

Н. В. Жоголева, В. Ф. Щербак

ВИЗНАЧЕННЯ ЗОВНІШНЬОГО ГАРМОНІЧНОГО ВПЛИВУ
НА АВТОКОЛИВАЛЬНУ СИСТЕМУ

*Інститут прикладної математики і механіки НАНУ,
вул. Генерала Батюка, 19, 84116, Донецька область, Слов'янськ, Україна;
e-mail: zhogoleva.nadia@gmail.com; scherbakv54@gmail.com*

Abstract. The problem of identifying the coefficients of a harmonic external force with the known frequency acting on the self-oscillating system of a general type (Lienard oscillator) is considered. A method of constructing the nonlinear identifier is proposed, which allows obtaining the estimates of unknowns variables based on the results of measuring the output signals (phase vector of the system) in real time. The basis of the methodology is the method of synthesis of the invariant relations, which allows finding the dependencies between variables of a specially constructed extended dynamic system and determining the unknowns as the functions of known quantities. The asymptotic convergence of estimates of unknown coefficients to their true value is proved. The results of the numerical simulation of the identification process for the Duffing oscillator are presented.

Key words: Lienard oscillator, harmonic perturbation, identification, invariant relations.

Вступ.

Проблема оцінювання частоти, амплітуди та фази гармонічної сили, яка діє на механічну систему, є предметом досліджень значної кількості наукових робіт, виконаних протягом тривалого часу, в тому числі і недавніх [15]. Причиною цього є можливість використання відповідних методик в різних теоретичних та інженерних дисциплінах, наприклад, для механічних систем перетворення кінетичної енергії коливань, у обертових механічних процесах, в задачах віброізоляції періодичних складових шуму через обертові механізми, для компенсації гармонічних збурень в алгоритмах автоматичного керування тощо. Метод найменших квадратів, Фур'є аналіз, перетворення Лапласа можуть використовуватись при дослідженні відповідних задач. Однак ці методи не придатні для безпосереднього застосування в алгоритмах керування з обробкою даних у режимі реального часу.

Незважаючи на відносну простоту задачі визначення частоти, амплітуди та фази «чистої синусоїди», підходи до їх розв'язання використовують досить складний апарат сучасних методів прикладної математики. Алгоритм нелінійного представлення синусоїдального сигналу з подальшим застосуванням нелінійного спостерігача Луюнбергера розглянуто у статті [12], де на базі загальної теорії нелінійного спостереження автори будують досить складну конструкцію відповідного спостерігача. В роботі [11] після представлення синусоїдального сигналу як лінійно параметризованої форми розроблено кілька адаптивних законів, в яких з використанням апарату теорії ковзного режиму керування отримано оцінки параметрів синусоїди. Для мультисинусоїдального сигналу в [7] побудовано оцінювач з використання стандартного градієнтного алгоритму. Задача ідентифікації невідомої частоти синусоїдального збурення, яке

враховується в лінійному диференційному рівнянні першого порядку, розв'язується в роботі [1]. Слід зазначити роботи [6, 13], в яких також представлено підхід, оснований на побудові спостерігачів станів, але вже для визначення параметрів періодичної сили, яка діє на лінійний осцилятор. На першому етапі оцінюються коефіцієнти ряду Фур'є, який наближає періодичну силу з відомою частотою. На другому етапі пропонується за результатами першого етапу побудувати спостерігач вже для невідомої частоти сигналу.

У запропонованій роботі невідома гармонічна сила задається формулою $u(t) = a_1 + a_2 \cos \omega t + a_3 \sin \omega t$. Передбачається, що ця сила діє на нелінійний осцилятор. Частота сили ω та параметри моделі осцилятора є відомими. Потрібно знайти коефіцієнти a_i , $i = (1, 3)$.

З точки зору теорії керування виникає задача ідентифікації, яка полягає у визначенні невідомих параметрів системи за інформацією про її вихід – відомої інформації про рух. Можливість розв'язання задачі ідентифікації (властивість ідентифікованості) істотно залежить від аналітичної структури правих частин рівнянь динаміки та доступної інформації [3]. Для розв'язання самої задачі ідентифікації в роботі використано метод інваріантних співвідношень [4], який було розроблено в аналітичній механіці та призначено, зокрема, для пошуку частинних розв'язків (залежностей між змінними) в задачах динаміки твердого тіла з нерухомою точкою. Модифікація цього методу до проблем теорії спостереження дозволила встановити додаткові зв'язки між відомими і невідомими величинами вихідної системи, що виникають в процесі руху її розширеної моделі [2, 5, 14]. Варто зазначити, що більш загальний підхід, який формує відповідний метод розв'язання задач спостереження для нелінійних динамічних систем завдяки синтезу інваріантного многовиду в просторі розширеної системи, було запропоновано в роботах [8, 9] як певну модифікацію методу стабілізації нелінійних систем *I&I* (Input and Invariance).

Метою даної роботи є поширення методу синтезу інваріантних співвідношень на задачі ідентифікації параметрів нелінійних осциляторів. В ній розглянуто відносно простий випадок задачі ідентифікації, а саме, коли виходом вихідної системи є повний фазовий вектор, а параметри самої системи є частково відомими. Узагальнення на більш складні конструкції систем вхід – вихід, у тому числі із залученням інформації про вихід, отриманий на декількох траєкторіях [3], можуть бути проведені з використанням описаного нижче підходу.

§1. Задача ідентифікації зовнішньої гармонічної сили.

В рамках моделі автоколивної системи будемо розглядати рівняння вимушеного руху осцилятора Льєнара – диференціальне рівняння другого порядку, яке моделює коливання матеріальної точки

$$\ddot{x}(t) + f(x(t))\dot{x}(t) + g(x(t)) = u(t). \quad (1)$$

Тут $x(t)$ – відхилення точки від початку координат, $\dot{x}(t)$ – швидкість відхилення, множник $f(x(t))$ характеризує закон дисипації, а функція $g(x(t))$ – потенціальні сили. Зовнішній вплив на осцилятор задається гармонічною функцією

$$u(t) = a_1 + a_2 \cos \omega t + a_3 \sin \omega t.$$

Зауваження. Багато питань стосовно рівняння (1) щодо стійкості, обмеженості коливань, існування періодичних розв'язків, наявності граничних циклів тощо, досліджено протягом останніх десяти років. Не розглядаючи ті чи інші якісні властивості рівняння Льєнара, для задачі ідентифікації зроблено припущення, що це рівняння моделює процес перманентних коливань реального об'єкту, отже його розв'язок – функції $x(t)$, $\dot{x}(t)$ коректно визначені на $[0, \infty)$ та є обмеженими функціями часу.

Запишемо вихідне рівняння (1) у формі системи в просторі станів, зробивши попередньо заміну змінних Льєнара за формулами

$$x_1(t) = x(t); \quad x_2(t) = \dot{x}(t) + F(x(t)),$$

де $F(x(t)) = \int_0^x f(\sigma) d\sigma$. В результаті маємо систему

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) - F(x_1(t)); \quad \dot{x}_2(t) = -g(x_1(t)) + u(t). \quad (2)$$

Далі будемо вважати, що значення фазового вектора $x_1(t)$, $x_2(t)$ системи (2) вимірюються в процесі коливань осцилятора, тобто є відомими функціями часу.

Задача ідентифікації полягає у визначенні невідомих параметрів за інформацією про рух осцилятора. За припущенням, такою інформацією є вихід – фазовий вектор $x_1(t)$, $x_2(t)$, а також ті величини, які можуть бути отримані з використанням тільки значень виходу. Зокрема, далі вважатимемо відомим будь-який розв’язок задачі Коші для довільної системи диференціальних рівнянь

$$\dot{\xi} = U(t, \xi, x_1(t), x_2(t)); \quad \xi(0) = \xi_0 \in \mathbb{R}^3, \quad (3)$$

в якій на праву частину системи $U(t, \xi, x_1(t), x_2(t))$ поки що накладено єдине обмеження, а саме: ці функції повинні задовольняти достатні умови теорем існування та єдиності розв’язків для $t \in [0, \infty)$.

Ідея методу синтезу інваріантних співвідношень, який далі буде використано для параметричної ідентифікації, полягає в формуванні додаткових зв’язків між «відомими» величинами $x_1(t)$, $x_2(t)$, $\xi(t)$ та невідомими параметрами a_i , $i = \overline{1, 3}$ вихідної системи, які виникають на деяких траєкторіях розширеної системи диференціальних рівнянь (2), (3).

В наступних параграфах за цим методом буде розглянута **Задача параметричної ідентифікації**: знайти асимптотично точні оцінки коефіцієнтів a_1 , a_2 , a_3 за даними про вихід $x_1(t)$, $x_2(t)$ системи диференціальних рівнянь (2).

§2. Побудова інваріантних співвідношень.

Будемо шукати додаткові співвідношення на траєкторіях розширеної системи диференціальних рівнянь (2), (3) у вигляді

$$a_i = \Psi_i(t, x_1, x_2) + \xi_i, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (4)$$

Як і розв’язок ξ_i системи диференціальних рівнянь (3), функції $\Psi_i(t, x_1, x_2)$ поки що невизначені. Передбачається, що ці функції є неперервно диференційованими функціями відносно своїх аргументів. Введемо у розгляд відхилення $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ від співвідношень (4), зробивши у вихідних рівняннях заміну параметрів a_i за формулами

$$\varepsilon_i = a_i - \Psi_i(t, x_1, x_2) - \xi_i, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (5)$$

Якщо буде встановлено, що при зафіксованих тим чи іншим чином функціях $\xi_i(t)$, $\Psi_i(t, x_1, x_2)$ на деяких траєкторіях розширеної системи диференціальних рівнянь має місце тотожність $\varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t) = \varepsilon_3(t) \equiv 0$, то саме на цих траєкторіях інваріантні співвідношення (4) визначатимуть значення a_i , $i = \overline{1, 3}$.

З урахуванням заміни (5) рівняння $\dot{a}_i = 0$ перетворюються в диференціальні рівняння відносно відхилень

$$\dot{\varepsilon}_i = -\Psi'_{i_{x_1}}(x_2 - F(x_1)) - \Psi'_{i_{x_2}}(X + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \cos \omega t + \varepsilon_3 \sin \omega t) - \Psi'_{i_t} - \dot{\xi}_i, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (6)$$

де $X = -g(x_1) + \Psi_1 + \xi_1 + (\Psi_2 + \xi_2) \cos \omega t + (\Psi_3 + \xi_3) \sin \omega t$. Тут $\Psi'_{i_{x_j}} = \frac{\partial \Psi_i(t, x_1, x_2)}{\partial x_j}$;
 $\Psi'_{i_t} = \frac{\partial \Psi_i(t, x_1, x_2)}{\partial t}$, $i = \overline{1, 3}$, $j = 1, 2$.

На першому етапі схеми визначимо структуру допоміжної системи диференціальних рівнянь. Для цього вимагатимемо, щоб рівняння (3) відносно $\xi_i(t)$, $i = \overline{1, 3}$ мали вигляд

$$\dot{\xi}_i = -\Psi'_{i_{x_1}}(x_2 - F) - \Psi'_{i_{x_2}}X - \Psi'_{i_t}. \quad (7)$$

За таким вибором отримуємо, що в разі $\xi_i(t)$, $i = \overline{1, 3}$ є будь-яким розв'язком задачі Коші для цієї системи, то рівняння відносно відхилень $\varepsilon_i(t)$, $i = \overline{1, 3}$ стають однорідними

$$\dot{\varepsilon}_i = -\Psi'_{i_{x_2}}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \cos \omega t + \varepsilon_3 \sin \omega t), \quad i = \overline{1, 3}, \quad (8)$$

отже допускають тривіальний розв'язок $\varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t) = \varepsilon_3(t) \equiv 0$.

Таким чином, отримано сім'ю додаткових систем виду (7), залежну від поки що вільних функцій $\Psi_i(t, x_1, x_2)$, $i = \overline{1, 3}$ та їхніх похідних. Кожна з них, разом з вихідною системою (2), перетворює на деяких траєкторіях рівності (4) в інваріантні співвідношення, за якими безпосередньо можуть бути знайдені параметри a_1, a_2, a_3 . На інших траєкторіях системи (2), (7) з'являються ненульові доданки $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$.

§3. Стабілізації відхилень.

Природньо виникає питання про вибір вільних функцій $\Psi_i(t, x_1, x_2)$, $i = \overline{1, 3}$ таким чином, щоб доданки $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ в формулах (5) прямували до нуля, тобто тривіальний розв'язок рівнянь у відхиленнях (8) мав би властивість глобальної асимптотичної стійкості. Відповідь на це питання становить зміст другого етапу запропонованої схеми ідентифікації. Оскільки існує багато підходів до вирішення проблеми стабілізації неавтономних систем, то дослідження на цьому етапі в загальному випадку передбачають, що вибір вільних функцій здійснюється для кожної конкретної динамічної системи окремо в залежності від аналітичного виду $f(x_1)$, $g(x_1)$, $u(t)$.

Для автономного осцилятора (2), коли зовнішня змушуюча сила не залежить від часу t , один із таких підходів може бути пов'язаний зі спробою використання принципу інваріантності ЛаСалля [10]. В нашому випадку рівняння (8) залежать від часу, але в разі, коли ця залежність, включаючи залежність від часу $\Psi'_{i_{x_2}}(t, x_1, x_2)$, $i = \overline{1, 3}$, визначається функціями $\cos \omega t$, $\sin \omega t$, то динамічне розширення рівнянь у відхиленнях диференціальними рівняннями

$$\dot{x}_3 = -\omega x_4; \quad \dot{x}_4 = \omega x_3$$

перетворює їх в автономну систему

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_i &= -\Psi'_{i_{x_2}}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 x_3 + \varepsilon_3 x_4); \\ \dot{x}_3 &= -\omega x_4; \quad \dot{x}_4 = \omega x_3, \quad i = \overline{1, 3}. \end{aligned} \quad (9)$$

Об'єктом дослідження в цьому випадку є система диференціальних рівнянь (9), фазовий вектор якої $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, x_3, x_4) \in \Omega \subset \mathbb{R}^5$. Наведемо основні кроки відповідної схеми стабілізації відхилень.

Введемо у розгляд знаковизначену функцію

$$V = \frac{1}{2}(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2)$$

та запишемо її похідну в силу системи (8)

$$\dot{V} = -(\varepsilon_1 \Psi'_{1_{x_2}} + \varepsilon_2 \Psi'_{2_{x_2}} + \varepsilon_3 \Psi'_{3_{x_2}})(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 x_3 + \varepsilon_3 x_4).$$

Виберемо функції, які залишались вільними, з наступної множини функцій

$$\Psi_1 = x_2 + \Phi_1; \quad \Psi_2 = x_2 x_3(t) + \Phi_2; \quad \Psi_3 = x_2 x_4(t) + \Phi_3, \quad (10)$$

де $\Phi_i(t, x_1)$, $i = \overline{1, 3}$ – довільні функції змінних t , x_1 , які далі, без обмеження загальності, вважатимемо рівними нулю. За таких функцій похідна від V стає негативно напіввизначеною

$$\dot{V} = -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 x_3 + \varepsilon_3 x_4)^2 \leq 0, \quad (11)$$

а рівняння (9) приймають вигляд

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &= -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 x_3 + \varepsilon_3 x_4); \quad \dot{\varepsilon}_2 = -x_3(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 x_3 + \varepsilon_3 x_4); \\ \dot{\varepsilon}_3 &= -x_4(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 x_3 + \varepsilon_3 x_4); \quad \dot{x}_3 = -\omega x_4; \quad \dot{x}_4 = \omega x_3. \end{aligned} \quad (12)$$

Покажемо, що нерівність (11) є достатньою умовою для асимптотичного прямування змінних $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$, $\varepsilon_3(t)$ до нуля.

Для цього скористаємося принципом інваріантності ЛаСалля. Фазовий вектор системи (12) – $(\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t), \varepsilon_3(t), x_3(t), x_4(t)) \in \Omega$. При цьому змінні $x_3(t)$, $x_4(t)$ належать одиничному колу S_x , а значення відхилень, згідно нерівності (11), лежать в середині сфери S_ε , де

$$S_x = \{(x_3, x_4) : x_3^2 + x_4^2 = 1\}; \quad S_\varepsilon = \{\varepsilon : \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 \leq \varepsilon_1(0)^2 + \varepsilon_2(0)^2 + \varepsilon_3(0)^2\}.$$

Звідси випливає, що множина $\Omega = S_\varepsilon \times S_x$ є компактною і позитивно інваріантною відносно (12).

Позначимо через $d(t) = \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t)x_3(t) + \varepsilon_3(t)x_4(t)$. Нехай E – множина всіх точок $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, x_3, x_4) \in \Omega$, в яких $\dot{V} = -d(t)^2 = 0$. Зрозуміло, що множина $M = \{0, 0, 0, x_3, x_4\}$ є інваріантною в E . Якщо при цьому M буде найбільшою інваріантною множиною, то, за теоремою ЛаСалля, всі розв'язки з початковими значеннями в Ω будуть з часом прямувати до M , тобто

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_i(t) = 0, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (13)$$

Доведемо, що M є найбільшою інваріантною множиною в E . А саме, припустимо протилежне: $d(t) = 0$ і в той же час множина E містить траєкторії з ненульовими відхиленнями $\varepsilon_i(t)$, $i = \overline{1, 3}$. Оскільки $d(t) = 0$, то з виду диференціальних рівнянь (12)

впливає, що ці ненульові відхилення є константами: $\varepsilon_i(t) = \varepsilon_i^*$, $i = \overline{1, 3}$. Отже, наше припущення призводить до існування співвідношення

$$d(t) = \varepsilon_1^* + \varepsilon_2^* x_3(t) + \varepsilon_3^* x_4(t) \equiv 0.$$

З урахуванням того, що $x_3 = \cos \omega t$, $x_4 = \sin \omega t$, остання рівність означає, що функції $\{1, \cos \omega t, \sin \omega t\}$ є лінійно залежними, що неможливо. Отримане протиріччя доводить твердження, що множина M є найбільшою інваріантною множиною в E , а відтак, за теоремою ЛаСалля, виконано умови (13).

§4. Остаточний вигляд ідентифікатора.

Таким чином зафіксовано всі ступені свободи в запропонованому алгоритмі ідентифікації, а саме: структура допоміжних диференціальних рівнянь була задана рівняннями (7), а вибір функцій $\Psi_i(t, x_1, x_2)$, $i = \overline{1, 3}$ за формулами (10) формує остаточний вигляд цих рівнянь.

За такою схемою доданки $\Psi_i(t, x_1, x_2)$, $\xi_i(t)$ в формулах (5) стають відомими величинами, відхилення $\varepsilon_i(t)$, асимптотично прямують до нуля, а це дозволяє безпосередньо отримати асимптотичні оцінки шуканих параметрів a_i , $i = \overline{1, 3}$. Тим самим доведено твердження, сформульоване нижче.

Твердження. Формули

$$\hat{a}_1 = x_2(t) + \xi_1(t); \quad \hat{a}_2 = x_2(t) \cos \omega t + \xi_2(t); \quad \hat{a}_3 = x_2(t) \sin \omega t + \xi_3(t),$$

де $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, $\xi_3(t)$ будь-який розв'язок задачі Коші для системи диференціальних рівнянь

$$\dot{\xi}_1 = B(t, x, \xi); \quad \dot{\xi}_2 = B(t, x, \xi) \cos \omega t + \omega x_2 \sin \omega t; \quad \dot{\xi}_3 = B(t, x, \xi) \sin \omega t - \omega x_2 \cos \omega t,$$

де $B(t, x, \xi) = g(x_1) - x_2 - \xi_1 - (x_2 \cos \omega t + \xi_2) \cos \omega t - (x_2 \sin \omega t + \xi_3) \sin \omega t$ формують асимптотичні оцінки параметрів a_1 , a_2 , a_3 .

§5. Обчислювальний експеримент. Осцилятор Дуффінга.

Як приклад застосування запропонованої схеми ідентифікації розглянемо результати числового моделювання процесу визначення параметрів зовнішньої гармонічної сили, під дією якої осцилятор Дуффінга здійснює вимушені коливання. Модель осцилятора Дуффінга – це фізична модель коливальної системи, яка складається з матеріальної точки, прикріпленої до нелінійної пружини, та лінійного амортизатора. Рівняння вимушених коливань запишемо у вигляді

$$\ddot{x}(t) + \delta \dot{x}(t) + \alpha x(t) + \beta x^3(t) = a_1 + a_2 \cos \omega t + a_3 \sin \omega t. \quad (14)$$

Тут $x(t)$ – зміщення матеріальної точки; δ характеризує дисипацію в системі; коефіцієнти α і β визначають, відповідно, лінійну та нелінійну жорсткість; ω – кутова частота зовнішньої спонукальної (змушуючої) сили; a_1 , a_2 , a_3 – невідомі параметри. Зауважимо, що якщо β від'ємна, то динаміка траєкторій є тривіальною, оскільки всі розв'язки диференціального рівняння (14) експоненціально прямують до нескінченності. Отже, розглядається випадок $\beta > 0$. Як і в загальному випадку передбачаємо, що при таких параметрах розв'язки (14) коректно визначені на $[0, \infty)$.

Перепишемо рівняння (14) у формі системи в просторі станів, зробивши заміну змінних Ляпуна. Маємо

$$\dot{x}_1 = x_2 - \delta x_1; \quad \dot{x}_2 = -\alpha x_1 - \beta x_1^3 + a_1 + a_2 \cos \omega t + a_3 \sin \omega t. \quad (15)$$

Запропонована в роботі схема розв'язання задачі ідентифікації була чисельно промодельована для широкого спектру початкових умов і параметрів динамічної системи (15). Сама ця система використана для отримання виходу $x_1(t)$, $x_2(t)$, за яким розв'язувалась задача побудови асимптотичних оцінок a_1 , a_2 , a_3 .

У наведених результатах розрахунку її параметри наступні:

$$\delta = 0,5; \quad \alpha = 4,0; \quad \beta = 0,5; \quad \omega = 2,0; \quad a_1 = 0,5; \quad a_2 = 1,0; \quad a_3 = 1,5.$$

Початкові умови для відповідної задачі Коші: $x(0) = (-1, 0; 1, 0)$; початкові умови для змінних додаткової системи диференціальних рівнянь обираються довільним чином, в даному випадку $\xi(0) = (0, 5; 0, 5; 0, 5)$ для рис. 1 і $\xi(0) = (0, 0; 0, 0; 15, 0)$ для рис. 2. Сама додаткова система для осцилятора з такими параметрами має вигляд

$$\dot{\xi}_1 = B(t, x, \xi); \quad \dot{\xi}_2 = B(t, x, \xi) \cos 2t + 2x_2 \sin 2t; \quad \dot{\xi}_3 = B(t, x, \xi) \sin 2t - 2x_2 \cos 2t,$$

де $B(t, x, \xi) = 4x_1 - 0,5x_1^3 - x_2 - \xi_1 - (x_2 \cos 2t + \xi_2) \cos 2t - (x_2 \sin 2t + \xi_3) \sin 2t$.

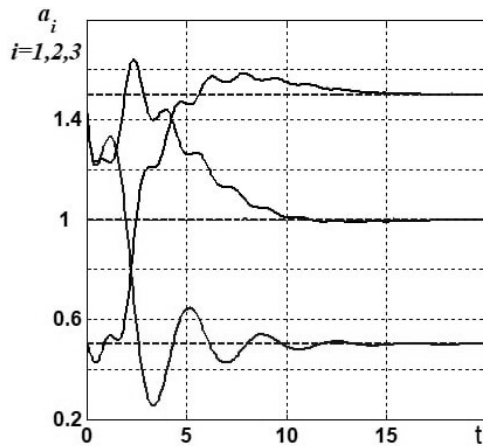


Рис. 1

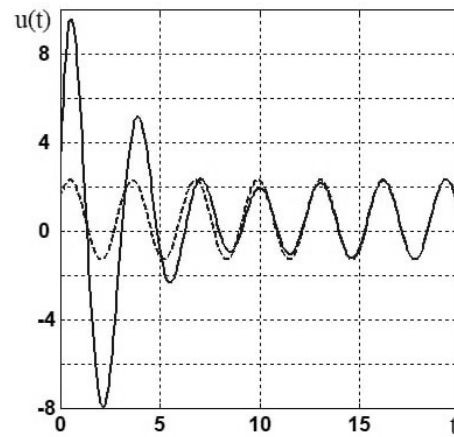


Рис. 2

На рис. 1 зображено асимптотичне оцінювання параметрів a_1 , a_2 , a_3 осцилятора Дуффінга, де суцільною лінією зображено графіки функцій

$$\hat{a}_1 = x_2(t) + \xi_1(t); \quad \hat{a}_2 = x_2(t) \cos \omega t + \xi_2(t); \quad \hat{a}_3 = x_2(t) \sin \omega t + \xi_3(t),$$

які в повній відповідності до твердження §4 асимптотично прямують з часом до значень шуканих параметрів (які на графіку зображені штриховою лінією).

На рис. 2 зображено відстеження зовнішнього сигналу, де штриховою лінією зображено графік зовнішньої сили $a_1 + a_2 \cos \omega t + a_3 \sin \omega t$, а суцільною лінією – його апроксимацію за результатом моделювання $\hat{a}_1 + \hat{a}_2 \cos \omega t + \hat{a}_3 \sin \omega t$. Як видно з цих графіків результати моделювання підтверджують ефективність запропонованого способу асимптотичного оцінювання параметрів зовнішньої гармонічної сили.

Висновок.

Запропоновано новий метод асимптотичного оцінювання параметрів гармонічного навантаження нелінійного осцилятора шляхом побудови ідентифікатора розширеної динамічної моделі. Методика досліджень ґрунтується на синтезі інваріантних співвідношень для вихідної та додаткової динамічної системи. Розроблений алгоритм

може бути використаний в задачах компенсації збурень та інерційних прискорень на рухомих об'єктах, які визвано гармонічною зовнішньою силою. В подальшому розвиток методу пов'язано з оцінкою параметрів багаточастотного зовнішнього впливу.

Автори частково підтримані грантом EFDS-FL2-08 Європейської федерації академії наук і гуманітарних наук (ALLEA).

РЕЗЮМЕ. Розглянуто задачу ідентифікації коефіцієнтів, які визначають дію зовнішньої гармонічної сили з відомою частотою на автоколивальну систему загального виду (осцилятор Льєнара). Запропоновано метод побудови нелінійного ідентифікатора, який дозволяє отримувати оцінки невідомих за результатами вимірювання вихідних сигналів (фазового вектора системи) в реальному масштабі часу. В основу методології покладено метод синтезу інваріантних співвідношень, який дозволяє знаходити залежності між змінними спеціально побудованої розширеної динамічної системи та визначати невідомі як функції від відомих величин. Доведено асимптотичну збіжність оцінок коефіцієнтів зовнішнього впливу до їх справжнього значення. Представлено результати чисельного моделювання процесу ідентифікації для моделі осцилятора Дуффінга.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: осцилятор Льєнара, гармонічні збурення, ідентифікація, інваріантні співвідношення.

1. Беззубов В.А., Бобцов А.А. Алгоритм идентификации параметров неизмеряемого синусоидального возмущения с нестационарной амплитудой // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2020. – 21, N 8. – Р. 464 – 469.
2. Жоголева Н.В., Щербак В.Ф. Синтез дополнительных соотношений в обратных задачах управления // Труды ИПММ НАН Украины. – 2015. – 29. – С. 69 – 76.
3. Ковалев А.М., Щербак В.Ф. Управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость динамических систем – Киев: Наук. думка. – 1993. – 235 с.
4. Харламов П.В. Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. – 1974. – 6. – С. 15 – 24.
5. Щербак В.Ф. Синтез дополнительных соотношений в задаче наблюдения // Механика твердого тела. – 2004. – 33. – С. 197 – 216.
6. Chauvin J., Petit N. Reconstruction of the Fourier expansion of inputs of linear time-varying systems // Automatica. – 2010. – 46, N 2. – Р. 354 – 361.
7. Hou M. Parameter identification of sinusoids // IEEE Trans. Autom. Control. – 2012. – 57, N 2. – Р. 467 – 472.
8. Karagiannis D., Astolfi A. Nonlinear observer design using invariant manifolds and applications // Proc. 44th IEEE Conf. Decision and Control and European Control Conference (Seville, Spain). – 2005. – Р. 7775 – 7780.
9. Karagiannis D., Carnevale D., Astolfi A. Invariant manifold based reduced-order observer design for nonlinear systems // IEEE Trans. Autom. Control. – 2008. – 53, N 11. – Р. 2602 – 2614.
10. Khalil H.K. Nonlinear systems. 3rd edn. – New Jersey: Patience Hall, 2002. – 767 p.
11. Na J., Yang J., Wu X., Guo Y. Robust adaptive parameter estimation of sinusoidal signals // Automatica. – 2015. – 53. – Р. 376 – 384.
12. Praly L., Isidori A., Marconi L. A new observer for an unknown harmonic oscillator // Proc. of the 17th Int. Symp. on Mathem. Theory of Networks and Systems (Kyoto, Japan, 2006). – 2006. – Р. 24 – 28.
13. Torres L., Gomez-Aguilar J.F., Jimenez J., Mendoza E., Lopez-Estrada F.R., Escobar-Jimenez R.F. Parameter identification of periodical signals: Application to measurement and analysis of ocean wave forces // Digital Signal Processing. – 69. – October 2017. – Р. 59 – 69.
14. Shcherbak V.F. Synthesis of virtual measurements in nonlinear observation problem // PAMM. – 2004. – 4, N 1. – Р. 139 – 140.
15. Ziarani A. K., Karimi-Ghartemani M. On the equivalence of three independently developed phase locked loops // IEEE Trans. Autom. Control. – 2005. – 50, N 12. – Р. 2021 – 2027.

Надійшла 19.07.2022

Затверджена до друку 13.12.2022