

І.Ю.Хома¹, Т.М.Прошенко², О.А.Стригіна³

НАПРУЖЕНИЙ СТАН ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОЇ
ПЛАСТИНИ З КРУГОВИМ ОТВОРОМ, НА ПОВЕРХНІ ЯКОГО
ЗАДАНА ЗОСЕРЕДЖЕНА РОЗЩЕПЛЮВАЛЬНА СИЛА

¹ Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: reolog@inmtech.kiev.ua

² Київський національний університет ім. Тараса Шевченка,
просп. Академіка Глушкова, 4г, 03127, Київ, Україна;
e-mail: t.proshchenko@gmail.com

³ Білоцерківський національний аграрний університет,
пл. Соборна, 8/1, 09117, Біла Церква, Київська обл., Україна;
e-mail: oksana9269@ukr.net

Abstract. A solution of the stress state problem for the transversely isotropic plate with a circular hole, on the surface of which the concentrated splitting force (force tending to stretch or compress the plate along a thickness), is obtained. The method of expanding the unknown functions into the Fourier series of the Legendre polynomials by the thickness coordinate is used. The stress state of the plate near the hole is analyzed.

Key words: transversely isotropic plate, stress state, circular hole, concentrated splitting force.

Вступ.

Дослідженню концентрації напружень біля отворів, порожнин та включень в ізо- тропних та трансверсально-ізо- тропних пластинах приділяється достатньо уваги [4, 5, 13 – 16]. При розв’язанні відповідних граничних задач використовуються різні підходи та методи. Широкого застосування здобув метод розвинення шуканих величин в ряди за ортогональною системою базисних функцій [1 – 3, 6, 8, 9]. Методом розкладу компонент напружень та переміщень в ряди Фур’є за поліномами Лежандра в [11] знайдено розв’язок задачі про напружений стан трансверсально-ізо- тропної пластини з некруговою циліндричною порожниною при чистому зсуві на нескінченності, а в роботі [12] розглянуто аналогічну задачу при заданому на нескінченності скручувальному моменті. В роботі [10] проведено аналіз розподілу напружень в пластині з не- круговою порожниною, на поверхні якої задано розщеплювальну силу (урівноважена по товщині пара сил, що розтягує або стискає пластину).

У даній роботі продовжено дослідження, розпочаті в [10], та розглянуто задачу про напружено-деформований стан трансверсально-ізо- тропної пластини з круговим отвором, на поверхні якого задана зосереджена розщеплювальна сила.

§1. Постановка задачі і метод розв’язку.

Нехай необмежена трансверсально-ізо- тропна пластинка постійної товщини $2h$ ($h = \text{const}$), що займає область $\Omega = S \times [-h, h]$ тривимірного простору R^3 , віднесена до декартової системи координат x_i ($i = 1, 2, 3$). Вважатимемо, що x_1 та x_2 відповідають серединній площині S , яка співпадає з площиною ізо- тропії, а $x_3 \in [-h, h]$.

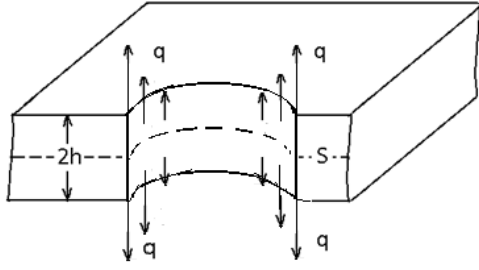


Рис. 1

Пластина послаблена круговою циліндричною порожниною радіуса R , на поверхні $\partial\Omega = R \times [-h, h]$ якої задана зосереджена розщеплювальна сила, тобто врівноважена по товщині пара сил, що здатна розтягнути і розщепити таким чином пластину по серединній площині S , або ж стиснути її (рис. 1).

Для розв'язування задачі скористаємося методом розкладу невідомих функцій в ряди Фур'є за поліномами Лежандра $P_k(\zeta)$ [1, 6, 8]. Представимо компоненти вектора переміщень $u_j(x_1, x_2, x_3)$ і тензора напружень $\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ у вигляді скінченного ряду

$$\left. \begin{aligned} u_j(x_1, x_2, x_3) \\ \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3) \end{aligned} \right\} = \sum_{k=0}^N \left\{ \begin{aligned} u_j^{(k)}(x) \\ \sigma_{ij}^{(k)}(x) \end{aligned} \right\} P_k(\zeta), \quad (1.1)$$

де $x = (x_1, x_2) \in S$, $\zeta = h^{-1}x_3 \in [-1; 1]$; $u_j^{(k)}(x)$, $\sigma_{ij}^{(k)}(x)$ – коефіцієнти розкладу, які називатимемо моментами; N – довільне натуральне число. Відносно моментів напружень $\sigma_{ij}^{(k)}(x)$ як функцій двох незалежних змінних отримаємо систему рівнянь [3]

$$\partial_\alpha \sigma_{\alpha j}^{(k)} - (2k+1)h^{-1} \sum_{s=0}^{[K]} \sigma_{3j}^{(k-2s-1)} + X_j^{(k)} = 0 \quad (j=1, 2, 3; k=0, 1, \dots, N), \quad (1.2)$$

в якій $\partial_\alpha = \partial / \partial x_\alpha$; $K = (k-1)/2$, символ $[K]$ означає цілу частину числа K ; $X_j^{(k)}$ – вільні члени, що визначаються значеннями напружень σ_{3j}^+ , σ_{3j}^- , заданими на граничних площинах $x_3 = h$, $x_3 = -h$, відповідно, тобто

$$X_j^{(k)} = \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{h} [\sigma_{3j}^+ - (-1)^k \sigma_{3j}^-].$$

Тут і надалі прийнято звичайну умову додавання відносно індексів, що повторюються, причому латинські букви набувають значень 1, 2, 3, а грецькі – 1, 2.

Для повноти задачі до рівнянь рівноваги (1.2) необхідно приєднати рівняння стану, що зв'язують моменти напружень $\sigma_{ij}^{(k)}$ та деформацій $\varepsilon_{ij}^{(k)}$. В загальному вигляді співвідношення пружності для анізотропного тіла записуються таким чином [3]:

$$\sigma_{ij}^{(k)} = c_{ijlm} \varepsilon_{lm}^{(k)}, \quad (1.3)$$

де $\varepsilon_{lm}^{(k)}$ – деформації виду

$$\varepsilon_{\alpha m}^{(k)} = \partial_\alpha u_m^{(k)} \quad (\alpha=1, 2); \quad \varepsilon_{3m}^{(k)} = (2k+1) \frac{1}{h} \sum_{s=0}^{[N_k]} u_m^{(k+2s+1)} \quad (N_k = (N-k-1)/2),$$

а c_{ijlm} – тензор модулів пружності, що задовольняє умовам симетрії [7].

Рівняння (1.2), (1.3) з відповідними граничними умовами на бічній поверхні утворюють замкнену систему рівнянь для визначення всіх невідомих функцій. Для трансверсально-ізотропного тіла з площиною ізотропії, що збігається з S , вона розпадається на дві групи рівнянь, якими описуються симетричне і косиметричне (відносно

площини S) деформування пластини. Так, при симетричному деформуванні для наближення $N = 2n + 1$ ($n = 0, 1, \dots, < \infty$) система рівнянь (1.2) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \sigma_{\alpha\beta}^{(2k)} - (4k+1)h^{-1} \sum_{s=0}^{k-1} \sigma_{3\beta}^{(2s+1)} + X_\beta^{(2k)} &= 0 \quad (\beta = 1, 2); \\ \partial_\alpha \sigma_{\alpha 3}^{(2k+1)} - (4k+3)h^{-1} \sum_{s=0}^k \sigma_{33}^{(2s)} + X_3^{(2k+1)} &= 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n), \end{aligned} \quad (1.4)$$

а рівняння стану (1.3) записуються таким чином:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(2k)} &= c_{11}\varepsilon_{11}^{(2k)} + c_{12}\varepsilon_{22}^{(2k)} + c_{13}\varepsilon_{33}^{(2k)}; \quad \sigma_{12}^{(2k)} = c_{66}(\varepsilon_{12}^{(2k)} + \varepsilon_{21}^{(2k)}); \\ \sigma_{22}^{(2k)} &= c_{12}\varepsilon_{11}^{(2k)} + c_{11}\varepsilon_{22}^{(2k)} + c_{13}\varepsilon_{33}^{(2k)}; \quad \sigma_{13}^{(2k+1)} = c_{44}(\varepsilon_{13}^{(2k+1)} + \varepsilon_{31}^{(2k+1)}); \\ \sigma_{33}^{(2k)} &= c_{13}\varepsilon_{11}^{(2k)} + c_{33}\varepsilon_{33}^{(2k)}; \quad \sigma_{23}^{(2k+1)} = c_{44}(\varepsilon_{23}^{(2k+1)} + \varepsilon_{32}^{(2k+1)}). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Тут моменти деформацій $\varepsilon_{3j}^{(m)}$ визначаються формулами

$$\varepsilon_{3\alpha}^{(2k+1)} = (4k+3)h^{-1} \sum_{s=k+1}^n u_\alpha^{(2s)} \quad (\alpha = 1, 2); \quad \varepsilon_{33}^{(2k)} = (4k+1)h^{-1} \sum_{s=k}^n u_3^{(2s+1)},$$

$e^{(2k)} = \partial_\alpha u_\alpha^{(2k)}$, $c_{11}, c_{12}, \dots, c_{66}$ – пружні постійні.

Підставляючи значення моментів (1.5) в рівняння (1.4) і припускаючи, що граничні площини $x_3 = \pm h$ вільні від зовнішніх зусиль ($\sigma_{3j}^+ = \sigma_{3j}^- = 0$), отримаємо однорідну систему рівнянь відносно моментів компонент вектора переміщень

$$\begin{aligned} c_{66}\Delta u_\alpha^{(2k)} + (c_{12} + c_{66})\partial_\alpha e^{(2k)} + (4k+1)h^{-1} \sum_{s=0}^n \left(\lambda_{2s+1}^{(k)} \partial_\alpha u_3^{(2s+1)} - c_{44}h^{-1} \beta_{2s}^{(k)} u_\alpha^{(2s)} \right) &= 0 \\ (\alpha = 1, 2); \\ c_{44}\Delta u_3^{(2k+1)} + (4k+3)h^{-1} \sum_{s=0}^n \left(\lambda_{2s}^{(k)} e^{(2s)} - c_{33}h^{-1} \alpha_{2s+1}^{(k)} u_3^{(2s+1)} \right) &= 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n), \end{aligned} \quad (1.6)$$

де Δ – оператор Лапласа;

$$\lambda_{2s}^{(k)} = \begin{cases} -c_{44}, & 0 \leq s \leq k; \\ c_{13}, & k < s \leq n; \end{cases} \quad \lambda_{2s+1}^{(k)} = \begin{cases} -c_{13}, & 0 \leq s < k; \\ c_{44}, & k \leq s \leq n; \end{cases}$$

$\alpha_{2s+1}^{(k)}$ і $\beta_{2s}^{(k)}$ – константи виду

$$\alpha_{2s+1}^{(k)} = \begin{cases} (s+1)(2s+1), & 0 \leq s \leq k; \\ (k+1)(2k+1), & k < s \leq n; \end{cases} \quad \beta_{2s}^{(k)} = \begin{cases} s(2s+1), & 0 \leq s \leq k; \\ k(2k+1), & k < s \leq n. \end{cases}$$

Увівши змінні $z = x_1 + ix_2$; $\bar{z} = x_1 - ix_2$, запишемо рівняння даної системи в комплексній формі. Помножимо друге ($\alpha = 2$) рівняння (1.6) на число i та складемо з першим ($\alpha = 1$). В результаті матимемо рівність

$$c_{66}\Delta u_+^{(2k)} + 2(c_{12} + c_{66})\partial_{\bar{z}} e^{(2k)} + (4k+1)h^{-1} \sum_{s=0}^n \left(2\lambda_{2s+1}^{(k)} \partial_{\bar{z}} u_3^{(2s+1)} - c_{44}h^{-1} \beta_{2s}^{(k)} u_+^{(2s)} \right) = 0,$$

в якій $u_+^{(2k)} = u_1^{(2k)} + iu_2^{(2k)}$; $e^{(2k)} = 2\text{Re}(\partial_z u_+^{(2k)})$; оператор Лапласа Δ і частинні похідні $\partial_z = \partial/\partial z$, $\partial_{\bar{z}} = \partial/\partial \bar{z}$ визначаються формулами $\Delta = 4\partial_z \partial_{\bar{z}}$; $2\partial_z = \partial/\partial x_1 - i\partial/\partial x_2$; $2\partial_{\bar{z}} = \partial/\partial x_1 + i\partial/\partial x_2$.

Вигляд третього рівняння (1.6) залишається незмінним.

Загальний аналітичний розв'язок даної системи представляється таким чином [3]:

$$\begin{aligned} c_{66}u_+^{(0)} &= \alpha^* \varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi'(z)} + h \sum_{l=1}^{2n+1} a_l^{(0)} \partial_{\bar{z}} V_l; \\ c_{66}u_+^{(2)} &= \alpha_2^* h^2 \overline{\varphi''(z)} + h \sum_{l=1}^{2n+1} a_l^{(2)} \partial_{\bar{z}} V_l + ih \sum_{s=1}^n b_s^{(2)} \partial_{\bar{z}} \omega_s; \\ c_{66}u_+^{(2k)} &= h \sum_{l=1}^{2n+1} a_l^{(2k)} \partial_{\bar{z}} V_l + ih \sum_{s=1}^n b_s^{(2k)} \partial_{\bar{z}} \omega_s; \quad (k=2,3,\dots,n); \\ c_{66}u_3^{(1)} &= -\alpha_1^* h \left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} \right] + \sum_{l=1}^{2n+1} c_l^{(1)} V_l; \\ c_{66}u_3^{(2k+1)} &= \sum_{l=1}^{2n+1} c_l^{(2k+1)} V_l \quad (k=1,2,\dots,n), \end{aligned} \quad (1.7)$$

де $\varphi(z), \psi(z)$ – довільні голоморфні функції; V_l і ω_s – метагармонічні функції, що задовольняють рівнянням $\Delta V_l - k_l h^{-2} V_l = 0$; $\Delta \omega_s - \mu_s h^{-2} \omega_s = 0$, в яких параметри k_l і μ_s представляють корені відповідних характеристичних рівнянь:

$$\alpha^* = 1 + \frac{2c_{66}}{c_1 c_{11}}; \quad \alpha_1^* = \frac{2c_{13} c_{66}}{c_1 c_{11} c_{33}}; \quad \alpha_2^* = \frac{2}{3} \alpha_1^*; \quad c_1 = c - \frac{c_{66}}{c_{11}}; \quad c = 1 - \frac{c_{13}^2}{c_{11} c_{33}};$$

$a_l^{(2k)}, b_s^{(2k)}, c_l^{(2k+1)}$ – безрозмірні сталі.

Приймаючи до уваги розв'язок (1.7), запишемо визначальні рівняння (1.5) у вигляді формул

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(2k)} + \sigma_{22}^{(2k)} &= 2 \left[(c_{12} + c_{66}) e^{(2k)} + (4k+1) c_{13} h^{-1} \sum_{s=k}^n u_3^{(2s+1)} \right]; \\ \sigma_{11}^{(2k)} - \sigma_{22}^{(2k)} + 2i\sigma_{12}^{(2k)} &= 4c_{66} \frac{\partial u_+^{(2k)}}{\partial \bar{z}}; \\ \sigma_{13}^{(2k+1)} + i\sigma_{23}^{(2k+1)} &= c_{44} \left[2 \frac{\partial u_3^{(2k+1)}}{\partial \bar{z}} + (4k+3) h^{-1} \sum_{s=k+1}^n u_+^{(2s)} \right] \end{aligned}$$

і внесемо в них значення даного розв'язку. Внаслідок цього отримаємо вирази для моментів напружень

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(0)} + \sigma_{22}^{(0)} &= 4 \left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} \right] + 2h^{-1} \sum_{l=1}^{2n} d_l^{(0)} V_l; \quad \sigma_{33}^{(0)} = h^{-1} \sum_{l=1}^{2n} d_{3l}^{(0)} V_l; \\ \sigma_{11}^{(0)} - \sigma_{22}^{(0)} + 2i\sigma_{12}^{(0)} &= -4 \left[z\overline{\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)} \right] + 4h \sum_{l=1}^{2n} a_l^{(0)} \frac{\partial^2 V_l}{\partial \bar{z}^2}; \\ \sigma_{11}^{(2)} - \sigma_{22}^{(2)} + 2i\sigma_{12}^{(2)} &= 4\alpha_2^* h^2 \overline{\varphi''(z)} + 4h \sum_{l=1}^{2n} a_l^{(2)} \frac{\partial^2 V_l}{\partial \bar{z}^2} + 4ih \sum_{s=1}^n b_s^{(2)} \frac{\partial^2 \omega_s}{\partial \bar{z}^2}; \end{aligned}$$

$$\sigma_{11}^{(2k)} + \sigma_{22}^{(2k)} = 2h^{-1} \sum_{l=1}^{2n} a_l^{(2k)} V_l; \quad \sigma_{33}^{(2k)} = h^{-1} \sum_{l=1}^{2n} d_{3l}^{(2k)} V_l \quad (k = 1, 2, \dots, n); \quad (1.8)$$

$$\sigma_{11}^{(2k)} - \sigma_{22}^{(2k)} + 2i\sigma_{12}^{(2k)} = 4h \sum_{l=1}^{2n} a_l^{(2k)} \frac{\partial^2 V_l}{\partial \bar{z}^2} + 4ih \sum_{s=1}^n b_s^{(2k)} \frac{\partial^2 \omega_s}{\partial \bar{z}^2};$$

$$\sigma_{13}^{(2k+1)} + i\sigma_{23}^{(2k+1)} = 2 \sum_{l=1}^{2n} p_l^{(2k+1)} \frac{\partial V_l}{\partial \bar{z}} + 2i \sum_{s=1}^n q_s^{(2k+1)} \frac{\partial \omega_s}{\partial \bar{z}} \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Тут постійні $d_l^{(2k)}$, $d_{3l}^{(2k)}$ та $p_l^{(2k+1)}$, $q_s^{(2k+1)}$ набувають таких значень:

$$d_l^{(2k)} = \frac{c_{12} + c_{66}}{2c_{66}} k_l a_l^{(2k)} + \frac{(4k+1)c_{13}}{c_{66}} \sum_{s=k}^n c_l^{(2s+1)}; \quad d_{3l}^{(2k)} = \frac{c_{13}}{2c_{66}} k_l a_l^{(2k)} + \frac{(4k+1)c_{33}}{c_{66}} \sum_{s=k}^n c_l^{(2s+1)};$$

$$p_l^{(2k+1)} = \frac{c_{14}}{2c_{66}} \left[2c_l^{(2k+1)} + (4k+3) \sum_{s=k+1}^n a_l^{(2s)} \right]; \quad q_s^{(2k+1)} = \frac{(4k+3)c_{44}}{2c_{66}} \sum_{l=k+1}^n b_s^{(2l)}.$$

§2. Граничні умови.

Знайдемо вигляд граничних умов на контурі ∂S_l області S . Нехай на поверхні $\partial \Omega_l = \partial S_l \times [-h, h]$ заданий вектор напружень $\vec{P}_l = \sigma_{ll} \vec{l} + \sigma_{ls} \vec{s} + \sigma_{ln} \vec{n}$, де σ_{ll} , σ_{ls} , σ_{ln} – проєкції вектора \vec{P}_l на напрямки векторів \vec{l} , \vec{s} , \vec{n} . Тут \vec{l} – орт нормалі до поверхні $\partial \Omega_l$ в точках $x \in \partial S_l$, \vec{s} – орт дотичної до кривої ∂S_l і \vec{n} – орт нормалі до площини S , причому $\vec{n} = \vec{l} \times \vec{s}$. У відповідності до формул (1.1) приймемо вектор \vec{P}_l у вигляді

$$\vec{P}_l = \sum_{k=0}^N \vec{P}_l^{(k)}(x) P_k(\zeta).$$

В скалярній формі матимемо такі рівності

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=0}^N \sigma_{ij}^{(k)}(x) P_k(\zeta) \quad (j = l, s, n). \quad (2.1)$$

Із оберненої до (2.1) формули визначаємо моменти напружень

$$\sigma_{ij}^{(k)}(x) = \left(k + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{h} \int_{-h}^h \sigma_{ij}(x, x_3) P_k(\zeta) dx_3.$$

Для пластини з круговою порожниною радіуса R при симетричному (відносно площини S) деформуванні функції (2.1) в циліндричній системі координат r, ϑ, x_3 набувають вигляду

$$\sigma_{r\beta}(R, \vartheta, x_3) = \sum_{k=0}^n \sigma_{r\beta}^{(2k)}(R, \vartheta) P_{2k}(\zeta) \quad (\beta = r, \vartheta);$$

$$\sigma_{rn}(R, \vartheta, x_3) = \sum_{k=0}^n \sigma_{r3}^{(2k+1)}(R, \vartheta) P_{2k+1}(\zeta). \quad (2.2)$$

Вважатимемо, що на поверхні порожнини задано значення розщеплювальної сили $\sigma_{ln} = \hat{\sigma}_{rn}(\vartheta, x_3)$ і виконуються такі умови

$$\sigma_{rr}(R, \vartheta, x_3) = 0; \quad \sigma_{r\vartheta}(R, \vartheta, x_3) = 0; \quad \sigma_{rn}(R, \vartheta, x_3) = \hat{\sigma}_{rn}(\vartheta, x_3), \quad (2.3)$$

де

$$\hat{\sigma}_{rn}(\vartheta, x_3) = q\Phi(\zeta)\cos^{2m}\vartheta.$$

Тут $q = \text{const}$; $\Phi(\zeta)$ – непарна функція поперечної координати $\zeta = x_3/h$, зокрема, $\Phi(\zeta) = \zeta$, або ж $\Phi(\zeta) = \zeta(1 - \zeta^2)$; m – натуральне число. Очевидно, функція $\hat{\sigma}_{rn}(\vartheta, x_3)$ представляє врівноважену пару сил, що при додатних значеннях q розтягує пластину по товщині і спроможна, таким чином, розщепити її по серединній площині S , а при від’ємних значеннях q – стиснути пластину. При $m > 1$ розщеплювальна сила $\hat{\sigma}_{rn}$ зосереджується в околі точок $\vartheta = 0$ і $\vartheta = \pi$ (рис. 1).

Користуючись представленнями (2.2), запишемо граничні умови (2.3) так

$$\sum_{k=0}^n \sigma_{r\beta}^{(2k)}(R, \vartheta) P_{2k}(\zeta) = 0 \quad (\beta = r, \vartheta); \quad \sum_{k=0}^n \sigma_{r3}^{(2k+1)}(R, \vartheta) P_{2k+1}(\zeta) = \hat{\sigma}_{rn}(\vartheta, x_3).$$

Звідси способом, аналогічним вищевказаному, визначаємо крайові умови на границі ∂S області S , тобто

$$\sigma_{r\beta}^{(2k)}(R, \vartheta) = 0 \quad (\beta = r, \vartheta); \quad \sigma_{r3}^{(2k+1)}(R, \vartheta) = \hat{\sigma}_{rn}^{(2k+1)}(\vartheta) \quad (k = 0, \dots, n). \quad (2.4)$$

Тут $\hat{\sigma}_{rn}^{(2k+1)}(\vartheta)$ – відома функція

$$\hat{\sigma}_{rn}^{(2k+1)}(\vartheta) = q\Phi^{(2k+1)}\cos^{2m}\vartheta = q\Phi^{(2k+1)}\sum_{l=0}^m \beta_{2l}\cos 2l\vartheta,$$

в якій коефіцієнти β_{2l} при $m=5$ набувають значень $\beta_0 = 63/256$, $\beta_2 = 105/256$, ..., $\beta_{10} = 1/512$, а постійні $\Phi^{(2k+1)}$ визначаються формулою

$$\Phi^{(2k+1)} = (4k+3)\frac{1}{2h}\int_{-h}^h \Phi(\zeta)P_{2k+1}(\zeta)dx_3.$$

Нехай $\Phi(\zeta) = \zeta$ – лінійна функція. Тоді

$$\hat{\sigma}_{rn}^{(1)}(\vartheta) = q\sum_{l=0}^m \beta_{2l}\cos 2l\vartheta; \quad \hat{\sigma}_{rn}^{(2k+1)}(\vartheta) = 0 \quad (k > 0). \quad (2.5)$$

Якщо $\Phi(\zeta) = \zeta(1 - \zeta^2)$ – поліном третього степеню, то

$$\hat{\sigma}_{rn}^{(1)}(\vartheta) = \frac{2}{5}q\sum_{l=0}^m \beta_{2l}\cos 2l\vartheta; \quad \hat{\sigma}_{rn}^{(3)}(\vartheta) = -\frac{2}{5}q\sum_{l=0}^m \beta_{2l}\cos 2l\vartheta; \quad \hat{\sigma}_{rn}^{(2k+1)}(\vartheta) = 0 \quad (k > 1).$$

В полярній системі координат моменти напружень знаходимо із формул перетворення

$$\sigma_{rr}^{(2k)} - \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(2k)} + 2i\sigma_{r\vartheta}^{(2k)} = e^{-2i\vartheta} \left(\sigma_{11}^{(2k)} - \sigma_{22}^{(2k)} + 2i\sigma_{12}^{(2k)} \right);$$

$$\sigma_{rr}^{(2k)} + \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(2k)} = \sigma_{11}^{(2k)} + \sigma_{22}^{(2k)}; \quad \sigma_{r3}^{(2k+1)} + i\sigma_{\vartheta 3}^{(2k+1)} = e^{-i\vartheta} \left(\sigma_{13}^{(2k+1)} + i\sigma_{23}^{(2k+1)} \right). \quad (2.6)$$

Звідси з урахуванням рівностей (2.4) отримуємо вигляд граничних умов на контурі кругового отвору

$$2\left(\sigma_{rr}^{(2k)} + i\sigma_{r\vartheta}^{(2k)}\right) = \sigma_{11}^{(2k)} + \sigma_{22}^{(2k)} + e^{-2i\vartheta} \left(\sigma_{11}^{(2k)} - \sigma_{22}^{(2k)} + 2i\sigma_{12}^{(2k)} \right) = 0;$$

$$\sigma_{r3}^{(2k+1)} = \text{Re} \left[e^{-i\vartheta} \left(\sigma_{13}^{(2k+1)} + i\sigma_{23}^{(2k+1)} \right) \right] = \hat{\sigma}_{rn}^{(2k+1)}(\vartheta). \quad (2.7)$$

Для необмеженої пластини з круговим отвором голоморфні функції $\varphi(z)$, $\psi(z)$ приймемо у вигляді

$$\varphi'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-n}; \quad \psi'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n}, \quad (2.8)$$

де a_n і b_n – довільні постійні. Вигляд метагармонічних функцій V_l і ω_s залежить від значень коренів характеристичних рівнянь, котрі можуть бути як дійсними, так і комплексними. Нехай для функцій потенційного типу V_l маємо $2n_1 + 1$ ($n_1 \leq n$) дійсних додатних і $2(n - n_1)$ комплексно-спряжених коренів. Тоді

$$V_l = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n^{(l)} K_n(\rho x_l) e^{in\vartheta}, \quad l \in [1, 2n_1 + 1];$$

$$V_{2l} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^{(l)} H_n^{(1)}(\rho x_{2l}) e^{in\vartheta}; \quad V_{2l+1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n^{(l)} H_n^{(2)}(\rho x_{2l+1}) e^{in\vartheta} \quad (l \in [n_1 + 1, n]). \quad (2.9)$$

Тут $K_n(\rho x_l)$ – модифіковані функції Бесселя; $H_n^{(1)}(\rho x_{2l})$ і $H_n^{(2)}(\rho x_{2l+1})$ – циліндричні функції Ханкеля першого і другого роду; $\rho = r/R$; $x_l = Rh^{-1}\alpha_l$; $x_{2l} = Rh^{-1}\alpha_{2l}$; $x_{2l+1} = \bar{x}_{2l}$; $\alpha_l = \sqrt{k_l}$; $\alpha_{2l} = \sqrt{-k_{2l}}$; $B_n^{(l)}$, $C_n^{(l)}$, $D_n^{(l)}$ – довільні постійні, причому $B_{-n}^{(l)} = \bar{B}_n^{(l)}$, $C_{-n}^{(l)} = (-1)^n \bar{D}_n^{(l)}$, $D_{-n}^{(l)} = (-1)^n \bar{C}_n^{(l)}$.

Корені характеристичного рівняння вихрової частини розв'язку ω_s – дійсні та додатні, тому

$$\omega_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{B}_n^{(s)} K_n(\rho y_s) e^{in\vartheta}, \quad (2.10)$$

де $y_s = Rh^{-1}n_s$, $n_s = \sqrt{\lambda_s}$.

Підставляючи значення функцій (2.8) – (2.10) в (1.8) і враховуючи граничні умови (2.5), (2.7), отримаємо алгебраїчну систему рівнянь відносно невідомих констант. Визначивши введені функції і, згідно формул (1.7), (1.8), відповідні моменти, знаходимо, посилаючись на (1.1), компоненти тензора напружень і вектора переміщень. Так, зокрема, дотичні напруження $\sigma_{\vartheta 3}$ і нормальні переміщення u_3 визначаються формулами

$$\frac{1}{q} \sigma_{\vartheta 3} = \sum_{k=0}^n \sigma_{\vartheta 3}^{(2k+1)}(\rho, \vartheta) P_{2k+1}(\zeta); \quad \frac{c_{66}}{qh} u_3 = \sum_{k=0}^n u_3^{(2k+1)}(\rho, \vartheta) P_{2k+1}(\zeta);$$

$$\sigma_{\vartheta 3}^{(2k+1)}(\rho, \vartheta) = \sum_{l=0}^m T_{\vartheta 3}^{(2k+1, 2l)}(\rho) \sin 2l\vartheta; \quad u_3^{(2k+1)}(\rho, \vartheta) = \sum_{l=0}^m u_3^{(2k+1, 2l)}(\rho) \cos 2l\vartheta.$$

Тут $T_{\vartheta 3}^{(2k+1, 2l)}(\rho)$ і $u_3^{(2k+1, 2l)}(\rho)$ – складові, що містять циліндричні функції

$$T_{\vartheta 3}^{(2k+1, 2l)}(\rho) =$$

$$= -\left\{ \eta_2^{(l)} \alpha_1 p_1^{(2k+1)} [K_{2l+1}(\rho x_1) - K_{2l-1}(\rho x_1)] + \eta_3^{(l)} \alpha_2 p_2^{(2k+1)} [H_{2l+1}^{(1)}(\rho x_2) + H_{2l-1}^{(1)}(\rho x_2)] + \right.$$

$$\left. + \eta_4^{(l)} \alpha_3 p_3^{(2k+1)} [H_{2l+1}^{(2)}(\rho x_3) + H_{2l-1}^{(2)}(\rho x_3)] + \eta_5^{(l)} n_1 q_1^{(2k+1)} [K_{2l+1}(\rho y_1) - K_{2l-1}(\rho y_1)] \right\};$$

$$u_3^{(2k+1, 2l)}(\rho) =$$

$$= \frac{\alpha_1^*}{2\rho^{2l}} \delta_0^k \eta_1^{(l)} - 2 \left[\eta_2^{(l)} c_1^{(2k+1)} K_{2l}(\rho x_1) + \eta_3^{(l)} c_2^{(2k+1)} H_{2l}^{(1)}(\rho x_2) + \eta_4^{(l)} c_3^{(2k+1)} H_{2l}^{(2)}(\rho x_3) \right],$$

δ_0^k – символ Кронекера; $\eta_j^{(l)}$ – постійні, які знаходять із розв'язків алгебраїчних рівнянь при виконанні граничних умов.

§3. Результати числових досліджень.

Проведено дослідження напруженого стану трансверсально-ізотропної пластини з круговим отвором, на поверхні якого задано зосереджену розщеплювальну силу, тобто, врівноважену пару дотичних сил, що розтягує або стискає по товщині пластину і спроможна, таким чином, розщепити її по серединній площині, або ж стиснути. Числові розрахунки проведено для пластини з коефіцієнтами Пуассона $\nu = 0,3$; $\nu' = 0,25$ і відношенням модулів пружності $E/E' = 0,75$; $E/G' = 2,5$. На рис. 2 наведено криві зміни колових $\sigma_{\vartheta\vartheta}/q$ і нормальних поперечних σ_{33}/q напружень на контурі отвору $\rho = 1$ в точці $\vartheta = 0$ на серединній $\zeta = 0$ (суцільна крива) і граничній $\zeta = 1$ (пунктирна крива) площинах в залежності від зміни відносної товщини пластини R/h .

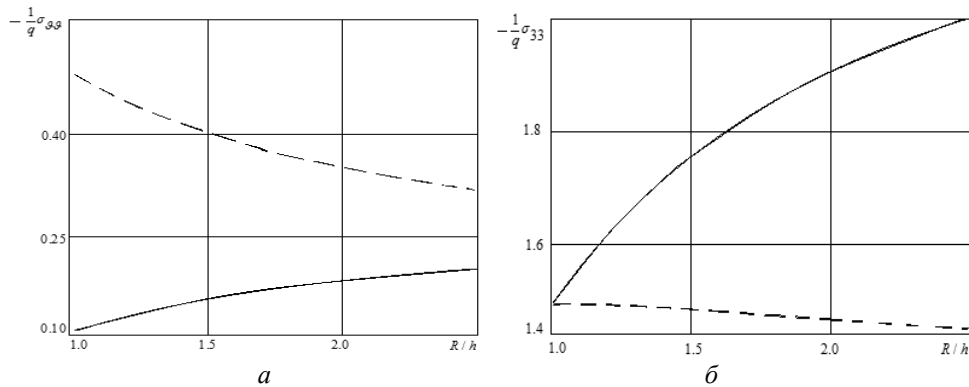


Рис. 2

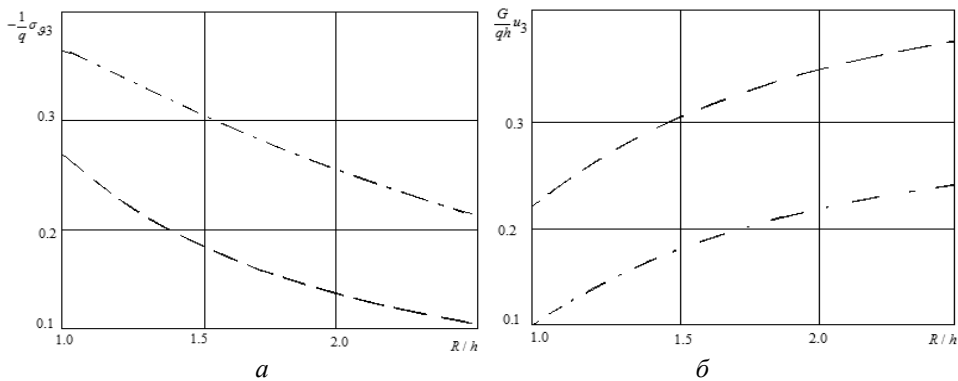


Рис. 3

Як видно, із збільшенням параметра R/h напруження на серединній площині зростають, а на граничній – знижуються. Криві на рис. 3 характеризують залежність дотичних напружень $\sigma_{\vartheta 3}/q$ в точці $\rho = 1, \vartheta = \pi/12$ і нормального переміщення Gu_3/qh в точці $\rho = 1, \vartheta = 0$ від параметра R/h . Тут штрих-пунктирні лінії відносяться до площини $\zeta = 0,5$.

На рис. 4 і 5 показано криві зміни наведених вище напружень і переміщення у відповідних точках в залежності від відношення модулів пружності E/E' в площині ізотропії і нормальній до неї площині, відповідно.

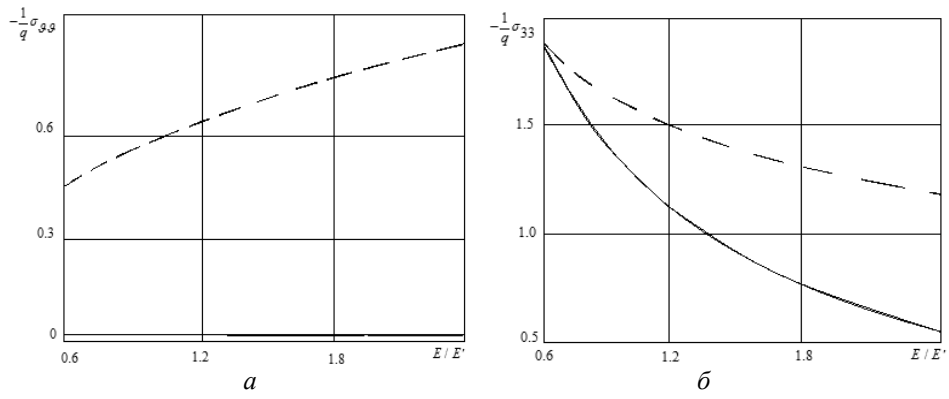


Рис. 4

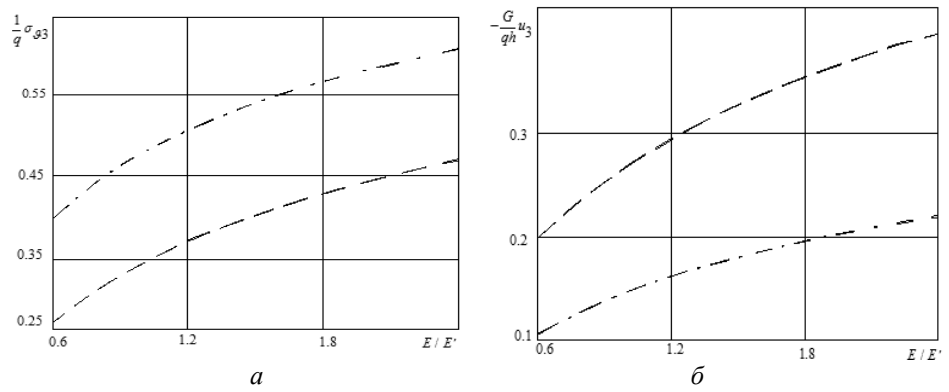
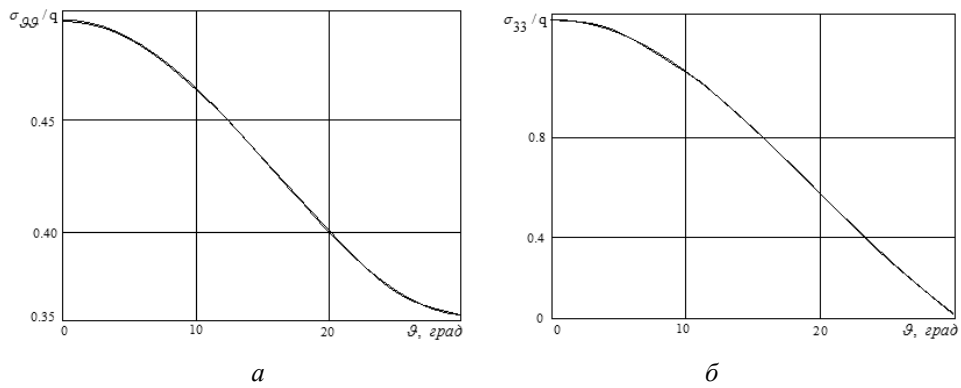


Рис. 5



a

b

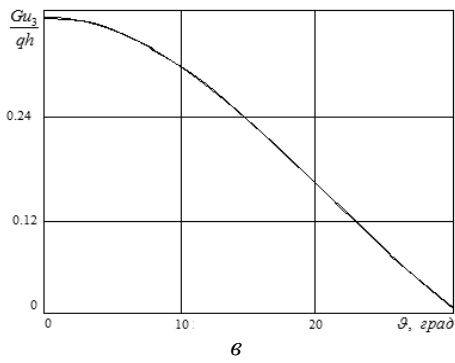


Рис. 6

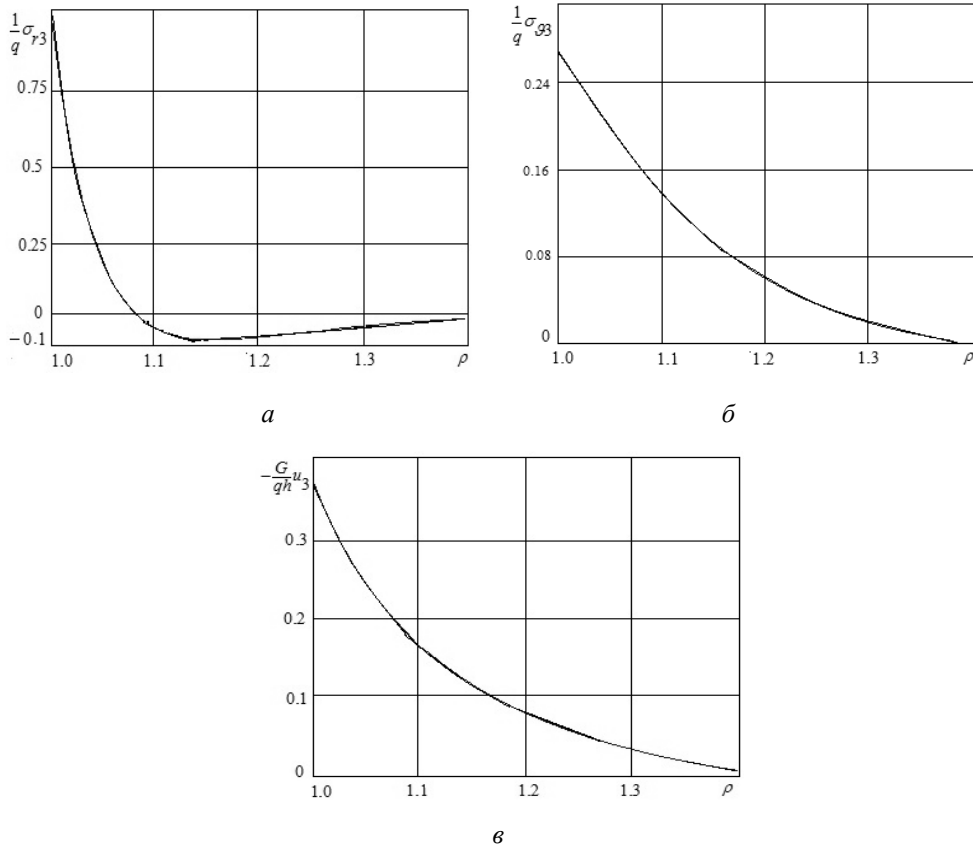


Рис. 9

Криві на рис. 8 і 9 характеризують згасання напружень і переміщень при віддаленні від контуру отвору. Виходячи із їх максимальних значень, колові напруження $\sigma_{\theta\theta}/q$, знайдені на лінії $\vartheta=0, \zeta=1$, а нормальні поперечні σ_{33}/q – на лінії $\vartheta=0, \zeta=0$ (рис. 8). Таким же чином побудовано криві на рис. 9. Дотичні напруження σ_{r3}/q і переміщення Gu_3/qh змінюються на лінії $\vartheta=0, \zeta=1$, а напруження $\sigma_{\theta\theta}/q$ – на лінії $\vartheta=\pi/12, \zeta=0,5$.

Висновки.

Дано постановку і знайдено розв’язок задачі про напружений стан трансверсально-ізотропної пластини з круговим отвором, на поверхні якого задано значення зосередженої розщеплювальної сили. Під розщеплювальною силою розуміємо врівноважену пару сил, що спроможна розщепити (стиснути) пластину по товщині. Проведено аналіз напруженого стану в околі отвору в залежності від відносної товщини пластини та пружних постійних матеріалу.

РЕЗЮМЕ. Методом розкладу шуканих функцій в ряди Фур’є за поліномами Лежандра отримано розв’язок задачі про напружений стан необмеженої трансверсально-ізотропної пластини, ослабленої круговим отвором, на поверхні якого задана розщеплювальна сила. Проведено аналіз розподілу напружень в околі отвору.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: трансверсально-ізотропна пластинка, напружений стан, круговий отвір, зосереджена розщеплювальна сила.

1. Векуа И.Н. Некоторые методы построения различных вариантов теории оболочек. – Москва: Наука, 1982. – 286 с.
2. Фильштинский Л.А., Кушнир Д.В. Упругое равновесие многосвязных цилиндрических тел // Теорет. и прикл. механика. – 2009. – Вып. 45. – С. 90 – 99.
3. Хома И.Ю. Обобщенная теория анизотропных оболочек. – Киев: Наук. думка, 1986. – 170 с.
4. Abbas I.A. Fractional Order GN Model on Thermoelastic Interaction in an Infinite Fibre-Reinforced Anisotropic Plate Containing a Circular Hole // J. Comput. Theor. Nanosci. – 2014. – **11**, N 2. – P. 380 – 384.
5. Bert C.W., Zeng H. Generalized Bending of a Large Shear Deformable Isotropic Plate Containing a Circular Hole or Rigid Inclusion // Trans. of the ASME, J. Appl. Mech. – 2001. – **68**, N 2. – P. 230 – 233.
6. Cicala P. Sulla Teoria Elastica della Plate Sottile // Giorn. Genio Civile. – 1959. – **97**, N 4. – P. 238 – 256.
7. Ding H., Chen W., Zhong L. Elasticity of Transversely Isotropic Materials. – Dordrecht: Springer, 2006. – 454 p.
8. Fellers J.I., Soler A.I. Approximate Solution of the Finite Cylinder Problem Using Legendre Polynomials // AIAA J. – 1970. – **8**, N 11. – P. 2037 – 2048.
9. Folias E.S., Wang I.I. On the Three-dimensional Stress Fields around a Circular Hole in a Plate of Arbitrary Thickness // Comput. Mech. – 1990. – **6**, N 5. – P. 379 – 391.
10. Khoma I.Yu., Proshchenko T.M. The Stress State of a Transversely Isotropic Plate with a Curvilinear Hole for a Given Splitting Force on the Boundary Surface // Int. Appl. Mech. – 2019. – **55**, N 4. – P. 434 – 449.
11. Khoma I.Yu., Proshchenko T.M. Stress State of a Transversely Isotropic Plate with a Curved Hole under Simple Shear at Infinity // Int. Appl. Mech. – 2021. – **57**, N 1. – P. 75 – 85.
12. Khoma I.Yu., Strygina O.A. On the Turning of a Transversely Isotropic Plate with a Curvilinear Hole // Int. Appl. Mech. – 2020. – **56**, N 4. – P. 445 – 461.
13. Kotousov A., Wang C.H. Three-Dimensional Stresses Constraint in an Elastic Plate with a Notch // Int. J. Solids and Struct. – 2002. – **39**, N 16. – P. 4311 – 4326.
14. Markenscoff X. Stress Amplification in the Neighborhood of an Eccentric Large Hole in a Strip in Tension // ZAMP. – 2000. – **51**, N 4. – P. 550 – 554.
15. Yang Zh. The Stress and Strain Concentrations of Elliptical Hole in an Elastic Plate of Finite Thickness Subjected to Tensile Stress // Int. J. Fract. – 2009. – **155**, N 1. – P. 43 – 44.
16. Youngdahl C.K., Sternberg E. Three-Dimensional Stress Concentrations Around a Cylindrical Hole in a Semi-Infinite Body // J. Appl. Mech., Ser. E. – 1996. – **33**, N 4. – P. 855 – 865.

Надійшла 30.11.2021

Затверджена до друку 13.12.2022