі про коливання. Ці задачі розглядаються в двовимірній постановці для пологих прямокутних в плані оболонок (3.2) та в тривимірній постановці лінійної теорії пружності для анізотропного прямокутного паралелепіпеда (3.3). Розв'язки N -вимірних задач в обох постановках одержано за єдиною схемою, що складається з двох основних частин:

зведення вихідної N -вимірної задачі (нелінійної, на власні значення) тим чи іншим раціональним способом до відповідної лінійної крайової задачі тієї ж N -ої розмірності;

Розв'язання одержаної лінійної крайової N -вимірної задачі методом повних систем.

Таким чином, основною частиною методики розв'язання нелінійних задач і задач на власні значення, що тут розглядаються, є метод повних систем.

3.1. Вихідні положення МПС (диференціальна та варіаційна постановки). Загальні принципи побудови МПС для розв'язання N -вимірних ($N \geq 2$) задач в диференціальній та варіаційній постановках були викладені, як уже зазначалось, в роботах [6, 50, 51]. Суть їх зводиться до таких положень.

Положення 1. Апроксимація шуканого розв'язку у вигляді суперпозиції функцій з розділеними змінними, де всі складові прийнятого подання є невідомими та апроксимуючий вираз не містить апріорно вибраних компонент.

Положення 2. Побудова відповідної структури відносно введених невідомих функцій різних змінних, що є повною (замкнутою) і не потребує прийняття додаткових припущень для знаходження її розв'язку.

Положення 3. Розв'язання побудованої структури і конструювання шуканого розв'язку задачі.

3.1.1. Диференціальна постановка. Ці положення для задач у диференціальній постановці реалізуються відповідно на *етапах 1, 2, 3* і розглядаються на прикладі багатовимірної лінійної крайової задачі загального вигляду

$$D_N = Lu - q = 0; \quad x \in \Omega; \quad (3.1)$$

$$Ru - f = 0; \quad x \in \partial\Omega, \quad (3.2)$$

що визначена в деякому криволінійному паралелепіпеді $\Omega \cup \partial\Omega = \{x_n \in [x_{n,0}, x_{n,1}], x_{n,0} = \text{const}, x_{n,1} = \text{const}, n = \overline{1, N}\}$ N -вимірного простору дійсних змінних $\bar{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$. Тут $u = u(\bar{x})$ – шукана скалярна функція N змінних векторного аргументу $\bar{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$; L, R – диференціальні або алгебраїчні (для R) вирази; $q(\bar{x}), f(\bar{x})$ – відомі функції, що задані в області Ω і на її границі $\partial\Omega$, відповідно.

Етап 1. Апроксимація шуканого розв'язку у вигляді суперпозиції функцій з розділеними змінними приймається у такому вигляді:

$$u(x_1, x_2, \dots, x_N) \approx F_M = \sum_{i=1, 2, \dots, M} X_{1i}(x_1) X_{2i}(x_2) \dots X_{Ni}(x_N), \quad (3.3)$$

де всі складові виразу (3.3) – функції $X_{1i}(x_1) X_{2i}(x_2) \dots X_{Ni}(x_N)$ ($i = \overline{1, M}$) – вважаються невідомими і підлягають подальшому визначенню.

Правомірність такого представлення неперервної функції декількох змінних у вигляді (3.3) безпосередньо витікає з теореми Вейерштрасса про апроксимацію функцій многочленами [46].

Питання повноти систем функцій $X_{ni}(x_n)$, $i=1, 2, \dots$ для кожного $n=\overline{1, N}$, що є важливим для проєкційних методів у зв'язку з апіорністю вибору базису (Розділ 1, Розділ 2), тут не виникає, оскільки всі функції $X_{ni}(x_n)$, $i=\overline{1, M}$, $n=\overline{1, N}$ є не базисними, а вважаються шуканими.

Якщо ввести до розгляду вектор-функцію $\overline{X}_k = \{X_{ki}(x_k), i=\overline{1, M}\}$ як сукупність функцій лише одного (x_k) -го аргументу і назвати її аргументною вектор-функцією цього аргументу, то в результаті подання (3.3) шуканими в МПС будуть N аргументних вектор-функцій \overline{X}_n , $n=\overline{1, N}$ замість однієї функції N змінних $u(x_1, x_2, \dots, x_N)$.

Етап 2. Побудова відповідної структури для визначення N аргументних вектор-функцій \overline{X}_n , $n=\overline{1, N}$, що залежать від різних змінних області.

Для визначення невідомих N аргументних вектор-функцій до вихідної задачі (3.1), (3.2) застосовується процедура зведення $P = \{P_k\}$ ($k=\overline{1, N}$), як сукупність N процедур проєктування Канторовича – Власова на N різних координатних напрямків області $x = x_k$, що має вигляд

$$P(\dots) = \left\{ P_k(\dots) = \left\{ \prod_{m=1}^{m=N} \int_{x_{m,0}}^{x_{m,1}} (\dots) X_m dx_m, m \neq k \right\}, k = \overline{1, N} \right\} \quad (3.4)$$

(ваговими функціями при побудові k -ої задачі відносно \overline{X}_k -ої аргументної вектор-функції є аргументні функції всіх інших змінних x_m , $m=\overline{1, N}, m \neq k$).

В результаті застосування процедур проєктування (3.4) та врахування представлення (3.3) одержимо таку структуру:

$$\begin{aligned} P_k [LF_M - q] = 0 & \rightarrow L_k \overline{X}_k - \overline{q}_k = 0, \quad x_k \in (x_{k,0}, x_{k,1}); \\ P_k [RF_M - f] = 0 & \rightarrow R_{k,p} \overline{X}_k - \overline{f}_{k,p} = 0, \quad x_k = x_{k,p}, \quad p = 0; 1, \quad k = \overline{1, N} \\ & (\overline{X}_m = \widetilde{\overline{X}}_m, \quad m = \overline{1, N}, \quad m \neq k). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Нижній індекс k в операторах L_k , $R_{k,p}$ і векторах \overline{q}_k , $\overline{f}_{k,p}$ (вирази після стрілок) означає, що відповідні оператори і вектори вихідної задачі (3.1), (3.2) перетворені згідно процедури зведення (3.4) з урахуванням апроксимації (3.3). Знаком «тільда» в k -ій задачі помічені аргументні функції змінних x_m ($m=\overline{1, N}$, $m \neq k$), що перетворені у відповідності з цією ж процедурою і фігурують в цій задачі у вигляді констант-функціоналів.

Одержана структура (3.5) є загалом нелінійною системою диференціальних рівнянь і відповідних граничних умов, що формулюється відносно аргументних функцій різних змінних області Ω . Вона складається з N задач, які з огляду на особливості процедури зведення можна вважати одновимірними. Кожна з них, наприклад, n -та формулюється відносно однієї аргументної функції (\overline{X}_n), а всі інші ($\overline{X}_m = \widetilde{\overline{X}}_m$, $m=\overline{1, N}$, $m \neq n$) фігурують в ній як константи-функціонали. В свою чергу, кожна аргументна вектор-функція, хай \overline{X}_k , ($k=\overline{1, N}$) в одній k -ій задачі є шуканою, а в усіх інших $(N-1)$ -ій ($n=\overline{1, N}$, $n \neq k$) міститься як константи, перетворені процеду-

рою P_k . Завдяки цьому окремі задачі в структурі (3.5) є взаємопов'язаними і утворюють єдину систему відносно N аргументних функцій, які можуть бути з неї визначені без будь-яких додаткових припущень. В цьому розумінні система одновимірних задач (3.5) є повною (замкнутою) за числом шуканих аргументних вектор-функцій (що й зумовило назву методу – метод повних систем).

Етап 3. Розв'язання системи одновимірних задач і одержання шуканого розв'язку вихідної задачі.

Для розв'язання системи одновимірних задач (3.5) застосовується аналог відомого методу послідовних заміщень лінійної алгебри – процес Лібмана – Гаусса – Зейделя ($j = 1, 2, \dots$ – ітераційний параметр):

$$\begin{aligned} L_k^{j-1} \overline{X}_k^j - \overline{q}_k^{j-1} &= 0, \quad x_k \in (x_{k,0}, x_{k,1}); \\ R_{kp}^{j-1} \overline{X}_k^j - \overline{f}_{kp}^{j-1} &= 0, \quad x_k = x_{k,p}, \quad p = 0; 1 \quad (k = \overline{1, N}) \\ (\overline{X}_m^{j-1} &= \widetilde{X}_m^{j-1}, \quad m = \overline{1, N}, \quad m \neq k). \end{aligned} \quad (3.6)$$

На проміжному j -ому кроці цього ітераційного процесу кожна одновимірна задача (3.6) розв'язується окремо відносно шуканої в ній аргументної вектор-функції \overline{X}_k^j ($k = \overline{1, N}, j = \text{fixed}$), а інші функції, що входять в постановку цих задач у вигляді, перетвореному процедурою зведення P_k ($\overline{X}_m^{j-1} = \widetilde{X}_m^{j-1}, \quad m = \overline{1, N}, \quad m \neq k$), беруться з попереднього ($j-1$)-го кроку процесу.

За початкове наближення $\overline{X}_k^0 = \{X_{ki}^0\}$ можуть використовуватись будь-які лінійно незалежні по i системи функцій (степеневі, тригонометричні, поліноміальні тощо). Зауважимо, що остаточний результат ітерацій не залежить від конкретного вибору початкового наближення. Це показано, зокрема, в [6] на прикладі задачі статистики для порожнистого циліндра.

Розв'язання окремої одновимірної задачі в загальному випадку проводиться чисельно, зокрема, як і в роботах попереднього розділу, методом ортогональної прогонки [16, 18]. У випадку, коли одновимірні задачі мають аналітичний розв'язок, визначення аргументних функцій зводиться до системи трансцендентних рівнянь [74].

Завершення процесу знаходження аргументних функцій з системи (3.6) при фіксованому числі членів M в апроксимації (3.3) здійснюється за поширеним критерієм прикладної математики шляхом порівнянні результатів двох послідовних наближень:

$$\left| 1 - \frac{F_M^{j+1}}{F_M^j} \right| \leq \varepsilon_1, \quad (3.7)$$

де F_M^j – максимальне або середньоквадратичне значення функції F_M на j -му кроці наближення за апроксимацією (3.3), ε_1 – задана точність обчислення аргументних функцій.

За знайденими аргументними функціями \overline{X}_k , $k = \overline{1, N}$ будується шуканий розв'язок задачі $u(x_1, x_2, \dots, x_N)$ згідно з апроксимацією (3.3). Задана точність ε_2 одержання остаточного розв'язку задачі (3.1), (3.2) досягається шляхом збільшення числа M апроксимуючих функцій в (3.3) і контролюється за аналогічним критерієм:

$$\left| 1 - \frac{F_M^{jM}}{F_M^{jM}} \right| \leq \varepsilon_2 \quad (3.8)$$

(jM – кількість ітерацій процесу Лібмана, при якій досягається задана точність ε_1 обчислення аргументних функцій при утриманні M членів в апроксимуючому виразі (3.3)).

3.1.2. Варіаційна постановка. Нехай в N -вимірній області дійсних змінних $\Omega \cup \partial\Omega = \{x_n \in [x_{n,0}, x_{n,1}], x_{n,0} = \text{const}, x_{n,1} = \text{const}, n = \overline{1, N}\}$ треба знайти функцію $u = u(x_1, x_2, \dots, x_N)$ з умови стаціонарності (мінімуму) квадратичного функціоналу

$$J(u) = \int_{\Omega} \Phi(u, u_{,x_1}, \dots, u_{,x_N}, q) d\varpi + \int_{\partial\Omega_f} \Phi_{\partial\Omega}(u, \dots, f) ds \quad (3.9)$$

при додаткових умовах на частині обмежуючої поверхні $\partial\Omega_u$ ($\partial\Omega = \partial\Omega_f \cup \partial\Omega_u$)

$$u|_{\partial\Omega_u} = 0 \quad (3.10)$$

(кома в нижньому індексі шуканої функції означає частинну похідну за відповідною змінною; q, f – відомі функції, задані відповідно в області Ω та на частині $\partial\Omega_f$ граничної поверхні $\partial\Omega$; ϖ, s – елементарні частини області та обмежуючої поверхні).

Основні положення МПС, що в загальній формі сформульовані в пункті 3.1, лишаються справедливими для варіаційної постановки задачі і реалізуються, відповідно, на *Етапах 1, 2, 3.*

Етап 1. Згідно з *Положенням 1.* шукана стаціонарна точка функціоналу (3.9) при умові (3.10) приймається, як і для диференціальної постановки задачі, у вигляді:

$$u(x_1, x_2, \dots, x_N) \cong F_M = \sum_{i=1, 2, \dots, M} X_{1i}(x_1) X_{2i}(x_2) \dots X_{Ni}(x_N), \quad (3.11)$$

де всі складові виразу (3.11) – функції $X_{1i}(x_1) X_{2i}(x_2) \dots X_{Ni}(x_N)$ ($i = \overline{1, M}$), або аргументні вектор-функції $\overline{X}_k = \{X_{ki}(x_k), k = \overline{1, N}\}$ – вважаються невідомими і підлягають подальшому визначенню.

Етап 2. Для визначення N аргументних вектор-функцій $\overline{X}_k = \{X_{ki}(x_k), i = \overline{1, M}; k = \overline{1, N}\}$ (*Положення 2.*) будується відповідна математична структура на основі таких міркувань.

У відповідності з прийнятою апроксимацією шуканого розв'язку (3.11) вихідний функціонал (3.9) наближено замінюється на такий:

$$J(u) \cong \tilde{J}(\overline{X}_1, \overline{X}_2, \dots, \overline{X}_N) = \int_{\Omega} \Phi(\overline{X}_1, \overline{X}_2, \dots, \overline{X}_N, \overline{X}'_1, \dots, \overline{X}'_N, q) d\varpi + \int_{\partial\Omega_f} \Phi_{\partial\Omega}(\overline{X}_1, \overline{X}_2, \dots, \overline{X}_N, f) ds, \quad (3.12)$$

а необхідні умови його стаціонарності – $\delta J = 0$ – для функціонала (3.12) матимуть вигляд:

$$\delta J \cong \delta \tilde{J} = \left(\delta_{\overline{X}_1} \tilde{J} \delta \overline{X}_1 + \delta_{\overline{X}_2} \tilde{J} \delta \overline{X}_2 + \dots + \delta_{\overline{X}_N} \tilde{J} \delta \overline{X}_N \right) = \sum_{k=1}^N \delta_{\overline{X}_k} \tilde{J} \delta \overline{X}_k = 0 \quad (3.13)$$

(знаком «штрих» (') позначені похідні аргументних функцій за відповідною змінною).

Враховуючи незалежність аргументних функцій різних змінних, умова (3.13) еквівалентна деякій математичній структурі, що складається з умов стаціонарності частинних варіацій функціонала (3.12) за різними аргументними функціями:

$$\delta_{\overline{X}_k} \tilde{J}(\overline{X}_1, \overline{X}_2, \dots, \overline{X}_N) = 0; \quad (3.14)$$

$$\sum_{i=1, 2, \dots, M} X_{1i}(x_{1p}) X_{2i}(x_{2p}) \dots X_{Ni}(x_{Np}) = 0 \text{ при } x_k = x_{k,p}, p = 0; 1 \quad (k = \overline{1, N}). \quad (3.15)$$

Тут $\delta_{\overline{X}_k} \tilde{J}$ – частинна варіація функціонала (3.12) за аргументними функціями x_k -ої змінної, що є функціоналом, визначеним у відповідній одновимірній області, тобто на відрізку $x_{k,0}, x_{k,1}$.

Співвідношення (3.14), (3.15) ($n = \overline{1, N}$) є сукупністю умов стаціонарності частинних варіацій наближеного функціонала $\tilde{J}(\overline{X}_1, \overline{X}_2, \dots, \overline{X}_N)$, що відповідає прийнятій апроксимації (3.11), і є тією повною системою співвідношень, з якої всі введені в (3.11) невідомі аргументні функції, як узагальнений розв'язок задачі, можуть бути визначені без будь-яких додаткових припущень.

Одержання класичного розв'язку для аргументних функцій \overline{X}_k ($k = \overline{1, N}$) пов'язане з виконанням достатніх умов стаціонарності (мінімуму) сукупності співвідношень (3.14), (3.15), тобто з переходом в кожному з них до рівнянь Ейлера – Лагранжа. Результатом цього переходу є система одновимірних задач такого ж загального вигляду, як і у випадку диференціальної постановки (3.5), тобто:

$$\begin{aligned} \delta_{\overline{X}_k} \tilde{J}(\overline{X}_1, \overline{X}_2, \dots, \overline{X}_N) = 0 &\rightarrow L_k \overline{X}_k - \overline{q}_k = 0, \quad x_k \in (x_{k,0}, x_{k,1}); \\ \sum_{i=1,2,\dots,M} X_{1i}(x_{1p}) X_{2i}(x_{2p}) \dots X_{Ni}(x_{Np}) = 0 &\rightarrow R_{k,p} \overline{X}_k - \overline{f}_{k,p} = 0, \quad x_k = x_{k,p}, \quad p = 0; 1 \\ \text{або } \overline{X}_k(x_{k,p}) = 0, \quad x_k = x_{k,p}, \quad p = 0; 1 & \quad (k = \overline{1, N}) \end{aligned} \quad (3.16)$$

($L_k, R_{k,p}$ – матриці, елементи яких є диференціальні (алгебраїчні) вирази за змінною x_k , що одержані в результаті виконання операції варіювання в (3.14)).

Таким чином, узагальнений розв'язок для всіх аргументних функцій \overline{X}_k ($k = \overline{1, N}$) визначається системою співвідношень (3.14), (3.15), а їх класичний розв'язок – системою одновимірних задач (3.16) (вирази після стрілок). Обидві системи повні, оскільки число шуканих аргументних вектор-функцій N в точності дорівнює числу співвідношень в (3.14), (3.15) і числу одновимірних задач в (3.16). Завдяки повноті цих систем їх розв'язання не потребує прийняття якихось додаткових припущень.

Етап 3. Для знаходження узагальненого розв'язку для аргументних функцій з системи співвідношень (3.14), (3.15) (*Положення 3.*) використовується ітераційний процес типу Лібмана – Гаусса – Зейделя, що описаний вище для задач в диференційній постановці ($j = 1, 2, \dots$ – параметр процесу):

$$\begin{aligned} \delta_{\overline{X}_1^j} \tilde{J}(\overline{X}_1^j, \overline{X}_2^{j-1}, \dots, \overline{X}_N^{j-1}) &= 0; \\ \sum_{i=1,2,\dots,M} X_{1i}^j X_{2i}^{j-1} \dots X_{Ni}^{j-1} &= 0, \quad x_1 = x_{1,p}, \quad p = 0; 1; \\ \delta_{\overline{X}_2^j} \tilde{J}(\overline{X}_1^j, \overline{X}_2^j, \dots, \overline{X}_N^{j-1}) &= 0; \\ \sum_{i=1,2,\dots,M} X_{1i}^j X_{2i}^j \dots X_{Ni}^{j-1} &= 0, \quad x_2 = x_{2,p}, \quad p = 0; 1; \\ \delta_{\overline{X}_N^j} \tilde{J}(\overline{X}_1^j, \overline{X}_2^j, \dots, \overline{X}_N^j) &= 0; \\ \sum_{i=1,2,\dots,M} X_{1i}^j X_{2i}^j \dots X_{Ni}^j &= 0, \quad x_N = x_{N,p}, \quad p = 0; 1. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Знаходження стаціонарних точок кожного з одновимірних функціоналів (3.17) на проміжному j -ому кроці наближення ґрунтується на застосуванні відомих прямих методів розв'язання варіаційних задач.

За початкове наближення $\overline{X}_k^0 = \{X_{ki}^0(x_k)\}$ можуть використовуватись будь-які лінійно незалежні по i системи функцій, а завершення процесу і одержання остаточного розв'язку задачі (3.9), (3.10) з заданою точністю – за звичними критеріями прикладної математики ((3.7), (3.8)).

Щодо одержання класичного розв'язку системи (3.17), то тут застосовується цей же процес, як описано у випадку диференціальної постановки задачі (3.6) ($j = 1, 2, \dots$):

$$\begin{aligned} L_k^{j-1} \overline{X}_k^j - \overline{q}_k^{j-1} &= 0, \quad x_k \in (x_{k,0}, x_{k,1}); \quad R_{kp}^{j-1} \overline{X}_k^j - \overline{f}_{kp}^{j-1} = 0, \quad x_k = x_{k,p}, \quad p = 0; 1, \\ \text{або } \overline{X}_k^j(kp) &= 0, \quad x_k = x_{k,p}, \quad p = 0; 1 \\ (\overline{X}_m &= \widetilde{\overline{X}}_m, \quad m = \overline{1, N}, \quad m \neq k) \quad k = \overline{1, N} \end{aligned} \quad (3.18)$$

з тими ж умовами вибору початкового наближення, завершення процесу ітерацій та одержання остаточного розв'язку задачі за апроксимацією (3.11).

3.2. Двовимірні задачі статички та коливачь пологих оболонок ($N = 2$).

Реалізація загальних положень МПС для N вимірних задач в диференціальній постановці ілюструється на прикладі двовимірних задач статички і коливачь пологих оболонок.

3.2.1. Постановка задач. Розглядається полого оболонка сталой товщини h , середина поверхня якої в проекціях на декартову систему координат x, y займає прямокутну область $\Omega \cup \partial\Omega = \{x, y : x \in [x_0, x_1], y \in [y_0, y_1]\}$, має кривизни k_x, k_y в напрямку координатних осей та гауссову кривизну $K = k_x k_y$. Оболонка знаходиться на пружній вінклеровій основі з коефіцієнтом $K_p = K_p(x, y)$, а в області Ω на неї діє вектор розподілених навантажень $\overline{q} = \{q_x, q_y, q_n\}$, де індекс n вказує напрям, перпендикулярний до її середньої поверхні. В кожній точці границі $\partial\Omega$ можуть бути задані зусилля-моменти, переміщення або їх комбінації, так що на умови закріплення контуру ніяких обмежень, окрім їх фізичної несумісності, не накладається. Матеріал оболонки приймається ізотропним і лінійно пружним. Коливання розглядаються як незатухаючі у припущенні їх малості, гармонічності за часом, синфазності та синхронності для всіх точок оболонки.

Цей клас тонкостінних об'єктів охоплює прямокутні пластини ($k_x = 0, k_y = 0; K = 0$), циліндричні панелі ($k_x = 0, k_y \neq 0; K = 0$), елементи сферичних ($k_x > 0, k_y > 0; K > 0$) та седловидних ($k_x > 0, k_y < 0; K < 0$) оболонок.

Деформування таких оболонок при докритичному навантаженні описується співвідношеннями геометрично нелінійної теорії середнього згину в квадратичному наближенні за моделлю Муштарі – Доннелла – Власова.

На основі цих співвідношень математичну модель напружено-деформованого стану та вільних коливачь пологих оболонок після відокремлення часового множника $e^{i\omega t}$ можна представити в такому загальному векторно-матричному вигляді відносно вектор-функції переміщень $\overline{U} = \{u(x, y), v(x, y), w(x, y)\}$:

$$D_{xy}(\overline{U}) = L\overline{U} + \overline{g} + \overline{f} - \lambda B\overline{U} = 0, \quad (x, y) \in \Omega; \quad (3.19)$$

$$G_{x,p}(\overline{U}) = R_{x,p}\overline{U} + \overline{s}_{x,p} + \overline{\varphi}_{x,p} = 0, \quad x = x_p \quad (p = 0; 1); \quad (3.20)$$

$$G_{y,p}(\bar{U}) = R_{y,p}\bar{U} + \bar{s}_{y,p} + \bar{\varphi}_{y,p} = 0, \quad y = y_p \quad (p=0;1). \quad (3.21)$$

Тут L, \bar{g} та \bar{f} ($f_i(x, y) = -q_i(x, y)$) – матричний диференціальний оператор, вектор-функція нелінійних членів та вільний член, що визначені в області Ω ; $\lambda = \omega^2$, ω, \bar{U} – шукана частота та форма вільних коливань в задачі про коливання, B – матриця інерційних властивостей матеріалу; $R_{x,p}, \bar{s}_{x,p}$ та $\bar{\varphi}_{x,p}$ – матричний диференціальний або алгебраїчний оператор, вектор-функція нелінійних членів та вільний член в граничних умовах на контурі $x = x_p$ ($p=0;1$); аналогічний зміст мають оператор та вектор-функції з індексом y_p для граничних умов при $y = y_p$ ($p=0;1$).

3.2.2. Задачі статки. Лінійна постановка. Реалізацію вихідних положень МПС (пункт. 3.1.1) проілюструємо на розв'язанні двовимірної лінійної крайової задачі теорії пологих оболонок, як частинного випадку (3.19) – (3.21) при $\bar{g} = 0, \bar{s}_{x,p} = 0, \bar{s}_{y,p} = 0$:

$$D_{xy}(\bar{U}) = L\bar{U} + \bar{f} = 0, \quad (x, y) \in \Omega; \quad (3.22)$$

$$G_{x,p}(\bar{U}) = R_{x,p}\bar{U} + \bar{\varphi}_{x,p} = 0, \quad x = x_p \quad (p=0;1); \quad (3.23)$$

$$G_{y,p}(\bar{U}) = R_{y,p}\bar{U} + \bar{\varphi}_{y,p} = 0, \quad y = y_p \quad (p=0;1). \quad (3.24)$$

Етап 1. Апроксимація шуканого розв'язку у формі функції з відокремленими змінними.

Згідно з сформульованим загальним положенням МПС кожна компонента шуканого вектора переміщень $\bar{U} = \{u(x, y), v(x, y), w(x, y)\}$ приймається в такому вигляді:

$$\begin{aligned} u(x, y) &\cong F_{uM}(x, y) = \sum_{i=1}^M X_{ui}(x) Y_{ui}(y); \\ v(x, y) &\cong F_{vM}(x, y) = \sum_{i=1}^M X_{vi}(x) Y_{vi}(y); \\ w(x, y) &\cong F_{wM}(x, y) = \sum_{i=1}^M X_{wi}(x) Y_{wi}(y), \end{aligned} \quad (3.25)$$

де M – кількість членів ряду, що утримуються в апроксимації (3.25), а всі функції $X_{ui}(x), Y_{ui}(y), X_{vi}(x), Y_{vi}(y), X_{wi}(x), Y_{wi}(y)$ ($i = \overline{1, M}$) є невідомими і можуть бути представленими як компоненти двох аргументних вектор-функцій, що залежать від одного аргумента (однієї змінної)

$$\bar{X} = \{X_{qi}(x)\}_{q=u,v,w; i=\overline{1, M}} = \{X_{u1}, X_{u2}, \dots, X_{uM}, X_{v1}, X_{v2}, \dots, X_{vM}, X_{w1}, X_{w2}, \dots, X_{wM}\}; \quad (3.26)$$

$$\bar{Y} = \{Y_{qi}(y)\}_{q=u,v,w; i=\overline{1, M}} = \{Y_{u1}, Y_{u2}, \dots, Y_{uM}, Y_{v1}, Y_{v2}, \dots, Y_{vM}, Y_{w1}, Y_{w2}, \dots, Y_{wM}\}. \quad (3.27)$$

Таким чином, шукана вектор-функція двох змінних $\bar{U} = \{u(x, y), v(x, y), w(x, y)\}$ у відповідності з прийнятою апроксимацією (3.25) наближено замінюється вектор-функцією $\bar{F}_M = \{F_{uM}, F_{vM}, F_{wM}\}$ з двома невідомими аргументними вектор-функціями $\bar{X} = \{X_{qi}(x)\}$ (3.26) і $\bar{Y} = \{Y_{qi}(y)\}$ (3.27), кожна з яких залежить від однієї змінної.

Етап 2. Побудова розв'язувальної системи відносно невідомих аргументних функцій різних змінних.

Для знаходження невідомих функцій $\bar{X} = \{X_{qi}(x)\}$, $\bar{Y} = \{Y_{qi}(y)\}$ застосовуються дві процедури зведення як операції проектування на різні координатні напрямки – $P_x = \{P_{xuk}, P_{xvk}, P_{xwk}\} (k = \overline{1, M})$ на напрямок x і – $P_y = \{P_{yuk}, P_{yvk}, P_{ywk}\} (k = \overline{1, M})$ на напрямок y . Складові цих процедур мають вигляд:

$$P_{xuk}(\cdot) = \int_{y_0}^{y_1} (\cdot) Y_{uk} dy; \quad P_{xvk}(\cdot) = \int_{y_0}^{y_1} (\cdot) Y_{vk} dy; \quad P_{xwk}(\cdot) = \int_{y_0}^{y_1} (\cdot) Y_{wk} dy \quad (k = \overline{1, M}); \quad (3.28)$$

$$P_{yuk}(\cdot) = \int_{x_0}^{x_1} (\cdot) X_{uk} dx; \quad P_{yvk}(\cdot) = \int_{x_0}^{x_1} (\cdot) X_{vk} dx; \quad P_{ywk}(\cdot) = \int_{x_0}^{x_1} (\cdot) X_{wk} dx \quad (k = \overline{1, M}). \quad (3.29)$$

Застосуємо процедуру (3.28) до диференціального рівняння (3.22) і граничних умов (3.23) (граничні умови (3.24) будуть враховані автоматично в процесі інтегрування (3.22) по частинам за змінною y), а процедуру (3.29) до того ж рівняння (3.22) і граничних умов (3.24) (граничні умови (3.23) будуть враховані в процесі інтегрування (3.22) по частинам за змінною x). В результаті одержимо дві одновимірні задачі за змінною x відносно аргументних функцій $\bar{X} = \{X_{qi}(x)\}$ (3.26) і за змінною y відносно аргументних функцій $\bar{Y} = \{Y_{qi}(y)\}$ (3.27) ($q = u, v, w; i = \overline{1, M}$). Ця нова структура, що в загальному N -вимірному випадку має вигляд (3.5), представлена такими двома одновимірними задачами за різними змінними області:

$$P_x(L\bar{F}_M + \bar{f}) = 0 \quad \rightarrow \quad L_{(x)}\bar{X} + \bar{f}_{(x)} = 0, \quad x \in (x_0, x_1);$$

$$P_x(R_{x,p}\bar{F}_M + \bar{\varphi}_{x,p}) = 0 \quad \rightarrow \quad R_{x,p(x)}\bar{X} + \bar{\varphi}_{x,p(x)} = 0, \quad x = x_p \quad (p = 0; 1); \quad (3.30)$$

$$P_y(L\bar{F}_M + \bar{f}) = 0 \quad \rightarrow \quad L_{(y)}\bar{Y} + \bar{f}_{(y)} = 0, \quad y \in (y_0, y_1);$$

$$P_y(R_{y,p}\bar{F}_M + \bar{\varphi}_{y,p}) = 0 \quad \rightarrow \quad R_{y,p(y)}\bar{Y} + \bar{\varphi}_{y,p(y)} = 0, \quad y = y_p \quad (p = 0; 1). \quad (3.31)$$

В задачі (3.30) нижній індекс в дужках (x) означає, що позначені ним оператори і вектори перетворені згідно процедури (3.28), при цьому коефіцієнти операторів залежать від аргументних функцій $\{Y_{qi}(y)\}_{q=u,v,w; i=\overline{1,M}}$. Аналогічний зміст мають оператори і

вектори з нижнім індексом (y) в задачі (3.31) з тією різницею, що диференціювання ведеться за змінною y в $L_{(y)}$, $R_{y,p(y)}$, а коефіцієнти в них залежать від аргументів функцій $\bar{X} = \{X_{qi}(x)\}_{q=u,v,w; i=\overline{1,M}}$.

Етап 3. Розв'язання системи взаємопов'язаних задач (3.30), (3.31) та одержання шуканого розв'язку вихідної задачі (3.22) – (3.24).

Застосування процесу типу Лібмана – Гаусса – Зейделя до системи (3.30), (3.31) представлено такою ітераційною схемою (параметр ітерації j)

$$L_{(x)}^{(j-1)}\bar{X}^{(j)} + \bar{f}_{(x)}^{(j-1)} = 0, \quad x \in (x_0, x_1);$$

$$R_{x,p(x)}^{(j-1)}\bar{X}^{(j)} + \bar{\varphi}_{x,p(x)}^{(j-1)} = 0, \quad x = x_p \quad (p = 0; 1); \quad (3.32)$$

$$L_{(y)}^{(j)}\bar{Y}^{(j)} + \bar{f}_{(y)}^{(j)} = 0, \quad y \in (y_0, y_1);$$

$$R_{y,p(y)}^{(j)}\bar{Y}^{(j)} + \bar{\varphi}_{y,p(y)}^{(j)} = 0, \quad y = y_p \quad (p=0;1). \quad (3.33)$$

Завершення ітераційного процесу (3.32), (3.33), вибір початкового наближення та конструювання остаточного розв'язку вихідної задачі здійснюється за загальною схемою без будь-яких особливостей (пункт 3.1.1).

3.2.3. Задачі статки. Нелінійна постановка ($\bar{g} \neq 0, \bar{s}_{xp} \neq 0, \bar{s}_{yp} \neq 0, \lambda = 0$ в (3.19) – (3.21)).

$$D_{xy}(\bar{U}) = L\bar{U} + \bar{g} + \bar{f} = 0, \quad (x, y) \in \Omega; \quad (3.34)$$

$$G_{x,p}(\bar{U}) = R_{x,p}\bar{U} + \bar{s}_{x,p} + \bar{\varphi}_{x,p} = 0, \quad x = x_p \quad (p=0;1); \quad (3.35)$$

$$G_{y,p}(\bar{U}) = R_{y,p}\bar{U} + \bar{s}_{y,p} + \bar{\varphi}_{y,p} = 0, \quad y = y_p \quad (p=0;1). \quad (3.36)$$

Методика розв'язування двовимірних крайових задач для пологих оболонок при докритичних навантаженнях базується на раціональному поєднанні метода лінеаризації в формі Ньютона – Канторовича – Рафсона [1] та методу повних систем.

В цьому випадку загальна схема розв'язування нелінійної задачі (3.34) – (3.36) може бути представлена як послідовне виконання таких процедур:

Етап 1. Зведення нелінійної задачі до ітеративної послідовності лінійних крайових задач за методом квазілінеаризації (параметр n).

Етап 2. Розв'язування окремої лінеаризованої задачі за МПС з застосуванням способу Лібмана – Гаусса – Зейделя (параметр j).

Етап 3. Побудова об'єднаного ітераційного процесу, що включає знаходження аргументних функцій за процесом Лібмана – Гаусса – Зейделя та ітерації з лінеаризації вихідної задачі за Ньютоном – Канторовичем – Рафсоном (параметр m).

Етап 1. Застосування процедури лінеаризації до вихідної нелінійної задачі (3.34) – (3.36) зводить її до такої ітеративної послідовності лінійних двовимірних крайових задач ($n = 1, 2, \dots$ – параметр лінеаризації):

$$D(\bar{U}^{(n)}, \bar{U}^{(n-1)}, \dots) =$$

$$= L\bar{U}^{(n)} + J_{,\bar{U}}(\bar{U}^{(n)} - \bar{U}^{(n-1)}) + J_{,\bar{U},x}(\bar{U}_{,x}^{(n)} - \bar{U}_{,x}^{(n-1)}) + J_{,\bar{U},xx}(\bar{U}_{,xx}^{(n)} - \bar{U}_{,xx}^{(n-1)}) +$$

$$+ J_{,\bar{U},y}(\bar{U}_{,y}^{(n)} - \bar{U}_{,y}^{(n-1)}) + J_{,\bar{U},xy}(\bar{U}_{,xy}^{(n)} - \bar{U}_{,xy}^{(n-1)}) + \dots + \bar{g}(\bar{U}^{(n-1)}, \bar{U}_{,x}^{(n-1)}, \dots) + \bar{f} = 0$$

$$(x, y) \in \Omega; \quad (3.37)$$

$$G_{x,p}(\bar{U}^{(n)}, \bar{U}^{(n-1)}, \dots) = R_{x,p}\bar{U}^{(n)} + I_{,\bar{U}}(\bar{U}^{(n)} - \bar{U}^{(n-1)}) + I_{,\bar{U},x}(\bar{U}_{,x}^{(n)} - \bar{U}_{,x}^{(n-1)}) +$$

$$+ I_{,\bar{U},y}(\bar{U}_{,y}^{(n)} - \bar{U}_{,y}^{(n-1)}) + \bar{\varphi}_{xp} = 0, \quad x = x_p \quad (p=0;1); \quad (3.38)$$

$$G_{y,p}(\bar{U}^{(n)}, \bar{U}^{(n-1)}, \dots) = R_{y,p}\bar{U}^{(n)} + T_{,\bar{U}}(\bar{U}^{(n)} - \bar{U}^{(n-1)}) + T_{,\bar{U},x}(\bar{U}_{,x}^{(n)} - \bar{U}_{,x}^{(n-1)}) +$$

$$+ T_{,\bar{U},y}(\bar{U}_{,y}^{(n)} - \bar{U}_{,y}^{(n-1)}) + \bar{\varphi}_{yp} = 0, \quad y = y_p \quad (p=0;1), \quad (3.39)$$

де $D(\bar{U}^{(n)}, \bar{U}^{(n-1)}, \dots)$, $G_{x,p}(\bar{U}^{(n)}, \bar{U}^{(n-1)}, \dots)$, $G_{y,p}(\bar{U}^{(n)}, \bar{U}^{(n-1)}, \dots)$ – диференціальні або алгебраїчні оператори лінеаризованої задачі, що містять шукані функції двох послідовних наближень і визначені відповідно в заданій області та на її границі:

$$J_{\bar{U},xy} = \left(\frac{\partial g_i}{\partial u_{j,xy}} \right) \Big|_{\bar{U}=\bar{U}^{(n-1)}} \quad (i, j = 1, 2, 3); \quad I_{,\xi} = \left(\frac{\partial s_{xpi}}{\partial u_{j,\xi}} \right) \Big|_{\bar{U}=\bar{U}^{(n-1)}} \quad (i = \overline{1,4}; j = 1, 2, 3; \xi = 0; x; y);$$

$$T_{,\xi} = \left(\frac{\partial s_{ypi}}{\partial u_{j,\xi}} \right) \Big|_{\bar{U}=\bar{U}^{(n-1)}} \quad (i = \overline{1,4}; j = 1, 2, 3; \xi = 0; x; y).$$

Етап 2. Розв'язування окремої лінеаризованої задачі з послідовності (3.37) – (3.39) за МПС із застосуванням способу Лібмана – Гаусса – Зейделя (параметр j).

Описаний вище процес розв'язування лінійних крайових задач за МПС реалізується тут на кожному кроці лінеаризації $n = 1, 2, \dots$.

Так, компоненти шуканого вектора переміщень $\bar{U}^{(n)} = \{u^{(n)}(x, y), v^{(n)}(x, y), w^{(n)}(x, y)\}$, невідомі аргументні вектор-функції $\bar{X}^{(n)} = \{X_{qi}^{(n)}(x)\}$, $\bar{Y}^{(n)} = \{Y_{qi}^{(n)}(y)\}$, ($q = u, v, w; i = \overline{1, M}$), процедури проєктування $P_x^{(n)} = \{P_{xuk}^{(n)}, P_{xvk}^{(n)}, P_{xwk}^{(n)}\} (k = \overline{1, M})$, $P_y^{(n)} = \{P_{yuk}^{(n)}, P_{yvk}^{(n)}, P_{ywk}^{(n)}\}$, система одновимірних задач приймаються відповідно у вигляді (3.25) – (3.31) з індексом (n) , а застосування до розв'язування останньої методу Лібмана – Гаусса – Зейделя запишеться таким чином (знак «тільда» означає, що відповідні перетворення здійснюються для операторів і векторів вільних членів лінеаризованої задачі (3.37) – (3.39))

$$\tilde{L}_{(x)}^{(n-1),(j-1)} \bar{X}^{(n)(j)} + \tilde{f}_{(x)}^{(n-1),(j-1)} = 0, \quad x \in (x_0, x_1);$$

$$\tilde{R}_{x,p(x)}^{(n-1),(j-1)} \bar{X}^{(n)(j)} + \tilde{\varphi}_{x,p(x)}^{(n-1),(j-1)} = 0, \quad x = x_p \quad (p = 0; 1); \quad (3.40)$$

$$\tilde{L}_{(y)}^{(n-1),(j)} \bar{Y}^{(n)(j)} + \tilde{f}_{(y)}^{(n-1),(j)} = 0, \quad y \in (y_0, y_1);$$

$$\tilde{R}_{y,p(y)}^{(n-1),(j)} \bar{Y}^{(n)(j)} + \tilde{\varphi}_{y,p(y)}^{(n-1),(j)} = 0, \quad y = y_p \quad (p = 0; 1). \quad (3.41)$$

Тут верхні індекси в дужках означають параметри двох різних ітераційних процесів – лінеаризації (n) та процесу Лібмана – Гаусса – Зейделя (j).

Таким чином, знаходження шуканих аргументних функцій в нелінійній задачі реалізується в результаті двох вкладених ітеративних процесів: зовнішнього процесу лінеаризації та внутрішнього процесу Лібмана – Гаусса – Зейделя розв'язування системи взаємопов'язаних одновимірних задач.

Етап 3. В даному класі задач теорії оболонок є можливість об'єднати два вказані процеси з параметрами n і j та побудувати об'єднаний спільний процес розв'язування двовимірної нелінійної задачі в цілому (параметр m)

$$\tilde{L}_{(x)}^{(m-1)} \bar{X}^{(m)} + \tilde{f}_{(x)}^{(m-1)} = 0, \quad x \in (x_0, x_1);$$

$$\tilde{R}_{x,p(x)}^{(m-1)} \bar{X}^{(m)} + \tilde{\varphi}_{x,p(x)}^{(m-1)} = 0, \quad x = x_p \quad (p = 0; 1); \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned}\tilde{L}_{(y)}^{(m-1)}\bar{Y}^{(m)} + \tilde{f}_{(y)}^{(m-1)} &= 0, \quad y \in (y_0, y_1); \\ \tilde{R}_{y,p}^{(m-1)}\bar{Y}^{(m)} + \tilde{\varphi}_{y,p}^{(m-1)} &= 0, \quad y = y_p \quad (p=0;1).\end{aligned}\quad (3.43)$$

Цей об'єднаний ітераційний процес реалізується за загальною схемою (пункт 3.1.1) з виконанням відповідних умов вибору початкового наближення, критеріїв завершення процесу та одержання остаточного розв'язку вихідної нелінійної задачі.

Детальна реалізація цих процедур викладена в статтях [62, 67].

3.2.4. Вільні коливання ($\bar{g} = 0$, $\bar{s}_{x_p} = 0$, $\bar{s}_{y_p} = 0$, $\bar{f} = 0$, $\lambda \neq 0$, $\bar{\varphi}_{x,p} = 0$, $\bar{\varphi}_{y,p} = 0$ в (3.19) – (3.21)).

Вільні коливання пологих оболонок в межах прийнятих припущень (малості, гармонічності за часом, синфазності та синхронності усіх точок) описуються однорідною крайовою задачею з невідомим числовим параметром λ у такому загальному вигляді (задача на власні значення):

$$D_{xy} = L\bar{U} - \lambda B\bar{U} = 0, \quad (x, y) \in \Omega; \quad (3.44)$$

$$R_{x,p}\bar{U} = 0, \quad x = x_p \quad (p=0;1); \quad (3.45)$$

$$R_{y,p}\bar{U} = 0, \quad y = y_p \quad (p=0;1) \quad (3.46)$$

($\lambda = \omega^2$, ω, \bar{U} – шукана частота та форма вільних коливань оболонки; B – матриця інерційних властивостей матеріалу).

Методика знаходження параметра λ будується на основі раціонального поєднання методу послідовних наближень в варіанті оберненої ітерації (метод Релея) та методу повних систем в лінійному варіанті. В цьому випадку вона складається з таких етапів:

Етап 1. Зведення вихідної однорідної задачі (3.44) – (3.46) з невідомим параметром λ до ітеративної послідовності крайових задач тієї ж розмірності, що є неоднорідними і не містять цього параметра.

Етап 2. Розв'язування окремої неоднорідної лінійної крайової задачі за МПС із застосуванням процесу Лібмана – Гаусса – Зейделя.

Етап 3. Побудова об'єданого ітераційного процесу, що включає ітерації за методом послідовних наближень Релея та знаходження аргументних функцій в окремій задачі за процесом Лібмана – Гаусса – Зейделя.

У порівнянні з методикою розв'язування нелінійної задачі знаходження частот і форм вільних коливань розглянутих оболонок відрізняється виконанням *Етапу 1.* і відповідною адаптацією двох інших етапів.

На першому етапі знаходження числового параметра λ з однорідної крайової задачі (3.44) – (3.46) здійснюється на основі метода послідовних наближень в варіанті оберненої ітерації [39].

За цим методом шуканий числовий параметр λ визначається як границя числової послідовності $\lambda^{(l)}$

$$\lambda^{(l)} = \frac{\int_{\Omega} (\bar{V}^{(l)T} B \bar{V}^{(l-1)}) dx dy}{\int_{\Omega} (\bar{V}^{(l)T} B \bar{V}^{(l)}) dx dy} \quad \lambda^{(l)} \rightarrow \lambda \quad \text{при } l \rightarrow \infty, \quad (3.47)$$

а вектор-функція \bar{U} – як границя функціональної послідовності ($\bar{V}^{(l)} \rightarrow \bar{U}$, $l \rightarrow \infty$). Кожний l -ий член цієї послідовності є розв'язком неоднорідної крайової задачі, що одержана з вихідної задачі (3.44) – (3.46) заміною $\bar{U} = \bar{V}^{(l)}$, $\lambda \bar{U} = \bar{V}^{(l-1)}$ і має такий вигляд:

$$D_{xy} = (L - \tau B)\bar{V}^{(l)} - B\bar{V}^{(l-1)} = 0, \quad (x, y) \in \Omega; \quad (3.48)$$

$$R_{x,p}\bar{V}^{(l)} = 0, \quad x = x_p \quad (p = 0; 1); \quad (3.49)$$

$$R_{y,p}\bar{V}^{(l)} = 0, \quad y = y_p \quad (p = 0; 1). \quad (3.50)$$

Тут τ – параметр зсуву спектру власних значень, що вибирається неформально; за початкове наближення вибирається вектор $\bar{V}^{(0)}$, компоненти якого є неперервні функції загального вигляду потрібне число раз диференційовані.

На кожному l -му кроці методу послідовних наближень крайова задача (3.48) – (3.50) розв’язується МПС з шуканими функціями $\bar{V}^{(l)}$.

Так, компоненти вектора $\bar{V}^{(l)} = \{u^{(l)}(x, y), v^{(l)}(x, y), w^{(l)}(x, y)\}$, як проміжне l -те наближення до шуканого вектора власних функцій $\bar{U} = \{u(x, y), v(x, y), w(x, y)\}$, невідомі аргументні вектор-функції $\bar{X}^{(l)} = \{X_{qi}^{(l)}(x)\}$, $\bar{Y}^{(l)} = \{Y_{qi}^{(l)}(y)\}$, ($q = u, v, w; i = \overline{1, M}$) та процедури зведення $P_x^{(l)} = \{P_{xuk}^{(l)}, P_{xvk}^{(l)}, P_{xwk}^{(l)}\}$, $P_y^{(l)} = \{P_{yuk}^{(l)}, P_{yvk}^{(l)}, P_{ywk}^{(l)}\}$, ($k = \overline{1, M}$) приймаються, відповідно, у вигляді (3.25) – (3.29) з індексами l .

В результаті відповідних перетворень задачі (3.48) – (3.50) та подальшого застосування до її розв’язування процесу Лібмана – Гаусса – Зейделя одержимо:

$$\begin{aligned} \left(L_{(x)}^{(l)(j-1)} - \tau B_{(x)}^{(l)(j-1)} \right) \bar{X}^{(l)(j)} - B_{(x)}^{(l)(j-1)} \bar{X}^{(l-1)(j-1)} &= 0, \quad (x, y) \in \Omega; \\ R_{x,p}^{(l)(j-1)} \bar{X}^{(l)(j)} &= 0, \quad x = x_p \quad (p = 0; 1); \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} \left(L_{(y)}^{(l)(j-1)} - \tau B_{(y)}^{(l)(j-1)} \right) \bar{Y}^{(l)(j)} - B_{(y)}^{(l)(j-1)} \bar{Y}^{(l-1)(j-1)} &= 0, \quad (x, y) \in \Omega; \\ R_{y,p}^{(l)(j-1)} \bar{Y}^{(l)(j)} &= 0, \quad y = y_p \quad (p = 0; 1) \quad (l = 1, 2, \dots; j = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Індекс $(j-1)$ при операторах $L_{(x)}^{(l)(j-1)}$, $B_{(x)}^{(l)(j-1)}$, $R_{x,p}^{(l)(j-1)}$ в задачі (3.51) на проміжному l -ому кроці ітерації означає, що аргументні функції $\bar{Y}^{(l)}$ для обчислення коефіцієнтів цих операторів беруться з попереднього $(j-1)$ -го кроку наближення. Ці індекси мають аналогічний зміст в інших операторах системи (3.51), (3.52). Верхні індекси в дужках означають параметри двох різних ітераційних процесів: послідовних наближень (l) та процесу Лібмана – Гаусса – Зейделя (j).

Таким чином, знаходження шуканих аргументних функцій $\bar{X}^{(l)}$, $\bar{Y}^{(l)}$ і, як наслідок, власних значень λ ($\lambda^{(l)} \rightarrow \lambda$) і власних вектор-функцій \bar{U} ($\bar{V}^{(l)} \rightarrow \bar{U}$) реалізується в результаті двох вкладених ітераційних процесів: зовнішнього процесу послідовних наближень та внутрішнього процесу Лібмана – Гаусса – Зейделя розв’язування системи одновимірних задач.

В даному класі задач теорії оболонки, як і в нелінійній задачі (пункт 3.2.3) можливе об’єднання двох названих процесів з параметрами l і j та побудова об’єданого спільного процесу знаходження аргументних функцій та розв’язання двовимірної задачі на власні значення в цілому (параметр ітерації m)

$$\begin{aligned} \left(L_{(x)}^{(m-1)} - \tau B_{(x)}^{(m-1)} \right) \bar{X}^{(m)} - B_{(x)}^{(m-1)} \bar{X}^{(m-1)} &= 0, \quad (x, y) \in \Omega; \\ R_{x,p}^{(m-1)} \bar{X}^{(m)} &= 0, \quad x = x_p \quad (p=0;1); \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} \left(L_{(y)}^{(m-1)} - \tau B_{(y)}^{(m-1)} \right) \bar{Y}^{(m)} - B_{(y)}^{(m-1)} \bar{Y}^{(m-1)} &= 0, \quad (x, y) \in \Omega; \\ R_{y,p}^{(m-1)} \bar{Y}^{(m)} &= 0, \quad y = y_p \quad (p=0;1), \quad m=1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.54)$$

Завершення цього процесу і одержання остаточних значень частотного параметра λ і відповідного йому вектора форми коливань \bar{U} з заданою точністю реалізується за критеріями прикладної математики загального виду (3.7), (3.8). В даній задачі за цими критеріями порівнюються два послідовних значення параметрів $\lambda_M^{(l)}$ і $\lambda_M^{(l+1)}$ при фіксованому числі членів M апроксимуючого виразу виду (3.25) та $\lambda_M^{(lM)}$ і $\lambda_{M+1}^{(lM)}$ в залежності від кількості утриманих в (3.25) членів M (lM – кількість ітерацій методу послідовних наближень, при якій для фіксованого значення M процес (3.53), (3.54) збігається з заданою точністю).

Детальна реалізація цих етапів викладена в статті [65].

3.3. Тривимірні задачі статички та коливань анізотропного паралелепіеда (варіаційна постановка $N=3$).

Реалізація загальних положень МПС для N -вимірних задач в варіаційній постановці (пункт 3.1) ілюструється на прикладі тривимірних задач статички і коливань прямокутного анізотропного паралелепіеда.

3.3.1. Постановка задач. Розглядається пружне тіло у формі прямокутного паралелепіеда, що в декартовій системі координат займає об'єм $\Omega \cup \partial\Omega = \{x, y, z : |x| \leq a, |y| \leq b, |z| \leq c\}$. В середині області на тіло діють масові сили $\{q_p\}_{p=1,2,3}$, а в кожній точці поверхні $\partial\Omega = \partial\Omega_u \cup \partial\Omega_f$ можуть бути задані переміщення \bar{U}^* (на $\partial\Omega_u$) або напруження $\bar{f}_n = \{f_{pn}\}_{p=1,2,3}$ (на $\partial\Omega_f$). Матеріал тіла вважається анізотропним матеріалом загального типу, включаючи відсутність площин симетрії пружних властивостей (n – зовнішня нормаль до поверхні, індекси 1,2,3 відповідають напрямкам координатних осей x, y, z).

Шуканий рівноважний стан паралелепіеда визначаємо з умови стаціонарності повної енергії пружної деформації

$$\delta \mathcal{E}(\bar{U}) = \delta \left(\Pi(\bar{U}) - \int_{\Omega} \bar{U}^T \bar{q} d\varpi - \int_{\partial\Omega_f} \bar{U}^T \bar{f}_n ds \right) = 0 \quad (3.55)$$

при умові

$$\bar{U}|_{\partial\Omega_u} = \bar{U}^*. \quad (3.56)$$

Вільні коливання тіла, що розглядаються при прийнятих вище умовах їх малості, гармонічності за часом, синфазності та синхронності всіх точок, описуються на основі принципу Релея

$$\delta \mathcal{E}(\bar{U}, \lambda) = \delta \left(\Pi(\bar{U}) - \lambda K(\bar{U}) \right) = 0 \quad (3.57)$$

при умові

$$\bar{U}|_{\partial\Omega_u} = 0, \quad (3.58)$$

де $\Pi(\bar{U}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (D\bar{U})^T CD\bar{U} d\varpi$ та $K = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \bar{U}^T \rho \bar{U} d\varpi$ – потенціальна та кінетична енергії тіла; λ – множник Лагранжа, що є квадратом шуканої власної частоти $\lambda = \omega^2 = \Pi/K = \int_{\Omega} (D\bar{U})^T CD\bar{U} d\varpi / \int_{\Omega} \bar{U}^T \rho \bar{U} d\varpi$ (ρ, ϖ, s – густина матеріалу, елементи об'єму та поверхні тіла).

Тут D – матричний диференціальний оператор, що зв'язує компоненти вектора деформацій $\bar{\varepsilon} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{12}\}$ з компонентами вектора переміщень $\bar{U} = \{u_1, u_2, u_3\}$, $C = \{c_{ij}\}$ ($i, j = \overline{1, 6}$) – матриця пружних сталих в узагальненому законі Гука для анізотропного тіла $\bar{\sigma} = C\bar{\varepsilon}$ ($\bar{\sigma} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}\}$ – шестикомпонентний вектор напружень, формально складений з компонент тензора напружень з врахуванням його симетрії, аналогічний зміст має вектор деформацій $\bar{\varepsilon} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{12}\}$, всі вектори є векторами-стовпчиками).

3.3.2. Задача статики. Конкретизацію основних положень МПС, представлених для загального випадку N -вимірної задачі в варіаційній постановці (пункт 3.1.2), проілюструємо при визначенні стаціонарних точок (мінімуму) квадратичного функціоналу (3.55), (3.56) в тривимірній області $\Omega \cup \partial\Omega$. Не обмежуючи загальної постановки задачі, прийемо, що на частині поверхні $\partial\Omega_u$ відсутні кінематичні впливи, тобто $\bar{U}^* = 0$, що досягається лінійною заміною шуканої вектор-функції $\bar{U} \rightarrow \bar{U} - \bar{U}^*$.

Сформульовані три вихідні положення МПС реалізуються на відповідних етапах розв'язування варіаційної задачі (3.55), (3.56) таким чином.

Етап 1. Апроксимація шуканого розв'язку у формі суперпозиції функції з розділеними змінними.

У відповідності з *Положенням 1* (пункт 3.1.2) вектор переміщень $\bar{U} = \{u_1(x, y, z), u_2(x, y, z), u_3(x, y, z)\}$, як шукана точка стаціонарності функціоналу (3.55), (3.56), наближено замінюється вектором $\bar{F}_M = \{f_{1M}, f_{2M}, f_{3M}\}$ так, що кожна його компонента приймається у вигляді такої лінійної комбінації:

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z) &\approx f_{1M}(x, y, z) = \sum_{i=1}^M X_{1i}(x) Y_{1i}(y) Z_{1i}(z); \\ u_2(x, y, z) &\approx f_{2M}(x, y, z) = \sum_{i=1}^M X_{2i}(x) Y_{2i}(y) Z_{2i}(z); \\ u_3(x, y, z) &\approx f_{3M}(x, y, z) = \sum_{i=1}^M X_{3i}(x) Y_{3i}(y) Z_{3i}(z). \end{aligned} \quad (3.59)$$

Тут всі функції $X_{1i}(x), X_{2i}(x), X_{3i}(x), Y_{1i}(y), Y_{2i}(y), Y_{3i}(y), Z_{1i}(z), Z_{2i}(z), Z_{3i}(z)$ ($i = \overline{1, M}$) (або три аргументні вектор-функції $\bar{X} = \{X_{pi}(x)\}_{p=1, 2, 3; i=\overline{1, M}}$, $\bar{Y} = \{Y_{pi}(y)\}_{p=1, 2, 3; i=\overline{1, M}}$, $\bar{Z} = \{Z_{pi}(z)\}_{p=1, 2, 3; i=\overline{1, M}}$) вважаються невідомими, які потрібно знайти.

Етап 2. Побудова відповідної структури для визначення невідомих аргументних вектор-функцій $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$.

Згідно з прийнятою апроксимацією (3.59) вектор-функція \bar{U} з компонентами, що залежать від трьох незалежних змінних x, y, z , замінюється вектор-функцією \bar{F}_M , тобто трьома аргументними вектор-функціями $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$, а функціонал (3.55) наближено замінюється функціоналом $\mathcal{E}_M(\bar{F}_M)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\bar{U}) \approx \mathcal{E}_M(\bar{F}_M) = \mathcal{E}_M(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} (D\bar{F}_M)^T C D\bar{F}_M dx dy dz - \\ & - \int_{\Omega} \bar{F}_M^T \bar{q} dx dy dz - \int_{\partial\Omega_f} \bar{F}_M^T f_n ds. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Умова стаціонарності одержаного функціонала має вигляд:

$$\delta \mathcal{E}_M(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}) = \delta_{\bar{X}} \mathcal{E}_M \delta \bar{X} + \delta_{\bar{Y}} \mathcal{E}_M \delta \bar{Y} + \delta_{\bar{Z}} \mathcal{E}_M \delta \bar{Z} = 0, \quad (3.61)$$

де $\delta_{\bar{X}} \mathcal{E}_M, \delta_{\bar{Y}} \mathcal{E}_M, \delta_{\bar{Z}} \mathcal{E}_M$ – частинні варіації функціонала \mathcal{E}_M по компонентах векторів $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$, відповідно. Через незалежність векторів $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ умова (3.61) еквівалентна таким трьом умовам, що визначають узагальнений розв'язок задачі:

$$\delta_{\bar{X}} \mathcal{E}_M = \sum_{k=1}^M (\delta_{X_{1k}} \mathcal{E}_M \delta X_{1k} + \delta_{X_{2k}} \mathcal{E}_M \delta X_{2k} + \delta_{X_{3k}} \mathcal{E}_M \delta X_{3k}) = 0; \quad (3.62)$$

$$\delta_{\bar{Y}} \mathcal{E}_M = \sum_{k=1}^M (\delta_{Y_{1k}} \mathcal{E}_M \delta Y_{1k} + \delta_{Y_{2k}} \mathcal{E}_M \delta Y_{2k} + \delta_{Y_{3k}} \mathcal{E}_M \delta Y_{3k}) = 0; \quad (3.63)$$

$$\delta_{\bar{Z}} \mathcal{E}_M = \sum_{k=1}^M (\delta_{Z_{1k}} \mathcal{E}_M \delta Z_{1k} + \delta_{Z_{2k}} \mathcal{E}_M \delta Z_{2k} + \delta_{Z_{3k}} \mathcal{E}_M \delta Z_{3k}) = 0. \quad (3.64)$$

Кожна з шуканих аргументних функцій $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ в одному з співвідношень є такою, що варіюється (\bar{X} – в (3.62), \bar{Y} – в (3.63), \bar{Z} – в (3.64)), а в двох інших не варіюється і фігурує як задана (\bar{X} – в (3.63), (3.64); \bar{Y} – в (3.62), (3.64); \bar{Z} – в (3.62), (3.63)). Таким чином, співвідношення (3.62) – (3.64) пов'язані між собою і становлять єдину структуру, з якої всі невідомі аргументні функції різних змінних можуть бути визначені, спираючись виключно на стандартну техніку варіаційного числення.

Перехід в кожному із співвідношень (3.62) – (3.64) до рівнянь Ейлера – Лагранжа для одержання класичного розв'язку задачі породжує одновимірну крайову задачу (систему звичайних диференціальних рівнянь і граничні умови) відносно аргументної вектор-функції, що варіюється. При цьому аргументні функції інших змінних, що не варіюються в цій умові, фігурують в одновимірній задачі як параметри-функціонали. Так, наприклад, умові (3.62) відповідає одновимірна задача за змінною x відносно функцій $\bar{X} = \{X_{pi}(\bar{x})\}_{\substack{p=1,2,3, \\ i=1, \bar{M}}}$, а функції $\bar{Y} = \{Y_{pi}(\bar{y})\}_{\substack{p=1,2,3, \\ i=1, \bar{M}}}$ та $\bar{Z} = \{Z_{pi}(\bar{z})\}_{\substack{p=1,2,3, \\ i=1, \bar{M}}}$ фігу-

рують в ній як визначені інтеграли. Відповідно, з умови (3.63) одержимо одновимірну задачу за змінною y відносно функцій $\bar{Y} = \{Y_{pi}(\bar{y})\}_{\substack{p=1,2,3, \\ i=1, \bar{M}}}$, а з умови (3.64) – одновимірну задачу за змінною z відносно функцій $\bar{Z} = \{Z_{pi}(\bar{z})\}_{\substack{p=1,2,3, \\ i=1, \bar{M}}}$.

Таким чином, система співвідношень (3.62) – (3.64) приводить до системи трьох одновимірних крайових задач відносно трьох аргументних вектор-функцій за різними змінними області. Ця структура може бути представлена у вигляді:

$$L_{(x)}\bar{X} + \bar{q}_{(x)} = 0, \quad x \in (-a, a); \quad R_{(x)}^{(\pm)}\bar{X} + \bar{f}_{(x)}^{(\pm)} = 0, \quad x = \pm a; \quad (3.65)$$

$$L_{(y)}\bar{Y} + \bar{q}_{(y)} = 0, \quad y \in (-b, b); \quad R_{(y)}^{(\pm)}\bar{Y} + \bar{f}_{(y)}^{(\pm)} = 0, \quad y = \pm b; \quad (3.66)$$

$$L_{(z)}\bar{Z} + \bar{q}_{(z)} = 0, \quad z \in (-c, c); \quad R_{(z)}^{(\pm)}\bar{Z} + \bar{f}_{(z)}^{(\pm)} = 0, \quad z = \pm c. \quad (3.67)$$

Нижні індекси при операторах і векторах означають, що вони одержані в результаті варіювання відповідного функціоналу за функціями, що залежать від цих змінних.

Етап 3. Знаходження аргументних вектор-функцій із побудованої системи співвідношень (3.62) – (3.64) і (3.65) – (3.67) та одержання шуканого розв'язку вихідної задачі (узагальненого і класичного).

Ітераційний процес Лібмана – Гаусса – Зейделя, описаний в загальному виді для варіаційної постановки задачі в N -вимірній області (пункт 3.1.2, *Етап 3.*), для 3D задачі (3.62) – (3.64) при закріпленому обмежуючому контурі запишеться таким чином (параметр ітерації j):

$$\delta_{\bar{X}^{(j)}} \mathcal{E}_M \left(\bar{X}^{(j)}, \bar{Y}^{(j-1)}, \bar{Z}^{(j-1)} \right) = 0; \quad X_i^{(j)}(\pm a) = 0; \quad (3.68)$$

$$\delta_{\bar{Y}^{(j)}} \mathcal{E}_M \left(\bar{X}^{(j)}, \bar{Y}^{(j)}, \bar{Z}^{(j-1)} \right) = 0; \quad Y_i^{(j)}(\pm b) = 0; \quad (3.69)$$

$$\delta_{\bar{Z}^{(j)}} \mathcal{E}_M \left(\bar{X}^{(j)}, \bar{Y}^{(j)}, \bar{Z}^{(j)} \right) = 0; \quad Z_i^{(j)}(\pm c) = 0. \quad (3.70)$$

Аналогічно, для розв'язування системи одновимірних задач (3.65) – (3.67) цей процес матиме вигляд:

$$L_{(x)}^{(j-1)}\bar{X}^{(j)} + \bar{q}_{(x)}^{(j-1)} = 0, \quad x \in (-a, a);$$

$$R_{(x)}^{(\pm)(j-1)}\bar{X}^{(j)} + \bar{f}_{(x)}^{(\pm)(j-1)} = 0, \quad x = \pm a, \text{ або } X_i^{(j)}(\pm a) = 0, \quad i = \overline{1, M}; \quad (3.71)$$

$$L_{(y)}^{(j-1)}\bar{Y}^{(j)} + \bar{q}_{(y)}^{(j-1)} = 0, \quad y \in (-b, b); \quad R_{(y)}^{(\pm)(j-1)}\bar{Y}^{(j)} + \bar{f}_{(y)}^{(\pm)(j-1)} = 0, \quad y = \pm b,$$

$$\text{або } Y_i^{(j)}(\pm b) = 0, \quad i = \overline{1, M}; \quad (3.72)$$

$$L_{(z)}^{(j)}\bar{Z}^{(j)} + \bar{q}_{(z)}^{(j)} = 0, \quad z \in (-c, c); \quad R_{(z)}^{(\pm)(j)}\bar{Z}^{(j)} + \bar{f}_{(z)}^{(\pm)(j)} = 0, \quad z = \pm c,$$

$$\text{або } Z_i^{(j)}(\pm c), \quad i = \overline{1, M} \quad (j=1, 2, \dots). \quad (3.73)$$

Ітераційний процес Лібмана – Гаусса – Зейделя в застосуванні до варіаційної і диференціальної постановок виконується за тими ж умовами вибору початкового наближення, критеріями завершення процесу та побудови остаточного розв'язку вихідної задачі за прийнятою апроксимацією (пункт 3.1.1).

Приклади розв'язування задач статички за викладеним методом ϵ , зокрема, в роботах [6, 71, 80].

3.3.3. Вільні коливання. Частоти ω і форми \bar{U} вільних коливань анізотропного паралелепіпеда в межах прийнятих припущень визначаються за принципом Релея (3.57), (3.58):

$\delta \mathcal{E}(\bar{U}, \lambda) = \delta(\Pi(\bar{U}) - \lambda K(\bar{U})) = 0$ при умові $\bar{U}|_{\partial\Omega_u} = 0$, де

$$\lambda = \omega^2 = \Pi/K = \int_{\Omega} (D\bar{U})^T CD\bar{U} d\varpi \Big/ \int_{\Omega} \bar{U}^T \rho \bar{U} d\varpi. \quad (3.74)$$

Методика визначення числового частотного параметра λ в (3.74) та відповідної йому форми коливань ґрунтується на раціональному поєднанні методу послідовних наближень у варіанті оберненої ітерації [39] та МПС. В цьому випадку вона складається з таких етапів:

Етап 1. Побудова числової послідовності $\lambda^{(l)}$ ($l = 1, 2, \dots$), границею якої є шуканий частотний параметр λ ($\lambda^{(l)} \rightarrow \lambda$) (3.74), та відповідної послідовності варіаційних задач для функціоналу $\mathcal{E}(\bar{U}, \lambda)$ (3.57), стаціонарне значення якого збігається до шуканої власної вектор-функції \bar{U} (метод послідовних наближень).

Етап 2. Розв'язування окремої варіаційної задачі з побудованої послідовності (МПС, процес Лібмана – Гаусса – Зейделя).

Етап 3. Побудова об'єднаного ітераційного процесу визначення частотних характеристик вільних коливань, що включає ітерації за методом послідовних наближень та розв'язування окремої варіаційної задачі за процесом Лібмана – Гаусса – Зейделя.

На першому етапі згідно з методом послідовних наближень задача (3.57), (3.58) введенням заміни $\bar{U} = \bar{V}^{(l)}$ і $\lambda \bar{U} = \bar{V}^{(l-1)}$ та параметра зсуву τ зводиться до послідовності варіаційних задач для функціоналів виду:

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}(\bar{U}, \lambda) \rightarrow \\ & \rightarrow \mathcal{E}_l(\bar{V}^{(l)}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (D\bar{V}^{(l)})^T CD\bar{V}^{(l)} d\varpi - \frac{1}{2} \tau \int_{\Omega} (\bar{V}^{(l)})^T \rho \bar{V}^{(l)} d\varpi - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\bar{V}^{(l)})^T \rho \bar{V}^{(l-1)} d\varpi. \end{aligned} \quad (3.75)$$

а частотний множник λ визначається як границя числової послідовності

$$\begin{aligned} \lambda^{(l)} &= \Pi_{(l)}/K_{(l)} = \\ &= \int_{\Omega} \left((D\bar{V}^{(l)})^T CD\bar{V}^{(l)} - \tau (\bar{V}^{(l)})^T \rho \bar{V}^{(l)} \right) d\varpi \Big/ \int_{\Omega} (\bar{V}^{(l)})^T \rho \bar{V}^{(l)} d\varpi \quad (l = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (3.76)$$

На другому етапі для визначення стаціонарних точок функціоналу (3.75) на деякому фіксованому кроці наближення $l = \text{fixed}$ застосовується МПС. За цим методом шукані функції $\bar{V}^{(l)} = \{v_p^{(l)}(x, y, z)\} (p = x, y, z)$ приймаються у вигляді

$$v_p^{(l)}(x, y, z) \approx f_{pM}^{(l)}(x, y, z) = \sum_{i=1}^M X_{pi}^{(l)}(x) Y_{pi}^{(l)}(y) Z_{pi}^{(l)}(z), \quad (3.77)$$

де всі компоненти апроксимації $\bar{X}^{(l)} = \{X_{pi}^{(l)}(x)\}$, $\bar{Y}^{(l)} = \{Y_{pi}^{(l)}(y)\}$, $\bar{Z}^{(l)} = \{Z_{pi}^{(l)}(z)\}$ ($p = x, y, z$; $i = \overline{1, M}$) невідомі.

За стандартною технікою варіаційного числення умови стаціонарності функціоналу (3.75) з врахуванням апроксимації (3.77) $\left(\mathcal{E}_{(l)}(\bar{V}^{(l)}) \rightarrow \mathcal{E}_{(lM)}(\bar{X}^{(l)}, \bar{Y}^{(l)}, \bar{Z}^{(l)}) \right)$ та переходу до рівнянь Ейлера – Лагранжа для одержання класичного розв'язку задачі породжують систему трьох одновимірних задач відносно вектор-функцій $\bar{X}^{(l)}$, $\bar{Y}^{(l)}$, $\bar{Z}^{(l)}$

$$\begin{aligned}\delta_{\bar{X}^{(l)}} \mathcal{E}_{IM} = 0 &\rightarrow \left(L_{(x)}^{(l)} - \tau T_{(x)}^{(l)} \right) \bar{X}^{(l)} - T_{(x)}^{(l)} \bar{X}^{(l-1)} = 0, \quad x \in (0, a); \\ R_{\mp(x)}^{(l)} \bar{X}^{(l)} &= 0, \quad x = 0; a;\end{aligned}\tag{3.78}$$

$$\begin{aligned}\delta_{\bar{Y}^{(l)}} \mathcal{E}_{IM} = 0 &\rightarrow \left(L_{(y)}^{(l)} - \tau T_{(y)}^{(l)} \right) \bar{Y}^{(l)} - T_{(y)}^{(l)} \bar{Y}^{(l-1)} = 0, \quad y \in (0, b); \\ R_{\mp(y)}^{(l)} \bar{Y}^{(l)} &= 0, \quad y = 0; b;\end{aligned}\tag{3.79}$$

$$\begin{aligned}\delta_{\bar{Z}^{(l)}} \mathcal{E}_{IM} = 0 &\rightarrow \left(L_{(z)}^{(l)} - \tau T_{(z)}^{(l)} \right) \bar{Z}^{(l)} - T_{(z)}^{(l)} \bar{Z}^{(l-1)} = 0, \quad z \in (0, c); \\ R_{\mp(z)}^{(l)} \bar{Z}^{(l)} &= 0, \quad z = 0; c.\end{aligned}\tag{3.80}$$

Ця система розв'язується ітераційним способом типу Лібмана – Гаусса – Зейделя за такою схемою (параметр j)

$$\begin{aligned}\left(L_{(x)}^{(l)(j-1)} - \tau T_{(x)}^{(l)(j-1)} \right) \bar{X}^{(l)(j)} - T_{(x)}^{(l)(j-1)} \bar{X}^{(l-1)(j-1)} &= 0, \quad x \in (0, a); \\ R_{\mp(x)}^{(l)(j-1)} \bar{X}^{(l)(j)} &= 0, \quad x = 0; a;\end{aligned}\tag{3.81}$$

$$\begin{aligned}\left(L_{(y)}^{(l)(j-1)} - \tau T_{(y)}^{(l)(j-1)} \right) \bar{Y}^{(l)(j)} - T_{(y)}^{(l)(j-1)} \bar{Y}^{(l-1)(j-1)} &= 0, \quad y \in (0, b); \\ R_{\mp(y)}^{(l)(j-1)} \bar{Y}^{(l)(j)} &= 0, \quad y = 0; b;\end{aligned}\tag{3.82}$$

$$\begin{aligned}\left(L_{(z)}^{(l)(j-1)} - \tau T_{(z)}^{(l)(j-1)} \right) \bar{Z}^{(l)(j)} - T_{(z)}^{(l)(j-1)} \bar{Z}^{(l-1)(j-1)} &= 0, \quad z \in (0, c); \\ R_{\mp(z)}^{(l)(j-1)} \bar{Z}^{(l)(j)} &= 0, \quad z \in (0, c) \quad (l = \text{fixed}, j = 1, 2, \dots).\end{aligned}\tag{3.83}$$

Індекс $(j-1)$ при операторах $L_{(x)}^{(l)(j-1)}$, $T_{(x)}^{(l)(j-1)}$, $R_{\mp(x)}^{(l)(j-1)}$ означає, що функції $Y_i(y)$ та $Z_i(z)$ ($i = \overline{1, M}$) для обчислення коефіцієнтів цих операторів беруться з попереднього $(j-1)$ -го кроку процесу Лібмана.

Враховуючи наближення за методом оберненої ітерації (параметр l) та ітераційний метод розв'язування системи (3.81) – (3.83) (параметр j) будувється об'єднаний процес розв'язування вихідної задачі (параметр m):

$$\begin{aligned}\left(L_{(x)}^{(m-1)} - \tau T_{(x)}^{(m-1)} \right) \bar{X}^{(m)} - T_{(x)}^{(m-1)} \bar{X}^{(m-1)} &= 0, \quad x \in (0, a); \\ R_{\mp(x)}^{(m-1)} \bar{X}^{(m)} &= 0, \quad x = 0; a;\end{aligned}\tag{3.84}$$

$$\begin{aligned}\left(L_{(y)}^{(m-1)} - \tau T_{(y)}^{(m-1)} \right) \bar{Y}^{(m)} - T_{(y)}^{(m-1)} \bar{Y}^{(m-1)} &= 0, \quad y \in (0, b); \\ R_{\mp(y)}^{(m-1)} \bar{Y}^{(m)} &= 0, \quad y = 0; b;\end{aligned}\tag{3.85}$$

$$\left(L_{(z)}^{(m-1)} - \tau T_{(z)}^{(m-1)} \right) \bar{Z}^{(m)} - T_{(z)}^{(m-1)} \bar{Z}^{(m-1)} = 0, \quad z \in (0, c);$$

$$R_{\mp(z)}^{(m-1)} \bar{Z}^{(m)} = 0, \quad z = 0; c \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (3.86)$$

Завершення цього процесу і одержання остаточної значень частотного параметра λ і відповідного йому вектора форми коливань \bar{U} з заданою точністю реалізується за критеріями прикладної математики (3.7), (3.8), як це описано в двовимірній задачі про коливання пологих оболонок (пункт 3.2.4, вільні коливання).

3.4. Практичне обґрунтування МПС. Метод повних систем та розроблені на його основі підходи до розв'язання двовимірних і тривимірних нелінійних задач та задач на власні значення в загальному вигляді не мають на даний час строгого теоретичного обґрунтування щодо умов існування розв'язку, дедуктивної оцінки збіжності, її швидкості, точності одержаних результатів тощо. Частково таке обґрунтування проведено на прикладі задачі згину жорстко закріпленої пластинки в одночленному наближенні ($M = 1$) в [38] при застосуванні методу варіаційних ітерацій, як частинного випадку МПС.

Практичне обґрунтування розроблених підходів, досить важливе при розв'язуванні прикладних задач, проводиться в роботах авторів з залученням відомих прийомів прикладної математики, зокрема, порівняння з аналітичними розв'язками окремих задач, або з результатами, одержаними іншими методами.

Як випливає з основних положень МПС (пункт 3.1), необхідними умовами одержання розв'язку розглянутих на його основі задач є:

1) збіжність процесу типу Лібмана – Гаусса – Зейделя при розв'язуванні системи одновимірних задач за різними змінними області при фіксованій кількості членів M в апроксимуючому виразі (3.3), $M = \text{fixed}$ (простого – для лінійних задач (3.6), (3.17), (3.18), об'єднаного – для нелінійних задач (3.42), (3.43) ($N = 2$) і задач на власні значення (3.53), (3.54) ($N = 2$), (3.84) – (3.86) ($N = 3$));

2) збіжність остаточної розв'язку задачі при збільшенні числа членів апроксимації у виразі (3.3) ($M = 1, 2, \dots, M + 1$).

При цьому розв'язання окремої одновимірної лінійної крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами здійснюється в загальному випадку чисельно за методом ортогональної прогонки (дискретної ортогоналізації) з точністю, що контролюється вибором різної дискретизації відрізка інтегрування.

Приклад одержання аналітичного розв'язку за МПС наведено в [74] для жорстко закріпленої пластини в одночленному наближенні.

Збіжність процесу Лібмана – Гаусса – Зейделя (простого та об'єднаного в нелінійних задачах та задачах на власні значення $N = 2$, $N = 3$) та збіжність процесу одержання остаточної розв'язку задачі зі збільшенням членів апроксимації показана, наприклад, в роботах [5, 62, 64, 65, 67, 74] ($N = 2$) та в роботах [6, 63, 66, 69, 71, 73, 77, 79, 80] ($N = 3$).

Слід зауважити, що важливий факт незалежності розв'язку від вибору початкового наближення за ітераційним процесом Лібмана ілюструється в [6] на прикладі визначення НДС порожнистого тришарового циліндра з жорстко закріпленими торцями.

Правомірність застосування розроблених підходів в розглянутому класі задач пологих оболонок і просторових тіл підтверджується порівнянням результатів за МПС з результатами, одержаними іншими методами.

Так, детальний аналіз ефективності розробленого методу на прикладі задачі згину прямокутної пластини при локалізованому навантаженні проведений в [74] у порівнянні з результатами за Фур'є та за методом Канторовича зведення до звичайних диференціальних рівнянь (МПС – 1 член апроксимації, Фур'є – 90, Канторович – 9). Тут же проведено порівняння з результатами, одержаними за методом суперпозицій та МПС при розрахунках за постановкою просторової теорії пружності.

Для багатокутних пластин L -подібної форми проведено тестування МПС у порівнянні з результатами, одержаними за методом Гальоркіна з використанням структур-

ного методу R -функцій Рвачова [64]. За цим методом розв'язок одержано при 36 членах апроксимації з врахуванням його особливостей в кутових точках, без врахування – при 500 членів, а в МПС при 2 – 3 членах з точністю до роздільної здатності рисунка.

Тестування задачі статички проведено також в [65] на прикладі квадратної пластини з двома суміжними жорстко закріпленими сторонами та двома іншими – вільними при рівномірному навантаженні та дії сили, зосередженої в околі незакріпленого кута. Одержані прогини і моменти порівнюються з аналітичним розв'язком задачі в статтях [97, 99]. В цих роботах розв'язок одержано при 35 членах апроксимації з врахуванням діагональної симетрії задачі і виконанні граничних умов в 17 точках контура; в той час, як за МПС при дії зосередженої сили потрібно 4 – 5 членів для одержання розв'язку з такою ж точністю.

Результати за методом Рітца та методом скінченних різниць слугували для тестування МПС в двовимірних лінійних і нелінійних задачах статички [62, 67].

В тривимірних задачах метод Рітца з вибором різних систем базисних функцій – неперервних ортогональних поліномів та B -сплайнів – використовувався для порівняння розрахункових власних частот пружного паралелепіпеда з різними граничними умовами. При жорсткому закріпленні бічних граней для знаходження 10-ої частоти з заданою точністю в МПС знадобилося 5 членів апроксимації, а при B -сплайн апроксимації метода Рітца – 1089 ($c/a = 0,4$) [66, 100].

Всебічне дослідження правомірності застосування розробленого підходу до визначення власних частот просторових тіл з анізотропних матеріалів з низьким порядком симетрії пружних властивостей проведено на прикладах в ряді робіт авторів для паралелепіпеду з різними типами анізотропії матеріалу (trigonal, monoclinic, orthotropic). Порівняння для ряду нижчих частот при різних граничних умовах на бічних гранях і різних розмірах тіла проводилося з результатами, одержаними за МПС та в [60].

Узагальнення одержаних результатів практичного обґрунтування МПС та розроблених на його основі підходів до розв'язання нелінійних задач ($N = 2$) та задач на власні значення ($N = 2, N = 3$), посилення на окремі приклади яких тут наведено, дають змогу зробити такі висновки:

1. Побудований ітераційний процес типу Лібмана, що є аналогом методу заміщення лінійної алгебри, простий (лінійні задачі) і об'єднаний (нелінійні задачі і задачі на власні значення) у застосуванні до розв'язання системи одновимірних задач за різними змінними області збігається досить швидко – в межах 10 ітерацій в складних випадках.

2. Одержання остаточного розв'язку вихідної задачі з заданою точністю досягається при 4 – 6 членах, що утримуються в його апроксимуючому виразі.

3. Проведене тестування МПС та розроблених на його основі підходів у порівнянні з відомими розв'язками окремих задач розглянутого класу, підтвердили правомірність застосування цього методу: а) в двовимірних задачах статички (лінійних, нелінійних) та коливань пологих оболонок; б) тривимірних задачах для анізотропних просторових тіл призматичної форми при будь-яких умовах на обмежуючих гранях.

3.5. Приклади.

Приклад 3.5.1. Як приклад застосування методики визначення частотних характеристик пологих оболонок проведено розрахунок мінімальної власної частоти прямокутної панелі в залежності від значень її кривизн k_x і k_y при жорсткому закріпленні двох суміжних сторін та вільних двох інших. Результати представлені на рис. 17, а у вигляді залежності $\lambda = \lambda(k_y^*) = \omega(k_y^*)/\omega_0$ при фіксованих значеннях кривизни $k_x^* = 0$; 20; 50, $k_y^* \in [-k^*, k^*]$ і на рис. 17, б у вигляді вузлових ліній відповідних форм коливань (ω_0 – частота коливань пластини, $k^* = 50$ – максимальне значення кривизни; на рис 17, б штриховими лініями позначено незакріплені ділянки границі, суцільними – вузлові лінії форми коливань $w(x, y) = 0$ та закріплені сторони панелі).

Точки перегину на наведених кривих рис. 17, а відповідають зміні форм коливань панелі на мінімальній частоті.

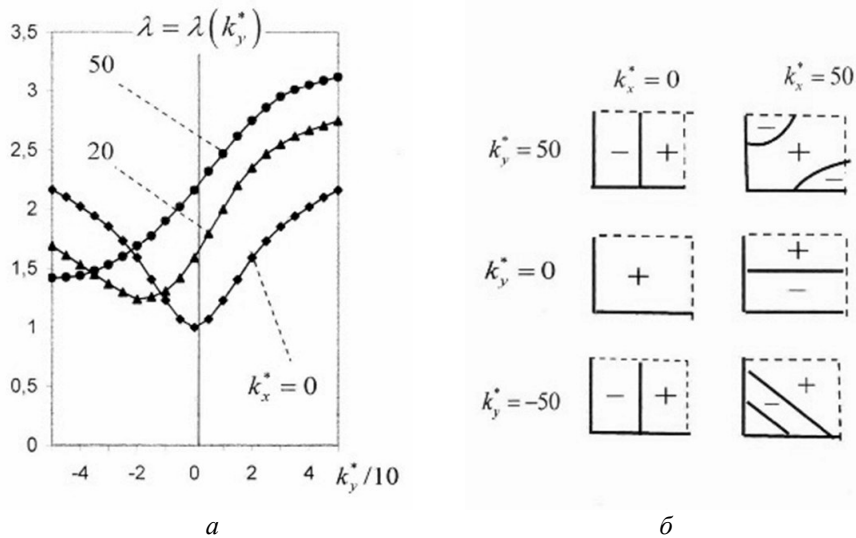


Рис. 17

Приклад 3.5.2. Алгоритм методу розв'язування нелінійної задачі на основі комбінації процедури лінеаризації за Ньютоном – Канторовичем – Рафсоном та МПС дозволяє визначити критичне граничне значення діючого навантаження q_{cr} , при якому оболонка втрачає стійкість за «хлопком» (проклаує).

Зауважимо, що область застосування методу квазілінеаризації автоматично обмежується докритичною стадією деформування, так що і побудований єдиний ітераційний процес збігається лише в цій області. Цей факт, як показано в [21] для оболонок обертання, можна використати для наближеного визначення верхнього критичного значення навантаження q_{cr} за таким обчислювальним критерієм: $q_{cr} \in [q_-, q_+]$, де q_- – значення навантаження, при якому ітеративна процедура (3.42), (3.43) ще збігається, а q_+ – значення навантаження, при якому цей процес є розбіжним.

Цей розрахунковий критерій застосовується для аналізу стійкості пологих панелей з різними комбінаціями вільного краю і жорсткого закріплення граничного контуру.

Розглядається полого ізотропна квадратна в плані панель сферичної форми та сталі товщини h , що має кривизни k_x і k_y вздовж координатних осей Ox і Oy відповідно і знаходиться під дією рівномірно розподіленого нормального навантаження інтенсивності q : $q_n(x, y) = q$, направлено до центра кривизни. Кривизну панелі, максимальний прогин і діюче навантаження будемо характеризувати безрозмірними параметрами $k_x^* = (k_x b^2)/h$, $k_y^* = (k_y b^2)/h$, $\zeta = w/h$, $q^* = (q b^4)/(E h^4)$ (E – модуль Юнга).

Розрахунки наводяться в залежності від параметра $\xi = lf/l$, що характеризує відношення довжини вільної від навантажень ділянки границі (lf) до довжини всього контуру (l).

Розглянуто такі чотири випадки граничних умов:

- $n = 1$: $\xi = 0$ (всі сторони панелі жорстко закріплені);
- $n = 2$: $\xi = 1/4$ (одна сторона вільна, інші – закріплені);
- $n = 3$: $\xi = 2/4$ (дві суміжні сторони вільні, дві інші – закріплені);
- $n = 4$: $\xi = 3/4$ (три сторони вільні, одна – закріплена (консоль)).

Результати дослідження представлені у вигляді традиційної залежності «прогин-навантаження» $\zeta = \zeta(q^*)$ і відповідної залежності відносної статичної жорсткості обо-

лонки від навантаження $ss = ss(q^*)$ ($ss = (dq^*/d\zeta)/ss(0)$), $ss(0)$ – жорсткість оболонки без навантаження). Ці дані для оболонки з кривизнами $k_x^* = k_y^* = 20$ наведено на рис. 18, *a*, *b*, *в*, *г* для $\zeta = \zeta(q^*)$ (лівий стовпчик) і для $ss = ss(q^*)$ (правий стовпчик).

Як видно з рисунків, наявність вільного краю для розглянутих випадків граничних умов якісно впливає на наведені залежності. При повністю закріпленому граничному контурі (*a*) і при наявності тільки однієї вільної сторони (*b*) оболонка схильна втрачати стійкість по «хлопку» (проклацує) відповідно при $q_{cr}^* = 275$ і $q_{cr}^* = 128$, а статична жорсткість зі збільшенням навантаження природньо спадає до нуля. У двох інших випадках – закріплення двох суміжних сторін і консольній панелі – картина цих залежностей має якісно інший характер: статична жорсткість зростає (*в*), або не змінюється (*г*) і відповідно втрата стійкості по «проклацуванню» таким оболонкам не загрожує.

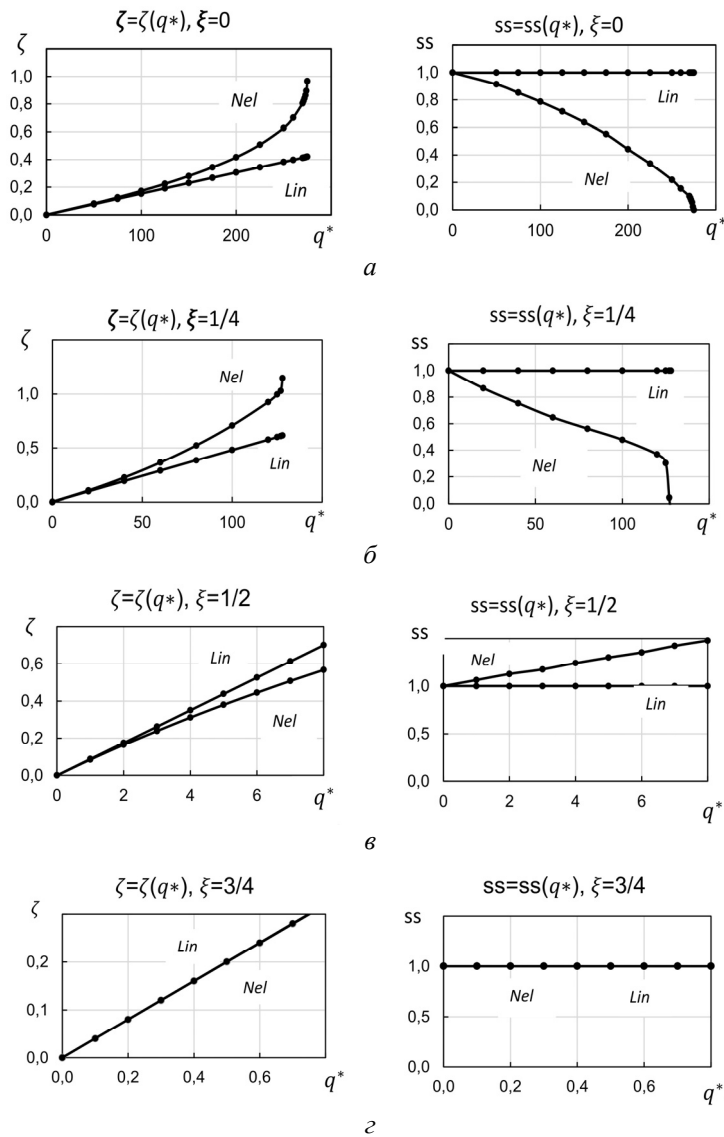


Рис. 18

Одержані результати фізично осмислені і дають змогу оцінити наявність вільної ділянки границі на величину критичних граничних навантажень. При тій же кривизні панелі незначне ослаблення контуру (на 25%) призводить до суттєвого (майже вдвічі) зменшення критичного граничного тиску (рис. 18, а, б).

Приклад 3.5.3. Аналіз деформування анізотропної призми. Розглядається НДС анізотропної прямокутної призми, що в декартовій системі координат займає область $\Omega \cup \partial\Omega = \{x, y, z : x \in [0, a], y \in [0, b], z \in [0, c]\}$. Дві протилежні її грані $x=0$, $y=0$ – жорстко закріплені, дві інші – $x=a$, $y=b$ – вільні від навантажень, на верхній лицевій грані $z=c$ діє нормальне рівномірно розподілене навантаження інтенсивності p_0 . На нижній грані $z=0$ знаходиться пружна опора, локалізована в підобласті $\Omega_0 \cup \partial\Omega_0 = \{x, y : |x-x_0| \leq dx, |y-y_0| \leq dy\}$, що моделюється пружною вінклерівською основою з кусково-однорідним коефіцієнтом основи $K_p(x, y)$:

$$K_p(x, y) = \begin{cases} C_p, & \text{if } (x, y) \in \Omega_0; \\ 0, & \text{if } (x, y) \notin \Omega_0, \end{cases}$$

(x_0, y_0 – координати центра опори; $2dx, 2dy$ – її розміри за відповідними осями; C_p – жорсткість основи).

Матеріалом призми є волокнистий композит з такими характеристиками: $E_1 = 2,11E_0$; $E_2 = E_3 = 0,053E_0$; $G_{12} = G_{13} = 0,026E_0$; $G_{23} = 0,013E_0$; $\mu = 0,25$, що лежить в площині $z = \text{const}$ і орієнтований під кутом $\varphi \in [0, \pi/2]$ до осі Ox по всій її висоті. При $\varphi \neq 0$, $\varphi \neq \pi/2$ матеріал призми в геометричних осях вибраної системи координат може трактуватися як анізотропний з однією площиною пружної симетрії, перпендикулярної до осі Oz .

Досліджується деформування призми при різному розташуванні пружної опори в залежності від властивостей матеріалу, що визначаються кутом φ .

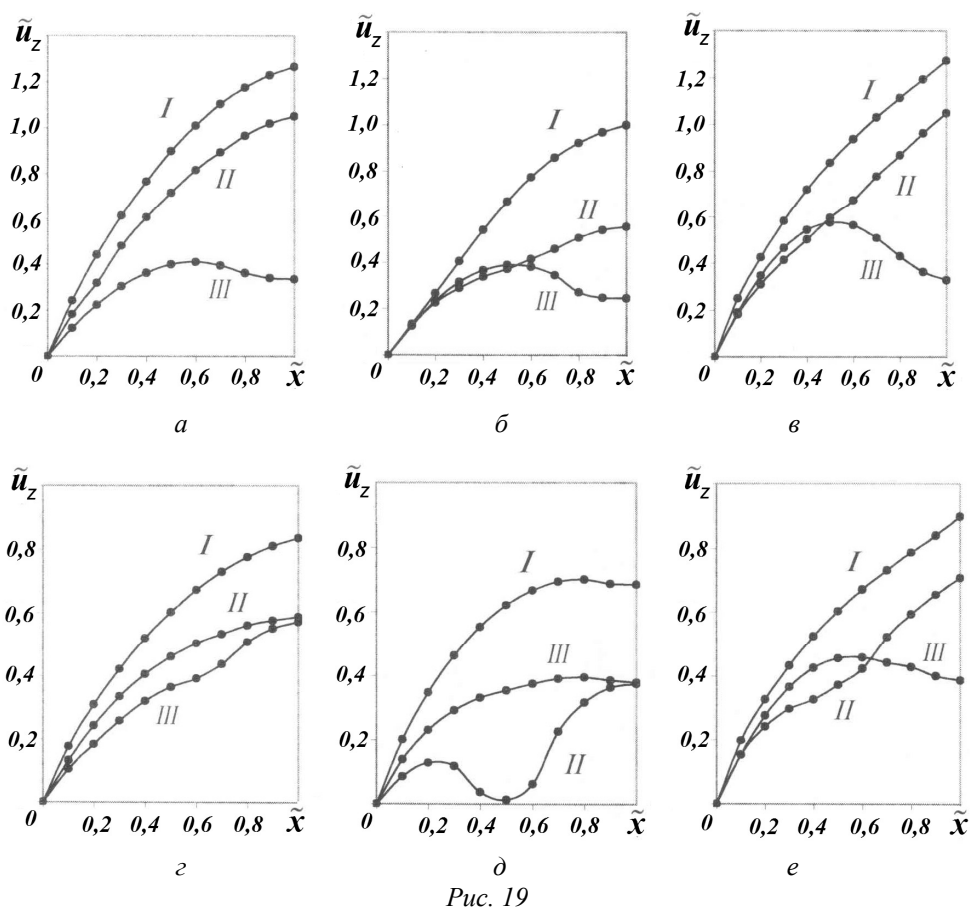
Розв'язання задачі приводиться для квадратної в плані призми $a=b$ при двох варіантах розташування опор – центрального ($x_0 = y_0 = a/2$) та кутового ($x_0 = y_0 = 0,9a$), кутів орієнтації композита $\varphi = 0$, $\varphi = \pi/4$, $\varphi = \pi/2$ при $a = b = l_0$; $c/a = 0,5$; $dx = dy = 0,1a$; $\Omega_0/\Omega = 0,04$; $C_p = 2l_0/E_0$ (l_0 – характерний лінійний розмір).

Результати дослідження представлені на рис. 19 у вигляді розподілу нормальних переміщень $\tilde{u}_z = u_z(x, y, c)/u_z(a, b, c)|_{C_p=0, \varphi=\pi/4}$ на верхній лицевій грані $z=c$ по ребру $y=a, z=c$ (рис. 19, а, б, в) і в центральному перерізі $y=a/2, z=c$ (рис. 19, г, д, е) при відсутності опори (I), центральної (II) і кутової (III) опорах для $\varphi=0$ (рис. 19, а, г), для $\varphi=\pi/4$ (рис. 1 б, д) і $\varphi=\pi/2$ (рис. 19, в, е) ($u_z(a, b, c)|_{C_p=0, \varphi=\pi/4}$ – переміщення кутової точки $x=a, y=a, z=c$ при відсутності опори і $\varphi=\pi/4$). Випадки $\varphi=0$, і $\varphi=\pi/2$ відповідають двом ортогонально орієнтованим волокнистим матеріалам, при $\varphi=\pi/4$ і заданим граничним умовам призма характеризується діагональною симетрією відносно площини $x=y$.

При відсутності опори (I) нормальні переміщення практично в усіх випадках представлені монотонно зростаючими функціями. При цьому анізотропія матеріалу ($\varphi=\pi/4$) і наявність діагональної симетрії знижує їх максимальні значення приблизно на 20% у порівнянні з ортотропними випадками ($\varphi=0$, $\varphi=\pi/2$).

Наявність центральної опори (II) суттєво впливає також у випадку анізотропного матеріалу, знижуючи практично вдвоє максимальні переміщення на ребрі, в той час

як для ортотропних випадків відмінність складає $\approx 15\%$ для ребра (рис. 19, *a, в*) та $\approx 25\% - 30\%$ для центрального перерізу (рис. 19, *г, е*). Складний характер переміщень при центральній опорі спостерігається, природно, в центральному перерізі, особливо для анізотропного матеріалу (*II*) (рис. 19, *д*).



Наявність кутової опори найбільш суттєво проявляється на ребрі призми $y = a, z = c$ (рис. 19, *a, б, в*). Для всіх матеріалів – це немонотонні криві, причому найбільше зниження переміщень (3,5-4,5 рази) має місце в кутовій точці (a, a, c) у порівнянні з випадком відсутності опори.

Одержана картина розподілу переміщень на зовнішній лицевій грані $z = c$ при наявності підкріплюючих опор і при різних властивостях матеріалу не суперечить інтуїтивним фізичним уявленням.

Приклад 3.5.4. Коливання анізотропної плити. Розглядаються вільні коливання анізотропної плити з однією площиною пружної симетрії, що зумовлена неспівпадінням головних напрямків пружності ортотропного матеріалу з напрямками осей геометричної системи координат. Така конструктивна анізотропія може бути кількісно охарактеризована величиною кута між вказаними напрямками, що дозволяє розглядати спектральні властивості плити як функції неперервного аргументу, зі зміною якого три площини пружної симетрії переходять в одну і навпаки.

Приймається до уваги, що при вільних коливаннях лінійних консервативних пружних систем симетричної структури щонайменше нижча частота має екстремальне значення у порівнянні з нижчими частотами близьких структур меншого порядку симетрії в цілому. Під симетрією в цілому тут розуміється сукупність геометричної симетрії області, симетрії граничних умов і симетрії фізичних властивостей матеріалу.

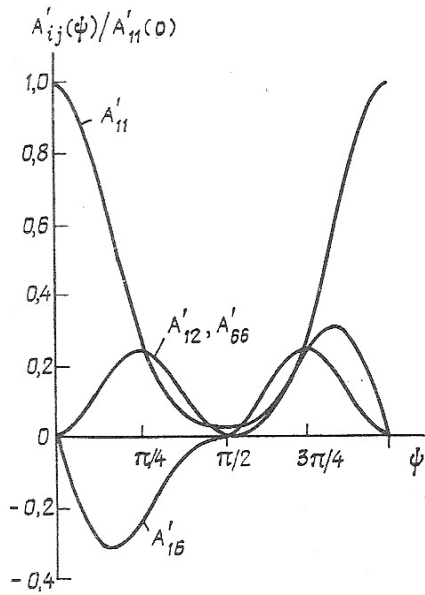


Рис. 20

На рис. 20 наведені залежності найбільш визначальних елементів матриці закону Гука $\bar{\sigma} = |A'|\bar{\varepsilon} - A'_{11}(\psi), A'_{12}(\psi), A'_{16}(\psi), A'_{66}(\psi)$ – від кута ψ , що доповнюються такими співвідношеннями:

$$A'_{22}(\psi) = A'_{11}(\pi/2 - \psi); A'_{26}(\psi) = A'_{16}(\pi/2 - \psi); A'_{12}(\psi) = A'_{66}(\psi) + \text{const.} \quad (3.87)$$

Симетрія і періодичність функцій $A'_{ij}(\psi)$ характеризується формулами:

$$\begin{aligned} A'_{ii}(\psi) &= A'_{ii} > 0; A'_{ii}(\psi + \pi/2) = A'_{ii}(\psi - \pi/2) \quad (i = \overline{1,5}); \\ A'_{ij}(\psi) &= A'_{ij}(\psi + \pi/2) > 0; A'_{ij}(\psi + \pi/4) = A'_{ij}(\psi - \pi/4); \\ A'_{ij}(\psi + \pi/4) &= A'_{ij}(\psi - \pi/4) \quad (i, j = 1, 2; 1, 6; 2, 6; 3, 6). \end{aligned} \quad (3.88)$$

Аналізується залежність нижчої частоти переважно згинних та переважно планарних коливань плити при вільних лицевих поверхнях та таких варіантах умов на бічних гранях:

- I. Жорстке закріплення за всіма гранями.
- II. Консольне закріплення (грань $x = -L/2$ – жорстко закріплена, всі інші – вільні).
- III. Дві суміжні грані ($x = -L/2; y = -L/2$) – жорстко закріплені, дві інші ($x = L/2; y = L/2$) – вільні.

Для порівняння розглядається «умовно ортотропна» плита, зв'язана з нехтуванням побічних жорсткостей $A'_{16}(\psi) = A'_{26}(\psi) = A'_{36}(\psi) = A'_{45}(\psi)$ при $\psi \neq 0$.

Додатково обчислюються відносні величини складових потенціальної енергії, що відповідають об'ємним деформаціям за координатними напрямками x, y, z ($\beta_x, \beta_y, \beta_z$) та деформаціям зміни форми в площинах $x = \text{const}, y = \text{const}$, ($\beta_{yz}, \beta_{xz}, \beta_{xy}$) з нормуванням ($\beta_x + \beta_y + \beta_z + \beta_{yz} + \beta_{xz} + \beta_{xy} = 1$). Ці дані для складових потенціальної енергії приводяться в табл. 11 і 12, відповідно, для переважно згинних та переважно планарних коливань (умовно ортотропна плита та конструктивно-анізотропна плита).

Об'єктом дослідження є квадратна плита з розмірами в плані $L \times L$, висотою h , що віднесена до декартової системи координат з початком в центрі симетрії плити і звичною орієнтацією осей. Форма плити характеризується осьовою симетрією по відношенню до координатних осей x та y і симетрією відносно обох діагоналей в площині $z = \text{const}$. Приймається, що плита є тривимірним тілом з ортотропного однорідного матеріалу – однонаправленого композиту CFRP з такими характеристиками:

$$\begin{aligned} E_1 &= 2,11E_0; E_2 = E_3 = 0,053E_0; \\ G_{12} = G_{13} &= 0,026E_0; G_{23} = 0,013E_0; \end{aligned}$$

$$\mu_{23} = 0,25; \rho = 1524 \text{ кг/м}^3; E_0 = 10^{11} \text{ Н/м}^2.$$

Анізотропія плити характеризується параметром анізотропії – кутом ψ в площині $z = \text{const}$ між напрямком, що відповідає модулю E_1 і додатнім напрямком осі x .

Таблиця 11

Тип гр. умов	ψ	λ	Складові потенціальної енергії					
			β_x	β_y	β_z	β_{xy}	β_{xz}	β_{yz}
умовно ортотропна плита								
I	0	1,00	0,55	0,10	10^{-5}	0,01	0,32	0,01
	$\pi/4$	1,15	0,28	0,28	10^{-5}	0,11	0,17	0,17
II	0	1,00	0,87	10^{-4}	10^{-4}	10^{-3}	0,13	10^{-4}
	$\pi/2$	0,34	0,96	10^{-4}	10^{-3}	10^{-4}	0,04	10^{-5}
III	0	1,00	0,79	0,04	10^{-4}	0,03	0,13	0,01
	$\pi/4$	1,20	0,21	0,21	10^{-3}	0,37	0,10	0,10
	2π	1,00	0,04	0,79	10^{-2}	0,03	0,01	0,13
конструктивно анізотропна плита								
I	$\pi/4$	0,83	0,42	0,42	10^{-4}	-0,17	0,17	0,17
III	$\pi/4$	0,23	0,23	0,23	10^{-2}	0,31	0,12	0,12
	$7\pi/12$	1,14	0,11	0,62	10^{-3}	0,11	0,02	0,14
	$3\pi/4$	1,0	0,24	0,24	10^{-3}	0,38	0,07	0,07
	$11\pi/12$	1,14	0,62	0,11	10^{-3}	0,11	0,14	0,02

Таблиця 12

Тип гр. умов	ψ	λ	Складові потенціальної енергії					
			β_x	β_y	β_z	β_{xy}	β_{xz}	β_{yz}
умовно ортотропна плита								
I	0	1,00	10^{-2}	0,65	10^{-3}	0,32	10^{-3}	0,02
	$\pi/4$	10,2	0,27	0,27	10^{-4}	0,46	10^{-2}	10^{-2}
II	0	1,00	0,29	10^{-2}	10^{-4}	0,70	10^{-3}	10^{-6}
	$\pi/8$	6,01	0,46	0,04	10^{-3}	0,50	10^{-3}	10^{-4}
	$\pi/2$	0,43	0,73	10^{-3}	10^{-3}	0,27	10^{-2}	10^{-4}
III	0	1,00	0,09	0,64	10^{-4}	0,25	10^{-4}	0,02
	$\pi/8$	2,58	0,38	0,25	10^{-3}	0,38	10^{-4}	10^{-4}
	$\pi/4$	1,49	0,42	0,42	10^{-4}	0,16	10^{-3}	10^{-3}
	$3\pi/8$	2,58	0,25	0,38	10^{-3}	0,38	10^{-3}	10^{-4}
	$\pi/2$	1,00	0,66	0,05	10^{-4}	0,27	0,01	10^{-4}
конструктивно анізотропна плита								
1	$\pi/4$	0,98	0,38	0,38	10^{-3}	0,23	10^{-2}	10^{-2}
3	$\pi/4$	1,01	0,49	0,49	10^{-3}	0,02	10^{-2}	10^{-2}
	$3\pi/4$	0,83	0,48	0,48	10^{-3}	0,04	10^{-2}	10^{-2}

Результати дослідження представлені на рис. 21 у вигляді залежностей $\lambda = \omega_{min}^2(\psi)/\omega_{min}^2(0)$ переважно згинних (рис. 21, а, в, д) та переважно планарних (рис. 21, б, з, е) коливань відповідно для типів граничних умов I, II, III (суцільні лінії – анізотропна плита, штрихові – умовно ортотропна).

Аналіз одержаних результатів показав певну кореляцію між екстремальними значеннями частот (рис. 21) та рівністю певних складових потенціальної енергії (табл. 11, 12, виділені значення).

В першому варіанті дослідження граничні умови жорсткого закріплення всіх бічних граней зумовлюють дві осьові і дві діагональні симетрії плити в плані. Задача є повністю симетричною при двох значеннях параметра анізотропії $\psi_k = \pi/4 + k\pi/2$ ($k = 0; 1$), так як згідно з (3.87), (3.88) фізична симетрія відносно цих точок зумовлена симетрією функцій $A'_{ij}(\psi)$ і умовою рівності жорсткостей $A'_{22}(\psi_k) = A'_{11}(\psi_k)$; $A'_{26}(\psi_k) = A'_{16}(\psi_k)$. Коливання анізотропної плити супроводжується рівністю таких складових потенціальної енергії:

$$\beta_x(\psi_k) = \beta_y(\psi_k); \beta_{xz}(\psi_k) = \beta_{yz}(\psi_k)$$

і екстремальними значеннями мінімальної частоти (рис. 21, а, б).

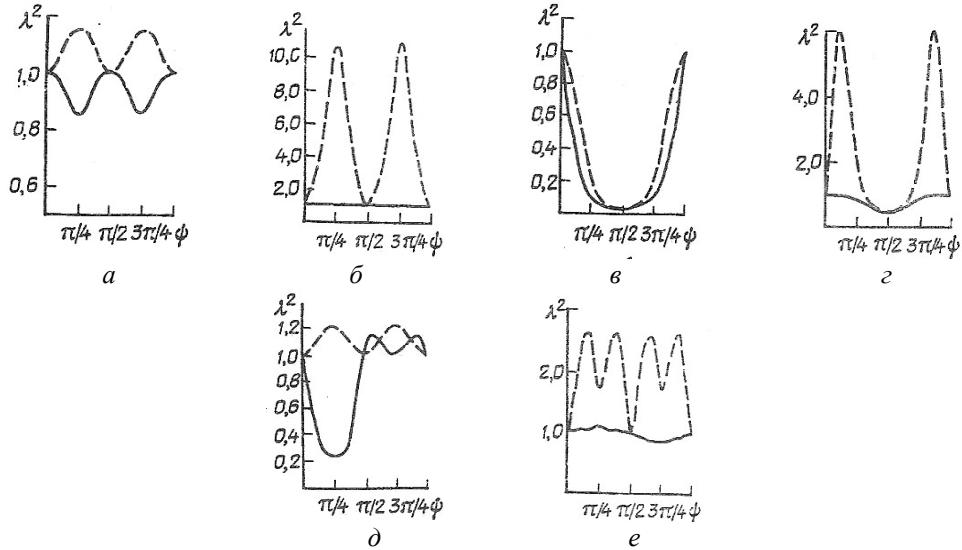


Рис. 21

В другому варіанті дослідження (II, консольне закріплення плити, рис. 21, в) практично вся потенціальна енергія плити згинних коливань зв'язана з об'ємними деформаціями за віссю Ox ($\beta_x \approx 1$), тому власна частота визначається переважно залежністю $A'_{11}(\psi)$, яка монотонно спадає в діапазоні $\psi \in [0, \pi/2]$. Відповідний характер має і залежність $\lambda = \lambda(\psi)$.

При планарних коливаннях потенціальна енергія розподіляється між енергіями зміни об'єму β_x і форми β_{xy} . Для умовно ортотропної плити при $\pi/8$ має місце наближена рівність $\beta_x + \beta_y = \beta_{xy}$, що свідчить про наявність деякої «внутрішньої» симетрії задачі і відповідає максимумам на кривій $\lambda = \lambda(\psi)$ при $\pi/8$ і $7\pi/8$ (рис. 21, з). Для анізотропної плити врахування функцій $A'_{16}(\psi)$, $A'_{26}(\psi)$, $A'_{36}(\psi)$, $A'_{45}(\psi)$ призводить до згладжування цих максимумів і зниженню частот у порівнянні з умовно ортотропною плитою. Обидві криві в силу загальної симетрії задачі є симетричними відносно $\psi = \pi/2$.

Третій варіант закріплення бічних граней відповідає діагональній симетрії плити $y = x$ в плані. Хід кривої $\lambda = \lambda(\psi)$ згинних коливань умовно ортотропної плити (рис. 21, з, штрихова лінія) якісно співпадає з кривою варіанта I. Таке ж співпадіння має місце і у випадку анізотропної плити при $\psi \in [0; \pi/2]$. Але при переході ψ до другого квадранту $\psi \in [\pi/2; \pi]$ частотна крива анізотропної плити суттєво змінюється. На кривій $\lambda = \lambda(\psi)$ (рис. 21, д, суцільна лінія) спостерігається наявність трьох екстремумів, що супроводжуються такими енергетичними співвідношеннями:

$$\beta_x(7\pi/12) = \beta_{xy}(7\pi/12); \beta_x(11\pi/12) = \beta_{xy}(11\pi/12) \text{ – в максимумах;}$$

$$\beta_x(3\pi/4) = \beta_{xy}(3\pi/4) \text{ – в мінімумі.}$$

При планарних коливаннях екстремуми частотних кривих для умовно ортотропної плити відповідають тим же енергетичним співвідношенням, що мали місце при згинних коливаннях анізотропної плити. Врахування «побічних» жорсткостей, як і у варіанті II, призводить до згладжування частотної кривої і суттєвому зниженню екстремумів.

Дані наведених таблиць містять додаткову інформацію про можливість застосування наближених варіантів теорії пластин при аналізі коливань товстих анізотропних плит. Очевидно, що залучення теорій з врахуванням поперечного обтиску є надлишковим в силу малості складової β_z в енергетичній картині коливань плити. Разом із тим застосування класичної теорії пластин може виявитись недостатнім в силу немалої величини складових енергії β_{xz}, β_{yz} ($\approx 17\%$), що відповідають деформаціям поперечного зсуву.

Висновки.

В представленій статті автори проаналізували розвиток методологічних основ проєкційних підходів типу Бубнова – Гальоркіна в плані розширення класу функцій, в якому шукається розв'язок задачі та відповідне зменшення кількості елементів базису, що вибирається апіорі. Порівняльна характеристика методів різних стадій цього розвитку представлена таблицею 13 для загального N -вимірного випадку.

З розвитком проєкційних методів типу Бубнова – Гальоркіна розширювались класи стаціонарних задач механіки деформівного твердого тіла (МДТТ), до розв'язання яких вони застосовувалися. Основні обмеження при цьому були зв'язані з вибором базисних функцій, які мали задовольняти граничним умовам. Спочатку це стосувалося умов за всіма N змінними області і тут переважно розглядалося шарнірне закріплення по всьому контуру (I стадія, розв'язки типу Нав'є для пластин). Далі, при зведенні до одновимірних задач (II стадія), доступними для розгляду стали будь-які фізично несуперечливі граничні умови за однією зі змінних області і неоднорідність геометричних та фізико-механічних параметрів в цьому координатному напрямку, хоча проблематичним при цьому лишився вибір апроксимуючого базису за іншими $N-1$ змінними (роботи академіка Я.М.Григоренка для оболонок обертання, некругових циліндрів тощо). І, нарешті, при зведенні до системи одновимірних задач (III стадія) були зняті будь-які обмеження на умови закріплення границі та характер неоднорідності за усіма N координатними напрямками (пологі панелі, анізотропна призма).

В даній роботі застосування методів типу Бубнова – Гальоркіна на різних стадіях його розвитку (переважно двох останніх) ілюструється розв'язанням двовимірних та тривимірних задач статички та коливань пружних систем з оболонок обертання різної геометрії та структури за товщиною, циліндричних оболонок некругового перерізу, порожнистих циліндрів з дискретною і неперервною неоднорідністю в радіальному напрямку, пологих оболонок та прямокутних паралелепіпедів з низьким порядком симетрії пружних властивостей при будь-яких умовах на обмежуючих гранях.

Розроблені методики розв'язування відповідних лінійних, нелінійних крайових задач і задач на власні значення, що базуються на використанні сучасних чисельно-аналітичних підходів прикладної математики, є основою для поширення їх на більш складні класи оболонок та дослідження інших процесів стаціонарної динаміки МДТТ. Зокрема, були розглянуті такі задачі:

- НДС та коливання оболонок обертання з розгалуженою формою меридіану за уточненою моделлю, що враховує поперечні зсуви та обтиск [81, 82];
- НДС циліндричних оболонок некругового перерізу зі скісними зрізами на торцях [28];
- контактна взаємодія попередньо навантажених багатошарових оболонок обертання з жорсткою (пружною) поверхнею [101];
- стійкість пружних систем з оболонок обертання різної геометрії та структури за товщиною, що знаходяться в полі осесиметричних впливів, включаючи комбіновані [91];
- визначення головної області динамічної нестійкості оболонок обертання при гармонічних за часом навантаженнях [78];

- динамічне деформування пластин і оболонок із в'язкопружних матеріалів [72];
- коливання порожнистих циліндрів з п'єзокерамічних матеріалів [87].

Таблиця 13

Процедури та їх складові елементи	I стадія. Методи зведення до системи алгебраїчних рівнянь	II стадія. Методи зведення до системи звичайних диференціальних рівнянь (одна одновимірна задача)	III стадія. Методи зведення до системи з N одновимірних задач
форма подання розв'язку	$u(x_1, x_2, \dots, x_N) \equiv \sum_{i=1}^M \alpha_i \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_N)$	$u(x_1, x_2, \dots, x_N) \equiv \sum_{i=1}^M X_{1i}(x_1) \varphi_i(x_2, \dots, x_N)$	$u(x_1, x_2, \dots, x_N) \equiv \sum_{i=1}^M \prod_{n=1}^N X_{ni}(x_n)$
невідомі	$\alpha_i = \text{const}$	$X_{1i}(x_1)$ – функції однієї зі змінних області	$X_{ni}(x_n)$ – сукупність функцій, кожна з яких залежить від однієї, але різних, змінних
апроксимаційний базис φ_i	$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_N)$ $i = \overline{1, M}$	$\varphi_i(x_2, \dots, x_N)$ $i = \overline{1, M}$	відсутній
проекційний базис ψ_k	$\psi_k(\dots) = \varphi_k(\dots)$ $k = \overline{1, M}$	$\psi_k(\dots) = \varphi_k(\dots)$ $k = \overline{1, M}$	$P_k(x_1, \dots, x_{m-1}, x_{m+1}, \dots, x_N) = \prod_{m=1}^{m=N} X_m(x_m)$ $m \neq k; k = \overline{1, N}$
тип задачі, що одержана при проектуванні вихідної N -вимірної задачі	$A\bar{a} = \bar{b}$, $\bar{a} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\}$ (система алгебраїчних рівнянь)	$L\bar{X}_1 + \bar{f} = 0$, $L = \frac{d}{dx_1} + B$, $\bar{X}_1 = \{X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1M}\}$ (система звичайних диференціальних рівнянь, одна одновимірна задача)	$L_k \bar{X}_k + \bar{f}_k = 0$, $\bar{X}_k = \{X_{k1}, X_{k2}, \dots, X_{kM}\}$ $k = \overline{1, N}$, $(\bar{X}_m = \bar{X}_m, m = \overline{1, N}, m \neq k)$ (система одновимірних задач)

Практичне застосування розроблені методики знайшли при розрахунках апаратів ракетно-космічної техніки, в області стоматології, при оцінці технічного стану магістральних трубопроводів тощо [27, 61].

Повертаючись до метафоричного вислову Леонардо да Вінчі на початку статті щодо «плодів математики», усвідомлюєш, що саме ці широкі класи задач в значній мірі і є тими «плодами», що суттєво збагатили область механіки деформованого твердого тіла.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто один з напрямків розробки проективного методу Гальоркіна, присвяченого ефективному розв'язанню задач із великою кількістю незалежних змінних, та застосування його модифікацій у дослідженнях стаціонарних процесів механіки деформованого твердого тіла. Як об'єкт вивчення вибрано три послідовні етапи розробки методу, які характеризуються розширенням класу невідомих у наближеному виразі: спочатку це клас дійсних чисел, далі – клас неперервних функцій (диференційованих кілька разів) однієї із змінних («одновимірні функції») і, нарешті, це набір таких «одновимірних» функцій, які включають усі змінні. Структура проективного зображення початкової багатовимірної задачі змінюється відповідно до системи алгебраїчних рівнянь, потім системи звичайних диференціальних рівнянь і, нарешті, системи одновимірних задач щодо різних змінних домен. Відповідно до розробки методу Гальоркіна класи задач стаціонарної механіки деформованого твердого тіла також розширюються з точки зору усунення певних обмежень на форму об'єкта, граничних умов, фізичні та механічні властивості пружного середовища і інші. Застосування методів типу Гальоркіна на різних етапах його розвитку показано розв'язанням двовимірних та тривимірних задач статичної та динамічної механіки широкого класу елементів оболонок та просторових тіл.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: метод Гальоркіна, три етапи розвитку, лінійні та нелінійні крайові задачі, задачі на власні значення, стаціонарна деформація, елементи оболонки, просторові тіла.

1. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. – Москва: Мир, 1968. – 184 с.
2. Белоцерковский О.М., Чушкин П.И. Численный метод интегральных соотношений // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1962. – № 5. – С. 731 – 759.
3. Беспалова Е.И. Напряженное состояние незамкнутых оболочек вращения с жестко защемленными меридиональными краями // Прикл. механика. – 1968. – 4, № 7. – С. 45 – 49.
4. Беспалова Е.И. О свободных колебаниях слоистых цилиндрических оболочек открытого профиля // Прикл. механика. – 1980. – 16, № 11. – С. 47 – 51.
5. Беспалова Е.И. Об одном подходе к исследованию свободных колебаний упругих элементов конструкций // Прикл. механика. – 1988. – 24, № 1. – С. 43 – 48.
6. Беспалова Е.И. Решение стационарных задач теории упругости методом полных систем // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1989. – № 9. – С. 1346 – 1353.
7. Беспалова Е.И., Григоренко Я.М., Китайгородский А.Б., Шинкарь А.И. Исследование свободных колебаний ортотропных оболочек вращения с переменными параметрами // Прикл. механика. – 1977. – 13, № 8. – С. 43 – 50.
8. Беспалова Е.И., Григоренко Я.М., Китайгородский А.Б., Шинкарь А.И. Свободные колебания предварительно нагруженных анизотропных оболочек вращения // Прикл. механика. – 1991. – 27, № 5. – С. 49 – 56.
9. Беспалова О.І., Григоренко Я.М., Китайгородський А.Б. До розрахунку динамічних характеристик просторових тіл скінченних розмірів // Доп. НАН України. – 1999. – № 11. – С. 63 – 66.
10. Беспалова Е.И., Лацинник И.Ф. Напряженное состояние незамкнутых цилиндрических оболочек произвольного профиля // Прикл. механика. – 1969. – 5, № 5. – С. 40 – 45.
11. Беспалова О.І., Яремченко Н.П. Визначення напружено-деформованого стану спряжених гнучких оболонок обертання при докритичних навантаженнях // Вісн. Київського нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 2017. – Вип. 4. – С. 29 – 36.
12. Бубнов И.Г. Труды по теории пластин. – Москва: ГТТЛ, 1953. – 423с.
13. Власов В.З. Новый метод расчёта тонкостенных призматических складчатых покрытий и оболочек. – Москва-Ленинград: Госстройиздат, 1933. – 215 с.
14. Власов В.З. Новый практический метод расчета складчатых покрытий и оболочек // Строительная промышленность. – 1932. – № 11. – С. 33 – 38.
15. Галеркин Б.Г. Собрание сочинений: в 2-х томах. – Москва: АН СССР, 1952, 1953г. – 391+438 с.
16. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. – 1961. – 16, № 3. – С. 171 – 174.
17. Григоренко А.Я., Мальцев С.А. О свободных колебаниях конических оболочек переменной в двух направлениях толщины // Доп. НАН України. – 2009. – № 11. – С. 60 – 66.
18. Григоренко Я.М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости. – Киев: Наук. думка, 1973. – 228 с.
19. Григоренко Я.М., Беспалова О.І. Про напружений стан багатопарових ортотропних оболонок обертання змінної жорсткості // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1972. – № 2.
20. Григоренко Я.М., Беспалова О.І., Борейко Н.П. Коливання спряжених оболочкових систем в полі комбінованих статичних навантажень // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2020. – 63, № 3. – С. 1 – 14.
21. Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Китайгородский А.Б., Шинкарь А.И. О численном решении нелинейных краевых задач статики гибких оболочек // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1980. – № 6. – С. 44 – 48.
22. Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Китайгородский А.Б., Шинкарь А.И. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. – Киев: Наук. дум, 1986. – 172 с.
23. Григоренко Я.М., Беспалова О.І., Урусова Г.П. Эффект обтиску в задачах про коливання попереду навантажених оболонок // Доп. НАН України. – 2008. – № 7. – С. 66 – 70.
24. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Голуб Г.П. Статика анизотропных оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. – Киев: Наук. думка, 1987. – 216 с.
25. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д. Расчет некруговых цилиндрических оболочек. – Киев: Вища школа, 1977. – 104 с.
26. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д. Статика анизотропных толстостенных оболочек. – Киев: Вища школа, 1985. – 190 с.

27. Григоренко Я.М., Григоренко А.Я., Неспрядько В.П., Тормахов Н.Н., Закурко С.В. О несущей способности кламмеров съемных стоматологических протезов из термопластов // Доп. НАН України. – 2015. – № 12. – С. 111 – 118.
28. Григоренко Я.М., Григоренко О.Я., Крюков М.М., Яремченко С.М. Напряжено-деформований стан циліндричних оболонок з еліптичним поперечним перерізом зі скісними зрізами // Доп. НАН України. – 2020. – № 6. – С. 21 – 29.
29. Григоренко Я.М., Гуляев В.И. Нелинейные задачи теории оболочек и методы их решения (обзор) // Прикл. механика. – 1991. – 27, № 10. – С. 3 – 23.
30. Григоренко Я.М., Крюков Н.Н. Численное решение задач статики гибких слоистых оболочек с переменными параметрами. – Киев: Наук. думка, 1988. – 264 с.
31. Доннелл Л.Г. Балки, пластины и оболочки. – Москва: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. – 568 с.
32. Дородницын А.А. Об одном методе решения уравнений ламинарного пограничного слоя. – ЖПМТФ. – 1960. – 3. – С. 111 – 118.
33. Дородницын А.А. Вычислительные методы математической физики. Проблемы и перспективы // Материалы науч. конф. «Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе» – Канев, 1974. – С. 28 – 34.
34. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – Москва: Наука, 1976. – 576 с.
35. Канторович Л.В. Один прямой метод приближенного решения задачи о минимуме двойного интеграла // Изв. АН СССР. – 1933. – № 5. – С. 647 – 653.
36. Канторович Л.В. Об одном методе приближенного решения дифференциальных уравнений в частных производных // Докл. АН СССР. – 1934. – 2, № 9. – 532 – 534.
37. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. – Ленинград: Физматгиз, 1962. – 708 с.
38. Кириченко В.Ф., Крисько В.А. Метод вариационных итераций в теории пластин и его обоснование // Прикл. механика. – 1981. – 16, № 4. – С. 71 – 76.
39. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. – Москва: Наука, 1968. – 504 с.
40. Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П. и др. Приближенное решение операторных уравнений. – Москва: Наука, 1969. – 456 с.
41. Методы расчета оболочек: в 5-ти томах. Т.2. Амиро И.Я., Заруцкий В.А. Теория ребристых оболочек. – Киев: Наук. думка, 1980. – 368 с.
42. Методы расчета оболочек: в 5-и томах. Т. 4. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Теория оболочек переменной жесткости. – Киев: Наук. думка, 1981. – 544 с.
43. Механика композитных материалов и элементов конструкций: в 3-х томах. (под ред. Гузя А.Н.). Т.2. Механика элементов конструкций. Григоренко Я.М., Беспалова Е.И. Свободные колебания неоднородных анизотропных цилиндров. – Киев: Наук. думка, 1983. – 464 с.
44. Механика композитов: в 12-и томах. Т.9. Динамика элементов конструкций (под ред. Кубенко В.Д.), 1999. – 384 с.
45. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – Москва: Гостехиздат, 1957. – 436 с.
46. Натансон И.С. Конструктивная теория функций. – Москва-Ленинград: Гостехиздат, 1949. – 688 с.
47. Оселедько Ф.И. К вопросу об изгибе прямоугольной жесткозашемленной пластинки // Сб. тр. Воронежского инж.-строит. ин-та. – 1958. – № 4. – С. 63 – 68.
48. Прокопов В.Г., Беспалова Е.И., Шеренковский Ю.В. Об одном новом методе математического исследования процессов переноса // Пром. теплотехника. – 1979. – 1, № 2. – С. 35 – 41.
49. Прокопов В.Г., Беспалова Е.И., Шеренковский Ю.В. К развитию вариационных методов решения многомерных задач теплопроводности // Изв. вузов. Энергетика. – 1981. – № 8. – С. 56 – 62.
50. Прокопов В.Г., Беспалова Е.И., Шеренковский Ю.В. Метод сведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям Л.В. Канторовича и общий метод решения многомерных задач теплопереноса // Инженерно-физический журнал. – 1982. – 42, № 6. – С. 1007 – 1013.
51. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 552с.
52. Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики. Збірник наукових праць. – Львів: Львівський національний університет ім. Івана Франка. – 2015. – 371 с.
53. Тимошенко С.П. История науки о сопротивлении материалов с краткими сведениями из теории упругости и теории сооружений. – Москва: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1957. – 536 с.
54. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. – Москва: Мир, 1988. – 352 с.
55. Хартри Д. Расчеты атомных структур. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1960. – 284 с.

56. Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Василенко А.Т., Голуб Г.П., Судаццова Г.К., Шинкарь А.И. Численное решение задач статики ортотропных слоистых оболочек вращения на ЭВМ типа М-220. – Киев: Наук. думка, 1971. – С. 152.
57. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Беспалова Е.И., Панкратова Н.Д., Полищук Т.И., Лацинник И.Ф. Численное решение краевых задач статики ортотропных оболочек с переменными параметрами. – Киев: Наук. Думка, 1975. – С. 183.
58. Altenbach H., Chróścielewski J., Eremeyev V.A., Wiśniewski K. Recent Developments in the Theory of Shells. – Cham: Springer, 2019. – 799 p.
59. Awrejcewicz J., Kurpa L., Shmatko T. Analysis of Geometrically Nonlinear Vibrations of Functionally Graded Shallow Shells of a Complex Shape // Lat. Am. J. Solids Struct. – 2017. – 9, N 14. – P. 1648 – 1668.
60. Barta R.C., Qian L.F., Chen L.M. Natural frequencies of thick square plates made of orthotropic, trigonal, monoclinic, hexagonal and triclinic materials // J. Sound and Vibration. – 2004. – 270, N 4 – 5. – P. 1074 – 1086.
61. Bastun V., Bespalova E., Urusova G., Minakov A. Monitoring of the Technical State of a Linear Part of Main Pipelines by Nondestructive Express Control Methods // J. of Control Engng. and Technology. – 2014. – 4, N 2. – P. 141 – 146.
62. Bespalova E.I. Solution of Nonlinear Problems of the Theory of Shells with the Use of Complete-System Methods // Int. Appl. Mech. – 1992. – 28, N 8. – P. 511 – 516.
63. Bespalova E.I. Free Vibrations of Spatial Bodies with Elastic Properties of Low Symmetry // Int. Appl. Mech. – 2002. – 38, N 1. – P. 90 – 94.
64. Bespalova E.I. Vibrations of Polygonal Plates with Various Boundary Conditions // Int. Appl. Mech. – 2007. – 43, N 5. – P. 526 – 533.
65. Bespalova E.I. Determining the Natural Frequencies an Elastic Parallelepiped by the Advanced Kantorovich-Vlasov Method // Int. Appl. Mech. – 2011. – 47, N 4. – P. 410 – 421.
66. Bespalova E. Complete systems method for linear and nonlinear problems of shallow shells theory // Thin-Walled Struct. – 2019. – N 142. – P. 277 – 286.
67. Bespalova E.I., Boreiko N.P. Determination of the Natural Frequencies of Compound Anisotropic Shell Systems Using Various Deformation Models // Int. Appl. Mech. – 2019. – 55, N 1. – P. 41 – 54.
68. Bespalova E.I., Grigorenko Ja.M., Urusova G.P. Solving stationary problems of shell theory with allowance for transverse reduction // Shell Struct.: Theory and Applications (vol. 2). Proc. of the 9th SSTA Conference, Jurata, Poland, 14-16 October 2009. – P. 245 – 249.
69. Bespalova E.I., Kitaigorodskii A.B. Free Vibrations of an Anisotropic Plate // Int. Appl. Mech. – 1995. – 31, N 8. – P. 624 – 629.
70. Bespalova E.I., Kitaigorodskii A.B. Effect of Structural Anisotropy on the Vibration Frequency of Cylindrical Shells // Int. Appl. Mech. – 1996. – 32, N 7. – P. 540 – 544.
71. Bespalova E.I., Kitaigorodskii A.B. Steady Elasticity-Theory Problems with High-Gradient Loads and Localized Mass and Rigidity Inhomogeneities // Int. Appl. Mech. – 1998. – 34, N 9. – P. 846 – 852.
72. Bespalova E.I., Kytigorodskij A.B. Modal analysis of vibrations of viscoelastic laminated plates // Archives of Civil Engng. – 2000. – 46, N 3. – P. 377 – 382.
73. Bespalova E.I., Kitaygorodskii A.B. The Full Systems Method in dynamics problems of 3D bodies. // Engng. Trans. – 2000. – 48, N 4. – P. 395 – 403.
74. Bespalova E.I., Kitaygorodskii A.B. Advanced Kantorovich's method for biharmonic problems // J. Engng. Math. – 2003. – 46. – P. 213 – 226.
75. Bespalova E.I., Urusova G.P. Determining the Natural Frequencies of Highly Inhomogeneous Shells of Revolution with Transverse Strain // Int. Appl. Mech. – 2007. – 43, N 9. – P. 980 – 987.
76. Bespalova E., Urusova G. Vibration of highly inhomogeneous Shells of revolution under static loading // J. of Mechanics of Materials and Struct. – 2008. – 3, N 7. – P. 1299 – 1313.
77. Bespalova E.I., Urusova G.P. Solving the Torsion Problem for an Anisotropic Prism by the Advanced Kantorovich – Vlasov Method // Int. Appl. Mech. – 2010. – 46, N 2. – P. 149 – 159.
78. Bespalova E.I., Urusova G.P. Identifying the Domains of Dynamic Instability for Inhomogeneous Shell Systems under Periodic Loads // Int. Appl. Mech. – 2011. – 47, N 2. – P. 186 – 194.
79. Bespalova E., Urusova G. Solution of the Lamé Problem by the Complete Systems Method // Int. J. for Computation Methods in Engng. Sci. and Mechanics. – 2013. – 14, N 2. – P. 159 – 167.
80. Bespalova E.I., Urusova G.P. Three- Dimensional Analysis of the Lower Frequencies of a Cantilevered Anisotropic Parallelepiped // Int. Appl. Mech. – 2014. – 50, N 4. – P. 365 – 377.
81. Bespalova E.I., Urusova G.P. Stress State of Branched Shells of Revolution Subject to Transverses Shear and Reduction // Int. Appl. Mech. – 2015. – 51, N 4. – P. 410 – 419.

82. *Bespalova E.I., Urusova G.P.* Vibrations of Shells of Revolution with Branched Meridian // *Int. Appl. Mech.* – 2016. – **51**, N 1. – P.82 – 89.
83. *Bespalova E., Urusova G.* Vibrations of compound shells of revolution with elliptical toroidal members // *Thin-Walled Struct.* – 2018. – Vol. 123. – P. 185 – 194.
84. *Finlayson B.A.* The method of weighted residuals and variational principles. – Cambridge: Cambridge Academic Press, 1972. – 412 p.
85. *Grigorenko A.Ya., Efimova T.L.* Using Spline-Approximation to Solve Problems of Axisymmetric Free Vibration of Thick-Walled Orthotropic // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, N 10. – P. 1137 – 1147.
86. *Grigorenko A.Ya., Efimova T.L., Sokolova L.V.* On the approach to studying free vibrations of cylindrical shells of variable thickness in the circumferential direction within a refined statement // *J. Math. Sci.* – 2010. – **181**, N 4. – P. 548 – 563.
87. *Grigorenko A.Ya., Loza I.A., Yaremchenko S.N.* Numerical Analysis of Free Vibrations of Piezoelectric Cylinders. In: *New Achievements in Continuum Mechanics and Thermodynamics.* – Chapter 14. – Cham: Springer, 2019. – P. 187 – 196.
88. *Grigorenko A., Yaremchenko S.* Static problems for noncircular cylindrical shells: Classical and refined theories // *Proc. of the 9th conference “Shell Structures and Applications”*, 2, Gdansk-Jurata., 2009, Taylor and Francis Group, London, UK. – P. 241 – 244.
89. *Grigorenko Ya.M.* Approaches to the Numerical Solution of Linear and Nonlinear Problems in Shell Theory in Classical and Refined Formulations // *Int. Appl. Mech.* – 1996. – **32**, N 6. – P. 409 – 42.
90. *Grigorenko Ya.M., Avramenko O.A., Yaremchenko S.N.* Spline-Approximations Solution of Two – Dimensional Problems of Static for Orthotropic Conical Shells in a Refined Formulations // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – **43**, N 11. – P. 1218 – 1227.
91. *Grigorenko Ya.M., Bespalova O.I., Boreiko N.P.* Stability of systems compound of the shells of revolution with variable gaussian curvature // *J. of Mathem. Sci.* – 2021. – **258**, N 4. – P. 527 – 544.
92. *Grigorenko Ya, Bespalova E, Yaremchenko N.* Some Stationary Deformation Problems for Compound Shells of Revolution // *Вісник нац. техн. ун-ту «Харківський політехнічний інститут».* – Харків: НТУ «ХПІ». – 2016. – № 26. – С. 114 – 117.
93. *Grigorenko Ya.M., Grigorenko A.Ya.* Static and Dynamic Problems for Anisotropic Inhomogeneous Shells with Variable Parameters and Their Numerical Solution (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2013. – **49**, N 2. – P. 123 – 193.
94. *Grigorenko Ya.M., Grigorenko A.Ya., Bespalova E.I.* On Some Recent Discrete-Continuum Approaches to the Solution of Shell Problems. In: *Recent Developments in the Theory of Shells.* – Cham: Springer, 2019. – P. 285 – 313.
95. *Grigorenko Ya.M., Grigorenko A.Ya., Rozhok L.S.* Solving the Stress Problem for Solid Cylinders with Different End Conditions // *Int. App. Mech.* – 2006. – **42**, N 6. – P. 629 – 635.
96. *Grigorenko Y.M., Rozhok L.S.* Analysis of the stress state of hollow cylinders with concave corrugated cross sections // *J. Math. Sci.* – 2018. – **228**, N 1. – P. 80 – 89.
97. *Huang M.K., Conway H.D.* Bending of a Uniformly Rectangular Plate with Two Adjacent Edges Clamped the Others Either Simply Supported or Free // *J. of Appl. Mech.* – 1952. – N 19. – P. 451 – 460.
98. *Kerr A.D., Alexander H.* An application of the extended Kantorovich method to the stress analysis of clamped rectangular plate // *Acta. Mech.* – 1968. – **6**, N 2-3. – P. 180 – 196.
99. *Leissa A.W., Niefenfuhr F.W.* Bending of a Square Plate with Two Adjacent Edges Free and the Others Clamped or Simply Supported // *AIAA J.* – 1963. – **1**, N1. – P. 116 – 120.
100. *Nagino H., Mikami T., Mizusawa T.* Three-dimension free vibration analysis of isotropic rectangular plates using the B-spline Ritz method. // *J. Sound and Vibration.* – 2008. – **317**, N 1-2. – P. 329 – 353.
101. *Vasilenko A.T., Bespalova E.I., Urusova G.P.* Contact Interaction between a Laminated Shell of Revolution and a Rigid or Elastic Foundation // *Int. App. Mech.* – 2005. – **41**, N 5. – P. 520 – 525.
102. *Zwillinger D.* Coarsening of non-spherical particles // *J. of Crystal Growth.* – 1989. – **94**, N 1. – P. 159 – 165.

Надійшла 19.04.2022

Затверджена до друку 13.12.2022