

В. І. Острик

КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ НАПІВНЕСКІНЧЕНОЇ МІЖФАЗНОЇ ТРІЩИНИ В КУСКОВО-ОДНОРІДНІЙ СМУЗІ

*Інститут прикладної фізики НАН України,
вул. Петропавлівська, 58, 40000, Суми, Україна; e-mail: v.i.ostryk@gmail.com*

Abstract. The tension and shear of an elastic piecewise homogeneous strip with a semi-infinite crack on the interphase are considered. The friction contact of the crack faces is taken into account near the crack tip. When applying the Wiener – Hopf method, the system of integral equations is reduced to the infinite system of algebraic equations. The distributions of normal and tangential stresses are found on both the crack line and its continuation as well as the shear stress intensity factor.

Key words: elastic strip, interface crack, Comninou’s model, friction, Wiener – Hopf method.

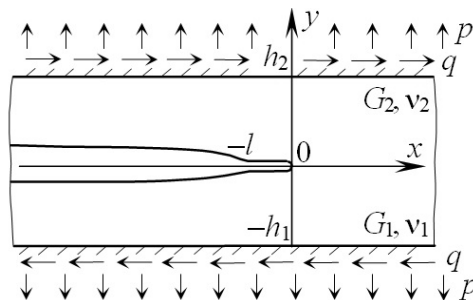
Вступ.

Розв’язки задач про рівновагу пружних тіл із міжфазними тріщинами, тобто тріщинами, які містяться на межі поділу середовищ із різних матеріалів, характеризуються сингулярною осциляцією напружень і обмеженою за амплітудою осциляцією переміщень в околі вершин тріщини [26]. Осцилюючі розв’язки не можна вважати фізично допустимими, оскільки вони вказують на взаємне проникнення середовищ поблизу вершин тріщини. У працях Комніноу [13 – 15], огляд яких наведено в [4], для знаходження коректних розв’язків запропоновано вводити області контакту берегів тріщини поблизу її вершин. Згідно з моделлю Комніноу вивчено широкі коло задач про напружено-деформований стан необмеженого кусково-однорідного середовища з міжфазними тріщинами [1, 3, 9 – 12, 16 – 20, 24].

Далі у межах моделі Комніноу розв’язано задачу для міжфазної напівнескінченної тріщини у пружній кусково-однорідній смузі. Закриту напівнескінченну тріщину в кусково-однорідній смузі розглянуто раніше [21, 23].

§1. Постановка задачі.

Нехай кусково-однорідна смуга складена з двох різнорідних смуг $-h_1 \leq y \leq 0$, $0 \leq y \leq h_2$ ($-\infty < x < \infty$); G_1 , G_2 – їх модулі зсуву та ν_1 , ν_2 – коефіцієнти Пуассона, відповідно (рис.). Складові смуги на частині $0 \leq x < \infty$ своєї спільної межі $y = 0$ жорстко з’єднані, а на іншій її частині $-\infty < x < 0$ кусково-однорідна смуга має напівнескінченну тріщину. Грані $y = -h_1$, $y = h_2$ загальної смуги з’єднані з жорсткими стінками, до яких прикладені розтягувальне та зсувне рівномірно розподілені навантаження інтенсивностей p і q .



Згідно з моделлю Комніноу вважаємо, що береги тріщини $y = \pm 0$ в околі $-l \leq x < 0$ вершини тріщини контактують. При цьому враховуємо сили тертя в контактні за законом Амонтона. Довжина l області контакту берегів тріщини заздалегідь невідома та підлягає визначенню.

Крайові умови задачі мають вигляд

$$\begin{aligned} u_y^{(1)} \Big|_{y=0} &= u_y^{(2)} \Big|_{y=0} \quad (-l \leq x < \infty); \\ \tau_{xy}^{(1)} \Big|_{y=0} &= \tau_{xy}^{(2)} \Big|_{y=0} = -\mu_0 \sigma_y^{(1)} \Big|_{y=0} = -\mu_0 \sigma_y^{(2)} \Big|_{y=0} \quad (-l \leq x < 0); \\ \sigma_y^{(1)} \Big|_{y=0} &= 0; \quad \sigma_y^{(2)} \Big|_{y=0} = 0; \quad \tau_{xy}^{(1)} \Big|_{y=0} = 0; \quad \tau_{xy}^{(2)} \Big|_{y=0} = 0 \quad (-\infty < x < -l); \\ u_x^{(1)} \Big|_{y=0} &= u_x^{(2)} \Big|_{y=0}; \quad \sigma_y^{(1)} \Big|_{y=0} = \sigma_y^{(2)} \Big|_{y=0}; \quad \tau_{xy}^{(1)} \Big|_{y=0} = \tau_{xy}^{(2)} \Big|_{y=0} \quad (0 < x < \infty); \\ u_x^{(1)} \Big|_{y=-h_1} &= 0; \quad u_y^{(1)} \Big|_{y=-h_1} = 0; \quad u_x^{(2)} \Big|_{y=h_2} = \delta_2; \quad u_y^{(2)} \Big|_{y=h_2} = \delta_1 \quad (-\infty < x < \infty), \end{aligned} \quad (1.1)$$

де δ_1 , δ_2 – нормальне та тангенціальне відносні зміщення стінок; μ_0 – коефіцієнт тертя. Друга крайова умова вказує на проковзування верхнього берега тріщини відносно нижнього у напрямку до її вершини, що справедливо за умови [4]

$$G_2(1-2\nu_1) > G_1(1-2\nu_2). \quad (1.2)$$

Відносні зміщення стінок виражаємо через інтенсивності навантаження з умов на нескінченності [23]:

$$\delta_1 = \left(\frac{1-2\nu_1}{1-\nu_1} \frac{h_1}{G_1} + \frac{1-2\nu_2}{1-\nu_2} \frac{h_2}{G_2} \right) \frac{p}{2}; \quad \delta_2 = \left(\frac{h_1}{G_1} + \frac{h_2}{G_2} \right) 2q. \quad (1.3)$$

§2. Система інтегральних рівнянь задачі.

Загальний розв'язок рівнянь рівноваги для кожної із пружних смуг у місцевій системі координат $x_j O y_j$ ($x_j = (-1)^j x$, $y_j = (-1)^j y$) представимо інтегралами Фур'є:

$$\begin{aligned} u_x^{(j)} &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} u_j(\mu, y_j) e^{-i\mu x_j} d\mu; \quad u_y^{(j)} = \int_{-\infty}^{\infty} v_j(\mu, y_j) e^{-i\mu x_j} d\mu; \\ \frac{1}{2G_j} \sigma_y^{(j)} &= \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_j(\mu, y_j) e^{-i\mu x_j} d\mu; \quad \frac{1}{2G_j} \tau_{xy}^{(j)} = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \tau_j(\mu, y_j) e^{-i\mu x_j} d\mu \quad (j=1, 2). \end{aligned} \quad (2.1)$$

У роботі [23] знайдено, що трансформанти переміщень зв'язані з трансформантами напружень на одній із граней смуги ($y = 0$), якщо на іншій її грані ($y = h_j$) відсутні переміщення, співвідношеннями

$$\begin{aligned} -iu_j(\mu, 0)\mu^2 \Delta_1^{(j)}(\mu h_j) &= \lambda_{21}^{(j)}(\mu h_j) \sigma_j(\mu, 0) - i\mu \lambda_{22}^{(j)}(\mu h_j) \tau_j(\mu, 0); \\ v_j(\mu, 0)\mu \Delta_1^{(j)}(\mu h_j) &= \lambda_{11}^{(j)}(\mu h_j) \sigma_j(\mu, 0) - i\mu \lambda_{12}^{(j)}(\mu h_j) \tau_j(\mu, 0) \quad (j=1, 2). \end{aligned} \quad (2.2)$$

При цьому

$$\begin{aligned} \lambda_{11}^{(j)}(\tau) &= 2(1-\nu_j)[(3-4\nu_j)\text{sh}2\tau - 2\tau]; \\ \lambda_{12}^{(j)}(\tau) &= -\lambda_{21}^{(j)}(\tau) = -2i[(3-4\nu_j)(1-2\nu_j)\text{sh}^2\tau - \tau^2]; \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\lambda_{22}^{(j)}(\tau) = 2(1 - \nu_j)[(3 - 4\nu_j)\text{sh}2\tau + 2\tau];$$

$$\Delta_1^{(j)}(\tau) = (3 - 4\nu_j)(\text{ch}2\tau - 1) + 2\tau^2 + 8(1 - \nu_j)^2 \quad (j = 1, 2).$$

Згідно з крайовими умовами (1.1) напруження σ_y , τ_{xy} неперервно продовжувані через межу поділу матеріалів ($y = 0$), тобто

$$G_2\sigma_2(\mu, 0) = G_1\sigma_1(-\mu, 0); \quad G_2\tau_2(\mu, 0) = -G_1\tau_1(-\mu, 0). \quad (2.4)$$

Шість лінійних співвідношень (2.2), (2.4) зв'язують вісім трансформант переміщень та напружень на лінії $y = 0$, що дає можливість виразити ці трансформанти через дві з них або дві будь-які їхні лінійні комбінації.

Введемо дві невідомі функції

$$g_1(x) = \frac{1}{2G_1}(\tau_{xy}^{(1)} + \mu_0\sigma_y^{(1)})\Big|_{y=0} \quad (0 < x < \infty); \quad g_2(x) = (u_y^{(1)} - u_y^{(2)})\Big|_{y=0} \quad (-\infty < x < -l) \quad (2.5)$$

та їхні трансформанти Фур'є

$$\begin{aligned} a_1(\mu) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} g_1(x)e^{i\mu x} dx = -i\mu\tau_1(\mu, 0) + \mu_0\sigma_1(\mu, 0); \\ a_2(\mu) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-l} g_2(x)e^{i\mu x} dx = v_1(\mu, 0) - v_2(\mu, 0). \end{aligned} \quad (2.6)$$

При цьому $g_1(x) = 0$ ($-\infty < x < 0$), $g_2(x) = 0$ ($-l \leq x < \infty$) згідно з першими двома крайовими умовами (1.1).

Враховувавши поведінку на нескінченності функцій $g_1(x)$, $g_2(x)$, подамо їх у вигляді

$$g_1(x) = \frac{q + \mu_0 p}{G_1} + g_*(x), \quad g_*(\infty) = 0; \quad g_2(x) = \delta_1 + g_{**}(x), \quad g_{**}(-\infty) = 0.$$

Звідси, згідно з (2.6), матимемо [8]

$$\begin{aligned} a_1(\mu) &= \frac{q + \mu_0 p}{2G_1} \left(\delta(\mu) + \frac{i}{\pi\mu} \right) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} g_*(x)e^{i\mu x} dx; \\ a_2(\mu) &= \frac{\delta_1}{2} \left(\delta(\mu) + \frac{i}{\pi\mu} \right) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-l} g_{**}(x)e^{i\mu x} dx, \end{aligned} \quad (2.7)$$

де $\delta(\mu)$ – дельта-функція Дірака.

Для знаходження невідомих функцій $g_1(x)$, $g_2(x)$ використаємо другу та третю крайові умови (1.1), які на відміну від інших залишаються поки не виконаними. Для цього стрибок тангенціальних переміщень та нормальні напруження на лінії поділу матеріалів

$$(u_x^{(1)} - u_x^{(2)})\Big|_{y=0} = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} [u_2(\mu, 0) - u_1(-\mu, 0)] e^{-i\mu x} d\mu;$$

$$\frac{1}{2G_1} \sigma_y^{(1)}\Big|_{y=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_1(\mu, 0) e^{-i\mu x} d\mu,$$

виразивши за допомогою співвідношень (2.2), (2.4) різницю трансформант $u_2(\mu, 0) - u_1(-\mu, 0)$ і трансформанту $\sigma_1(\mu, 0)$ через дві комбінації трансформант напружень та переміщень із (2.6) і враховувавши (1.3), (2.7), перетворимо до вигляду

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{1}{h_1} (u_x^{(1)} - u_x^{(2)}) \right|_{y=0} = -\alpha_1 \left(\kappa_1 + \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_{11}(\mu h_1)}{\mu} e^{-i\mu x} d\mu \right) + \\
& + \frac{\alpha_2}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_{12}(\mu h_1)}{\mu} e^{-i\mu(x+l)} d\mu + \int_0^{\infty} g_*(r) dr \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{11}(\mu h_1) e^{-i\mu(x-r)} d\mu + \\
& + \int_{-\infty}^{-l} g_{**}(r) dr \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{12}(\mu h_1) e^{-i\mu(x-r)} d\mu; \\
& \frac{1}{2G_1} \sigma_y^{(1)} \Big|_{y=0} = \frac{p}{2G_1} - \frac{\alpha_1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_{21}(\mu h_1)}{\mu} e^{-i\mu x} d\mu + \frac{\alpha_2}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_{22}(\mu h_1)}{\mu} e^{-i\mu(x+l)} d\mu + \\
& + \int_0^{\infty} g_*(r) dr \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{21}(\mu h_1) e^{-i\mu(x-r)} d\mu + \int_{-\infty}^{-l} g_{**}(r) dr \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{22}(\mu h_1) e^{-i\mu(x-r)} d\mu; \\
& \alpha_1 = \frac{q + \mu_0 p}{G_1}; \quad \alpha_2 = \frac{\delta_1}{h_1}; \quad \kappa_1 = K_{11}(0) = 2(1 + \bar{G}\bar{h}); \quad (2.8)
\end{aligned}$$

$$K_{11}(\tau) = \frac{\lambda(\tau)}{\tau \Delta(\tau)}; \quad K_{12}(\tau) = \frac{\lambda_1(\tau)}{\Delta(\tau)}; \quad K_{21}(\tau) = -\frac{\lambda_{12}(\tau)}{\Delta(\tau)}; \quad K_{22}(\tau) = \frac{\tau \Delta_1(\tau)}{\Delta(\tau)};$$

$$\begin{aligned}
& \lambda(\tau) = \lambda^{(1)}(\tau) \Delta_1^{(2)}(\bar{h}\tau) + \bar{G}^2 \lambda^{(2)}(\bar{h}\tau) \Delta_1^{(1)}(\tau) + \\
& + \bar{G} \left[\lambda_{11}^{(1)}(\tau) \lambda_{22}^{(2)}(\bar{h}\tau) + \lambda_{22}^{(1)}(\tau) \lambda_{11}^{(2)}(\bar{h}\tau) + \lambda_{12}^{(1)}(\tau) \lambda_{21}^{(2)}(\bar{h}\tau) + \lambda_{21}^{(1)}(\tau) \lambda_{12}^{(2)}(\bar{h}\tau) \right];
\end{aligned}$$

$$\Delta(\tau) = \Delta^{(1)}(\tau) \Delta_1^{(2)}(\bar{h}\tau) + \bar{G} \Delta^{(2)}(\bar{h}\tau) \Delta_1^{(1)}(\tau); \quad \bar{h} = \frac{h_2}{h_1}; \quad \bar{G} = \frac{G_1}{G_2};$$

$$\lambda_1(\tau) = \lambda_1^{(1)}(\tau) \Delta_1^{(2)}(\bar{h}\tau) - \bar{G} \lambda_1^{(2)}(\bar{h}\tau) \Delta_1^{(1)}(\tau); \quad \lambda_{12}(\tau) = \lambda_{12}^{(1)}(\tau) \Delta_1^{(2)}(\bar{h}\tau) - \bar{G} \lambda_{12}^{(2)}(\bar{h}\tau) \Delta_1^{(1)}(\tau);$$

$$\lambda^{(j)}(\tau) = \frac{\lambda_{11}^{(j)}(\tau) \lambda_{22}^{(j)}(\tau) - \lambda_{12}^{(j)}(\tau) \lambda_{21}^{(j)}(\tau)}{\Delta_1^{(j)}(\tau)} = (3 - 4\nu_j)^2 (\text{ch} 2\tau - 1) - 2\tau^2;$$

$$\lambda_1^{(j)}(\tau) = \lambda_{21}^{(j)}(\tau) - (-1)^j \mu_0 \lambda_{22}^{(j)}(\tau); \quad \Delta^{(j)}(\tau) = \lambda_{11}^{(j)}(\tau) - (-1)^j \mu_0 \lambda_{12}^{(j)}(\tau) \quad (j = 1, 2).$$

Задовольнивши першими двома виразами із (2.8) другу та третю крайові умови (1.1) і виконавши заміни

$$x = h_1 \xi; \quad r = h_1 \eta; \quad \mu = \frac{\tau}{h_1}; \quad b = \frac{l}{h_1}, \quad (2.9)$$

відносно нових невідомих функцій

$$\varphi_1(\xi) = g_*(h_1 \xi); \quad \varphi_2(\xi) = \frac{1}{h_1} g_{**}(h_1 \xi), \quad (2.10)$$

отримуємо систему інтегральних рівнянь

$$L_1(\xi) \equiv \int_0^{\infty} k_{11}(\xi - \eta) \varphi_1(\eta) d\eta + \int_{-\infty}^{-b} k_{12}(\xi - \eta) \varphi_2(\eta) d\eta = f_1(\xi) \quad (0 < \xi < \infty);$$

$$L_2(\xi) \equiv \int_0^{\infty} k_{21}(\xi - \eta) \varphi_1(\eta) d\eta + \int_{-\infty}^{-b} k_{22}(\xi - \eta) \varphi_2(\eta) d\eta = f_2(\xi) \quad (-\infty < \xi < -b);$$

$$k_{mj}(\xi - \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{mj}(\tau) e^{-i\tau(\xi - \eta)} d\tau, \quad m, j = 1, 2; \quad (2.11)$$

$$f_1(\xi) = \alpha_1 \left(\kappa_1 + \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_{11}(\tau)}{\tau} e^{-i\tau\xi} d\tau \right) - \frac{\alpha_2}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_{12}(\tau)}{\tau} e^{-i\tau(\xi+b)} d\tau;$$

$$f_2(\xi) = -\frac{p}{2G_1} + \frac{\alpha_1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_{21}(\tau)}{\tau} e^{-i\tau\xi} d\tau - \frac{\alpha_2}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_{22}(\tau)}{\tau} e^{-i\tau(\xi+b)} d\tau.$$

Перетворивши інтеграли із правих частин рівнянь (2.11) за теорією лишків, дістанемо

$$f_1(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_1 \lambda(is'_k) - \alpha_2 is'_k \lambda_1(is'_k) e^{s'_k b}}{s'^2_k \Delta'(is'_k)} e^{s'_k \xi}; \quad (2.12)$$

$$f_2(\xi) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_1 \lambda_{12}(is_k) + \alpha_2 is_k \Delta_1(is_k) e^{s_k b}}{is_k \Delta'(is_k)} e^{s_k \xi},$$

де s_k, s'_k ($k=1, 2, \dots$) – корені рівняння $\Delta(is) = 0$ із півплощин $\text{Re } s > 0$, $\text{Re } s < 0$, відповідно.

§3. Розв'язання системи інтегральних рівнянь.

Для розв'язання системи інтегральних рівнянь (2.11) застосуємо метод Вінера – Гопфа [7, 25]. Продовжимо рівняння (2.11) на всю числову вісь, поклавши $\varphi_1(\eta) = 0$, якщо $-\infty < \eta \leq 0$, і $\varphi_2(\eta) = 0$, якщо $-b \leq \eta < \infty$, та застосуємо до них інтегральне перетворення Фур'є. Ввівши до розгляду невідомі функції

$$\Phi_1^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \varphi_1(\xi) e^{iz\xi} d\xi; \quad \Phi_2^-(z) = \frac{e^{izb}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-b} \varphi_2(\xi) e^{iz\xi} d\xi;$$

$$\Phi_1^-(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 L_1(\xi) e^{iz\xi} d\xi; \quad \Psi^+(z) = -\frac{e^{izb}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^{\infty} L_2(\xi) e^{iz\xi} d\xi, \quad (3.1)$$

аналітичні відповідно у півплощинах $\text{Im } z > c^+$ ($c^+ < 0$) і $\text{Im } z < c^-$ ($c^- > 0$) комплексної площини, отримаємо систему функціональних рівнянь

$$K_{11}(z) \Phi_1^+(z) + e^{-izb} K_{12}(z) \Phi_2^-(z) - \Phi_1^-(z) = F_1^+(z);$$

$$e^{izb} K_{21}(z) \Phi_1^+(z) + K_{22}(z) \Phi_2^-(z) + \Psi^+(z) = F_2^-(z)$$

$$(-\infty < \text{Re } z < \infty, \quad c^+ < \text{Im } z < c^-); \quad (3.2)$$

$$F_1^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f_1(\xi) e^{iz\xi} d\xi = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{\alpha}_1 \lambda(is'_k) + \bar{\alpha}_2 is'_k \lambda_1(is'_k) e^{s'_k b}}{s'^2_k \Delta'(is'_k)} \frac{1}{s'_k + iz};$$

$$F_2^-(z) = \frac{e^{izb}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-b} f_2(\xi) e^{iz\xi} d\xi = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{\alpha}_1 \lambda_{12}(is_k) e^{-s_k b} - \bar{\alpha}_2 is_k \Delta_1(is_k)}{is_k \Delta'(is_k)} \frac{1}{s_k + iz};$$

$$\bar{\alpha}_1 = \frac{\alpha_1}{\sqrt{2\pi}}; \quad \bar{\alpha}_2 = \frac{\alpha_2}{\sqrt{2\pi}}.$$

Тут функція $F_1^+(z)$ є аналітичною у півплощині $\text{Im } z > c^+$, а функція $F_2^-(z)$ – у півплощині $\text{Im } z < c^-$.

Після факторизації коефіцієнтів

$$\begin{aligned}
K_{11}(z) &= \kappa_1 K_{11}^+(z) K_{11}^-(z); \quad K_{22}(z) = \kappa_2 K_{22}^+(z) K_{22}^-(z); \\
\kappa_2 &= K_{22}(0) = \left(\frac{1-2\nu_1}{1-\nu_1} + \bar{G}h \frac{1-2\nu_2}{1-\nu_2} \right)^{-1}; \\
K_{11}^+(z) &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{iz}{\tau_n} \right) \left(1 + \frac{iz}{s'_n} \right)^{-1}; \quad K_{11}^-(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{iz}{\tau_n} \right) \left(1 + \frac{iz}{s_n} \right)^{-1}; \\
K_{22}^+(z) &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{iz}{\zeta_n} \right) \left(1 + \frac{iz}{s'_n} \right)^{-1}; \quad K_{22}^-(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{iz}{\zeta_n} \right) \left(1 + \frac{iz}{s_n} \right)^{-1},
\end{aligned} \tag{3.3}$$

де $K_{jj}^+(z)$ і $K_{jj}^-(z)$ ($j=1, 2$) – функції, які є аналітичними та не обертаються в нуль у півплощинах $\text{Im } z > c^+$ і $\text{Im } z < c^-$, відповідно; τ_n, ζ_n ($n=1, 2, \dots$) – корені рівнянь $\lambda(is) = 0$, $\Delta_1(is) = 0$ із півплощини $\text{Re } s > 0$; систему рівнянь (3.2) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned}
\kappa_1 K_{11}^+(z) \Phi_1^+(z) + \frac{e^{-izb}}{K_{11}^-(z)} K_{12}(z) \Phi_2^-(z) - \frac{\Phi_1^-(z)}{K_{11}^-(z)} &= \frac{F_1^+(z)}{K_{11}^-(z)}; \\
\kappa_2 K_{22}^-(z) \Phi_2^-(z) + e^{izb} \frac{K_{21}(z)}{K_{22}^+(z)} \Phi_1^+(z) + \frac{\Psi^+(z)}{K_{22}^+(z)} &= \frac{F_2^-(z)}{K_{22}^+(z)} \quad (c^+ < \text{Im } z < c^-).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Другі доданки і праві частини рівнянь (3.4) подамо різницею аналітичних у півплощинах $\text{Im } z > c^+$, $\text{Im } z < c^-$ функцій:

$$\begin{aligned}
\frac{e^{-izb}}{K_{11}^-(z)} K_{12}(z) \Phi_2^-(z) &= \chi_1^+(z) - \chi_1^-(z); \quad e^{izb} \frac{K_{21}(z)}{K_{22}^+(z)} \Phi_1^+(z) = \chi_2^+(z) - \chi_2^-(z); \\
\frac{F_1^+(z)}{K_{11}^-(z)} &= f_1^+(z) - f_1^-(z); \quad \frac{F_2^-(z)}{K_{22}^+(z)} = f_2^+(z) - f_2^-(z).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Розглянувши інтеграли типу Коші [2], густинами яких слугують ліві частини рівностей (3.5), і перетворивши інтеграли у ряди за теорією лишків, знаходимо

$$\begin{aligned}
\chi_1^+(z) &= i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_1(is'_k) \Phi_2^-(is'_k)}{\Delta'(is'_k) K_{11}^-(is'_k)} \frac{e^{s'_k b}}{s'_k + iz}; \quad \chi_2^-(z) = i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_{12}(is_k) \Phi_1^+(is_k)}{\Delta'(is_k) K_{22}^+(is_k)} \frac{e^{-s_k b}}{s_k + iz}; \\
f_1^+(z) &= \kappa_1 \bar{\alpha}_1 \frac{K_{11}^+(z) - 1}{iz} + \bar{\alpha}_2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_1(is'_k)}{is'_k \Delta'(is'_k) K_{11}^-(is'_k)} \frac{e^{s'_k b}}{s'_k + iz}; \\
f_2^-(z) &= 2\bar{\alpha}_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_{12}(is_k)}{is_k \Delta'(is_k) K_{22}^+(is_k)} \frac{e^{-s_k b}}{s_k + iz} - \kappa_2 \bar{\alpha}_2 \frac{K_{22}^+(z) - 1}{iz}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

В результаті за принципом аналітичного продовження [6] отримуємо:

$$\begin{aligned}
\Phi_1^+(z) &= \frac{f_1^+(z) - \chi_1^+(z)}{\kappa_1 K_{11}^+(z)}; \quad \Phi_1^-(z) = K_{11}^-(z) [f_1^-(z) - \chi_1^-(z)]; \\
\Phi_2^-(z) &= \frac{\chi_2^-(z) - f_2^-(z)}{\kappa_2 K_{22}^-(z)}; \quad \Psi^+(z) = K_{22}^+(z) [f_2^+(z) - \chi_2^+(z)].
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Із умови обмеженості напружень σ_y у точці $x = -l$, $y = 0$ із першої рівності (3.7), на підставі оцінок [23]

$$f_1^+(z) = O(z^{-1}); \quad \chi_1^+(z) = O(z^{-1}); \quad K_{11}^+(z) \sim A^+(-iz)^{-\rho}, \quad |z| \rightarrow \infty;$$

$$A^+ = \pi^\rho e^{-C\rho} \frac{-s'_1}{\tau_1} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{-s'_{n+1}}{\tau_{n+1}} e^{\frac{\rho}{2(n+1/2)}}; \quad \rho = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(\mu_0 \operatorname{th} \pi\theta); \quad (3.8)$$

$$\theta = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{(3-4\nu_1)G_2 + G_1}{G_2 + (3-4\nu_2)G_1} \quad (0 < \rho \leq 1/2, \theta > 0),$$

де C – стала Ейлера – Маскероні, і тауберової теореми [7], впливає умова

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} z[\chi_2^-(z) - f_2^-(z)] = 0. \quad (3.9)$$

Поклавши у першій рівності (3.7) $z = is_n$, у третій – $z = is'_n$ ($n = 1, 2, \dots$), відносно невідомих

$$z_k^+ = -\frac{1}{\bar{\alpha}_1} \Phi_1^+(is_k) - \frac{1}{s_k}; \quad z_k^- = -\frac{1}{\bar{\alpha}_1} \Phi_2^-(is'_k) - \frac{\bar{\alpha}_2}{\bar{\alpha}_1} \frac{1}{s'_k} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (3.10)$$

отримаємо нескінченну систему алгебраїчних рівнянь

$$z_n^+ + \beta_n^+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^- z_k^-}{s'_k - s_n} = g_n^+; \quad z_n^- + \beta_n^- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^+ z_k^+}{s_k - s'_n} = g_n^- \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3.11)$$

з такими коефіцієнтами:

$$\alpha_k^+ = \frac{\lambda_{12}(is_k)}{i\Delta'(is_k)K_{22}^+(is_k)} e^{-s_k b}; \quad \alpha_k^- = \frac{i\lambda_1(is'_k)}{\Delta'(is'_k)K_{11}^-(is'_k)} e^{s'_k b}; \quad (3.12)$$

$$\beta_n^+ = \frac{1}{\kappa_1 K_{11}^+(is_n)}; \quad \beta_n^- = \frac{1}{\kappa_2 K_{22}^-(is'_n)}; \quad g_n^+ = -\frac{2\kappa_1 \beta_n^+}{s_n}; \quad g_n^- = -\kappa_2 \frac{\bar{\alpha}_2}{\bar{\alpha}_1} \frac{\beta_n^-}{s'_n} \quad (k, n = 1, 2, \dots).$$

Система рівнянь (3.11) є регулярною системою типу Пуанкаре – Коха (з експоненціально спадними за k коефіцієнтами) і розв'язується методами редукції, послідовних наближень або у рядах за степенями малого параметра $e^{-\pi b/2} < 1$ [1, 5].

Додаткова умова (3.9) до системи рівнянь (3.11), яку запишемо у вигляді

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^+ z_k^+ = \kappa_2 \frac{\bar{\alpha}_2}{\bar{\alpha}_1}, \quad (3.13)$$

слугує для визначення межі $x = -l = -h_1 b$ області контакту берегів тріщини.

§4. Напруження на лінії поділу матеріалів.

Знайдемо розподіли напружень в області контакту берегів тріщини та на лінії продовження тріщини, використавши заміни (2.5), (2.10), подання для нормальних напружень із (2.8) і обернене перетворення Фур'є першої рівності (3.1). Перетворивши відповідні інтеграли з урахуванням розв'язку (3.7) системи функціональних рівнянь (3.2) у ряди за теорією лишків, отримаємо:

$$\sigma_y^{(1)} \Big|_{y=0} = \frac{p}{2} - 2(q + \mu_0 p) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{12}(is_k)}{i\Delta'(is_k)} z_k^+ e^{s_k \xi} + \frac{s'_k \Delta_1(is'_k)}{\Delta'(is'_k)} z_k^- e^{s'_k(\xi+b)} \right) \quad (-l < x < 0);$$

$$\tau_{xy}^{(1)} \Big|_{y=0} = 2q + \mu_0 \frac{p}{2} + (q + \mu_0 p) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau_k \lambda_{11}(i\tau_k)}{\lambda'(i\tau_k)} K_{11}^-(-i\tau_k) \left(\frac{2\kappa_1}{\tau_k} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m^- z_m^-}{s'_m + \tau_k} \right) e^{-\tau_k \xi}; \quad (4.1)$$

$$\sigma_y^{(1)}|_{y=0} = \frac{p}{2} + (q + \mu_0 p) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau_k \lambda_{12}(i\tau_k)}{\lambda'(i\tau_k)} K_{11}^-(i\tau_k) \left(\frac{2\kappa_1}{\tau_k} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m^- z_m^-}{s_m' + \tau_k} \right) e^{-\tau_k \xi} \quad (0 < x < \infty);$$

$$\lambda_{11}(\tau) = \lambda_{11}^{(1)}(\tau) \Delta_1^{(2)}(\bar{h}\tau) + \bar{G} \lambda_{11}^{(2)}(\bar{h}\tau) \Delta_1^{(1)}(\tau).$$

Асимптотичну поведінку дотичних напружень на продовженні тріщини поблизу її вершини ($y = 0$, $x \rightarrow +0$) знайдемо, застосовуючи тауберову теорему [7] до першої рівності (3.1) з урахуванням оцінок (3.8) і умови (3.9). Врахувавши також при цьому скінченність нормальних напружень [4, 20], отримаємо коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН)

$$K_{II} = \lim_{x \rightarrow +0} (2\pi x)^\rho \tau_{xy}^{(1)}|_{y=0} = \frac{q + \mu_0 p}{A^+ \Gamma(1 - \rho)} \left(2 - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^- z_k^- \right) (2\pi h_1)^\rho. \quad (4.2)$$

Аналогічно до [23] КІН запишемо також у вигляді

$$K_{II} = 2(q - \mu_0 p) \sqrt{\frac{\kappa_1}{\pi[1 + (3 - 4\nu_2)\bar{G}](\text{th } \pi\theta + 1)}} e^I \left(2 - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^- z_k^- \right) (2\pi h_1)^\rho;$$

$$I = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \text{arctg} \frac{\mu_0 \tilde{\lambda}_{12}(\zeta) \text{th } \pi\rho - \tilde{\lambda}_{11}(\zeta) \text{th } \pi\zeta}{\tilde{\lambda}_{11}(\zeta) \text{th } \pi\rho + \mu_0 \tilde{\lambda}_{12}(\zeta) \text{th } \pi\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta}; \quad (4.3)$$

$$\tilde{\lambda}_{1j}(\zeta) = i^{j-1} \left[\lambda_{1j}^{(1)}(\zeta) \Delta_1^{(2)}(\bar{h}\zeta) - (-1)^j \bar{G} \lambda_{1j}^{(2)}(\bar{h}\zeta) \Delta_1^{(1)}(\zeta) \right] \quad (j = 1, 2).$$

Через коефіцієнт K_{II} розподіли напружень та переміщень всередині смуги поблизу вершини тріщини визначаються за відомими формулами [4, 22].

§5. Результати обчислень.

У таблиці наведено відносні розміри області контакту $b = l/h_1$ і нормалізовані КІН $\tilde{K}_{II} = \pi^{-\rho+1/2} q^{-1} (2h_1)^{-\rho} K_{II}$ у випадку абсолютно жорсткої верхньої смуги ($G_2/G_1 = \infty$, $\nu_1 = 1/3$) за різних відношень інтенсивностей q/p зсувного та розтягувального навантажень. Зі збільшенням розтягувального навантаження p ($q = \text{const}$) відносний розмір b області контакту зменшується, а КІН K_{II} зростає. При цьому для $q/p \ll 1$ розмір області контакту l на декілька порядків менший від характерного розміру задачі h_1 . Подібна властивість має місце також для міжфазної тріщини у необмеженому кусково-однорідному середовищі [4]. Однак, на відміну від випадку необмеженого середовища, у розглядуваній задачі відносний розмір b залишається порівняно малим і для $q/p \gg 1$.

q/p	1000	100	10	5	2	1	0,5	0,2
b	0,153	0,148	0,110	0,081	0,039	0,017	0,006	0,0007
\tilde{K}_{II}	2,706	2,711	2,758	2,812	2,980	3,273	3,877	5,766

Висновки.

Із застосуванням методу Вінера – Гопфа знайдено аналітичний розв'язок контактної задачі для міжфазної напівнескінченної тріщини у пружній кусково-однорідній смузі. Встановлено, що розмір області контакту берегів тріщини поблизу її вершини разом із коефіцієнтом інтенсивності напружень суттєво залежать від відношення інтенсивностей зсувного та розтягувального навантажень. Якісний характер цих залежностей такий самий, як і для міжфазної тріщини у необмеженому кусково-однорідному середовищі.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто розтяг і зсув пружної кусково-однорідної смуги з напівнескінченною тріщиною на межі поділу матеріалів. Враховано фрикційний контакт берегів тріщини поблизу її вершини. Із застосуванням методу Вінера – Гопфа систему інтегральних рівнянь задачі зведено до нескінченної системи алгебраїчних рівнянь. Знайдено розподіли нормальних і дотичних напружень на лінії тріщини та її продовженні, а також коефіцієнт інтенсивності зсувних напружень.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: пружна смуга, міжфазна тріщина, модель Комніноу, тертя, метод Вінера – Гопфа.

1. Антипов Ю.А. Трещина на линии раздела упругих сред при наличии сухого трения // Прикл. математика и механика. – 1995. – 59, вып. 2. – С. 290 – 306.
2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – Москва: Физматгиз, 1963. – 640 с.
3. Говоруха В.Б., Лобода В.В. Моделі та методи механіки руйнування п'єзокерамічних тіл з міжфазними тріщинами. – Дніпропетровськ: Вид-во Дніпропетр. нац. ун-ту, 2013. – 252 с.
4. Дундурс Я., Комніноу М. Обзор и перспективы исследования межфазной трещины // Разрушение композит. материалов. – 1979. – №3. – С. 387 – 396.
5. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. – Москва-Ленинград: Физматгиз, 1962. – 708 с.
6. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – Москва-Ленинград: Гостехиздат, 1951. – 608 с.
7. Нобл Б. Метод Винера – Хопфа. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 280 с.
8. Снеддон И. Преобразования Фурье. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1955. – 668 с.
9. Симонов И.В. Межфазная трещина в однородном поле напряжений // Механика композит. материалов. – 1985. – № 6. – С. 969 – 976.
10. Шевельова А.С., Лобода В.В. Математичне моделювання привершинних зон тріщин в областях поділу п'єзоактивних та п'єзопасивних матеріалів. – Дніпро: ЛІРА, 2020. – 204 с.
11. Barber J.R., Comninou M. The external axisymmetric interface crack with heat flow // The Quarterly J. Mech. and Appl. Mathem. – 1982. – 35, N 3. – P. 403 – 417.
12. Barber J.R., Comninou M. The penny-shaped interface crack with heat flow. Part 2: Imperfect contact // J. of Appl. Mech. – 1983. – 50, N 4a. – P. 770 – 776.
13. Comninou M. The interface crack // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1977. – 44. – P. 631 – 636.
14. Comninou M. The interface crack with friction in the contact zone // J. Appl. Mech. – 1977. – 44. – P. 780 – 781.
15. Comninou M. The interface crack in a shear field // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1978. – 44. – P. 287 – 290.
16. Comninou M., Dundurs J. Effect of friction on the interface crack loaded in shear // J. of Elasticity. – 1980. – 10, N 2. – P. 203 – 212.
17. Comninou M., Schmueser D. The interface crack in a combined tension – compression and shear field // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1979. – 46. – P. 345 – 348.
18. Gautesen A.K., Dundurs J. The interface crack under a combined loading // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1988. – 55. – P. 580 – 586.
19. Martin-Moran C.J., Barber J.R., Comninou M. The penny-shaped interface crack with heat flow. Part 1: Perfect contact // J. of Appl. Mech. – 1983. – 50, N 1. – P. 29 – 36.
20. Ostryk V.I. Friction contact of the edges of an interface crack under the conditions of tension and shear // Materials Sci. – 2003. – 39, N 2. – P. 214 – 224.
21. Ostryk V.I. Closed semiinfinite crack on the boundary of an elastic strip and a rigid wall // Materials Sci. – 2017. – 53, N 1. – P. 93 – 101.
22. Ostryk V.I. Asymptotic distributions of stresses and displacements near the edge of a contact zone // J. of Math. Sci. – 2019. – 238, N 1. – P. 63 – 82.
23. Ostryk V.I. Closed Semiinfinite Crack on the Section Boundary of Materials in Piecewise Homogeneous Strip // Int. Appl. Mech. – 2021. – 57, N 3. – P. 363 – 372.
24. Ostryk V.I., Ulitko A.F. Axisymmetric contact problem for an interface crack // Materials Sci. – 2004. – 40, N 1. – P. 20 – 28.
25. Wiener N., Hopf E. Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen // S. B. Preuss. Akad. Wiss. – 1931. – P. 696 – 706.
26. Williams M.L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1952. – 19, N 4. – P. 526 – 535.

Надійшла 02.09.2021

Затверджена до друку 13.12.2022