А . А . М а р т и н ю к

АНАЛІЗ ЕКВІ-ОБМЕЖЕНОСТІ ТА СТІЙКОСТІ РУХУ ІСТОТНО НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, вул. Нестерова. 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: center@inmech.kiev.ua

Abstract. For the essentially nonlinear systems of equations of the perturbed motion, one new approach is proposed for estimating the Lyapunov functions along the solutions of the considered systems of equations. As applications, the problems of β-boundedness and (α, β, J)-stability of motion of non-autonomous essentially nonlinear systems are considered.

Key words: essentially nonlinear system, estimate of Lyapunov functions, β-boundedness and (α,β,J)-stability of solutions.

Вступ.

У роботі [3] істотно нелінійні системи визначені як такі системи диференціальних рівнянь збуреного руху, які не перетворюються в лінійні при перетворенні в нуль малого параметра. Такі системи допускають застосування методу Каменкова аналізу коливань, якщо при μ рівному нулю система має один чи сімейство періодичних розв'язків.

У цій статті розглядаються деякі класи істотно нелінійних систем загальніші, ніж ті, що розглядалися у роботі [3].

При цьому розроблено підхід до аналізу екві-обмеженості та стійкості розв'язків на основі нелінійних інтегральних нерівностей, яким підпорядковані функції Ляпунова на розв'язках відповідних систем рівнянь.

Статтю побудовано за таким планом.

У параграфі 1 вводиться загальне поняття неавтономної істотно нелінійної системи та формулюються задачі дослідження.

У параграфі 2 встановлено межі зміни функцій Ляпунова на розв'язках істотно нелінійних систем.

У параграфі 3 розглядаються деякі класи істотно нелінійних систем та встановлені умови: β-обмеженості розв'язків; (α, β, J)-стійкості в одному критичному випадку; (α, β, J)-стійкості за наявності аналітичного інтеграла; (α, β, J)-стійкості в системі другого порядку з параметрами, що повільно змінюються [2, 4].

У висновках обговорюються деякі не розв'язані задачі для цього класу систем рівнянь збуреного руху.

1. Постановка задачі.

Розглянемо систему рівнянь збуреного руху

$$dx/dt = A(t)x + X(t, x); \;\; X(t, x) = \sum_{j=1}^{m} X^{(j)}(t, x), \tag{1}$$

де $x \in R^n$; $A(t)$ – $n \times n$ – матриця з неперервними на $R_+ = [0, \infty)$ елементами; $X^{(j)}(t, x)$ – вектор-функції, що дорівнюють нулеві при $x_1 = \ldots = x_n = 0$ і неперервні по $(t, x) \in$ $\in R_+ \times D \setminus \{0\}$, де $D \subset R^n$ – відкрита область в R^n .

Означення 1. Система рівнянь (1) є істотно нелінійною, якщо $A(t) \equiv 0$ і при $x \in D \setminus \{0\}$ вектор-функції $X^{(j)}(t, x)$ задовольняють умову:

$$\left\| X^{(j)}(t,x) \right\| \le k_j(t) \|x\|^{p_j} ; \quad \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} k_j(s) ds < \infty, \tag{2}$$

де $k_j(t)$ – невід'ємні функції на R_+ і $1 < p_j < \infty$ при всіх $j = 1, 2, \ldots, m$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Тут $\|\cdot\|$ – евклідова норма вектора x в просторі R^n .

Цікавим є аналіз стійкості та екві-обмеженості розв'язків неавтономних істотно нелінійних систем рівнянь на основі розвитку прямого методу Ляпунова у поєднанні з нелінійними інтегральними нерівностями.

2. Межа зміни функцій Ляпунова.

Припустимо, що для системи (1) побудована функція $V : [0, \infty) \times R^n \to R_+$, диференційована по $(t, x) \in R_+ \times D \setminus \{0\}$ і додатно означена. Повну похідну функції $V(t, x)$ на розв'язках системи (1) обчислимо за формулою

$$\frac{dV}{dt}(t, x(t)) = \frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \left(\frac{\partial V}{\partial x}(t, x) \right)^T \left(A(t)x + X(t, x) \right). \tag{3}$$

Вкажемо межу зміни функції $V(t, x)$ на розв'язках системи (1) за початкових умов руху

$$x(t_0) = x_0, \ x_0 \in D \setminus \{0\}. \tag{4}$$

Лема 1. *Якщо для системи (1) існують функція $V(t, x)$ та неперервні невід'ємні функції $\psi_i(t), i = 1, 2, \ldots m$ такі, що*

(1) $\dfrac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \left(\dfrac{\partial V}{\partial x}(t, x) \right)^T A(t)x \le 0$ при всіх $(t, x) \in R_+ \times D \setminus \{0\}$;

(2) $\left(\partial V / \partial x(t, x) \right)^T \left(\sum\limits_{j=1}^{m} X^{(j)}(t, x) \right) \le \sum\limits_{j=1}^{m} \psi_i(t) V^{(j)}(t, x)$ при всіх $(t, x) \in R_+ \times D \setminus \{0\}$,

тоді для функції $V(t, x(t))$ вірна оцінка

$$V\left(t, x(t)\right) \le V(t_0, x_0) \exp \int\limits_{t_0}^{t} \psi_1(s) ds \left(1 - M(t)\right)^{-1/(m-1)} , \tag{5}$$

для тих значень $t \in J \subset R_+$, $t \ge t_0$, для яких

$$M(t) = (m-1) \int\limits_{t_0}^{t} \sum_{j=2}^{m} V^{(j-1)}(t_0, x_0) \psi_j(s) \exp\left(\int\limits_{t_0}^{s} (m-1) \psi_1(\tau) d\tau \right) ds < 1. \tag{6}$$

Доведення. Зі співвідношення (3) та умов леми 1 отримуємо нерівність

$$\frac{dV}{dt}\left(t, x(t)\right) \le \sum_{j=1}^{m} \psi_j(t) V^{(j)}\left(t, x(t)\right) \tag{7}$$

при всіх $(t,x) \in R_+ \times D \setminus \{0\}$. З нерівності (7) випливає, що

$$V\big(t,\, x(t)\big) \le V(t_0, x_0) + \int_{t_0}^{t} \sum_{j=1}^{m} \psi_j(s) V^{(j)}\big(s, x(s)\big) ds =$$

$$= V(t_0, x_0) + \int_{t_0}^{t} \left(\psi_1(s) + \sum_{j=2}^{m} \psi_j(s) V^{(j-1)}(s, x(s)) \right) V(s, x(s)) ds. \tag{8}$$

Застосовуючи до нерівності (8) техніку доведення леми 1 із статті [9], отримаємо оцінку (5) за умови (6). Цим лема 1 доведена.

Далі розглянемо істотно нелінійну систему (1), у якій

$$X(t,x) = X^{(1)}(t,x) + X^{(2)}(t,x), \tag{9}$$

де $X^{(j)}(t,x)$, $j = 1,2$ задовольняють умовам (2). Покажемо, що має місце таке твердження.

Лема 2. Якщо для системи (1) існує функція $V(t,x)$ і неперервні невід'ємні функції $a_1(t)$, $a_2(t)$ такі, що

(1) виконується умова (1) леми 1 та

(2)

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}(t,x) \right)^T \left(\sum_{j=1}^{2} X^{(j)}(t,x) \right) \le a_1(t) V^p(t,x) + a_2(t) V^q(t,x) \tag{10}$$

при всіх $(t,x) \in J \times D \setminus \{0\}$, $1 < p < q < \infty$ і при всіх $t \in J$, для яких

$$N(t) = (p+q-2) \left(V^{p-1}(t_0, x_0) \int_{t_0}^{t} a_1(s) ds + V^{q-1}(t_0, x_0) \int_{t_0}^{t} a_2(s) ds \right) < 1,$$

тоді для функції $V\big(t, x(t)\big)$ вірна оцінка

$$V\big(t,\, x(t)\big) \le V(t_0,\, x_0)(1 - N(t))^{-\frac{1}{p+q-2}} \tag{11}$$

при всіх $t \in J$.

Доведення. З умов (1), (2) леми 2 випливає, що

$$V\big(t,\, x(t)\big) \le V(t_0, x_0) + \int_{t_0}^{t} \Big(a_1(s) V^p(s, x(s)) + a_2(s) V^q(s, x(s)) \Big) ds =$$

$$= V(t_0, x_0) + \int_{t_0}^{t} \Big(a_1(s) V^{p-1}(s, x(s)) + a_2(s) V^{q-1}(s, x(s)) \Big) V\big(s, x(s)\big) ds. \tag{12}$$

Далі, застосовуючи техніку оцінок з робіт [10 – 11] для нерівності (12), отримаємо оцінку (11). Цим лема 2 доведена.

Приклад. Розглянемо рівняння збуреного руху виду

$$\begin{aligned} dx / dt &= m(t)x + y + g(t)x(x^2 + y^2); \\ dy / dt &= m(t)y - x + g(t)y(x^2 + y^2), \end{aligned} \tag{13}$$

де x, $y \in R$, $m(t)$ і $g(t)$ деякі неперервні невід'ємні функції при всіх $t \in R_+$.

Для функції $V(x,y)=x^2+y^2$ повна похідна вздовж розв'язків системи (13) має вигляд

$$D^{+}V(x,y)=2m(t)V(x,y)+2g(t)V^2(x,y)$$

при всіх $(x,y)\in R\times R$ і $t\in R_+$.

Припустимо, що

$$N_1(t)=\left(\int_{t_0}^{t}m(s)ds+(x_0^2+y_0^2)\int_{t_0}^{t}g(s)ds\right)<\frac{1}{2}$$

при всіх $t\in J$. Тоді, згідно леми 2,

$$x^2(t)+y^2(t)\le(x_0^2+y_0^2)\left(1-2N_1(t)\right)^{-1} \tag{14}$$

при всіх $t\in J$.

Якщо для будь-якого $0<\varepsilon<H$ вибрати $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ так, що $x_0^2+y_0^2<\delta$, тоді за умови

$$\left(1-2N_1(t)\right)^{-1}<\frac{\varepsilon}{\delta}\quad \text{при всіх } t\in J$$

отримуємо оцінку розв'язків системи (13) у вигляді $x^2(t)+y^2(t)<\varepsilon$ при всіх $t\in J$.

3. Застосування.

Оцінки функції Ляпунова, представлені в лемах 1, 2, дозволяють досліджувати широкий спектр задач якісного аналізу істотно нелінійних систем. Деякі з таких задач розглядаються у цьому параграфі.

3.1. β-обмеженість рухів системи другого порядку. Розглянемо слабко збурену систему рівнянь

$$\begin{aligned} dx/dt&=X_1(t,x,y)+\mu X_2(t,x,y);\\ dy/dt&=Y_1(t,x,y)+\mu Y_2(t,x,y), \end{aligned} \tag{15}$$

де $X_i\in C(R_+\times R\times R,R)$, $Y_i\in C(R_+\times R\times R,R)$, $i=1,2$, $\mu\in[0,1)$ – малий параметр. Відповідно до роботи [3] система (15) є істотно нелінійною, якщо при $\mu=0$ вона не перетворюється в лінійну. Для системи (15) розглядатимемо функцію

$$2V(x,y)=x^2+y^2 \tag{16}$$

і припустимо, що існують неперервні невід'ємні функції $\overline{c}_1(t,\mu)$, $\overline{c}_2(t,\mu)$, при яких виконуються нерівності

$$\begin{aligned} x\left(X_1(t,x,y)+\mu X_2(t,x,y)\right)&\le 4\overline{c}_1(t,\mu)(x^2+y^2)^2;\\ y\left(Y_1(t,x,y)+\mu Y_2(t,x,y)\right)&\le 8\overline{c}_2(t,\mu)(x^2+y^2)^3 \end{aligned} \tag{17}$$

при всіх $(t,x,y)\in R_+\times D\setminus\{0\}$ і $\mu<\mu_1\in[0,1)$. Неважко перевірити, що для функції $V(x,y)$ на розв'язках системи (15) вірна оцінка

$$V\left(x(t,\mu),\,y(t,\mu)\right)\le V(x_0,\,y_0)\left(1-N_2(t,\,\mu)\right)^{-1/3}, \tag{18}$$

якщо тільки

$$N_2(t,\mu)=12\left(V(x_0,y_0)\int_{t_0}^{t}\overline{c}_1(s,\mu)ds+2V^2(x_0,y_0)\int_{t_0}^{t}\overline{c}_2(s,\mu)ds\right)<1$$

при всіх $t\in J$ і $\mu<\mu_2\in[0,1)$.

У монографії [12] наведено класичні визначення різних типів обмеженості та стійкості руху. Тут введемо означення, що враховують скінченність інтервалу, у якому розглядається поведінка розв'язків залежно від значень малого параметра.

Означення 2. Розв'язок $\left(x(t,\mu), y(t,\mu)\right)^T$ системи (15) β-обмежений, якщо при заданому $\beta > 0$ і $\mu < \mu^* \in [0,1)$ має місце оцінка

$$x^2(t,\mu) + y^2(t,\mu) < \beta \text{ при всіх } t \in J$$

і $\mu < \mu^*$, де β може залежати від кожного розв'язку системи (15).

Означення 3. Розв'язок $\left(x(t,\mu), y(t,\mu)\right)^T$ системи (15) (α,β)-обмежений, якщо для будь-яких $\alpha > 0$ і $t_0 \in R_+$ існують $\beta(t_0,\alpha) > 0$ і $\mu^* \in [0,1)$ такі, що якщо $x_0^2 + y_0^2 < \alpha^2$ і $\mu < \mu^*$, тоді

$$x^2(t,\mu) + y^2(t,\mu) < \beta(t_0,\alpha)$$

при всіх $t \in J$ і $\mu < \mu^*$.

Теорема 1. *Нехай для системи* (15) *виконуються умови* (17) і $N_2(t,\mu) < 1$ *при всіх* $t \in J$ і $\mu < \min(\mu_1,\mu_2)$.

Якщо для будь-яких $(x_0, y_0) \in R$ *виконується нерівність*

$$\left(1 - N_2(t,\mu)\right)^{-\frac{1}{3}} < \frac{\beta}{x_0^2 + y_0^2} \text{ при всіх } t \in J \tag{19}$$

і $\mu < \min(\mu_1,\mu_2)$, $\beta > 0$, *тоді розв'язок системи* (15) β*-обмежений.*

Доведення. З нерівності (18) та оцінки (19) випливає, що $x^2(t,\mu) + y^2(t,\mu) < \beta$ при всіх $t \in J$ і $\mu < \min(\mu_1,\mu_2)$.

Теорема 2. *Нехай для системи* (15) *виконується умова* (17) *та*

$$N_2^*(t,\mu) = 3\frac{\alpha^2}{2}\left(\int_{t_0}^{t}\overline{c}_1(s,\mu)ds + \frac{\alpha^2}{2}\int_{t_0}^{t}\overline{c}_2(s,\mu)ds\right) < 1$$

при всіх $t \in J$ і $\mu < \mu_2^* \in [0,1)$.

Якщо початкові значення $(x_0, y_0) \in R$ *такі, що* $x_0^2 + y_0^2 \le \alpha^2$ *і*

$$\left(1 - N_2^*(t,\mu)\right)^{-\frac{1}{3}} < \frac{\beta(t_0,\alpha)}{\alpha^2} \text{ при всіх } t \in J$$

і $\mu < \min(\mu_1,\mu_2^*)$, *тоді розв'язок системи* (15) (α,β)*-обмежений.*

Доведення теореми 2 аналогічне доведенню теореми 1.

3.2 Аналіз розв'зків у критичному випадку *r* пар чисто уявних коренів за відсутності резонансу. Розглянемо неавтономну систему рівнянь

$$dx_s / dt = -\lambda_s y_s + \sum_{j=m}^{N} X_s^{(j)}(t,x,y);$$

$$dy_s / dt = \lambda_s x_s + \sum_{j=m}^{N} Y_s^{(j)}(t,x,y); \tag{20}$$

$$s = 1,2,\ldots,r.$$

Тут $\lambda_s > 0$, $x \in R^r$, $y \in R^r$; $X_s^{(j)}(t, x, y)$, $Y_s^{(j)}(t, x, y)$ – однорідні форми по x і y порядку $j \, (j \geq 2)$, неперервні по $t \in R_+$, що дорівнюють нулеві при $x = y = 0$.

Для повної похідної функції

$$V(x_s, y_s) = \sum_{s=1}^{r} (x_s^2 + y_s^2) \tag{21}$$

вздовж розв'язків системи (20) неважко отримати вираз

$$\frac{dV}{dt}(x_s, y_s) = \sum_{s=1}^{r} \left(2x_s \sum_{j=m}^{N} X_s^{(j)}(t, x, y) + 2y_s \sum_{j=m}^{N} Y_s^{(j)}(t, x, y) \right) \tag{22}$$

при всіх $t \in R_+$ і $(x, y) \in D^* \setminus \{0\}$, $D^* \subseteq R^r \times R^r$.

Припустимо, що існують неперервні невід'ємні функції $\overline{a}_1(t)$, $\overline{a}_2(t)$ і постійні $1 < p < q < +\infty$ такі, що права частина співвідношення (22) оцінюється нерівністю

$$\begin{gathered} \sum_{s=1}^{r} \left(2x_s \sum_{j=m}^{N} X_s^{(j)}(t, x, y) + 2y_s \sum_{j=m}^{N} Y_s^{(j)}(t, x, y) \right) \leq \\ \leq \overline{a}_1(t) V^p(x_s, y_s) + \overline{a}_2(t) V^q(x_s, y_s) \end{gathered} \tag{23}$$

і виконується умова

$$N_3(t) = (p + q - 2) \left(V^{p-1}(x_{s_0}, y_{s_0}) \int_{t_0}^{t} \overline{a}_1(s) ds + V^{q-1}(x_{s_0}, y_{s_0}) \int_{t_0}^{t} \overline{a}_2(s) ds \right) < 1 \tag{24}$$

при всіх $t \in J$.

При виконанні нерівностей (23), (24) згідно леми 2 для функції (21) на розв'язках системи (20) отримуємо оцінку

$$V\left(x_s(t), y_s(t)\right) \leq V(x_{s_0}, y_{s_0})(1 - N_3(t))^{-\frac{1}{p+q-2}} \tag{25}$$

при всіх $t \geq t_0$.

Означення 4. Розв'язок $\left(x(t, \mu), y(t, \mu)\right)^T$ системи (20) (α, β, J)-стійкий, якщо для будь-яких $\varepsilon > 0$ і $t_0 \in R_+$ існують $\delta(t_0, \varepsilon) > 0$ і $\mu^* \in [0, 1)$ такі, що якщо $\sum_{s=1}^{r} (x_{s,0}^2 + y_{s,0}^2) <$ $< \delta^2$ і $\mu < \mu^*$, тоді

$$\sum_{s=1}^{r} \left(x_s^2(t, \mu) + y_s^2(t, \mu) \right) < \varepsilon$$

при всіх $t \in J$ і $\mu < \mu^*$.

Має місце таке твердження.

Теорема 3. *Нехай для системи рівнянь* (20) *і функції Ляпунова* (21) *виконуються умови* (23), (24) *і, крім того, для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *існує* $\delta(\varepsilon) > 0$ *таке, що* $\sum_{s=1}^{r} (x_{s_0}^2 + y_{s_0}^2) < \delta(\varepsilon)$ *виконується нерівність*

$$\left(1 - N_3(t)\right)^{-1/(p+q-2)} < \frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)} \text{ при всіх } t \in J, \tag{26}$$

тоді нульовий розв'язок системи (20) (α, β, J)*-стійкий.*

Доведення. Твердження теореми 3 випливає з оцінок (25) і (26), так як при їх виконанні отримуємо, що $\sum_{s=1}^{r}\left(x_s^2(t,\mu)+y_s^2(t,\mu)\right)<\varepsilon$ при всіх $t\in J$.

3.3. Аналіз (α,β,J)-стійкості розв'язків системи другого порядку зі знаковизначеним інтегралом. Розглядається істотно нелінійна неавтономна система другого порядку

$$\begin{aligned} dx/dt &= -\lambda y + X_0(t,x,y)+\mu X_1(t,x,y)+\dots; \\ dy/dt &= \lambda x + Y_0(t,x,y)+\mu Y_1(t,x,y)+\dots . \end{aligned} \tag{27}$$

Тут x, $y\in R$, $\lambda>0$ і $\mu\in[0,1)$ – малий параметр. Функції X_0, Y_0 – аналітичні за змінними x, y, неперервні по $t\in R_+$ і не містять лінійних членів. Функції X_i, Y_i, $i=1,2,\dots$ суть многочлени по x, y, неперервні по $t\in R_+$ і $X_i(t,0,0)=Y_i(t,0,0)=0$ при всіх $t\ge t_0$.

Припустимо, що при $\mu=0$ система (27) допускає існування аналітичного інтеграла

$$x^2+y^2+\mu F(t,x,y) \tag{28}$$

при всіх $(t,x,y)\in R_+\times D\setminus\{0\}$, де $F(t,x,y)$ – функція неперервна по $t\in R_+$ з обмеженими частинними похідними за всіма змінними. Функцію Ляпунова $V(t,x,y)$ візьмемо у вигляді

$$V(t,x,y)=x^2+y^2+F(t,x,y). \tag{29}$$

Враховуючи, що (28) є аналітичним інтегралом системи (27) при $\mu=0$, для повної похідної функції (28) вздовж розв'язків системи (27) маємо вираз

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt}(t,x,y) &= 2\mu\left(x\sum_{i=1}^{\infty}X_i(t,x,y)+y\sum_{i=1}^{\infty}Y_i(t,x,y)\right)+ \\ &+\mu\left[\frac{\partial F}{\partial t}(t,x,y)+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\sum_{i=1}^{\infty}X_i(t,x,y)+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\sum_{i=1}^{\infty}Y_i(t,x,y)\right]. \end{aligned} \tag{30}$$

Нехай існують неперервні невід'ємні функції $b_1(t,\mu)$, $b_2(t,\mu)$ і постійні $1<p<$ $<q<\infty$ такі, що

$$2\mu\left(x\sum_{i=1}^{\infty}X_i(t,x,y)+y\sum_{i=1}^{\infty}Y_i(t,x,y)\right)\le b_1(t,\mu)V^p(t,x,y); \tag{31}$$

$$\mu\left[\frac{\partial F}{\partial t}(t,x,y)+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\sum_{i=1}^{\infty}X_i(t,x,y)+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\sum_{i=1}^{\infty}Y_i(t,x,y)\right]\le b_2(t,\mu)V^q(t,x,y) \tag{32}$$

при всіх $(t,x,y)\in R_+\times D\setminus\{0\}$ і $\mu<\mu_1\in[0,1)$.

Припустимо так само, що існує $\mu_2\in[0,1)$ таке, що

$$N(t,\mu)=(p+q-2)\left(V^{p-1}(t_0,x_0,y_0)\int_{t_0}^{t}b_1(s,\mu)ds+V^{q-1}(t_0,x_0,y_0)\int_{t_0}^{t}b_2(s,\mu)ds\right)<1 \tag{33}$$

при всіх $t\in J$ і при $\mu<\mu_2$.

При виконанні умов (31) – (33) для функції $V(t,x,y)$ неважко отримати оцінку виду

$$V\left(t,x(t),y(t)\right) \le V(t_0,x_0,y_0)(1-N(t,\mu))^{-\frac{1}{p+q-2}} \tag{34}$$

при всіх $t \in J$ і $\mu < \min(\mu_1, \mu_2)$.

Далі на основі оцінки (34) для функції $V(t,x,y)$ на розв'язках системи (27) встановимо умови рівномірної (α, β, J) - стійкості нульового розв'язку системи (27).

Теорема 4. *Припустимо, що для системи* (27) *побудовано функцію Ляпунова* (29), *для якої виконуються умови:*

(1) *існують функції порівняння* $a, b,$ *що належать* K *- класу Хана такі, що*

$$a\left(\|x\|+\|y\|\right) \le V(t,x,y) \le b\left(\|x\|+\|y\|\right)$$

при всіх $(t,x,y) \in R_+ \times D \setminus \{0\}$;

(2) *виконуються оцінки* (31), (32), (33) *при всіх* $t \in J$ *і* $\mu < \min(\mu_1, \mu_2)$;

(3) *існує постійна* $0 < k < \infty$ *така, що*

$$(1-N(t,\mu))^{-\frac{1}{p+q-2}} \le k$$

рівномірно по $t_0 \in R_+$ *при* $\mu < \min(\mu_1, \mu_2)$.

Тоді розв'язок $x(t) = y(t) = 0$ *системи* (27) *рівномірно* (α, β, J) *-стійкий.*

Доведення. В силу умови (1) теореми 4 для будь-якого $0 < \varepsilon < A$ вірна оцінка $a(\varepsilon) \le V(t,x,y)$ при всіх $t \in J$ і $(x,y) \in D \setminus \{0\}$ таких, що $\|x\|+\|y\| = \varepsilon$. За заданим $\varepsilon > 0$ виберемо $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ так, що при $\|x_0\|+\|y_0\| < \delta$ вірна оцінка $b(\delta)k < a(\varepsilon)$. Далі, при виконанні умови (2) теореми 4 маємо оцінку (34) функції $V(t,x,y)$. Нехай за деякого $t_1 > t_0$, $(t_0, t_1) \in J$ виконується співвідношення $\|x(t_1)\|+\|y(t_1)\| = \varepsilon.$ З оцінки (34) за умови (3) теореми 4 маємо протиріччя

$$a(\varepsilon) \le V(t_1, x(t_1), y(t_1)) \le V(t_0, x_0, y_0)k \le b(\delta)k < a(\varepsilon),$$

з якого випливає, що $\|x(t)\|+\|y(t)\| < \varepsilon$ при всіх $t \in J$ рівномірно по $t_0 \in J$ при $\mu < \min(\mu_1, \mu_2)$. Цим теорема 4 доведена.

3.4 (α, β, J) **-стійкість в системі з параметрами, що повільно змінюються.** Розглянемо систему рівнянь збуреного руху

$$\begin{aligned} dx/dt - \lambda(\tau)y + X_0(x,y) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i X_i(\tau, x, y); \\ dx/dt = \lambda(\tau)x + Y_0(x,y) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i Y_i(\tau, x, y). \end{aligned} \tag{35}$$

Тут $x, y \in R$; $\lambda(\tau)$ – обмежена, неперервна і однозначна функція τ; $\tau = \mu t$ – повільний час; X_i, Y_i – обмежені функції часу, що повільно змінюються; ряди по μ – такі, що абсолютно збігаються в області значень $(x,y) \in R^2$ при малих значеннях параметра μ; X_0, Y_0 – нелінійні функції змінних x, y. Функції $X_i = 0,$ $Y_i = 0$ і $X_0 = 0,$ $Y_0 = 0$ при $x = y = 0$ і при всіх $\tau \in [0, \infty)$.

Припускається, що корені характеристичного рівняння системи (35) не мають точок перетину при всіх $\tau \in [0, \infty)$ і при $\mu = 0$ система рівнянь (35) нейтрально стійка. Зокрема, так буде якщо

$$xX_0(x,y) + yY_0(x,y) \le 0$$

при всіх $(x,y) \in D \setminus \{0\}$.

Із системою рівнянь (35) розглядатимемо функцію Ляпунова $V(x, y) = (x^2 + y^2)/2$ в області значень $(x, y) \in D \setminus \{0\}$.

Для повної похідної функції $V(x, y)$ на розв'язках системи (35) маємо вираз

$$\frac{dV}{dt}(x, y) \le x\left(\sum_{i=1}^{\infty} \mu^i X_i(\tau, x, y)\right) + y\left(\sum_{i=1}^{\infty} \mu^i Y_i(\tau, x, y)\right) \tag{36}$$

при всіх $(x, y) \in R$ і $\tau \in R_+$.

Нехай існують $\mu_1 \in [0,1)$, $1 < q < \infty$ і неперервна невід'ємна функція $\sigma(\tau, \mu)$ такі, що

$$x\left(\sum_{i=1}^{\infty} \mu^i X_i(\tau, x, y)\right) + y\left(\sum_{i=1}^{\infty} \mu^i Y_i(\tau, x, y)\right) \le \sigma(\tau, \mu) V^q(x, y) \tag{37}$$

при всіх $(x, y) \in D \setminus \{0\}$, $\mu < \mu_1$ і виконується нерівність

$$\Phi(\tau, \mu) = (q-1) V^{q-1}(x_0, y_0) \int_{\tau_0}^{\tau} \sigma(s, \mu) ds < 1 \tag{38}$$

при всіх $\mu < \mu_2 \in [0,1)$ і $\tau \in J$.

Неважко показати, що при виконанні нерівностей (37), (38) для функції $V(x, y)$ має місце оцінка

$$V\big(x(\tau, \mu), y(\tau, \mu)\big) \le V(x_0, y_0)(1 - \Phi(\tau, \mu))^{-\frac{1}{q-1}} \tag{39}$$

при всіх $\mu < \min(\mu_1, \mu_2)$ і $\tau \in J$.

Оцінка функції $V(x, y)$ у вигляді (39) дозволяє встановити наступний результат.

Теорема 5. *Припустимо, що для системи* (35) *виконуються такі умови*:

(1) $\mu = 0$ *система нейтрально стійка;*

(2) *при* $\mu < \mu_1$ *існує функція* $\sigma(\tau, \mu)$, *для якої виконується нерівність* (37);

(3*) при* $\mu < \mu_2$ *виконується нерівність* (38) *при всіх* $\tau \in J$;

(4) *для кожного* $\varepsilon > 0$ *існує* $\delta = \delta(\tau_0, \varepsilon) > 0$ *таке, що при* $x_0^2 + y_0^2 \le \delta(\tau_0, \varepsilon)$ *виконується нерівність*

$$(1 - \Phi(\tau, \mu))^{-\frac{1}{q-1}} < \frac{\varepsilon}{\delta}$$

при всіх $\tau \in J$ і $\mu < \min(\mu_1, \mu_2)$.

Тоді нульовий розв'зок істотно нелінійної системи (35) (α, β, J) *-стійкий.*

Доведення. За виконання умов теореми 5 для функції $2V(x, y) = x^2 + y^2$ маємо оцінку

$$x^2(\tau) + y^2(\tau) \le \delta (1 - \Phi(\tau, \mu))^{-\frac{1}{q-1}}$$

при всіх $\tau \in J$ і $\mu < \min(\mu_1, \mu_2)$, з якої випливає, що $x^2(\tau) + y^2(\tau) < \varepsilon$ при всіх $\tau \in J$.

Висновки.

Нелінійні інтегральні нерівності [5, 6, 8 – 11] застосовуються у різних задачах якісного аналізу властивостей розв'язків нелінійних механічних та іншої природи систем. Отримані у цій статті умови β-обмеженості та (α, β, J)-стійкості розв'язків істотно нелінійних систем становлять інтерес для подальшого розвитку та застосування у теорії нелінійних коливань [2, 4], теорії систем [7], а також у задачах управління рухом твердого тіла [1].

РЕЗЮМЕ. Для істотно нелінійних систем збуреного руху запропоновано новий підхід до оцінки функцій Ляпунова на розв'язках відповідних систем рівнянь. На основі отриманих оцінок встановлено нові умови β обмеженості та (α, β, J) стійкості руху деяких класів істотно нелінійних систем.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: істотно нелінійна система, оцінка функцій Ляпунова, β обмеженість та (α, β, J) стійкість руху.

1. *Александров А.Ю.* Устойчивость движений неавтономных динамических систем. – Санкт-Петербург: Изд-во Санкт-Петерб. ун-та, 2004. – 186 с.
2. *Веретенников В.Г.* Устойчивость и колебания нелинейных систем. – Москва: Наука, 1984. – 319 с.
3. *Каменков Г.В.* Устойчивость и колебания нелинейных систем. – Москва: Наука, 1972. – 214 с.
4. *Митропольський Ю.О.* Нелинейная механика. Асимптотические методи. – Киев: Институт матем. НАН Украины, 1995. –396 с.
5. *Gutowski R., Radziszewski B.* Asymptotic behaviour and properties of solutions of system of nonlinear second order ordinary differential ecuations describing motion of mechanical systems // Arch. Mech. Stosow. – 1970. – **22,** N 6. – P. 675 – 694.
6. *Louartassi Y., Mazoudi E.H.E., Elalami N.* A New Generalization of Lemma Gronwall-Bellman // Appl. Math. Sci. – 2012. – **6**. – P. 621 – 628.
7. *Luhmann T.* Introduction to Systems Theory. – Cambridge: Wiley, 2012. – 302 p.
8. *Martynyuk A.A.* Novel Bounds for Solutions of Nonlinear Differential Equations // Appl. Math. – 2015. – **6**. – P. 182 – 194.
9. *Martynyuk A.A., Chernienko V.A.* Sufficient Conditions for the Stability of Motion of Polynomial Systems // Int. Appl. Mech. – 2020. – **56,** N 1. – P. 13 – 21.
10. *Martynyuk A.A., Radziszewski B., Szadkowski A.* Stability: Elements of the Theory and Applications with Examples. – Warsaw: De Gruyter / SCIENDO, 2020. – 314 p.
11. *N'Doye I.* Generalization du lemme de Gronwall-Bellman pour la stabilisation des systemes fractionnaires. – These PhD, Nancy University, Casablanca, 2011. – 202 p.
12. *Yoshizawa T.* Stability Theory by Liapunov's Second Method. – Tokyo: The Math. SCI. of Japan, 1966. – 223 p.

Надійшла 03.08.2021 Затверджена до друку 13.12.2022