

М. П. Семенюк¹, В. М. Трач², А. В. Подворний²

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ТОВСТОСТІННОЇ АНІЗОТРОПНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ

¹*Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: mikolasem@ukr.net;*

²*Національний університет водного господарства та природокористування,
вул. Соборна, 11, 33028, Рівне, Україна; e-mail: trach-vm@ukr.net,
andrei_podvorni@ukr.net*

Abstract. Based on the modified Hu-Washizu variational principle, a system of inhomogeneous partial differential equations of the linear theory of elasticity of a three-dimensional anisotropic body in a cylindrical coordinate system is obtained. To reduce it to a one-dimensional one, the Bubnov-Galerkin method is used. The discrete orthogonalization method is used to solve the one-dimensional problem in the direction of the normal to the shell middle surface. The stress state of an anisotropic thick-wall composite layered cylindrical shell under the action of lateral pressure is studied. An analysis of the dependence of the stress state components of the shell on the angle of rotation of the main directions of elasticity of the unidirectional fibrous material and the number of cross-stacked layers is carried out.

Keywords: anisotropic layered shell, stress-strain state, Bubnov-Galerkin method, variational principle, discrete orthogonalization method.

Вступ.

Варіаційні принципи ефективно використовуються для розв'язання задач механіки деформівного твердого тіла [1 – 3, 5, 8, 12, 14, 15, 22, 23]. З їх допомогою будуються моделі розрахунку складних конструкцій при різних фізичних впливах. У той же час, метод дискретної ортогоналізації розв'язання проблем теорії пружності з роздільними змінними, основним етапом якого є розв'язок канонічної системи звичайних диференціальних рівнянь [17 – 21, 24], лише в [3] пов'язується з варіаційним принципом. Принцип Рейсснера являє собою гамільтонову форму принципу Лагранжа [14]. Сукупність необхідних умов стаціонарності в цьому випадку формулюється у вигляді системи рівнянь щодо частинних похідних першого порядку від компонентів вектора переміщень і тензора напружень. Привести цю систему до стандартного нормального вигляду можна тільки виключивши залежності функцій від двох координат. Складнощі при отриманні канонічної системи, виходячи з принципу Рейсснера, будуть такими ж, як і без використання цього принципу, але його використання є більш обґрунтованим [3, 12, 22]. Методи перетворення функціоналів [1, 4, 8, 14] дозволяють отримати умови стаціонарності функціонала у вигляді системи диференціальних рівнянь щодо вибраних змінних. Після зменшення розмірності задачі отримана система відразу набуває стандартного нормального вигляду. Зменшення її розмірності може бути виконано шляхом представлення розв'язку тривимірної задачі у вигляді розкладу за двома змінними або ж шляхом попереднього використання спрощуючих гіпотез різних прикладних теорій. Нижче викладено методику модифікації функціоналу узагальненого принципу Ху-Васідзу до потрібного виду, ґрунтуючись на співвідношеннях

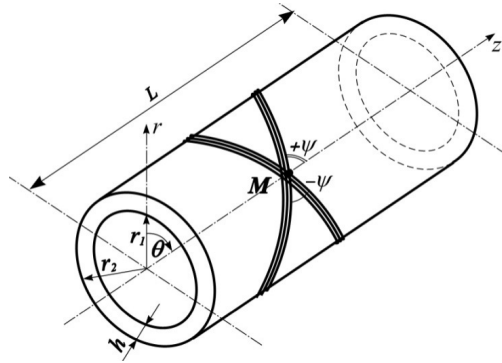


Рис. 1

лінійної теорії пружності анізотропного тіла. Ця методика застосована до пустотілого композитного товстостінного шаруватого циліндра (рис. 1). Вважаємо, що його матеріал має одну площину пружної симетрії.

§1. Основні рівняння.

1.1. Варіаційний принцип Ху-Васідзу. У відповідності до варіаційного принципу Ху-Васідзу [6] співвідношення пружності (рівняння стану), геометричні співвідношення та відповідні граничні умови можуть бути отримані з умови стаціонарності функціоналу Π_1 , що визначається з інтегралу

$$\Pi_1 = \int_V \left\{ W(e_{ij}) + \Phi(u_i) - \sigma_{ij} \left[e_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i;j} + u_{j;i}) \right] \right\} dV + \int_{S_1} \Psi(u_i) dS_1 - \int_{S_2} p_i (u_i - \bar{u}_i) dS_2. \quad (1.1)$$

Тут варіюються без додаткових умов переміщення u_i , деформації e_{ij} , напруження σ_{ij} , напруження p_i на поверхні S_2 , що викликані переміщеннями \bar{u}_i . Також в цьому функціоналі $W(e_{ij})$ – потенціальна енергія деформування; $\Phi(u_i)$, $\Psi(u_i)$ – потенціали об'ємних і поверхневих навантажень; u_i – компоненти вектора переміщень, крапка з комою перед параметрами i, j означає коваріантну похідну за координатою з відповідним індексом $i, j = 1, 2, 3$. Потенціальна енергія деформування у векторно-матричному представленні записується так:

$$W(e_{ij}) = \frac{1}{2} \varepsilon^T B \varepsilon, \quad (1.2)$$

де $\varepsilon^T = (\varepsilon_{zz}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{rr}, 2\varepsilon_{r\theta}, 2\varepsilon_{rz}, 2\varepsilon_{z\theta})$; B – матриця коефіцієнтів пружності.

Якщо ввести вектор $\sigma^T = (\sigma_{zz}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{rr}, \tau_{r\theta}, \tau_{rz}, \tau_{z\theta})$, то з умови стаціонарності $\delta\Pi_1$ отримуємо такі рівняння:

$$\sigma = B \varepsilon; \quad (1.3)$$

$$\varepsilon = \varepsilon(u); \quad (1.4)$$

$$\sigma_{ij;j} + f_i = 0, \quad (1.5)$$

а також граничні умови $\sigma_{ij}n_j = \bar{F}_i$ на поверхні S_1 та переміщення $u_i = \bar{u}_i$ й напруження $p_i = \sigma_{ij}n_j$ на S_2 .

У співвідношеннях для деформації (1.4) представлено взаємозв'язок між деформаціями та переміщеннями. Обернені до співвідношень пружності (1.3) залежності деформацій від напружень представимо у вигляді

$$\varepsilon = A\sigma, \quad (1.6)$$

де $A = B^{-1}$.

Елементи матриці A позначимо через a_{ij} , а матриці B – b_{ij} ($i, j = \overline{1, 6}$). Матриці A та B – симетричні, тому що $a_{ij} = a_{ji}$, $b_{ij} = b_{ji}$. В подальшому також встановимо взаємозв'язок між матрицями A та B .

1.2. Модифікований змішаний варіаційний принцип. Згідно [3, 13, 16] для виведення модифікованого щодо Ху-Васідзу змішаного варіаційного принципу розділимо вектори σ та ε на дві частини так, щоб

$$\begin{aligned} \sigma_1^T &= (\sigma_{rr}, \tau_{r\theta}, \tau_{rz}); & \sigma_2^T &= (\sigma_{zz}, \sigma_{\theta\theta}, \tau_{z\theta}); \\ \varepsilon_1^T &= (\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{r\theta}, \varepsilon_{rz}); & \varepsilon_2^T &= (\varepsilon_{zz}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{z\theta}). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Для скорочення записів співвідношення теорії пружності (1.3) будемо записувати у матричному вигляді

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix}, \quad (1.8)$$

де для блоків A_{ij} , згідно з прийнятим поділом (1.7) з матриці A в (1.3) для анізотропного матеріалу з однією площиною пружної симетрії, отримаємо наступні вирази:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{bmatrix} a_{33} & 0 & 0 \\ 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & a_{45} & a_{55} \end{bmatrix}; & A_{12} &= \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{36} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ A_{21} &= \begin{bmatrix} a_{13} & 0 & 0 \\ a_{23} & 0 & 0 \\ a_{36} & 0 & 0 \end{bmatrix}; & A_{22} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

З матричної залежності $\varepsilon = A\sigma$ при використанні (1.8) отримаємо

$$\varepsilon_1 = A_{11}\sigma_1 + A_{12}\sigma_2; \quad (1.10)$$

$$\varepsilon_2 = A_{21}\sigma_1 + A_{22}\sigma_2, \quad (1.11)$$

після чого з (1.11) маємо вираз для

$$\sigma_2 = A_{22}^{-1}\varepsilon_2 - A_{22}^{-1}A_{21}\sigma_1. \quad (1.12)$$

Останній підставимо в (1.10) і тоді

$$\varepsilon_1 = A_{11}\sigma_1 + A_{12}A_{22}^{-1}\varepsilon_2 - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\sigma_1 = A_{12}A_{22}^{-1}\varepsilon_2 + (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})\sigma_1; \quad (1.13)$$

$$\sigma_1 = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} \varepsilon_1 - (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} A_{12}A_{22}^{-1}\varepsilon_2. \quad (1.14)$$

З матричної залежності

$$\sigma = B\varepsilon \quad (1.15)$$

запишемо

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}. \quad (1.16)$$

Для анізотропного матеріалу, що розглядається, маємо

$$\sigma_1 = B_{11}\varepsilon_1 + B_{12}\varepsilon_2; \quad (1.17)$$

$$\sigma_2 = B_{21}\varepsilon_1 + B_{22}\varepsilon_2. \quad (1.18)$$

Співставляючи (1.15) та (1.14), встановимо зв'язок між матрицями

$$B_{11} = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}; \quad (1.19)$$

$$B_{12} = -(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}. \quad (1.20)$$

У вираз для σ_2 (1.12) підставимо (1.14) і тоді

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= A_{22}^{-1}\varepsilon_2 - A_{22}^{-1}A_{21}(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}\varepsilon_1 + A_{22}^{-1}A_{21}(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})A_{12}A_{22}^{-1}\varepsilon_2 = \\ &= -A_{22}^{-1}A_{21}(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}\varepsilon_1 + [A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1}A_{21}(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})A_{12}A_{22}^{-1}]\varepsilon_2. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Згідно з (1.21) і (1.18) маємо такий зв'язок між матрицями:

$$B_{21} = -A_{22}^{-1}A_{21}(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}; \quad (1.22)$$

$$B_{22} = A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1}A_{21}(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}. \quad (1.23)$$

Таким чином, виразами (1.19) і (1.20) та (1.22) і (1.23) встановлено зв'язок між матрицями у двох формах запису (1.3) і (1.6) узагальненого закону Гука для прийнятого виду матеріалу.

На відміну від принципу Ху-Васідзу вважаємо, що незалежними у функціоналі (1.1) будуть переміщення u_r , u_θ , u_z , деформації ε_{zz} , $\varepsilon_{z\theta}$, $\varepsilon_{\theta\theta}$ і напруження σ_{rr} , $\tau_{r\theta}$, τ_{rz} . З рівнянь

$$\sigma_1 = B_{11}\varepsilon_1 + B_{12}\varepsilon_2; \quad (1.24)$$

$$\varepsilon_2 = A_{21}\sigma_1 + A_{22}\sigma_2 \quad (1.25)$$

знайдемо

$$\varepsilon_1 = B_{11}^{-1}\sigma_1 - B_{11}^{-1}B_{12}\varepsilon_2; \quad \sigma_2 = A_{22}^{-1}\varepsilon_2 - A_{22}^{-1}A_{21}\sigma_1. \quad (1.26)$$

Вираз для потенціалу $W(e_{ij})$ в нових позначеннях приведемо до вигляду

$$W(\varepsilon) = \frac{1}{2}(\varepsilon_1^T B_{11}\varepsilon_1 + \varepsilon_1^T B_{12}\varepsilon_2 + \varepsilon_2^T B_{12}^T\varepsilon_1 + \varepsilon_2^T B_{22}\varepsilon_2). \quad (1.27)$$

З виразу (1.27), враховуючи (1.26), виключимо ε_1 . Тоді маємо

$$W(\sigma_1, \varepsilon_2) = \frac{1}{2} \left[\left(B_{11}^{-1} \sigma_1 - B_{11}^{-1} B_{12} \varepsilon_2 \right)^T B_{11} \left(B_{11}^{-1} \sigma_1 - B_{11}^{-1} B_{12} \varepsilon_2 \right) + \left(B_{11}^{-1} \sigma_1 - B_{11}^{-1} B_{12} \varepsilon_2 \right)^T B_{12} \varepsilon_2 + \varepsilon_2^T B_{12}^T \left(B_{11}^{-1} \sigma_1 - B_{11}^{-1} B_{12} \varepsilon_2 \right) + \varepsilon_2^T B_{22} \varepsilon_2 \right].$$

Після нескладних перетворень остаточно отримаємо

$$W(\sigma_1, \varepsilon_2) = \frac{1}{2} \sigma_1^T B_{11}^{-1} \sigma_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_2^T (B_{22} - B_{12}^T B_{11}^{-1} B_{12}) \varepsilon_2. \quad (1.28)$$

Аналогічним чином перетворимо вираз $\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$. Після співставлення матричних виразів $\varepsilon_1 = A_{11} \sigma_1 + A_{12} \sigma_2$ та $\sigma_1 = B_{11} \varepsilon_1 + B_{12} \varepsilon_2$ неважко встановити, що $B_{12} B_{22}^{-1} = -A_{11}^{-1} A_{12}$.

Тоді

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \sigma_1^T B_{11}^{-1} \sigma_1 + \varepsilon_2^T (B_{22} - B_{12}^T B_{11}^{-1} B_{12}) \varepsilon_2. \quad (1.29)$$

Виключивши з виразу $\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(u)$ складову вектора напружень σ_2 , отримаємо

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(u) = \left(\varepsilon_1^T(u) + \varepsilon_2^T(u) B_{12}^T B_{11}^{-1} \right) \sigma_1 + \varepsilon_2^T(u) (B_{22} - B_{12}^T B_{11}^{-1} B_{12}) \varepsilon_2. \quad (1.30)$$

Збираючи вирази (1.28) – (1.30), запишемо потенціал

$$W_1 = W(\sigma_1, \varepsilon_2) - \sigma_{ij} (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}(u)) = -\frac{1}{2} \sigma_1^T B_{11}^{-1} \sigma_1 - \frac{1}{2} \varepsilon_2^T (B_{22} - B_{12}^T B_{11}^{-1} B_{12}) \varepsilon_2 + \left(\varepsilon_1^T(u) + \varepsilon_2^T(u) B_{12}^T B_{11}^{-1} \right) \sigma_1 + \varepsilon_2^T(u) (B_{22} - B_{12}^T B_{11}^{-1} B_{12}) \varepsilon_2. \quad (1.31)$$

Також, у відповідності до (1.1), маємо

$$\int_{S_1} \psi(u_i) dS_1 - \int_{S_2} p_i (u_i - \bar{u}_i) dS_2 = \int_{S_1} \left[(q_r^- u_r + q_\theta^- u_\theta + q_z^- u_z, h_1) + (q_r^+ u_r + q_\theta^+ u_\theta + q_z^+ u_z, h_{n+1}) \right] dS_1 - \int_{S_2} p_i (u_i - \bar{u}_i) dS_2. \quad (1.32)$$

Тут u_r, u_θ, u_z – переміщення, що співпадають з осями прийнятої циліндричної системи координат (рис. 1); h_1 та h_{n+1} – товщини першого та $n+1$ шарів оболонки.

Виконаємо також варіювання потенціалу поверхневих навантажень (1.32), після чого отримаємо варіацію роботи зовнішніх сил

$$\delta \int_{S_1} \psi(u_i) dS_1 = \int_{S_1} (q_r \delta u_r + q_\theta \delta u_\theta + q_z \delta u_z) dS_1 + \int_{S_2} \sum_{i=1}^3 p_i (\delta u_i - \delta \bar{u}_i) dS_2, \quad (1.33)$$

де $q_r = q_r^- + q_r^+$; $q_\theta = q_\theta^- + q_\theta^+$; $q_z = q_z^- + q_z^+$, а $p_i = 0$ для $i = \overline{1, 3}$.

Запишемо кінцевий вигляд функціоналу Π_1 , що представлений в (1.1)

$$\Pi_1 = \int_V [W(\sigma_1, \varepsilon) - \Phi(u_i)] dV - \int_{S_1} \psi(u_i) dS_1 - \int_{S_2} p_i (u_i - \bar{u}_i) dS_2. \quad (1.34)$$

Вираз для Π_1 являє собою частину функціоналу (1.1). Тоді варіація функціоналу (1.34), що обумовлена зміною компонентів вектора переміщень u і напружень σ_1 , набуває вигляду

$$\begin{aligned} \delta\Pi_1 = & \int_V \left\{ \left[-\frac{1}{2} \sigma_1^T B_{11}^{-1} \sigma_1 + (\varepsilon_1^T(u) + \varepsilon_2(u) B_{11}^T B_{12}^{-1}) \sigma_1 \right] \delta\sigma_1 - \right. \\ & \left. - \left[\frac{1}{2} \varepsilon_2^T (B_{22} - B_{12}^T B_{11}^{-1} B_{12}) \varepsilon_2 \right] \delta\varepsilon_2 + \left[\varepsilon_2^T(u) (B_{22} - B_{12}^T B_{11}^{-1} B_{12}) \varepsilon_2 \right] \delta u - T(u) \delta u \right\} dV + \\ & + \int_{S_1} (\psi(u) \delta u) dS_1 - \int_{S_2} p_i (u - \bar{u}) \delta p dS_2. \end{aligned} \quad (1.35)$$

В подальшому використаємо лінійні геометричні співвідношення, що приведені в [11]

$$e_{rr}^i = \frac{\partial u_r^i}{\partial r}; \quad e_{rz}^i = \frac{\partial u_r^i}{\partial z} + \frac{\partial u_z^i}{\partial r}; \quad e_{r\theta}^i = \frac{\partial u_\theta^i}{\partial r} - \frac{1}{r} u_\theta^i + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial \theta}. \quad (1.36)$$

Тут e_{rr}^i – відносні лінійні деформації за напрямком координатної осі r , а e_{rz}^i , $e_{r\theta}^i$ – дотичні до відповідних координатних поверхонь відносні зсувні деформації.

З умови стаціонарності функціоналу (1.35), при використанні виразів для напружень $\sigma_1^T = (\sigma_{rr}, \tau_{r\theta}, \tau_{rz})$, переміщень $u^T = (u_r, u_\theta, u_z)$, геометричних співвідношень (1.36), а також варіації роботи зовнішніх сил (1.33) і прирівнювання виразів при незалежних варіаціях напружень $\delta\sigma_{rr}$, $\delta\tau_{r\theta}$, $\delta\tau_{rz}$ і переміщень δu_r , δu_θ , δu_z в інтегралі за об'ємом V , отримуємо такі рівняння:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial r} = & -\frac{c_{23}^i + 1}{r} \sigma_{rr}^i - \frac{\partial \tau_{rz}^i}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}^i}{\partial \theta} + \frac{c_{22}^i}{r^2} u_r^i + \frac{c_{12}^i}{r} \frac{\partial u_z^i}{\partial z} + \frac{c_{26}^i}{r^2} \frac{\partial u_z^i}{\partial \theta} + \\ & + \frac{c_{26}^i}{r} \frac{\partial u_\theta^i}{\partial z} + \frac{c_{22}^i}{r^2} \frac{\partial u_\theta^i}{\partial \theta} + q_r; \\ \frac{\partial \tau_{rz}^i}{\partial r} = & c_{13}^i \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial z} - \frac{1}{r} \tau_{rz}^i - \frac{c_{12}^i}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial z} - c_{11}^i \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z^2} - \frac{c_{66}^i}{r^2} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial \theta^2} - \frac{c_{12}^i + c_{66}^i}{r} \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z \partial \theta} + \\ & + \frac{c_{36}^i}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial \theta} - \frac{c_{26}^i}{r^2} \frac{\partial u_r^i}{\partial \theta} - \frac{2c_{16}^i}{r} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z \partial \theta} - c_{16}^i \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z^2} - \frac{c_{26}^i}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial \theta^2} + q_z; \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}^i}{\partial r} = & \frac{c_{23}^i}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \tau_{r\theta}^i - \frac{c_{22}^i}{r^2} \frac{\partial u_r^i}{\partial \theta} - \frac{c_{12}^i + c_{66}^i}{r} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z \partial \theta} - c_{66}^i \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z^2} - \frac{c_{22}^i}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial \theta^2} + \\ & + c_{36}^i \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial z} - \frac{c_{26}^i}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial z} - c_{16}^i \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z^2} - \frac{c_{26}^i}{r^2} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial \theta^2} - \frac{2c_{26}^i}{r} \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z \partial \theta} + q_\theta; \\ \frac{\partial u_r^i}{\partial r} = & c_{33}^i \sigma_{rr}^i + \frac{c_{23}^i}{r} u_r^i + c_{13}^i \frac{\partial u_z^i}{\partial z} + \frac{c_{36}^i}{r} \frac{\partial u_z^i}{\partial \theta} + c_{36}^i \frac{\partial u_\theta^i}{\partial z} + \frac{c_{23}^i}{r} \frac{\partial u_\theta^i}{\partial \theta}; \\ \frac{\partial u_z^i}{\partial r} = & a_{55}^i \tau_{rz}^i + a_{45}^i \tau_{r\theta}^i - \frac{\partial u_r^i}{\partial z}; \quad \frac{\partial u_\theta^i}{\partial r} = a_{45}^i \tau_{rz}^i + a_{44}^i \tau_{r\theta}^i - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_\theta^i. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Тут r – радіус циліндра, який не залежить від координат z та θ ; $\sigma_{rr}^i, \tau_{rz}^i, \tau_{r\theta}^i$ – компоненти тензора напружень (1.7); u_z^i, u_θ^i, u_r^i – переміщення точок i -го шару оболонки за напрямками осей циліндричної системи координат z, θ, r ; q_r, q_z, q_θ – проекції вектора питомих об’ємних сил на напрямки дотичних до координатних ліній r, z, θ . Сталі c_{kl}^i ($k, l = 1, 2, 3, 6$) – це характеристики i -го шару, що визначаються за допомогою механічних констант a_{kl}^i [9, 13] матеріалу оболонки

$$\begin{aligned} c_{11}^i &= \frac{1}{|A_{22}^i|} (a_{22}^i a_{66}^i - a_{26}^{i2}); & c_{12}^i &= \frac{1}{|A_{22}^i|} (a_{16}^i a_{26}^i - a_{12}^i a_{66}^i); \\ c_{22}^i &= \frac{1}{|A_{22}^i|} (a_{11}^i a_{66}^i - a_{16}^{i2}); & c_{16}^i &= \frac{1}{|A_{22}^i|} (a_{12}^i a_{26}^i - a_{22}^i a_{16}^i); \\ c_{26}^i &= \frac{1}{|A_{22}^i|} (a_{12}^i a_{16}^i - a_{11}^i a_{26}^i); & c_{66}^i &= \frac{1}{|A_{22}^i|} (a_{11}^i a_{22}^i - a_{12}^{i2}); \\ |A_{22}^i| &= a_{66}^i (a_{11}^i a_{22}^i - a_{12}^{i2}) + a_{26}^i (a_{12}^i a_{16}^i - a_{11}^i a_{26}^i) + a_{16}^i (a_{12}^i a_{26}^i - a_{22}^i a_{16}^i); \\ c_{13}^i &= a_{13}^i c_{11}^i + a_{23}^i c_{12}^i + a_{36}^i c_{16}^i; & c_{23}^i &= a_{13}^i c_{12}^i + a_{23}^i c_{22}^i + a_{36}^i c_{26}^i; \\ c_{36}^i &= a_{13}^i c_{16}^i + a_{23}^i c_{26}^i + a_{36}^i c_{66}^i; & c_{33}^i &= a_{33}^i - (a_{13}^i c_{13}^i + a_{23}^i c_{23}^i + a_{36}^i c_{36}^i). \end{aligned}$$

Таким чином, за допомогою варіаційного рівняння (1.35) виведено систему з шести неоднорідних диференціальних рівнянь лінійної теорії пружності для тривимірної моделі оболонки (1.37).

Вона записана в частинних похідних відносно шести компонентів векторів $\sigma_1^T = (\sigma_{rr}, \tau_{r\theta}, \tau_{rz})$ і $u^T = (u_r, u_\theta, u_z)$ та може бути застосована для розрахунку напружено-деформованого стану анізотропної шаруватої товстостінної композитної циліндричної оболонки.

Розв’язок системи (1.37) повинен відповідати умовам на бічних поверхнях

$$\sigma_{rr}^0(r_1, z, \theta) = \pm q_r^0(z); \quad \tau_{rz}^0(r_1, z, \theta) = 0; \quad \tau_{r\theta}^0(r_1, z, \theta) = 0 \quad \text{при } r = r_1;$$

$$\sigma_{rr}^n(r_2, z, \theta) = \pm q_r^n(z); \quad \tau_{rz}^n(r_2, z, \theta) = 0; \quad \tau_{r\theta}^n(r_2, z, \theta) = 0 \quad \text{при } r = r_2; \quad (1.38)$$

умовам на торцях при $z = 0, z = L$ (рис. 1)

$$\sigma_{zz}^i = u_r^i = u_\theta^i = 0 \quad (1.39)$$

та умовам жорсткого контакту шарів для напружень та переміщень

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^i(r_i) &= \sigma_{rr}^{i+1}(r_i); & \tau_{rz}^i(r_i) &= \tau_{rz}^{i+1}(r_i); & \tau_{r\theta}^i(r_i) &= \tau_{r\theta}^{i+1}(r_i); \\ u_r^i(r_i) &= u_r^{i+1}(r_i); & u_z^i(r_i) &= u_z^{i+1}(r_i); & u_\theta^i(r_i) &= u_\theta^{i+1}(r_i), \end{aligned} \quad (1.40)$$

де i – номер шару оболонки. Умови (1.39) відповідають наявності на краях циліндра діафрагми, абсолютно жорсткої в своїй площині [7]. В (1.38) $q_r^0(z)$, $q_r^n(z)$ – розподілений на бокових поверхнях оболонки внутрішній та зовнішній тиск, відповідно.

§2. Методика розв'язку задачі. Приведення системи рівнянь теорії пружності тривимірної моделі оболонки до одновимірної.

Для розв'язку системи рівнянь тривимірної моделі оболонки (1.37) при відповідних умовах на поверхнях (1.38) і торцях (1.39) скористаємось процедурою методу Бубнова – Гальоркіна. Згідно з нею, розкладемо всі функції в тригонометричні ряди [7] по координатам вздовж твірної циліндра z і колової θ так, щоб вони задовольняли крайовим умовам (1.39)

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{1, pk}(r) \cos k\theta + y'_{1, mk}(r) \sin k\theta \right] \sin l_m z; \\ \tau_{rz}(r, z, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{2, pk}(r) \cos k\theta + y'_{2, mk}(r) \sin k\theta \right] \cos l_m z; \\ \tau_{r\theta}(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{3, pk}(r) \sin k\theta + y'_{3, mk}(r) \cos k\theta \right] \sin l_m z; \\ u_r(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{4, pk}(r) \cos k\theta + y'_{4, mk}(r) \sin k\theta \right] \sin l_m z; \\ u_z(r, z, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{5, pk}(r) \cos k\theta + y'_{5, mk}(r) \sin k\theta \right] \cos l_m z; \\ u_{\theta}(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{6, pk}(r) \sin k\theta + y'_{6, mk}(r) \cos k\theta \right] \sin l_m z.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Тут $y_{i, pk}$, $y'_{i, mk}$ ($i = \overline{1, 6}$) – компоненти складових напружено-деформованого стану оболонки в тригонометричних рядах Фур'є; p , m , k – хвильові числа в рядах; $l_m = m\pi / L$ – параметр, де L – довжина твірної циліндра (рис. 1).

Після математичних перетворень і розділення змінних в рівняннях (1.37) за допомогою співвідношень (2.1) отримаємо для кожного i -го шару систему диференціальних рівнянь дванадцятого порядку в формі Коші

$$\frac{d\bar{y}^i}{dr} = T^i(r) \bar{y}^i + f^i, \quad T^i(r) = t_{n,l}^i(r) \quad (n, l = 1, \dots, 12),\tag{2.2}$$

де $\bar{y}^i = \{y_{1,p}^i; y_{2,p}^i; y_{3,p}^i; y_{4,p}^i; y_{5,p}^i; y_{6,p}^i; y_{1,m}^{i/}; y_{2,m}^{i/}; y_{3,m}^{i/}; y_{4,m}^{i/}; y_{5,m}^{i/}; y_{6,m}^{i/}\}$ – розв'язуюча вектор-функція, а f^i – навантаження. Ненульові елементи матриці $T^i(r)$, коефіцієнти при невідомих системи (2.2) приведені в [21].

Розв'язок одновимірної задачі про напружено-деформований стан товстостінної циліндричної оболонки отримано за допомогою чисельного методу дискретної ортогоналізації [17 – 20].

Розв'язок системи (2.2), при врахуванні граничних умов на бічних поверхнях (1.38) стосовно визначення компонентів напружено-деформованого стану напружень

$\sigma_{rr}^i, \tau_{rz}^i, \tau_{r\theta}^i$ та переміщень u_r^i, u_z^i, u_θ^i для змінної z , отримуємо при використанні тригонометричних рядів (2.1) шляхом підстановки відповідної координати z за довжиною твірної циліндра $0 \leq z \leq L$.

Напруження $\sigma_2^T = (\sigma_{zz}, \sigma_{\theta\theta}, \tau_{z\theta})$ для прийнятого виду матеріалу виразимо через розв'язуючі функції узагальненого закону Гука (1.15):

$$\begin{aligned}\sigma_{zz}^i &= c_{11}^i e_{zz}^i + c_{12}^i e_{\theta\theta}^i + c_{16}^i e_{z\theta}^i - c_{13}^i \sigma_{rr}^i; \\ \sigma_{\theta\theta}^i &= c_{12}^i e_{zz}^i + c_{22}^i e_{\theta\theta}^i + c_{26}^i e_{z\theta}^i - c_{23}^i \sigma_{rr}^i; \\ \tau_{z\theta}^i &= c_{16}^i e_{zz}^i + c_{26}^i e_{\theta\theta}^i + c_{66}^i e_{z\theta}^i - c_{36}^i \sigma_{rr}^i.\end{aligned}\quad (2.3)$$

Для визначення цих компонент напруженого стану скористаємось також геометричними співвідношеннями, приведеними в [11], для $e_{zz}^i, e_{\theta\theta}^i, e_{z\theta}^i$:

$$e_{zz}^i = \frac{\partial u_z^i}{\partial z}; \quad e_{\theta\theta}^i = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^i}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_r^i; \quad e_{z\theta}^i = \frac{\partial u_\theta^i}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^i}{\partial \theta}.\quad (2.4)$$

Тут $e_{zz}^i, e_{\theta\theta}^i$ – відносні лінійні деформації за напрямками координатних осей z, θ , а $e_{z\theta}^i$ – дотичні до відповідної координатної поверхні відносні зсувні деформації.

§3. Числові результати та їх аналіз.

Як представлення можливостей запропонованого в роботі підходу була обрана шарувата циліндрична товстостінна анізотропна оболонка, що виготовлена з композитного волокнистого матеріалу (рис. 1). Оболонка перебуває під дією розподіленого зовнішнього тиску $q = -q_0 \sin(\pi z / L)$ при $q_0 = 1,0 \text{ МПа}$. Головні напрямки пружності вихідного ортотропного матеріалу можуть бути повернуті на кут $\pm\psi$ відносно напрямку твірної оболонки (рис. 1).

Матеріалом оболонки є боропластик з такими механічними характеристиками: $E_{11} = 280E_0; E_{22} = E_{33} = 31E_0; G_{12} = G_{23} = 10,5E_0; G_{13} = 21,2E_0; \nu_{21} = 0,25; \nu_{12} = 0,0277; E_0 = 10000 \text{ МПа}$. Геометричні розміри конструкції наступні: радіус внутрішньої бокової поверхні $r_1 = 0,54 \text{ м}$, зовнішньої – $r_2 = 0,66 \text{ м}$, а довжина $L = 1,2 \text{ м}$.

Дослідження напруженого стану анізотропної товстостінної циліндричної оболонки проводилось з урахуванням збільшення кількості її шарів (від одного до восьми) та змінного кута ψ їх укладання від 0° до 90° . Також представлені результати ортотропного варіанту розрахунку такого циліндра з урахуванням того, що в прийнятому узагальненому законі Гука механічні характеристики $c_{16}, c_{26}, c_{36}, a_{45}$ приймають нульові значення.

Результати проведених за запропонованою методикою досліджень представлено на відповідних рисунках. Так, рис. 2 – 7 характеризують такі напруження: σ_{rr} – (рис. 2); τ_{rz} – (рис. 3); $\tau_{r\theta}$ – (рис. 4); σ_{zz} – (рис. 5); $\sigma_{\theta\theta}$ – (рис. 6); $\tau_{z\theta}$ – (рис. 7). Водночас напруження $\sigma_{rr}, \sigma_{zz}, \sigma_{\theta\theta}$ обчислюються в точці на зовнішній поверхні для координати z твірної циліндра, що дорівнює $0,5L$, а напруження $\tau_{rz}, \tau_{z\theta}$ та $\tau_{r\theta}$ визначаються на серединній поверхні для координат $z = 0$ ($\tau_{rz}, \tau_{z\theta}$) та $z = 0,25L$ ($\tau_{r\theta}$). Позначення кривих на рисунках таке: 1 – одношарова оболонка; 2 – двошарова; 3 – тришарова; 4 – чотиришарова та 1' – ортотропний варіант розрахунку.

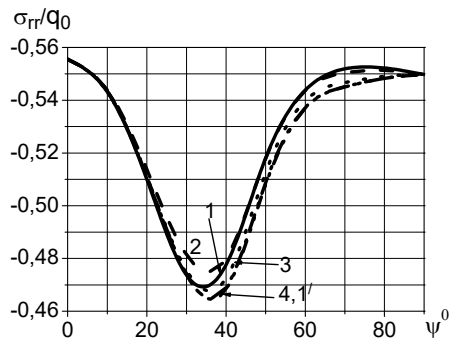


Рис. 2

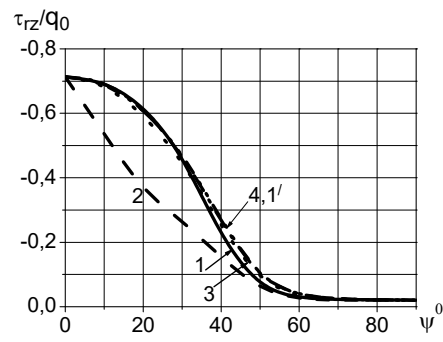


Рис. 3

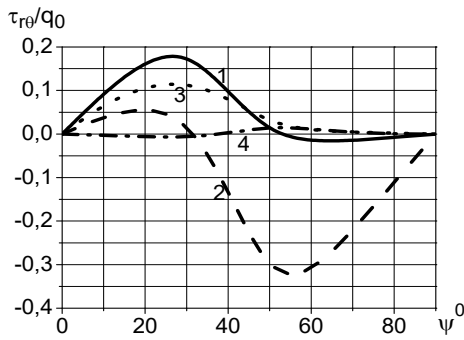


Рис. 4

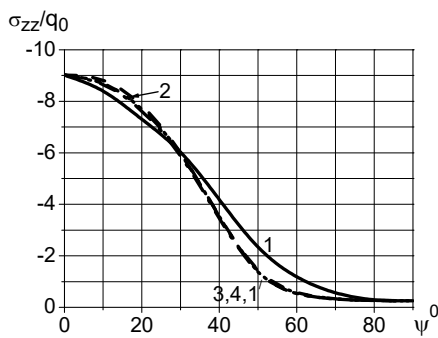


Рис. 5

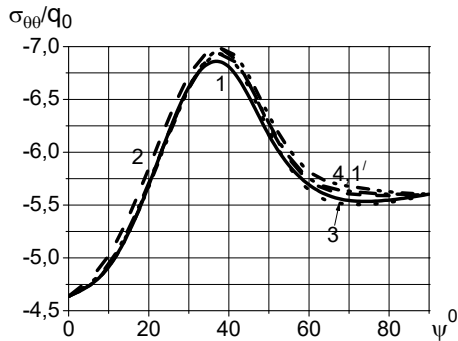


Рис. 6

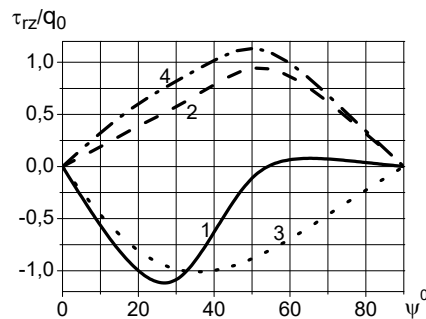


Рис. 7

Даних, що описують напружений стан анізотропної товстостінної циліндричної оболонки з кількістю шарів п'ять і більше, тут не наведено. Це пов'язано з тим, що вони відповідають ортотропному розв'язку. Тобто, умовно ортотропним вважатимемо товстостінний анізотропний циліндр з симетричним перехресним укладанням чотирьох шарів при відповідному (1.39) закріпленні торців і дії бокового симетричного навантаження. Подібні ортотропні розв'язки для відповідної кількості шарів циліндричної оболонки отримано в [3, 10], де для оболонки з $L/r = 2$ (r – радіус серединної поверхні циліндра) при розрахунках на стійкість і встановленні частоти вільних коливань тонких оболонок ортотропія настає при кількості шарів 14 і 7, відповідно.

З рис. 2 – 7 видно, що у випадку одно- та двошарових анізотропних циліндрів значення напружень, отриманих згідно приведеного підходу, відрізняються від величин, знайдених без використання анізотропних механічних характеристик матеріалу.

Так для нормальних напружень σ_{rr} (рис. 2) одношарової оболонки це розходження складає 2,5% і зменшується при збільшенні кількості шарів, практично дорівнюючи нулеві для чотирьох шарів. При цьому напруження σ_{rr} змінюють свої величини зі зміною кута ψ . Так, при $30^\circ \leq \psi \leq 40^\circ$ величини σ_{rr} отримують найменші значення, розходження між ними та значеннями σ_{rr} , отриманими при $\psi = 0^\circ; 90^\circ$, сягають 16%.

Дотичне напруження τ_{rz} (рис. 3), для якого спочатку при збільшенні кількості шарів від одного до двох розходження між напруженнями, знайденими з та без урахування анізотропних механічних характеристик матеріалу, зростає від 16% до 43%. При збільшенні кількості шарів воно набуває значень, близьких до нуля для чотирьох шарів. Також видно, що збільшення кута повороту головних напрямів пружності матеріалу від 0° до 90° веде до зменшення, за абсолютним значенням, величин дотичних напружень τ_{rz} .

Дотичні напруження $\tau_{r\theta}$ (рис. 4), що відсутні при ортотропному варіанті розрахунку, виникають у випадку розв'язку задачі за запропонованим підходом. При цьому, збільшення кількості шарів від одного до двох призводить до зростання максимальних величин цих напружень, а при подальшому збільшенні шарів $\tau_{r\theta}$ зменшуються до нуля.

Характер зміни нормальних напружень σ_{zz} (рис. 5) близький до τ_{rz} . Величини σ_{zz} при $\psi = 90^\circ$ складають 3% від цього ж значення при $\psi = 0^\circ$. Також видно, що значення напружень σ_{zz} для одношарових оболонок, отриманих за запропонованим підходом, відрізняються від величин знайдених при ортотропному варіанті розрахунку. Це розходження є найсуттєвішим в діапазоні зміни $50^\circ \leq \psi \leq 60^\circ$ і досягає 40%.

На противагу напруженням σ_{rr} , нормальні напруження $\sigma_{\theta\theta}$, що діють в коловому напрямку (рис. 6), отримують максимальні значення при кутах укладання волокнистого композиту від 30° до 40° . Найбільше розходження цих напружень має місце для $\psi = 0^\circ$ і складає 32%. З рис. 6 видно, що збільшення кількості шарів ψ не суттєво впливає на величини $\sigma_{\theta\theta}$. Максимальне розходження, отримане порівнянням результатів для одношарової та чотиришарової оболонки, складає 2%.

Ще один компонент напружено-деформованого стану – дотичні напруження $\tau_{z\theta}$ (рис. 7) у випадку зовнішньої навантаженої бокової поверхні залежать від кута повороту головних напрямів пружності і отримують найбільші значення для непарної кількості шарів при зміні кута $20^\circ \leq \psi \leq 40^\circ$, а для парної – при $50^\circ \leq \psi \leq 60^\circ$.

Висновки.

У роботі на основі модифікованого варіаційного принципу Ху-Васідзу отримано тривимірну систему рівнянь, що описує напружено-деформований стан товстостінної циліндричної анізотропної оболонки. Реалізація отриманої системи рівнянь базується на використанні методів Бубнова – Гальоркіна та дискретної ортогоналізації.

Розвинений авторами підхід дозволяє розв'язувати у тривимірній постановці задачі стосовно напружено-деформованого стану товстостінних шаруватих циліндричних оболонок із анізотропного матеріалу з однією площиною пружної симетрії.

Досліджено напружений стан анізотропної товстостінної композитної циліндричної оболонки під дією бокового зовнішнього навантаження залежно від зміни кута повороту основних напрямків пружності однонаправленого волокнистого матеріалу та кількості укладених шарів.

РЕЗЮМЕ. Використовуючи модифікований варіаційний принцип Ху-Васідзу, отримано систему неоднорідних диференціальних рівнянь з частинними похідними лінійної теорії пружності тривимірного анізотропного тіла в циліндричній системі координат. Для приведення її до одновимірної використано метод Бубнова – Гальоркіна. Для розв'язку одновимірної задачі в напрямку нормалі до

серединної поверхні оболонки використано метод дискретної ортогоналізації. Досліджено напружений стан анізотропної товстостінної композитної шаруватої циліндричної оболонки під дією бокового тиску. Проаналізовано залежність величин компонентів напруженого стану оболонки від кута повороту головних напрямків пружності однонаправленого волокнистого матеріалу та кількості перехресно-укладених шарів.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: анізотропні шаруваті оболонки, напружено-деформований стан, метод Бубнова – Гальоркіна, варіаційний принцип, метод дискретної ортогоналізації.

1. *Абовский Н.П., Андреев Н.П., Деруга А.П.* Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. – Москва: Наука, 1978. – 288 с.
2. *Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей М.О.* Нелінійне деформування та стійкість пружних оболонок неоднорідної структури. – Київ: Віпол, 2010. – 315 с.
3. *Баженов В.А., Семенюк М.П., Трач В.М.* Нелінійне деформування, стійкість і закритична поведінка анізотропних оболонок. – Київ: Каравела, 2010. – 352 с.
4. *Беняминов Д.М.* Уравнения смешанного метода в теории упругости // Строительная механика и расчет сооружений. – 1975. – № 5. – С. 43 – 46.
5. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – Москва: Мир, 1987. – 542 с.
6. *Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д.* Задачи теории упругости неоднородных тел. – Киев: Наук. думка, 1991. – 216 с.
7. *Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д.* Статика анизотропных толстостенных оболочек. – Киев: Высшая шк., 1985. – 190 с.
8. *Ланцош К.* Вариационные принципы механики. – Москва: Мир, 1965. – 408 с.
9. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. – Москва: Наука, 1977. – 415 с.
10. *Механика композитов* (под общей ред. Гузя А.Н.): в 12-и томах. В Т. 9. *Беспалова Е.И., Кутайгородский А.Б.* Колебания анизотропных оболочек. – Киев: «А.С.К.», 1999. – С. 7 – 25.
11. *Новожиллов В.В.* Теория упругости. – Ленинград: Судпромгиз, 1958. – 374 с.
12. *Рассказов А.О., Соколовская Н.И., Шульга Н.А.* Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек. – Киев: Вища шк., 1986. – 191 с.
13. *Семенюк М.П., Трач В.М., Жукова Н.Б.* Модифікація принципу Ху-Васидзу стосовно одного методу розв'язання задач теорії пружності // Доп. НАН України. – 2006. – № 12. – С. 52 – 59.
14. *Тонти Э.* Вариационные принципы в теории упругости // Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. – 1969. – 5, № 117. – С.124 – 138.
15. *Трач В.М., Подворний А.В., Хоружий М.М.* Деформування та стійкість нетонких анізотропних оболонок. – Киев: Каравела, 2019. – 273 с.
16. *Шульга Н.А.* Основы механики слоистых сред периодической структуры. – Киев: Наук. думка, 1981. – 200 с.
17. *Grigorenko Ya.M., Grigorenko A.Ya., Zakhariychenko L.I.* Calculation of Stress-Strain State of Orthotropic Closed and Open Non-Circular Cylindrical Shells // Int. Appl. Mech. – 2005. – 41, N 7. – P. 778 – 785.
18. *Grigorenko Ya.M., Kryukov N.N., Yakovenko N.S.* Using Spline Functions to Solve Boundary-Value Problems for Laminated Orthotropic Trapezoidal Plates of Variable Thickness // Int. Appl. Mech. – 2005. – 41, N 4. – P. 413 – 420.
19. *Grygorenko Ya.M., Rozhok L.S.* Analysis of Stress State of Hollow Orthotropic Cylinders with Oval Cross-Section // Int. Appl. Mech. – 2021. – 57, N 2. – P. 160 – 171.
20. *Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S.* Stress Solution for Transversely Isotropic Corrugated Hollow Cylinders // Int. Appl. Mech. – 2005. – 41, N 3. – P.277 – 282.
21. *Podvorni A.V., Semenyuk N.P., Trach V.M.* Stability of Inhomogeneous Cylindrical Shells under Distributed External Pressure in a Three-Dimensional Statement // Int. Appl. Mech. – 2017. – 53, N 6. – P. 623 – 638.
22. *Reissner O.* On a variational theorem in elasticity // J. Math. Phys. – 1950. – 29, N 2. – P.90 – 95.
23. *Semenyuk N.P., Zhukova N.B.* Stability of Composite Cylindrical Shell with Geometrical and Structural Imperfections under Axial Compression // Int. Appl. Mech. – 2022. – 58, N 3. – P. 307 – 319.
24. *Semenyuk N.P., Trach V.M., Podvorni A.V.* Spatial Stability of Layered Anisotropic Cylindrical Shells under Compressive Loads // Int. Appl. Mech. – 2019. – 55, N 2. – P. 211 – 221.

Надійшла 25.11.2021

Затверджена до друку 13.12.2022