О.В.Марчук, О.О.Плісов, Т.Г.Тамоян

ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ КОМПОЗИТНИХ ПЛИТ ІЗ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНОГО МАТЕРІАЛУ НА ПРУЖНІЙ ТА АБСОЛЮТНО ЖОРСТКІЙ ОСНОВІ

Національний транспортний університет,
вул. Омеляновича-Павленка 1, 01010, Київ, Україна;
e-mail: mksmntu386@gmail.com

Abstract. Two methods for investigating the free vibrations of functionally gradient plates in the three-dimensional formulation are developed. The first method does not contain an approximation error of the required functions along the thickness of the plate. The thickness distribution of the elasticity modulus is modeled according to the exponential law. The second method uses a polynomial approximation of the functions sought, by the plate thickness. The change of the elasticity modulus is assumed by the polynomial of the fourth degree. Its feature is an assignment of the required functions to the outer surfaces of layers, which allows splitting the layers into sublayers with a corresponding increase in the accuracy of the calculation results. The developed methods are used to analyze the free vibrations of plates made of a functionally gradient material on the rigid foundation and foundation in the form of a layer of finite thickness.

Key words: functionally gradient materials, 3D formulation, analytical solution, free vibrations, inertial properties of the elastic foundation, rigid foundation.

Вступ.

У сучасній техніці збільшується використання композитних структур, зокрема з функціонально-градієнтних матеріалів, з високим рівнем градієнта модуля пружності за товщиною конструкції. Вони перебувають в складних умовах деформування, мають різні умови фіксації на контурі і контакти на зовнішніх поверхнях, перебувають під динамічним навантаженням, близьким до резонансу. Ці особливості можуть призвести до значного тривимірного характеру динамічної деформації.

Використання точних методів просторової теорії пружності для вивчення вільних коливань цих структур в основному обмежується розглядом пластин з шарнірними опорами. Зокрема, проблеми для матеріалу з постійними жорсткими характеристиками в точному формулюванні були розглянуті в [2, 3, 15 – 17]. Із залученням методу дискретної ортогоналізації проблема знаходження частот вільних коливань розглядалася в [1]. Розрахунку функціонально-градієнтних конструкцій на основі цього підходу присвячені роботи [1, 9]. Класична теорія пластин Кірхгофа – Лява, що базується на спрощеній гіпотезі, у деяких випадках може призвести до значних похибок у визначенні характеристик вільних коливань пластин з функціонально-градієнтних матеріалів.

На основі тих чи інших варіантів уточнених моделей вільні коливання пластин з функціонально-градієнтних матеріалів розглядалися в роботах [5, 7, 8, 11]. Продовжують розвиватися різні чисельно-аналітичні методи тривимірного аналізу пластин з функціонально-градієнтних матеріалів, зокрема [6, 10, 12, 13, 18]. У наведених роботах зміна модуля пружності представлена або експоненціальним законом, або степеневим поліномом. Незважаючи на велику кількість робіт, присвячених динамічному деформуванню багатошарових пластин, автори статті не знайшли у літературі точних розв'язків задач на основі тривимірної постановки, присвячених знаходженню частот вільних коливань пластин з функціонально-градієнтних матеріалів на жорсткій основі та основі у вигляді шару скінченної товщини з урахуванням інерційних властивостей основи. Відзначимо також роботу [14], в якій розглянуто статичне навантаження конструкцій зі змінним за товщиною модулем пружності. Також зауважимо, що за допомогою прикладних підходів розглядалися в основному конструкції на основі, що моделюється одним коефіцієнтом опору (модель Фуса – Вінклера) або двома коефіцієнтами опору (модель Пастернака). В даній роботі вперше на основі задачі у тривимірній постановці досліджено вільні коливання плит з функціонально-градієнтного матеріалу на жорсткій основі та на основі у вигляді шару скінченної товщини з урахуванням інерційних властивостей пружної основи. Продемонстровано непридатність застосування у таких задачах зсувних моделей плит та моделей пружних основ, що не враховують їх інерційні властивості.

§1. Постановка задачі.

Розглянемо шарувату конструкцію, використовуючи для її опису декартову систему координат. Напрямок 1 ідентичний напрямку *X*, напрямок 2 – *Y*, напрямок 3 – *Z*. Вісь *Z* спрямована вниз. Верхній індекс (k) вказує на номер шару. Фізико-механічні характеристики функціонально-градієнтних шарів пов'язані наступними співвідношеннями:

$$e_{11}^{(k)}=\frac{1}{E^{(k)}(z)}\left(\sigma_{11}^{(k)}+\nu^{(k)}(\sigma_{22}^{(k)}+\sigma_{33}^{(k)})\right);\quad e_{22}^{(k)}=\frac{1}{E^{(k)}(z)}\left(\sigma_{22}^{(k)}+\nu^{(k)}(\sigma_{11}^{(k)}+\sigma_{33}^{(k)})\right);$$

$$e_{33}^{(k)}=\frac{1}{E^{(k)}(z)}\left(\sigma_{33}^{(k)}+\nu^{(k)}(\sigma_{22}^{(k)}+\sigma_{11}^{(k)})\right);\quad 2e_{23}^{(k)}=\frac{\sigma_{23}^{(k)}}{G^{(k)}(z)};\tag{1.1}$$

$$2e_{13}^{(k)}=\frac{\sigma_{13}^{(k)}}{G^{(k)}(z)};\quad 2e_{12}^{(k)}=\frac{\sigma_{12}^{(k)}}{G^{(k)}(z)}.$$

Досліджувати вільні коливання функціонально-градієнтних плит на пружній та абсолютно жорсткій основі будемо двома підходами. Перший підхід ґрунтується на відокремленні змінних, згідно з яким вектор переміщень та поперечні компоненти тензора напружень представлено у наступному вигляді:

$$U_i^{(k)}(x,\,y,\,z,\,t)=V_i^{(k)}(x,\,y,\,t)\,f_i^{(k)}(z);$$

$$\sigma_{i3}^{(k)}(x,\,y,\,z,\,t)=\tau_{i3}^{(k)}(x,\,y,\,t)f_{i+3}^{(k)}(z)\qquad(i=1,\,2,\,3).\tag{1.2}$$

Даний підхід є розвитком роботи [14], де розглядається статика плит на пружній основі зі змінним за товщиною модулем пружності та робіт [15, 16], де в точній постановці розглядаються вільні коливання плит та пологих оболонок.

Отримана варіаційним шляхом система інтегрально-диференціальних рівнянь для цього підходу при шарнірному опиранні може бути розв'язана аналітично. Розподіл модуля пружності за товщиною змодельований за законом експоненти. Оскільки в цьому підході відсутня похибка апроксимації, результати розрахунку можна розглядати як еталон при тестуванні різних наближених методів аналізу вільних коливань функціонально-градієнтних плит.

У другому підході використовується апроксимація шуканих функцій за товщиною конструкції поліномами. Зміна модуля пружності змодельована поліномом четвертої степені. Вектор переміщень представлено таким чином:

$$U_1^{(k)}(x,\,y,\,z,\,t)=U_{1l}^{(k)}(x,\,y,\,t)f_{1l}^{(k)}(z);\quad U_2^{(k)}(x,\,y,\,z,\,t)=U_{2l}^{(k)}(x,\,y,\,t)f_{2l}^{(k)}(z);$$

$$U_3^{(k)}(x,y,z,t)=W_p^{(k)}(x,y,t)\beta_p^{(k)}(z).\tag{1.3}$$

Тут $U_{11}^{(k)}(x, y, t)$ – тангенціальні переміщення на верхній поверхні k-го шару конструкції в напрямку осі X; $U_{12}^{(k)}(x,\ y,\ t)$ – тангенціальні переміщення на нижній поверхні k-го шару конструкції в напрямку осі X; $U_{13}^{(k)}(x,\ y,\ t)$ – функції зсуву в напрямку осі X; $U_{21}^{(k)}(x,\ y,\ t),\ U_{22}^{(k)}(x,\ y,\ t),\ U_{23}^{(k)}(x,\ y,\ t)$ – тангенціальні переміщення на лицьових поверхнях k-го шару та функції зсуву в напрямку осей Y; $W_1^{(k)}(x,\ y,\ t)$, $W_2^{(k)}(x,\ y,\ t)$ – нормальні переміщення на лицьових поверхнях k-го шару конструкції; $W_3^{(k)}(x,\ y,\ t)$, – функція обтиснення; $f_{11}^{(k)}(z),\ f_{12}^{(k)}(z),\ f_{21}^{(k)}(z),\ f_{22}^{(k)}(z),\ \beta_1^{(k)}(z),\ \beta_2^{(k)}(z)$ – задані поліноми першої степені; $\beta_3^{(k)}(z)$ – поліном другої степені; $f_{13}^{(k)}(z)$, $f_{23}^{(k)}(z)$ – поліноми третьої степені [16]. ($l = 1,\ 2,\ 3$; $p = 1,\ 2,\ 3$).

Особливістю другого підходу є віднесення шуканих функцій до лицьових поверхонь шару. Це дозволяє в разі необхідності ділити їх за товщиною на підшари, що мінімізує похибку апроксимації.

Оскільки досліджуються вільні коливання, зміна шуканих функцій переміщень у часі в двох підходах приймається за відомою залежністю $e^{i\omega t}$. У цій статті розроблені підходи будуть застосовані для випадку шарнірного опирання.

§2. Підхід 1 (П1) до дослідження вільних коливань з аналітичним пошуком розподілу шуканих функцій за товщиною конструкції.

Використовуючи співвідношення Коші, а також подання переміщень та поперечних напружень (1.2), запишемо вирази для деформацій у вигляді

$$e_{ii}^{(k)} = V_{i,i}^{(k)} f_i^{(k)};\quad e_{33}^{(k)} = V_3^{(k)} f_{3,3}^{(k)};\quad 2e_{12}^{(k)} = V_{1,2}^{(k)} f_1^{(k)} + V_{2,1}^{(k)} f_2^{(k)};$$
$$2e_{i3}^{(k)} = V_i^{(k)} f_{i,3}^{(k)} + V_{3,i}^{(k)} f_3^{(k)}\ \ (i = 1,\ 2)\,. \tag{2.1}$$

Закон Гука [4] та співвідношення для деформацій (2.1) дозволяють визначити поздовжні компоненти тензора напружень $\sigma_{11}^{(k)},\ \sigma_{22}^{(k)},\ \sigma_{12}^{(k)}$

$$\sigma_{11}^{(k)} = B_{11}^{(k)} V_{1,1}^{(k)} f_1^{(k)} + B_{12}^{(k)} V_{2,2}^{(k)} f_2^{(k)} + B_{13}^{(k)} \tau_{33}^{(k)} f_6^{(k)};$$
$$\sigma_{22}^{(k)} = B_{21}^{(k)} V_{1,1}^{(k)} f_1^{(k)} + B_{22}^{(k)} V_{2,2}^{(k)} f_2^{(k)} + B_{23}^{(k)} \tau_{33}^{(k)} f_6^{(k)}; \tag{2.2}$$
$$\sigma_{12}^{(k)} = G_{12}^{(k)} (V_{1,2}^{(k)} f_1^{(k)} + V_{2,1}^{(k)} f_2^{(k)})\,.$$

Рівняння коливань отримаємо варіаційним шляхом. У плані шару вони мають вигляд

$$-V_{1,11}^{(k)} \int_{a_{k-1}}^{a_k} B_{11}^{(k)} f_1^{(k)} f_1^{(k)} dz - V_{1,22}^{(k)} \int_{a_{k-1}}^{a_k} G_{12}^{(k)} f_1^{(k)} f_1^{(k)} dz -$$
$$-V_{2,12}^{(k)} \left(\int_{a_{k-1}}^{a_k} B_{12}^{(k)} f_1^{(k)} f_2^{(k)} dz + \int_{a_{k-1}}^{a_k} G_{12}^{(k)} f_1^{(k)} f_2^{(k)} dz \right) +$$
$$+\tau_{13}^{(k)} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f_{1,3}^{(k)} f_4^{(k)} dz - \tau_{33,1}^{(k)} \int_{a_{k-1}}^{a_k} B_{13}^{(k)} f_1^{(k)} f_6^{(k)} dz - \ddot{V}_1^{(k)} \int_{a_{k-1}}^{a_k} \rho^{(k)} f_1^{(k)} f_1^{(k)} dz = 0;$$

$$-V_{2,22}^{(k)} \int_{a_{k-1}}^{a_k} B_{22}^{(k)} f_2^{(k)} f_2^{(k)} dz - V_{2,11}^{(k)} \int_{a_{k-1}}^{a_k} G_{12}^{(k)} f_2^{(k)} f_2^{(k)} dz -$$

$$-V_{1,12}^{(k)}\left(\int\limits_{a_{k-1}}^{a_k} B_{12}^{(k)} f_1^{(k)} f_2^{(k)} dz + \int\limits_{a_{k-1}}^{a_k} G_{12}^{(k)} f_1^{(k)} f_2^{(k)} dz\right)+$$

$$+\tau_{23}^{(k)}\int\limits_{a_{k-1}}^{a_k} f_{2,3}^{(k)} f_5^{(k)} dz - \tau_{33,2}^{(k)}\int\limits_{a_{k-1}}^{a_k} B_{23}^{(k)} f_1^{(k)} f_6^{(k)} dz - \ddot{V}_2^{(k)}\int\limits_{a_{k-1}}^{a_k} \rho^{(k)} f_2^{(k)} f_2^{(k)} dz = 0;$$

$$-\tau_{13,1}^{(k)}\int\limits_{a_{k-1}}^{a_k} f_3^{(k)} f_4^{(k)} dz - \tau_{23,2}^{(k)}\int\limits_{a_{k-1}}^{a_k} f_3^{(k)} f_5^{(k)} dz + \tau_{33}^{(k)}\int\limits_{a_{k-1}}^{a_k} f_{3,3}^{(k)} f_6^{(k)} dz - \ddot{V}_3^{(k)}\int\limits_{a_{k-1}}^{a_k} \rho^{(k)} f_3^{(k)} f_3^{(k)} dz = 0;$$

$$V_1^{(k)}\int\limits_{a_{k-1}}^{a_k} f_4^{(k)} f_{1,3}^{(k)} dz + V_{3,1}^{(k)}\int\limits_{a_{k-1}}^{a_k} f_4^{(k)} f_3^{(k)} dz - \tau_{13}^{(k)}\int\limits_{a_{k-1}}^{a_k} \frac{1}{G_{13}^{(k)}} f_4^{(k)} f_4^{(k)} dz = 0\,;$$

$$V_2^{(k)}\int\limits_{a_{k-1}}^{a_k} f_5^{(k)} f_{2,3}^{(k)} dz + V_{3,2}^{(k)}\int\limits_{a_{k-1}}^{a_k} f_5^{(k)} f_3^{(k)} dz - \tau_{23}^{(k)}\int\limits_{a_{k-1}}^{a_k} \frac{1}{G_{23}^{(k)}} f_5^{(k)} f_5^{(k)} dz = 0\,; \qquad (2.3)$$

$$V_{1,1}^{(k)}\int\limits_{a_{k-1}}^{a_k} B_{13}^{(k)} f_6^{(k)} f_1^{(k)} dz + V_{2,2}^{(k)}\int\limits_{a_{k-1}}^{a_k} B_{23}^{(k)} f_6^{(k)} f_2^{(k)} dz +$$

$$+V_3^{(k)}\left(\int\limits_{a_{k-1}}^{a_k} f_6^{(k)} f_{3,3}^{(k)}\, dz\right) - \tau_{33}^{(k)}\int\limits_{a_{k-1}}^{a_k} B_{33}^{(k)} f_6^{(k)} f_6^{(k)} dz = 0;$$

за товщиною шару

$$-f_{1,3}^{(k)}\iint\limits_S\int\limits_{t_1}^{t_2} V_1^{(k)}\tau_{13}^{(k)} dtdS - f_3^{(k)}\iint\limits_S\int\limits_{t_1}^{t_2} V_{3,1}^{(k)}\tau_{13}^{(k)} dtdS + f_4^{(k)}\iint\limits_S\int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{1}{G_{13}^{(k)}}\tau_{13}^{(k)}\tau_{13}^{(k)} dtdS = 0\,;$$

$$-f_{2,3}^{(k)}\iint\limits_S\int\limits_{t_1}^{t_2} V_2^{(k)}\tau_{23}^{(k)} dtdS - f_3^{(k)}\iint\limits_S\int\limits_{t_1}^{t_2} V_{3,2}^{(k)}\tau_{23}^{(k)} dtdS + f_5^{(k)}\iint\limits_S\int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{1}{G_{23}^{(k)}}\tau_{23}^{(k)}\tau_{23}^{(k)} dtdS = 0\,;$$

$$-f_{3,3}^{(k)}\iint\limits_S\int\limits_{t_1}^{t_2} V_3^{(k)}\tau_{33}^{(k)} dtdS - f_1^{(k)}\iint\limits_S\int\limits_{t_1}^{t_2} B_{13}^{(k)} V_{1,1}^{(k)}\tau_{33}^{(k)} dtdS - f_2^{(k)}\iint\limits_S\int\limits_{t_1}^{t_2} B_{23}^{(k)} V_{2,2}^{(k)}\tau_{33}^{(k)} dtdS -$$

$$-f_6^{(k)}\iint\limits_S\int\limits_{t_1}^{t_2} B_{33}^{(k)}\tau_{33}^{(k)}\tau_{33}^{(k)} dtdS = 0\,;$$

$$-f_{4,3}^{(k)}\iint\limits_S\int\limits_{t_1}^{t_2} V_1^{(k)}\tau_{13}^{(k)} dtdS + f_1^{(k)}\left(\iint\limits_S\int\limits_{t_1}^{t_2} B_{11}^{(k)} V_{1,1}^{(k)} V_{1,1}^{(k)} dtdS +\right.$$

$$\left.+\iint\limits_S\int\limits_{t_1}^{t_2} G_{12}^{(k)} V_{1,2}^{(k)} V_{1,2}^{(k)} dtdS + \iint\limits_S\int\limits_{t_1}^{t_2} \rho^{(k)}(z)\ddot{V}_1^{(k)} V_1^{(k)} dtdS\right)+$$

$$+f_2^{(k)}\left(\iint\limits_S\int\limits_{t_1}^{t_2} B_{12}^{(k)} V_{1,1}^{(k)} V_{2,2}^{(k)}\, dtdS + \iint\limits_S\int\limits_{t_1}^{t_2} G_{12}^{(k)} V_{1,2}^{(k)} V_{2,1}^{(k)} dtdS\right) + f_6^{(k)}\iint\limits_S\int\limits_{t_1}^{t_2} B_{13}^{(k)} V_{1,1}^{(k)}\tau_{33}^{(k)} dtdS = 0\,;$$

$$-f_{5,3}^{(k)}\iint_S\int_{t_1}^{t_2} V_2^{(k)}\tau_{23}^{(k)}dtdS + f_1^{(k)}\left(\iint_S\int_{t_1}^{t_2} B_{21}^{(k)}V_{2,2}^{(k)}V_{1,1}^{(k)}dtdS + \iint_S\int_{t_1}^{t_2} G_{12}^{(k)}V_{1,2}^{(k)}V_{2,1}^{(k)}dtdS\right)+$$

$$+f_2^{(k)}\left(\iint_S\int_{t_1}^{t_2} B_{22}^{(k)}V_{2,2}^{(k)}V_{2,2}^{(k)}dtdS + \iint_S\int_{t_1}^{t_2} G_{12}^{(k)}V_{2,1}^{(k)}V_{2,1}^{(k)}dtdS + \iint_S\int_{t_1}^{t_2} \rho^{(k)}(z)\ddot{V}_2^{(k)}V_2^{(k)}dtdS\right)+$$

$$+f_6^{(k)}\iint_S\int_{t_1}^{t_2} B_{23}^{(k)}V_{2,2}^{(k)}\tau_{33}^{(k)}dtdS = 0; \qquad (2.4)$$

$$-f_{6,3}^{(k)}\iint_S\int_{t_1}^{t_2} V_3^{(k)}\tau_{33}^{(k)}dtdS + f_3^{(k)}\iint_S\int_{t_1}^{t_2} \rho^{(k)}(z)\ddot{V}_3^{(k)}V_3^{(k)}dtdS+$$

$$+f_4^{(k)}\iint_S\int_{t_1}^{t_2} V_{3,1}^{(k)}\tau_{13}^{(k)}dtdS + f_5^{(k)}\iint_S\int_{t_1}^{t_2} V_{3,2}^{(k)}\tau_{23}^{(k)}dtdS = 0,$$

а також граничні умови:

на контурі шару

$$(\sigma_{11}^{(k)}-q_{11}^{(k)})\delta V_1^{(k)}\Big|_0^a = 0\,; \quad (\sigma_{12}^{(k)}-q_{12}^{(k)})\delta V_2^{(k)}\Big|_0^a = 0\,; \quad (\sigma_{13}^{(k)}-q_{13}^{(k)})\delta V_3^{(k)}\Big|_0^a = 0\,;$$

$$(\sigma_{21}^{(k)}-q_{21}^{(k)})\delta V_1^{(k)}\Big|_0^b = 0\,; \quad (\sigma_{22}^{(k)}-q_{22}^{(k)})\delta V_2^{(k)}\Big|_0^b = 0\,; \quad (\sigma_{23}^{(k)}-q_{23}^{(k)})\delta V_3^{(k)}\Big|_0^b = 0\,;$$

на поверхнях шару

$$(\sigma_{13}^{(k)}-q_{13}^{(k)})\,\delta f_1^{(k)}\Big|_{a_{k-1}}^{a_k} = 0\,; \quad (\sigma_{23}^{(k)}-q_{23}^{(k)})\,\delta f_2^{(k)}\Big|_{a_{k-1}}^{a_k} = 0\,; \quad (\sigma_{33}^{(k)}-q_{33}^{(k)})\,\delta f_3^{(k)}\Big|_{a_{k-1}}^{a_k} = 0\,;$$

на кінцях часового інтервалу

$$\dot{V}_1^{(k)}\delta(V_1^{(k)})\Big|_{t_1}^{t_2} = 0\,; \quad \dot{V}_2^{(k)}\delta(V_2^{(k)})\Big|_{t_1}^{t_2} = 0\,; \quad \dot{V}_3^{(k)}\delta(V_3^{(k)})\Big|_{t_1}^{t_2} = 0\,.$$

Для шарнірного опирання на контурі при вільних коливаннях можна записати

$$V_1^{(k)} = \tau_{13}^{(k)} = \cos\frac{\pi m x}{a}\sin\frac{\pi n y}{b}e^{i\omega t}\,; \quad V_2^{(k)} = \tau_{23}^{(k)} = q_{2l}\sin\frac{\pi m x}{a}\cos\frac{\pi n y}{b}e^{i\omega t}\,;$$

$$V_3^{(k)} = \tau_{33}^{(k)} = q_{3l}\sin\frac{\pi m x}{a}\sin\frac{\pi n y}{b}e^{i\omega t}\,. \qquad (2.5)$$

Підставляючи вирази (2.5) до рівнянь (2.4), отримуємо

$$f_{1,3}^{(k)} = -f_3^{(k)}\left(\frac{\pi m}{a}\right) + f_4^{(k)}\left(\frac{1}{\overline{G}_{13}^{(k)}e^{z\gamma^{(k)}}}\right); \quad f_{2,3}^{(k)} = -f_3^{(k)}\left(\frac{\pi n}{b}\right) + f_5^{(k)}\left(\frac{1}{\overline{G}_{23}^{(k)}e^{z\gamma^{(k)}}}\right);$$

$$f_{3,3}^{(k)} = f_1^{(k)}B_{13}^{(k)}\left(\frac{\pi m}{a}\right) + f_2^{(k)}B_{23}^{(k)}\left(\frac{\pi n}{b}\right) + f_6^{(k)}\left(\frac{\overline{B}_{33}^{(k)}}{e^{z\gamma^{(k)}}}\right);$$

$$f_{4,3}^{(k)} = f_1^{(k)}\left[\overline{B}_{11}^{(k)}\left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 + \overline{G}_{12}^{(k)}\left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 - \overline{\rho}^{(k)}\omega^2\right]e^{z\gamma^{(k)}} +$$

$$+f_2^{(k)}\left(\bar{B}_{12}^{(k)}+\bar{G}_{12}^{(k)}\right)e^{z\gamma^{(k)}}\left(\frac{\pi m}{a}\right)\left(\frac{\pi n}{b}\right)-f_6^{(k)}B_{13}^{(k)}\left(\frac{\pi m}{a}\right); \qquad (2.6)$$

$$f_{5,3}^{(k)}=f_1^{(k)}\left(\bar{B}_{12}^{(k)}+\bar{G}_{12}^{(k)}\right)e^{z\gamma^{(k)}}\left(\frac{\pi m}{a}\right)\left(\frac{\pi n}{b}\right)+$$

$$+f_2^{(k)}\left[\bar{B}_{22}^{(k)}\left(\frac{\pi n}{b}\right)^2+\bar{G}_{12}^{(k)}\left(\frac{\pi m}{a}\right)^2-\bar{\rho}^{(k)}\omega^2\right]e^{z\gamma^{(k)}}-f_6^{(k)}B_{23}^{(k)}\left(\frac{\pi n}{b}\right);$$

$$f_{6,3}^{(k)}=-f_3^{(k)}\left(\bar{\rho}^{(k)}\omega^2\right)e^{z\gamma^{(k)}}+f_4^{(k)}\left(\frac{\pi m}{a}\right)+f_5^{(k)}\left(\frac{\pi n}{b}\right).$$

Подаючи розв’язання системи (2.6) у такому вигляді [14]:

$$f_1^{(k)}=\mu_1^{(k)}e^{(\beta^{(k)}-\gamma^{(k)})z};\quad f_2^{(k)}=\mu_2^{(k)}e^{(\beta^{(k)}-\gamma^{(k)})z};\quad f_3^{(k)}=\mu_3^{(k)}e^{(\beta^{(k)}-\gamma^{(k)})z};$$

$$f_4^{(k)}=\mu_4^{(k)}e^{\beta^{(k)}z};\quad f_5^{(k)}=\mu_5^{(k)}e^{\beta^{(k)}z};\quad f_6^{(k)}=\mu_6^{(k)}e^{\beta^{(k)}z},$$

приходимо до системи однорідних алгебраїчних рівнянь

$$-\mu_1^{(k)}\left(\beta^{(k)}-\gamma^{(k)}\right)-\mu_3^{(k)}\left(\frac{\pi m}{a}\right)+\mu_4^{(k)}\left(\frac{1}{\bar{G}_{13}^{(k)}}\right)=0;$$

$$-\mu_2^{(k)}\left(\beta^{(k)}-\gamma^{(k)}\right)-\mu_3^{(k)}\left(\frac{\pi n}{b}\right)+\mu_5^{(k)}\left(\frac{1}{\bar{G}_{23}^{(k)}}\right)=0;$$

$$\mu_1^{(k)}B_{13}^{(k)}\left(\frac{\pi m}{a}\right)+\mu_2^{(k)}B_{23}^{(k)}\left(\frac{\pi n}{b}\right)-\mu_3^{(k)}\left(\beta^{(k)}-\gamma^{(k)}\right)+\mu_6^{(k)}\bar{B}_{33}^{(k)}=0;$$

$$\mu_1^{(k)}\left(\bar{B}_{11}^{(k)}\left(\frac{\pi m}{a}\right)^2+\bar{G}_{12}^{(k)}\left(\frac{\pi n}{b}\right)^2-\bar{\rho}^{(k)}\omega^2\right)+\mu_2^{(k)}\left(\bar{B}_{12}^{(k)}+\bar{G}_{12}^{(k)}\right)\left(\frac{\pi m}{a}\right)\left(\frac{\pi n}{b}\right)-$$

$$-\mu_4^{(k)}\beta^{(k)}-\mu_6^{(k)}B_{13}^{(k)}\left(\frac{\pi m}{a}\right)=0; \qquad (2.7)$$

$$\mu_1^{(k)}\left(\bar{B}_{12}^{(k)}+\bar{G}_{12}^{(k)}\right)\left(\frac{\pi m}{a}\right)\left(\frac{\pi n}{b}\right)+\mu_2^{(k)}\left(\bar{B}_{22}^{(k)}\left(\frac{\pi n}{b}\right)^2+\bar{G}_{12}^{(k)}\left(\frac{\pi m}{a}\right)^2-\bar{\rho}^{(k)}\omega^2\right)-$$

$$-\mu_5^{(k)}\beta^{(k)}-\mu_6^{(k)}B_{23}^{(k)}\frac{\pi n}{b}=0;$$

$$-\mu_3^{(k)}\left(\bar{\rho}^{(k)}\omega^2\right)+\mu_4^{(k)}\left(\frac{\pi m}{a}\right)+\mu_5^{(k)}\left(\frac{\pi m}{b}\right)-\mu_6^{(k)}\beta^{(k)}=0.$$

Розкриваючи визначник системи (2.7), отримуємо взаємозв’язок між параметрами $\beta^{(k)}$ та ω^2. Далі із системи (2.7) отримуємо коефіцієнти $\mu^{(k)}$. Шукані функції $f_i^{(k)}$ визначаються наступним чином [14]:

$$f_1^{(k)} = \mu_{11}^{(k)} C_1^{(k)} e^{\left(\beta_1^{(k)}-\gamma\right)z} + \mu_{12}^{(k)} C_2^{(k)} e^{\left(\beta_2^{(k)}-\gamma\right)z} + \mu_{13}^{(k)} C_3^{(k)} e^{\left(\beta_3^{(k)}-\gamma\right)z} +$$

$$+\mu_{14}^{(k)} C_4^{(k)} e^{\left(\beta_4^{(k)}-\gamma\right)z} + \mu_{15}^{(k)} C_5^{(k)} e^{\left(\beta_5^{(k)}-\gamma\right)z} + \mu_{16}^{(k)} C_6^{(k)} e^{\left(\beta_6^{(k)}-\gamma\right)z};$$

$$f_2^{(k)} = \mu_{21}^{(k)} C_1^{(k)} e^{\left(\beta_1^{(k)}-\gamma\right)z} + \mu_{22}^{(k)} C_2^{(k)} e^{\left(\beta_2^{(k)}-\gamma\right)z} + \mu_{23}^{(k)} C_3^{(k)} e^{\left(\beta_3^{(k)}-\gamma\right)z} +$$

$$+\mu_{24}^{(k)} C_4^{(k)} e^{\left(\beta_4^{(k)}-\gamma\right)z} + \mu_{25}^{(k)} C_5^{(k)} e^{\left(\beta_5^{(k)}-\gamma\right)z} + \mu_{26}^{(k)} C_6^{(k)} e^{\left(\beta_6^{(k)}-\gamma\right)z};$$

$$f_3^{(k)} = \mu_{31}^{(k)} C_1^{(k)} e^{\left(\beta_1^{(k)}-\gamma\right)z} + \mu_{32}^{(k)} C_2^{(k)} e^{\left(\beta_2^{(k)}-\gamma\right)z} + \mu_{33}^{(k)} C_3^{(k)} e^{\left(\beta_3^{(k)}-\gamma\right)z} +$$

$$+\mu_{34}^{(k)} C_4^{(k)} e^{\left(\beta_4^{(k)}-\gamma\right)z} + \mu_{35}^{(k)} C_5^{(k)} e^{\left(\beta_5^{(k)}-\gamma\right)z} + \mu_{36}^{(k)} C_6^{(k)} e^{\left(\beta_6^{(k)}-\gamma\right)z};$$

$$f_4^{(k)} = \mu_{41}^{(k)} C_1^{(k)} e^{\beta_1^{(k)} z} + \mu_{42}^{(k)} C_2^{(k)} e^{\beta_2^{(k)} z} + \mu_{43}^{(k)} C_3^{(k)} e^{\beta_3^{(k)} z} +$$

$$+\mu_{44}^{(k)} C_4^{(k)} e^{\beta_4^{(k)} z} + \mu_{45}^{(k)} C_5^{(k)} e^{\beta_5^{(k)} z} + \mu_{46}^{(k)} C_6^{(k)} e^{\beta_6^{(k)} z};$$

$$f_5^{(k)} = \mu_{51}^{(k)} C_1^{(k)} e^{\beta_1^{(k)} z} + \mu_{52}^{(k)} C_2^{(k)} e^{\beta_2^{(k)} z} + \mu_{53}^{(k)} C_3^{(k)} e^{\beta_3^{(k)} z} +$$

$$+\mu_{54}^{(k)} C_4^{(k)} e^{\beta_4^{(k)} z} + \mu_{55}^{(k)} C_5^{(k)} e^{\beta_5^{(k)} z} + \mu_{56}^{(k)} C_6^{(k)} e^{\beta_6^{(k)} z};$$

$$f_6^{(k)} = \mu_{61}^{(k)} C_1^{(k)} e^{\beta_1^{(k)} z} + \mu_{62}^{(k)} C_2^{(k)} e^{\beta_2^{(k)} z} + \mu_{63}^{(k)} C_3^{(k)} e^{\beta_3^{(k)} z} +$$

$$+\mu_{64}^{(k)} C_4^{(k)} e^{\beta_4^{(k)} z} + \mu_{65}^{(k)} C_5^{(k)} e^{\beta_5^{(k)} z} + \mu_{66}^{(k)} C_6^{(k)} e^{\beta_6^{(k)} z}.$$

Формуємо розв’язувальну систему рівнянь щодо постійних інтегрування $C_i^{(k)}$ за рахунок виконання умов контакту шарів та умов на поверхнях шаруватого пакета (при визначенні частот вільних коливань навантаження на поверхні відсутні). З умов рівності нулю визначника цієї системи визначається параметр ω^2 .

§3. Підхід 2 (П2) до дослідження вільних коливань з поліноміальною апроксимацією шуканих функцій за товщиною шару.

Компоненти тензора деформацій шару конструкції з використанням введеної апроксимації (1.3) визначаються на основі наступних співвідношень:

$$e_{11}^{(k)} = U_{1l,1}^{(k)} f_{1l}^{(k)}; \quad e_{22}^{(k)} = U_{2l,2}^{(k)} f_{2l}^{(k)};$$

$$e_{33}^{(k)} = W_p^{(k)} \beta_{p,3}^{(k)}; \quad 2e_{12}^{(k)} = U_{1l,2}^{(k)} f_{1l}^{(k)} + U_{2l,1}^{(k)} f_{2l}^{(k)}; \tag{3.1}$$

$$2e_{13}^{(k)} = U_{1l}^{(k)} f_{1l,3}^{(k)} + W_{p,1}^{(k)} \beta_p^{(k)}; \quad 2e_{23}^{(k)} = U_{2l}^{(k)} f_{2l,3}^{(k)} + W_{p,2}^{(k)} \beta_p^{(k)}.$$

Напруження з урахуванням виразів для деформацій (3.1) записані на основі закону Гука:

$$\sigma_{11}^{(k)} = C_{11}^{(k)}(z) U_{1l,1}^{(k)} f_{1l}^{(k)} + C_{12}^{(k)}(z) U_{2l,2}^{(k)} f_{2l}^{(k)} + C_{13}^{(k)}(z) W_p^{(k)} \beta_{p,3}^{(k)};$$

$$\sigma_{22}^{(k)} = C_{21}^{(k)}(z) U_{1l,1}^{(k)} f_{1l}^{(k)} + C_{22}^{(k)}(z) U_{2l,2}^{(k)} f_{2l}^{(k)} + C_{23}^{(k)}(z) W_p^{(k)} \beta_{p,3}^{(k)};$$

$$\sigma_{33}^{(k)} = C_{31}^{(k)}(z) U_{1l,1}^{(k)} f_{1l}^{(k)} + C_{32}^{(k)}(z) U_{2l,2}^{(k)} f_{2l}^{(k)} + C_{33}^{(k)}(z) W_p^{(k)} \beta_{p,3}^{(k)};$$

$$\sigma_{12}^{(k)} = G^{(k)}(z) (U_{1l,2}^{(k)} f_{1l}^{(k)} + U_{2l,1}^{(k)} f_{2l}^{(k)}); \tag{3.2}$$

$$\sigma_{13}^{(k)} = G^{(k)}(z)(U_{1l}^{(k)} f_{1l,3}^{(k)} + W_{p,1}^{(k)} \beta_p^{(k)}) ; \quad \sigma_{23}^{(k)} = G^{(k)}(z)(U_{2l}^{(k)} f_{2l,3}^{(k)} + W_{p,2}^{(k)} \beta_p^{(k)}) .$$

Тут $C_{11}^{(k)}(z) = C_{22}^{(k)}(z) = C_{33}^{(k)}(z)$; $C_{12}^{(k)}(z) = C_{13}^{(k)}(z) = C_{23}^{(k)}(z)$.

Варіація потенціальної енергії деформації з використанням виразів для деформацій (3.1) та напружень (3.2) набуває вигляду

$$\begin{aligned}\delta \Pi = \iint_s \int_{a_{k-1}}^{a_k} \int_{t_1}^{t_2} \Big\{ & \Big[C_{11}^{(k)}(z) U_{1l,1}^{(k)} f_{1l}^{(k)} + C_{12}^{(k)}(z) U_{2l,2}^{(k)} f_{2l}^{(k)} + C_{13}^{(k)}(z) W_p^{(k)} \beta_{p,3}^{(k)} \Big] \delta U_{1\bar{l},1}^{(k)} f_{1\bar{l}}^{(k)} + \\ & + \Big[C_{21}^{(k)}(z) U_{1l,1}^{(k)} f_{1l}^{(k)} + C_{22}^{(k)}(z) U_{2l,2}^{(k)} f_{2l}^{(k)} + C_{23}^{(k)}(z) W_p^{(k)} \beta_{p,3}^{(k)} \Big] \delta U_{2\bar{l},2}^{(k)} f_{2\bar{l}}^{(k)} + \\ & + \Big[C_{31}^{(k)}(z) U_{1l,1}^{(k)} f_{1l}^{(k)} + C_{32}^{(k)}(z) U_{2l,2}^{(k)} f_{2l}^{(k)} + C_{33}^{(k)}(z) W_p^{(k)} \beta_{p,3}^{(k)} \Big] \delta W_{\bar{p}}^{(k)} \beta_{p,3}^{(k)} + \\ & + \Big[G_{12}^{(k)}(z) \Big(U_{1l,2}^{(k)} f_{1l}^{(k)} + U_{2l,1}^{(k)} f_{2l}^{(k)} \Big) \Big] \delta \Big(U_{1l,2}^{(k)} f_{1l}^{(k)} + U_{2l,1}^{(k)} f_{2l}^{(k)} \Big) + \\ & + \Big[G_{13}^{(k)}(z) \Big(U_{1l}^{(k)} f_{1l,3}^{(k)} + W_{p,1}^{(k)} \beta_p^{(k)} \Big) \Big] \delta \Big(U_{1l}^{(k)} f_{1l,3}^{(k)} + W_{p,1}^{(k)} \beta_p^{(k)} \Big) + \\ & + \Big[G_{23}^{(k)}(z) \Big(U_{2l}^{(k)} f_{2l,3}^{(k)} + W_{p,2}^{(k)} \beta_p^{(k)} \Big) \Big] \delta \Big(U_{2l}^{(k)} f_{2l,3}^{(k)} + W_{p,2}^{(k)} \beta_p^{(k)} \Big) \Big\} dt\, dz\, dS .\end{aligned} \tag{3.3}$$

Варіація кінетичної енергії може бути записана так:

$$\begin{aligned}\delta T^{(k)} = -\iint_S \int_{a_{k-1}}^{a_k} \rho^{(k)}(z) \Big\{ \int_{t_1}^{t_2} & \Big[\Big(\ddot{U}_{1l}^{(k)} f_{1l}^{(k)} \Big) \delta \Big(U_{1\bar{l}}^{(k)} f_{1\bar{l}}^{(k)} \Big) + \Big(\ddot{U}_{2l}^{(k)} f_{2l}^{(k)} \Big) \delta \Big(U_{2\bar{l}}^{(k)} f_{2\bar{l}}^{(k)} \Big) + \\ & + \Big(\ddot{W}_p^{(k)} \beta_p^{(k)} \Big) \delta (W_{\bar{p}}^{(k)} \beta_{\bar{p}}^{(k)}) \Big] dt - \Big[\Big(\dot{U}_{1l}^{(k)} f_l^{(k)} \Big) \delta \Big(U_{1\bar{l}}^{(k)} f_{\bar{l}}^{(k)} \Big) + \\ & + \Big(\dot{U}_{2l}^{(k)} f_l^{(k)} \Big) \delta \Big(U_{2\bar{l}}^{(k)} f_{\bar{l}}^{(k)} \Big) + \Big(\dot{W}_p^{(k)} \beta_p^{(k)} \Big) \delta \Big(W_{\bar{p}}^{(k)} \beta_{\bar{p}}^{(k)} \Big) \Big]_{t_1}^{t_2} \Big\} dz dS .\end{aligned} \tag{3.4}$$

Рівняння вільних коливань отримаємо на основі наступного варіаційного співвідношення

$$\delta \Pi - \delta T = 0 . \tag{3.5}$$

З урахуванням

$$U_{1l}^{(k)}(x,\, y,\, t) = U_{1l}^{(k)}(x,\, y) e^{-i\omega t} ; \quad U_{2l}^{(k)}(x,\, y,\, t) = U_{2l}^{(k)}(x,\, y) e^{-i\omega t} ;$$

$$W_p^{(k)}(x,\, y,\, t) = W_p^{(k)}(x,\, y) e^{-i\omega t} ,$$

виразів для потенціальної енергії (3.3) та варіації кінетичної енергії (3.4), після відповідних перетворень рівняння (3.5), отримуємо диференціальні рівняння вільних коливань

$$\begin{aligned} & -\Big(B11_{\bar{l}l}^{(k)} U_{1l,11}^{(k)} + B611_{\bar{l}l}^{(k)} U_{1l,22}^{(k)} - TU1_{\bar{l}l}^{(k)} U_{1l}^{(k)} \Big) - \Big(B12_{\bar{l}l}^{(k)} + B612_{\bar{l}l}^{(k)} \Big) U_{2l,12}^{(k)} - \\ & - \Big(SD1_{\bar{l}p}^{(k)} - CUW1_{\bar{l}p}^{(k)} \Big) W_{p,1}^{(k)} - \omega^2 BT1_{\bar{l}l}^{(k)} U_{1l}^{(k)} = 0 ; \\ & -\Big(B12_{\bar{l}l}^{(k)} + B612_{\bar{l}l}^{(k)} \Big) U_{1l,12}^{(k)} - \Big(B22_{\bar{l}l}^{(k)} U_{2l,22}^{(k)} + B622_{\bar{l}l}^{(k)} U_{2l,11}^{(k)} - TU2_{\bar{l}l}^{(k)} U_{2l}^{(k)} \Big) - \\ & - \Big(SD2_{\bar{l}p}^{(k)} - CUW2_{\bar{l}p}^{(k)} \Big) W_{p,2}^{(k)} - \omega^2 BT2_{\bar{l}l}^{(k)} U_{2l}^{(k)} = 0 ; \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\left(SD1_{\overline{p}l}^{(k)} - CUW1_{\overline{p}l}^{(k)}\right)U_{1l,1}^{(k)} + \left(SD2_{\overline{p}l}^{(k)} - CUW2_{\overline{p}l}^{(k)}\right)U_{2l,2}^{(k)} -$$

$$-\left(CC1_{\overline{p}p}^{(k)} W_{p,11}^{(k)} + CC2_{\overline{p}p}^{(k)} W_{p,22}^{(k)} - ZZ_{\overline{p}p}^{(k)} W_{p}^{(k)}\right) - \omega^2 ZT_{\overline{p}p}^{(k)} W_{p}^{(k)} = 0.$$

Числові дослідження на основі запропонованої системи будуть проведені при апроксимації модуля пружності поліномом четвертого ступеня. У разі необхідності шари конструкції можна розбивати на підшари з відповідним уточненням.

§4. Результати числових досліджень.

Тестуємо можливість застосування розробленого підходу з поліноміальною апроксимацією шуканих функцій за товщиною конструкції (П2) для дослідження вільних коливань неоднорідних плит, виготовлених з функціонально-градієнтного матеріалу на пружній основі у вигляді шару скінченної товщини на прикладі двошарової плити. Фізико-механічні характеристики матеріалу шарів плити та пружної основи такі:

$$E^{(1)}(z) = \overline{E}e^{\gamma^{(1)}z}\,; \quad E^{(2)}(z) = \overline{E}e^{\gamma^{(2)}z}\,; \quad E^{(3)} = \overline{E} \text{ (третій шар – основа);}$$

$$\rho^{(1)}(z) = \overline{\rho}e^{\gamma^{(1)}z}\,; \;\; \rho^{(2)}(z) = \overline{\rho}e^{\gamma^{(2)}z}\,; \;\; \rho^{(3)} = \overline{\rho}\,; \;\; \overline{E} = 1\,; \;\; \overline{\rho} = 1\,; \;\; \gamma^{(1)} = -5\,; \;\; \gamma^{(2)} = 5\,;$$

$$h^{(1)} = h^{(2)} = h/2\,; \; h^{(3)} = 19h/2\,; \; L/h = 5\,; \; L = a = b\,.$$

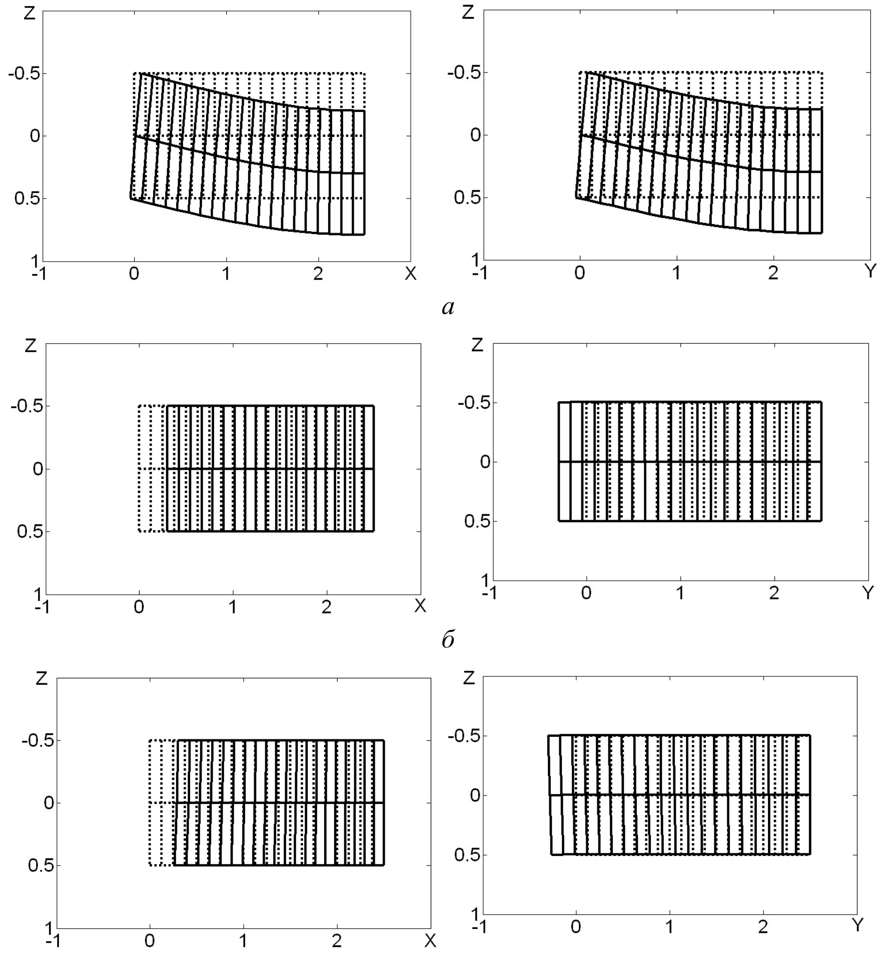
Розглянемо шарнірне опирання. Для цього випадку розв’язання з застосуванням підходу (П1) може розглядатися, як еталонне, оскільки воно не містить похибки апроксимації. При застосуванні підходу з поліноміальною апроксимацією функцій за товщиною конструкції (П2) експоненціальний закон зміни модуля пружності моделюється поліномом четвертого ступеня.

У табл. 1 представлені порівняння перших трьох частот коливань такої конструкції, отриманих за двома розробленими підходами. Розрахунок підходом з поліноміальною апроксимацією шуканих функцій за товщиною конструкції (П2) проведено з розглядом кожного шару в рамках одного підшару без урахування та з урахуванням обтиснення та з поділом кожного шару на 10 підшарів. Також наведено порівняння частот вільних коливань, отриманих підходом з аналітичним пошуком розподілу шуканих функцій за товщиною конструкції (П1), з урахуванням і без урахування інерційних властивостей основи.

Таблиця 1

$\overline{\omega}^2 = \omega^2(\overline{\rho}h^2/\overline{E})$					
Номер частоти	Розрахунок за підходом (П2). Кожен шар розглядається в рамках одного підшару, без урахування обтиснення	Розрахунок за підходом (П2). Кожен шар розглядається в рамках одного підшару	Розрахунок за підходом (П2). Кожен шар розбивається на 10 підшарів	Розрахунок за підходом (П1)	Розрахунок за підходом (П1) без урахування інерції основи $\rho^{(3)} = 0{,}00001\overline{\rho}$
1	1,8819e-001	1,6393e-001	1,5198e-001	1,5167e-001	1,8547e-001
2	3,0878e-001	3,0878e-001	3,0877e-001	3,0877e-001	3,7367e-001
3	3,6094e-001	3,6094e-001	3,6064e-001	3,6015e-001	9,3689e-001

На рис. 1 показано форму розподілу переміщень двошарової плити в таких коливаннях з урахуванням інерційних властивостей пружної основи. Основа на рисунку не наводиться. На лівих частинах рисунка представлені переміщення при $Y = b/2$, на правих частинах – переміщення при $X = a/2$. Рисунки одержані з використанням підходу (П1). Вони не відрізняються від аналогічних, отриманих підходом (П2) (не наводяться з метою економії обсягу статті).



а, *б*, *в*

Рис. 1

На першій частоті відбуваються поперечні згинальні коливання (рис. 1, *а*) На другій – планарні коливання. Плита стискається по одній координаті і розширюється по іншій, і навпаки, при цьому переміщення верхньої та нижньої поверхні плити однакові (рис. 1, *б*). На третій частоті відбуваються планарні коливання, аналогічні коливанням на другій резонансній частоті, але при цьому зовнішні поверхні одночасно коливаються у різні боки (рис. 1, *в*). На другій та третій частотах обтиснення відсутнє. Розрахунки цих частот підходами (П1) і (П2) добре узгоджуються лише у четвертій значущій цифрі, навіть при розрахунку без урахування обтиснення.

Похибка визначення квадрата першої частоти є найвищою. Розрахунок у межах одного підшару підходом (П2) призводить до похибки визначення квадрата частоти вільних коливань в 8,1%. Якщо не враховувати обтиснення, вона становить 24,1%. Відмінною особливістю підходу (П2) є можливість розгляду шару в межах кількох підшарів. При розбитті шару на 10 підшарів результати розрахунку підходом (П2) практично не відрізняються від отриманих підходом (П1), що є підтвердженням їх достовірності.

При розрахунку без урахування інерційних властивостей пружної основи на першій резонансній частоті відбуваються поперечні згинальні коливання (рис. 1, *а*), як і у разі урахування інерції пружної основи. Похибка визначення першої згинальної частоти в цьому випадку становить 22,3%. На другій резонансній частоті коливань на пружній основі без урахування інерційних властивостей відбуваються коливання, що відповідають коливанням на третій частоті з урахуванням інерційних властивостей пружної основи (рис. 1, *в*). На третій резонансній частоті при розрахунку без урахування інерційних властивостей пружної основи (рис. 2) відбуваються планарні коливання з одночасним стиском (розтягом) по осях X та Y з помітною наявністю переміщень розтягу (стиску) у поперечному напрямку. Такі коливання з урахуванням інерційних властивостей основи відбуваються на дев'ятій частоті.

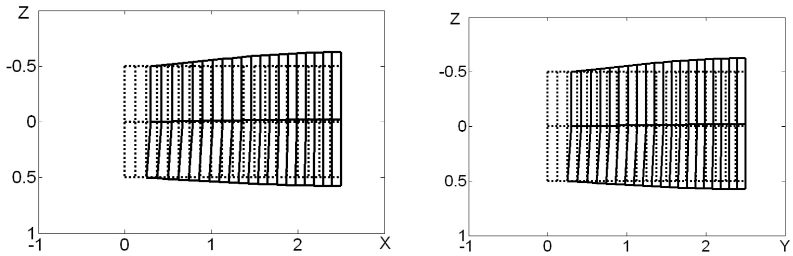
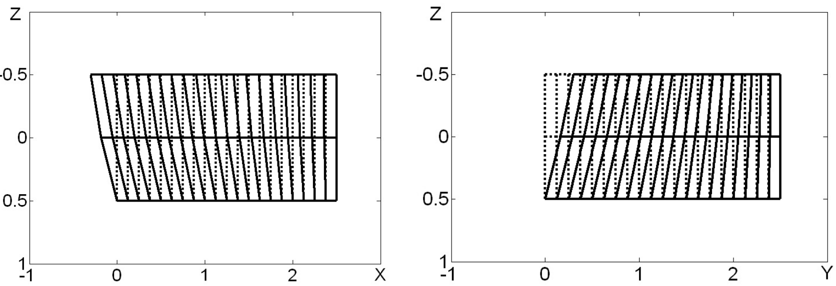


Рис. 2

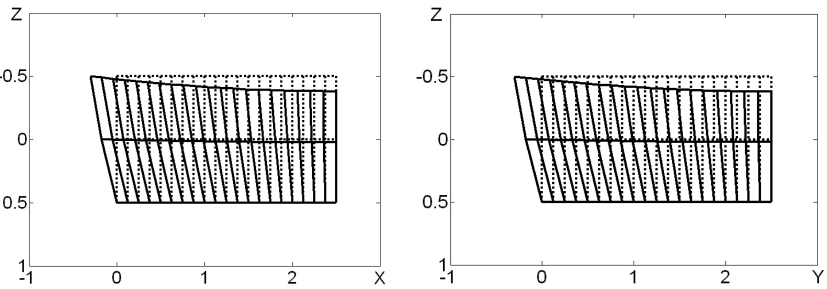
Розглянемо двошарову плиту, фізико-механічні властивості якої співпадають із розглянутими у попередньому прикладі, на абсолютно жорсткій основі. У табл. 2 представлені результати розрахунку.

Таблиця 2

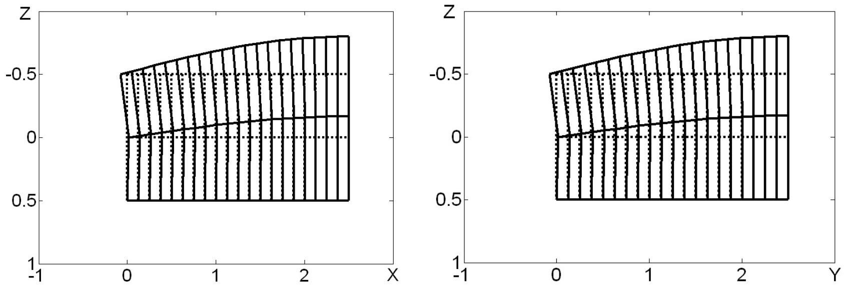
$\overline{\varpi}^2 = \omega^2(\bar{\rho}h^2 / \bar{E})$				
Номер частоти	Розрахунок за підходом (П2). Кожен шар розглядається в рамках одного підшару, без урахування обтиснення	Розрахунок за підходом (П2). Кожен шар розглядається в рамках одного підшару	Розрахунок за підходом (П2). Кожен шар розбивається на 10 підшарів	Розрахунок за підходом (П1)
1	1.2110e+000	1,21098e+000	8,26195e-001	8,23023e-001
2	1.7745e+000	1,81464e+000	1,38638e+000	1,38283e+000
3	1.4358e+001	1,88245e+000	1,79349e+000	1,79319e+000



а



б



в

Рис. 3

На рис. 3 представлені форми розподілу переміщень.

На першій частоті відбуваються планарні коливання зі стиском по одній координаті та розширенням по іншій, на другій частоті – з одночасним стиском (розтягом) по двох координатах, на третій – згинальні коливання. В даному випадку достатню точність при розгляді шару в рамках одного підшару з використанням підходу (П2) можна отримати лише при визначенні третьої частоти. Похибка визначення квадрата частоти становить 5%. Розбиваючи шари плити на 10 підшарів, отримуємо можливість практично точного опису вільних коливань із використанням підходу (П2). При цьому необхідно враховувати поперечне обтиснення.

Значення перших трьох частот коливань істотно відрізняється від реальних. Форма розподілу переміщень на третій частоті, отримана з використанням підходу без урахування обтиснення (рис. 4), не збігається з отриманою за тривимірним підходом (рис. 3, *в*). З урахуванням обтиснення такі коливання відбуваються на четвертій частоті.

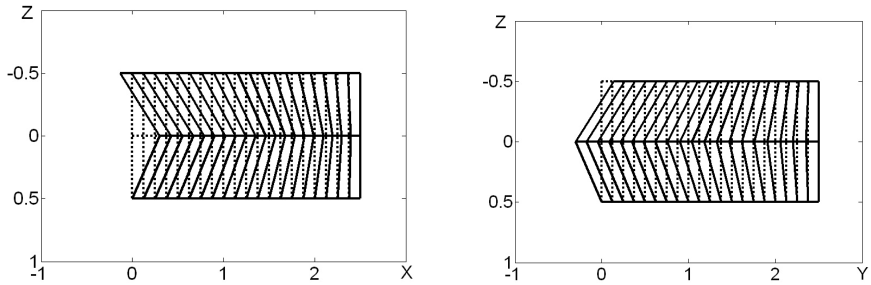


Рис. 4

Висновок.

Встановлено, що розроблений підхід з поліноміальною апроксимацією шуканих функцій за товщиною конструкції при дослідження вільних коливань плити з функціонально-градієнтного матеріалу на пружній основі у вигляді шару скінченної товщини забезпечує достатню точність при розгляді кожного шару в межах одного підшару, за виключенням визначення квадрату частоти згинальних коливань. Застосування підходу без урахування обтиснення у цьому випадку призводить до значної похибки. Нехтування інерційними властивостями основи може призвести до помилок як кількісного, так і якісного характеру при визначенні параметрів вільних коливань. Розрахунок плит на абсолютно жорсткій основі при застосуванні підходу з поліноміальною апроксимацією без розбиття шарів на підшари може містити значну похибку. Застосування підходів потрібно проводити з врахуванням обтиснення. Розбиття шарів на десять підшарів призводить до підвищення точності розрахунку, що практично відповідає підходу з аналітичним пошуком розподілу функцій за товщиною плити.

Р Е З Ю М Е. Розроблено два підходи до дослідження вільних коливань функціонально-градієнтних плит в тривимірній постановці. Перший підхід не містить похибки апроксимації шуканих функцій за товщиною плити. Розподіл модуля пружності у першому підході моделюється експоненціальним законом. В другому підході використовується поліноміальна апроксимація шуканих функцій за товщиною плити. Зміна модуля пружності відбувається по поліному четвертого ступеня. Особливістю другого підходу є віднесення шуканих функцій до зовнішніх поверхонь шарів, що дозволяє розбивати шари на підшари з відповідним уточненням результатів розрахунків. Розроблені підходи застосовано для аналізу вільних коливань плити з функціонально-градієнтного матеріалу на жорсткій основі та на основі у вигляді шару скінченної товщини.

К Л Ю Ч О В І С Л О В А : функціонально-градієнтний матеріал, тривимірна постановка, аналітичний розв'язок, вільні коливання, інерційні властивості пружної основи, жорстка основа.

1. *Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Китайгородский А.Б., Шинкарь А.И.* Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. – Київ: Наук. думка, 1986.–172 с.
2. *Жилин П.А., Ильичева Т.П.* Спектр и формы колебаний прямоугольного параллелепипеда, полученных на основе трехмерной теории упругости и теории пластин // Изв. АН СССР. Механика композитных тел.– 1980. – № 2.–С. 94 – 103.
3. *Москаленко В.Н.* О собственных колебаниях трехслойных плит // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. – 1962. – № 4. – С. 125 – 130.
4. *Рассказов А.О., Соколовская И.И., Шульга Н.А.* Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек. – Київ: Вища школа, 1986.–191 с.
5. *Cheng Z.Q., Batra R.C.* Exact correspondence between eigenvalues of membranes and functionally graded simply supported polygonal plates // J. Sound and Vibration. – 2000. – **229**, N 4. – P. 879 – 895.
6. *Dastjerdi S., Akgöz B.* New static and dynamic analyses of macro and nano FGM plates using exact three-dimensional elasticity in thermal environment // Composite Struct.– 2018. – **192**, N 5. – P. 626 – 641.
7. *Efraim E., Eisenberger M.* Exact vibration analysis of variable thickness thick annular isotropic and FGM plates // J. Sound and Vibration. – 2007. – **299**, N 4 – 5. – P. 720 – 738.
8. *Fu T., Chen Z., Yu H., Wang Z., Liu X.* Mechanical behavior of laminated functionally graded carbon nanotube reinforced composite plates resting on elastic foundations in thermal environments // J. Composite Materials. – 2019. – **53**, N 9.– P. 1159 – 1179.
9. *Grigorenko A.Ya., Efimova T.L., Korotkikh Yu.A.* Free Axisymmetric Vibrations of Cylindrical Shells Made of Functionally Graded Materials // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 6. – P. 654 – 663.
10. *Kitipornchai S., Yang J., Liew K.M.* Semi-analytical solution for nonlinear vibration of laminated FGM plates with geometric imperfections // Int. J. Solids and Struct. – 2004. – **41**, N 9 – 10. – P. 2235 – 2257.
11. *Kumar J.S., Reddy B.S., Reddy S.E., Kumar K.V.* Higher order theory for free vibration analysis of functionally graded material plates // ARPN J. Eng. Appl. Sci. – 2011. – **6**, N 10. – P. 105 – 111.
12. *Li Q., Iu V.P., Kou K.P.* Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates // J. Sound and Vibration. – 2008. – **311**, N 1. – 2. – P. 498 – 515.
13. *Liang X., Wang Z., Wang L., Liu G.* Semi-analytical solution for three-dimensional transient response of functionally graded annular plate on a two parameter viscoelastic foundation // J. Sound and Vibration. – 2014. – **333**, N 12. – P. 2649 – 2663.
14. *Marchuk A.V.* Three-Dimensional Analytic Solution for a Hinged Slab on an Elastic Half-Space // Int. Appl. Mech. – 1997. – **33**, N 10. – P. 794 –798.
15. *Marchuk A.V.* Determination of the Natural Frequencies of Vibration of Nonuniform Slabs // Int. Appl. Mech. – 1999. – **35**, N 2. – P. 152 – 158.
16. *Marchuk A.V., Piskunov V.G.* Statics, vibrations and stability of composite panels with gently curved orthotropic layers. 1. Statics and vibrations // Mech. Composite Materials. – 1999. – **35**, N 4. – P.285 – 292.
17. *Srinivas S., Rao A.K., Joga Rao C.V.* Flexure of Simple Supported Thick Homogeneous and Laminated Rectangular Plates // ZAMM. – 1969. – **49**. – P. 449 – 458.
18. *Tan P., Nguyen-Thanh N., Rabczuk T., Zhou K.* Static, dynamic and buckling analyses of 3D FGM plates and shells via an isogeometric-meshfree coupling approach // Composite Struct. – 2018. – 198. – P. 35 – 50.

Надійшла 15.05.2019 Затверджена до друку 13.12.2022