В.Д.Кубенко[1], І.В.Янчевський[2], Я.О.Жук[3], В.О.Ліскін[2]

ГІДРОДИНАМІЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЗАЄМОДІЇ ПЛОСКОЇ ХВИЛІ ЗІ СФЕРИЧНИМ ТІЛОМ В ЗАПОВНЕНІЙ СТИСЛИВОЮ РІДИНОЮ НАПІВНЕСКІНЧЕННІЙ ЦИЛІНДРИЧНІЙ ПОРОЖНИНІ

[1]Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,
вул. П. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: venkub@ukr.net
[2]Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського»,
просп. Берестейський, 37, 03056, Київ, Україна; e-mail: i.yanchevskyi@kpi.ua
[3]Київський національний університет ім. Тараса Шевченка,
просп. Глушкова, 4е, 01033, Київ, Україна; e-mail: y.zhuk@i.ua

Abstract. A semi-infinite circular cylindrical cavity filled with an ideal compressible liquid that contains a spherical body located near its face is considered. A plain acoustic wave propagates along the axis of the cavity. The problem of determining of hydrodynamic characteristics of the system depending on the frequency of the plane wave and geometrical parameters is solved. The method of separation of variables, translational addition theorems for spherical wave functions, and the relations representing the spherical wave functions through cylindrical ones and inverse are applied. This approach allows us to satisfy all boundary conditions and obtain the exact solution of the boundary problem. The evaluations are reduced to solving the infinite system of algebraic equations. A determination of fields of the pressure and velocities has displayed that the considered system has a series of frequencies at which the desired hydrodynamic characteristics of the environment can increase essentially. These abnormal frequencies differ from the frequencies inherent in an infinite cylindrical cavity with a spherical body. Thus, the developed method can detect the anomalous features of the diffraction of a plane wave due to the influence of the face wall.

Key words: semi-infinite cylindrical vessel, compressible liquid, plain acoustic wave, «conditionally resonant» frequencies, hydrodynamic parameters.

Вступ.

Дифракція стаціонарних хвиль на системі тіл в безмежному акустичному, пружному чи електромагнітному середовищі досліджена в роботах багатьох авторів. Отримані результати відображені в ряді монографій, наприклад [3, 4, 6, 13 – 15] та ін., кількість періодичних публікацій обчислюється тисячами. Характерною ознакою таких систем тіл є їх однотипність. Як правило, розглядаються системи, що складаються лише з циліндричних, або лише зі сферичних тіл (подекуди – зі сфероїдальних).

Оскільки історично при дослідженні таких систем використовувались спектральні підходи, обмеження досліджень однотипними тілами дозволяло виконати розділення змінних в розв’язках відповідних граничних задач і таким чином досягти потрібного результату. При цьому необхідно користуватись трансляційними теоремами додавання, які дають змогу записати розв’язок в координатах, пов’язаних з кожним тілом системи. Для системи неоднотипних тіл, наприклад такої, що містить і циліндричні, і сферичні тіла, задача ускладнюється необхідністю вміти циліндричні хвильові функції перерозкласти через сферичні хвильові функції і навпаки. Досліджень такого роду небагато. З останніх можна відзначити публікації [9, 10, 16, 17, 19]. В цих роботах розглядається заповнена рідиною циліндрична порожнина, на осі якої міститься сферичне тіло, що перебуває під впливом певного акустичного збудження. Аналіз такої задачі зводиться до розв'язування нескінченних систем алгебраїчних рівнянь з коефіцієнтами у вигляді невласних інтегралів. Як результат, встановлено існування певних аномальних частот збудження, для яких дифракційні процеси істотно інтенсифікуються. Відзначимо, що вперше поняття аномальних частот для системи сферичних тіл в акустичному полі з'явилося в публікації [18].

Встановлена акустична аномальна властивість для сферичного тіла в стовпі рідини покладена в основу патенту України [7], згідно з яким при закупорюванні перфорованої області циліндричного колектора нафтової свердловини можна досягнути очищення перфорації, збуджуючи спеціально занурене в свердловину тіло на одній з «умовно резонансних» частот системи.

У цитованих вище роботах циліндрична порожнина вважається нескінченно довгою, проте очевидно, що свердловина, обмежена в донній частині, наприклад, робочим інструментом, акустично більш адекватно моделюється у вигляді заповненої рідиною напівнескінченної циліндричної порожнини з жорстким днищем (торцем). Це зумовило інтерес до дослідження акустичних процесів у напівобмеженій порожнині з рідиною, що збуджується сферичним випромінювачем, розташованим поблизу торцевого перерізу. У публікаціях [11, 12] досліджені особливості розподілу гідродинамічного тиску і швидкості в напівнескінченній порожнині з рідиною при її кінематичному або динамічному збудженні вібруючим сферичним тілом. Показано, що крім спектра «резонансних» частот нескінченної порожнини з'являються додаткові частоти такого типу, зумовлені обмеженістю області.

В даній роботі розв'язується задача дифракції плоскої стаціонарної хвилі на сферичному включенні, розташованому в заповненій рідиною напівнескінченній круговій циліндричній порожнині. Вважається, що діюча плоска хвиля поширюється вздовж осі порожнини, а включення розташоване на осі поблизу торцевого перерізу. Розв'язання задачі дозволяє визначити гідродинамічні параметри процесу.

Розв'язок задачі для рівняння Гельмгольца при відповідних умовах на включенні, бічній поверхні порожнини і її торці будується методом розділення змінних. Застосовуються трансляційні теореми додавання скалярних сферичних хвильових функцій і співвідношення, що дозволяють виразити сферичні хвильові функції через циліндричні і навпаки [5]. Це дало змогу представити хвильовий потенціал як в сферичних, так і в циліндричних координатах і задовольнити граничні умови. В результаті одержано точний аналітичний розв'язок у вигляді ряду за хвильовими функціями. Коефіцієнти у цьому розв'язку знаходяться з нескінченної системи алгебраїчних рівнянь. Система розв'язана методом редукції. Обчислено гідродинамічні характеристики процесу в залежності від геометричних і фізико-механічних параметрів системи. Встановлено аномальні особливості дифракції плоскої хвилі, зумовлені впливом торцевого обмеження.

§1. Постановка задачі.

Віднесемо напівнескінченну кругову циліндричну порожнину до циліндричних координат (ρ, z, φ), які введемо так, що порожнина заповнює область $z < 0$, її торець розташований в перерізі $z = 0$, а центр сферичного включення O_1 віддалений від торця на відстань h. Введемо сферичну систему координат, пов'язану з включенням – систему (r_1, θ_1, φ) з початком координат в точці O_1. Введемо також сферичну систему (r_2, θ_2, φ) з початком в точці O_2 з протилежного боку торцевого перерізу на тій же відстані h від нього (рис. 1).

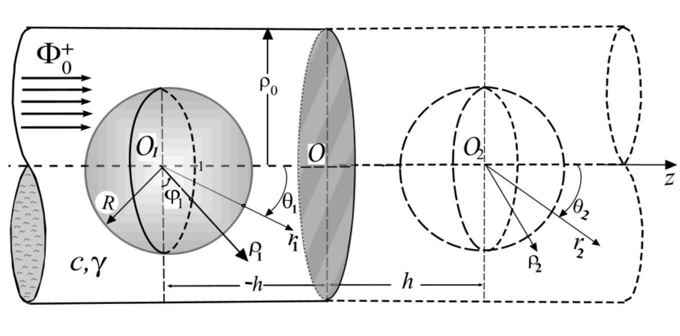


Рис. 1

Внаслідок осьової симетрії задачі координата φ випадає з розгляду, оскільки розв'язок від неї не залежить. Нехай ρ_0 – радіус порожнини; R – радіус сферичного тіла; t – час; γ – питома густина рідини; c – швидкість звуку в ній; U – швидкість хвильового руху рідини; p – тиск; ω − кругова частота. Введемо безрозмірні позначення, в яких характерними розмірними одиницями слугують радіус порожнини, швидкість звуку і густина рідини:

$$\overline{r} = \frac{r}{\rho_0}; \quad \overline{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}; \quad \overline{z} = \frac{z}{\rho_0}; \quad \overline{t} = \frac{ct}{\rho_0}; \quad \overline{\omega} = \frac{\omega \rho_0}{c}; \quad \overline{U} = \frac{U}{c}; \quad \overline{p} = \frac{p}{\gamma c^2}.$$

Надалі виклад буде вестися у введених позначеннях, тому риска над ними пропускається.

Плоска хвиля, що приходить з нескінченності і рухається в порожнині в додатному напрямку осі z, характеризується тиском

$$p_0^+ = De^{i\omega(z-t)}, \tag{1.1}$$

де D – амплітуда. Далі часовий множник $e^{-i\omega t}$ буде пропущений і за замовчуванням матиметься на увазі.

Хвиля (1.1) при поширенні в порожнині не взаємодіє з її бічною жорсткою поверхнею. Зустрічаючи перешкоду у вигляді зануреного в рідину тіла, падаюча хвиля відбивається і ця відбита хвиля взаємодіє з поверхнею порожнини. Внаслідок обмеженості порожнини торцевим перерізом, падаюча і відбиті включенням та поверхнею порожнини хвилі взаємодіють також з торцем, тим самим ускладнюючи сукупну дифракційну картину. Для її відтворення сформулюємо відповідну граничну задачу. Для цього зручно ввести в розгляд хвильовий потенціал Φ так, що тиск і швидкість представляються співвідношеннями

$$\vec{U} = \operatorname{grad}\Phi; \quad p = -\mathrm{i}\,\omega\Phi. \tag{1.2}$$

Зокрема, тиску в падаючій хвилі (1.1) відповідає такий вираз потенціалу:

$$\Phi_0^+ = F(\omega)e^{i\omega z}; \quad F(\omega) = iD/\omega. \tag{1.3}$$

Потрібно побудувати хвильовий потенціал збурень Φ^*, який задовольняє рівняння Гельмгольца

$$\Delta\Phi^* + \omega^2\Phi^* = 0 \tag{1.4}$$

при відповідних граничних умовах на поверхні циліндра і сфери. Символом Δ тут позначено оператор Лапласа.

Якщо позначити через Φ повний (сумарний) потенціал, можна записати умови на граничних поверхнях. В даній постановці вважається, що бокова поверхня порожнини, включення, а також торець порожнини є жорсткими. Внаслідок цього умова непроникнення (рівність нулеві нормальної швидкості) має місце на кожній границі, тобто можна записати:

− на поверхні включення

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial r_1}\right|_{r_1=R}=0\,; \tag{1.5}$$

− на боковій поверхні циліндричної порожнини

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right|_{\rho=\rho_0}=0 \quad (\rho_0=1); \tag{1.6}$$

− на торці порожнини

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=0}=0\,. \tag{1.7}$$

Падаюча плоска хвиля (1.3), зустрічаючись з торцем, відбивається, і відбита плоска хвиля рухається у від'ємному напрямку осі z. Її потенціал має вигляд

$$\Phi_0^-=F(\omega)e^{-i\omega z}\,. \tag{1.8}$$

Нескладно упевнитись, що сума

$$\Phi_0=\Phi_0^++\Phi_0^- \tag{1.9}$$

являє собою стоячу хвилю, яка задовольняє умову на торці (1.7). Для того, щоб умова (1.7) виконувалась також для потенціалу збурень Φ^*, введемо в розгляд сферичне тіло 2 того ж радіусу R, розташоване на відстані h з протилежної від торцевого перерізу сторони порожнини (рис. 1). Таким чином, вхідна задача для сферичного тіла в напівнескінченній порожнині замінюється розв'язанням задачі для двох однакових сферичних тіл в нескінченній порожнині. Якщо при цьому буде дотримана умова (1.7), а також виконані умови (1.5), (1.6), первинна задача буде розв'язана.

Відзначимо, що з реальним тілом 1 пов'язана сферична система координат $(r_1,\,\theta_1)$, а із штучно введеним тілом 2 − система координат $(r_2,\,\theta_2)$. На поверхні тіла 2 також має місце умова непроникнення

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial r_2}\right|_{r_2=R}=0\,. \tag{1.10}$$

Співвідношення (1.1) − (1.10) складають формулювання граничної задачі, розв'язок якої потрібно знайти.

§2. Побудова загального розв'язку задачі.

Для того, щоб задовольнити сформульовані вище граничні умови, необхідно хвильовий потенціал представити в координатних системах, в яких кожна з границь є координатною поверхнею. Зокрема, потенціал $\Phi_0=\Phi_0^++\Phi_0^-$ (падаюча і відбита від торця плоскі хвилі), який відповідає діючому навантаженню, необхідно представити в сферичних координатах $(r_1,\,\theta_1)$ і $(r_2,\,\theta_2)$.

Для падаючої хвилі (1.3) відоме представлення плоскої хвилі в сферичних координатах [8]

$$\Phi_0^+=Fe^{i\omega z}=F\sum_{m=0}^{\infty}i^m(2m+1)\,j_m(\omega r)\,P_m(\cos\theta)\,, \tag{2.1}$$

де $P_m(\cos\theta)$ − поліном Лежандра [2]; $j_m(\omega r)$ − сферична функція Бесселя 1-го роду m -го індексу [1].

Використовуючи властивість поліномів Лежандра $P_m(-x)=(-1)^m P_m(x)$, отримаємо аналогічний розклад плоскої хвилі, що рухається в протилежному напрямку

$$\Phi_0^- = Fe^{-i\omega z} = F\sum_{m=0}^{\infty} i^m (-1)^m (2m+1)\, j_m(\omega r) P_m(\cos\theta).$$

Для потенціалу діючого навантаження $\Phi_0 = \Phi_0^+ + \Phi_0^-$ в сферичних координатах (r_1,θ_1), (r_2,θ_2) отримаємо вирази

$$\begin{aligned}\Phi_0(r_1,\theta_1) &= F(\omega)\sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)\left[e^{i\omega h}+(-1)^m e^{-i\omega h}\right] i^m\, j_m(\omega r_1) P_m(\cos\theta_1);\\ \Phi_0(r_2,\theta_2) &= F(\omega)\sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)\left[e^{-i\omega h}+(-1)^m e^{i\omega h}\right] i^m\, j_m(\omega r_2) P_m(\cos\theta_2).\end{aligned} \tag{2.2}$$

Відповідно до принципу суперпозиції повний хвильовий потенціал Φ складається з суми потенціалів

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi^*. \tag{2.3}$$

В свою чергу, потенціал збурень Φ^* можна подати у вигляді суми, що складається з потенціалу, записаного в циліндричних координатах $\Phi_{cyl}(\rho, z)$, і потенціалів $\Phi_{sph}^{(j)}(r_j, \theta_j)$ ($j=1, 2$), записаних в сферичних координатах (r_j, θ_j):

$$\Phi^* = \Phi_{cyl}(\rho, z) + \Phi_{sph}^{(1)}(r_1, \theta_1) + \Phi_{sph}^{(2)}(r_2, \theta_2). \tag{2.4}$$

Загальний розв'язок рівняння Гельмгольца (1.4) в циліндричних координатах і, отже, циліндричний потенціал $\Phi_{cyl}(\rho,z)$ можна представити у вигляді [8]

$$\Phi_{cyl}(\rho,z) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\xi) J_0\left(\sqrt{\omega^2-\xi^2}\,\rho\right) e^{i\xi z} d\xi. \tag{2.5}$$

Тут $B(\xi)$ − густина, яка підлягає визначенню з граничних умов; J_0 – циліндрична функція Бесселя індексу 0 [1]. Потенціал Φ_{cyl} обмежений при $\rho \to 0$.

В сферичних координатах розв'язок рівняння (1.4) і, відповідно, потенціали $\Phi_{sph}^{(j)}(r_j, \theta_j)$ мають наступне представлення [8]:

$$\Phi_{sph}^{(j)}(r_j,\theta_j) = \sum_{m=0}^{\infty} X_m^{(j)} h_m(\omega r_j) P_m(\cos\theta_j) \quad (j=1,2), \tag{2.6}$$

де $X_m^{(j)}$ – невідомі сталі; $h_m(\omega r_j)$ – сферичні функції Ґанкеля 1-го роду індексу m [1], що представляють хвилі, які розходяться.

Для того, щоб перейти до виконання граничних умов (1.5) − (1.7), (1.9), необхідно потенціали (2.5), (2.6) представити в циліндричній і в кожній зі сферичних систем координат. Сферичний розв'язок рівняння Гельмгольца (2.6) можна представити в циліндричних координатах, якщо скористатися співвідношенням, яке представляє сферичну хвильову функцію через циліндричну [5, 9]:

$$h_n\left(\omega r_{1,2}\right)P_n\left(\cos\theta_{1,2}\right)=\frac{i^{-n}}{2\omega}\int\limits_{-\infty}^{\infty}P_n\left(\frac{\xi}{\omega}\right)H_0\left(\sqrt{\omega^2-\xi^2}\rho\right)e^{i\xi(z\pm h)}d\xi\,. \tag{2.7}$$

Звернемо увагу, що сферичній системі координат $\left(r_1,\theta_1\right)$ відповідає циліндрична система $\left(\rho,\, z+h\right)$, а системі $\left(r_2,\, \theta_2\right)$ – система $\left(\rho,\, z-h\right)$.

З формул (2.6), (2.7) отримаємо

$$\Phi_{sph}\left(r,\theta\right)=\Phi_{sph}^{(1)}\left(r_1,\,\theta_1\right)+\Phi_{sph}^{(2)}\left(r_2,\,\theta_2\right)=$$
$$=\frac{1}{2\omega}\sum_{m=0}^{\infty}i^{-m}\int\limits_{-\infty}^{\infty}P_m\left(\frac{\xi}{\omega}\right)H_0\left(\sqrt{\omega^2-\xi^2}\rho\right)e^{i\xi z}\left[X_m^{(1)}e^{i\xi h}+X_m^{(2)}e^{-i\xi h}\right]d\xi\,, \tag{2.8}$$

або

$$\Phi_{sph}\left(r,\theta\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}A\left(\xi\right)H_0\left(\sqrt{\omega^2-\xi^2}\rho\right)e^{i\xi z}d\xi\,. \tag{2.9}$$

Тут позначено $A\left(\xi\right)=\dfrac{1}{2\omega}\sum\limits_{m=0}^{\infty}i^{-m}\left[X_m^{(1)}e^{i\xi h}+X_m^{(2)}e^{-i\xi h}\right]P_m\left(\dfrac{\xi}{\omega}\right)$.

В свою чергу, використовуючи розклад циліндричної хвильової функції за сферичними [8]

$$e^{i\xi z}J_0\left(\sqrt{\omega^2-\xi^2}\rho\right)=\sum_{n=0}^{\infty}i^n\left(2n+1\right)P_n\left(\frac{\xi}{\omega}\right)j_n\left(\omega r\right)P_n\left(\cos\theta\right),$$

циліндричний розв'язок (2.5) можна виразити через сферичні хвильові функції в сферичних координатах ($r_1,\,\theta_1$) і ($r_2,\,\theta_2$) у такий спосіб:

$$\Phi_{cyl}\left(\rho,z\right)=\sum_{m=0}^{\infty}B_m^{(1)}j_m\left(\omega r_1\right)P_m\left(\cos\theta_1\right);\quad \Phi_{cyl}\left(\rho,z\right)=\sum_{m=0}^{\infty}B_m^{(2)}j_m\left(\omega r_2\right)P_m\left(\cos\theta_2\right).$$

Тут позначено

$$B_m^{(1)}=i^m\left(2m+1\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty}B\left(\xi\right)P_m\left(\frac{\xi}{\omega}\right)e^{-i\xi h}d\xi\ ;$$
$$B_m^{(2)}=i^m\left(2m+1\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty}B\left(\xi\right)P_m\left(\frac{\xi}{\omega}\right)e^{i\xi h}d\xi\,. \tag{2.10}$$

Потенціали $\Phi_{sph}^{(j)}\left(r_j,\,\theta_j\right)$ ($j=1,\,2$) з формули (2.6) можуть бути записані в координатах $\left(r_k,\,\theta_k\right)$ ($k=2,\,1$) за допомогою трансляційних теорем додавання сферичних функцій. Відзначимо, що в літературі, присвяченій задачам багатократного розсіювання, представлена значна кількість публікацій з викладом скалярних і векторних теорем додавання. При цьому багато авторів використовує свої позначення, різні типи сферичних гармонік і нормування, що в цілому ускладнює використання наведених результатів. У даній роботі будуть застосовані позначення і теореми, викладені в роботі [6], які стосовно досліджуваної задачі мають вигляд

$$h_m\left(\omega r_j\right)P_m\left(\cos\theta_j\right)=\sum_{n=0}^{\infty}Q_{0n0m}\left(2h\omega,\theta_{jk}\right)j_n\left(\omega r_k\right)P_n\left(\cos\theta_k\right);$$
$$Q_{0n0m}\left(2h\omega,\theta_{jk}\right)=\frac{2i^{n-m}}{N_{0n}}\sum_{l=|n-m|}^{n+m}i^l b_l^{(m0n0)}h_l\left(2h\omega\right)P_l\left(\cos\theta_{jk}\right); \tag{2.11}$$
$$N_{0n}=\frac{2}{2n+1}\,;\quad j,\,k=1,\,2\quad(k\neq j).$$

У формулах (2.11) $j_n(x)$ – сферична функція Бесселя індексу n, а θ_{jk} позначає сферичний кут − координату початку O_j ($j=1, 2$) в сферичній системі координат з початком в O_k ($k=2, 1$; $k \neq j$). В даній задачі $\theta_{12}=0$. Оскільки $P_l\left(\cos\theta_{12}\right)=1$ і $P_l\left(\cos\theta_{21}\right)=(-1)^l$, вирази (2.11) можна переписати в більш простому вигляді

$$h_m\left(\omega r_j\right)P_m\left(\cos\theta_j\right)=\sum_{n=0}^{\infty}Q_{0n0m}^{(j)}\left(2h\omega\right)j_n\left(\omega r_k\right)P_n\left(\cos\theta_k\right);$$

$$Q_{0n0m}^{(j)}\left(2h\omega\right)=\frac{2i^{n-m}}{N_{0n}}\sum_{l=|n-m|}^{n+m}i^{(-1)^{j-1}l}b_l^{(m0n0)}h_l\left(2h\omega\right).$$

Коефіцієнт $b_l^{(m0n0)}$ має вигляд

$$b_l^{(m0n0)}=\left(m,\,n,\,0,\,0\,|\,l,\,0\right)^2=\begin{cases}\dfrac{(2l+1)\left[\left(\dfrac{k}{2}\right)!\right]^2(k-2m)!(k-2n)!(k-2l)!}{\left[\left(\dfrac{k}{2}-m\right)!\left(\dfrac{k}{2}-n\right)!\left(\dfrac{k}{2}-l\right)!\right]^2(k+1)!}, & \mathrm{INT}\left(\dfrac{k}{2}\right)=0;\\ 0, \quad \mathrm{INT}\left(\dfrac{k}{2}\right)\neq 0, & \end{cases} \tag{2.12}$$

де $k=l+m+n$, $\left(m,n,0,0\,|\,l,0\right)$ – коефіцієнти Клебша – Ґордана [6].

Таким чином, на основі співвідношень (2.12) потенціал збурень може бути представлений в сферичних системах координат $\left(r_1,\theta_1\right)$ і $\left(r_2,\theta_2\right)$ формулами

$$\Phi^*\left(r_1,\,\theta_1\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\Bigg[X_m^{(1)}h_m\left(\omega r_1\right)+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}X_k^{(2)}Q_{0m0k}^{(2)}\left(2h\omega\right)j_m\left(\omega r_1\right)+B_m^{(1)}j_m\left(\omega r_1\right)\Bigg]P_m\left(\cos\theta_1\right); \tag{2.13}$$

$$\Phi^*\left(r_2,\theta_2\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\Bigg[X_m^{(2)}h_m\left(\omega r_2\right)+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}X_k^{(1)}Q_{0m0k}^{(1)}\left(2h\omega\right)j_m\left(\omega r_2\right)+B_m^{(2)}j_m\left(\omega r_2\right)\Bigg]P_m\left(\cos\theta_2\right).$$

В циліндричній системі координат $(\rho,\,z)$ відповідно до (2.3), (2.7) потенціал збурень має вигляд

$$\Phi^*\left(\rho,z\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[B\left(\xi\right)J_0\left(\sqrt{\omega^2-\xi^2}\rho\right)+A\left(\xi\right)H_0\left(\sqrt{\omega^2-\xi^2}\rho\right)\right]e^{i\xi z}d\xi, \tag{2.14}$$

де $A\left(\xi\right)=\dfrac{1}{2\omega}\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}i^{-m}\left(X_m^{(1)}e^{i\xi h}+X_m^{(2)}e^{-i\xi h}\right)P_m\left(\dfrac{\xi}{\omega}\right)$.

Отримані вирази хвильових потенціалів в циліндричній і обох сферичних системах координат дозволяють на основі розділення змінних перейти до виконання граничних умов на кожній границі і одержати систему алгебраїчних рівнянь відносно шуканих коефіцієнтів загального розв’язку.

§3. Розв'язання граничної задачі.

З граничної умови на поверхні циліндричної порожнини (умова непроникнення (1.6)), використовуючи одержаний вираз для потенціалу збурень в циліндричних координатах (2.14), отримаємо

$$-\int_{-\infty}^{\infty}\left[B(\xi)J_1\left(\sqrt{\omega^2-\xi^2}\right)+A(\xi)H_1\left(\sqrt{\omega^2-\xi^2}\right)\right]\sqrt{\omega^2-\xi^2}\,e^{i\xi z}d\xi=0\,.$$

Внаслідок того, що перетворення Фур'є єдине, звідси і з (2.14) випливає представлення густини $B(\xi)$ через невідомі коефіцієнти сферичного розв'язку $X_m^{(1)}$, $X_m^{(2)}$ ($m=0,\ldots,\infty$)

$$B(\xi)=-\frac{1}{2\omega}\frac{H_1\left(\sqrt{\omega^2-\xi^2}\right)}{J_1\left(\sqrt{\omega^2-\xi^2}\right)}\sum_{m=0}^{\infty}i^{-m}\left(X_m^{(1)}e^{i\xi h}+X_m^{(2)}e^{-i\xi h}\right)P_m\left(\frac{\xi}{\omega}\right). \tag{3.1}$$

В свою чергу вираз (3.1) дозволяє зв'язати невідомі коефіцієнти $B_n^{(j)}$ ($j=1,2$; $n=0,\ldots,\infty$) циліндричного розв'язку (2.10) (який записано в сферичних координатах) з шуканими коефіцієнтами сферичного розв'язку $X_n^{(j)}$, а саме

$$B_n^{(1)}=-\frac{2n+1}{2\omega}\sum_{m=0}^{\infty}i^{n-m}\left(X_m^{(1)}q_{mn}+X_m^{(2)}q_{mn}^{(2)}\right); \tag{3.2}$$

$$B_n^{(2)}=-\frac{2n+1}{2\omega}\sum_{m=0}^{\infty}i^{n-m}\left(X_m^{(1)}q_{mn}^{(1)}+X_m^{(2)}q_{mn}\right), \tag{3.3}$$

де

$$q_{mn}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H_1\left(\sqrt{\omega^2-\xi^2}\right)}{J_1\left(\sqrt{\omega^2-\xi^2}\right)}P_m\left(\frac{\xi}{\omega}\right)P_n\left(\frac{\xi}{\omega}\right)d\xi\,;$$

$$q_{mn}^{(1)}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H_1\left(\sqrt{\omega^2-\xi^2}\right)}{J_1\left(\sqrt{\omega^2-\xi^2}\right)}P_m\left(\frac{\xi}{\omega}\right)P_n\left(\frac{\xi}{\omega}\right)e^{i2\xi h}d\xi\,;$$

$$q_{mn}^{(2)}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H_1\left(\sqrt{\omega^2-\xi^2}\right)}{J_1\left(\sqrt{\omega^2-\xi^2}\right)}P_m\left(\frac{\xi}{\omega}\right)P_n\left(\frac{\xi}{\omega}\right)e^{-i2\xi h}d\xi\,.$$

Перейдемо до виконання граничних умов (1.5), (1.9) на поверхнях сферичних тіл. Для цього скористаємося розкладами (2.2) для діючого навантаження і (2.13) для потенціалу збурень за сферичними функціями. Одержимо

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left\{X_m^{(1)}h_m'(\omega R)+j_m'(\omega R)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\begin{array}{c}X_k^{(2)}Q_{0m0k}^{(2)}(2h\omega)-\\-\dfrac{2m+1}{2\omega}i^{m-k}\left(X_k^{(1)}q_{km}+X_k^{(2)}q_{km}^{(2)}\right)\end{array}\right)+\right.$$

$$\left.+i^mF(\omega)(2m+1)\left[e^{i\omega h}+(-1)^m e^{-i\omega h}\right]j_m'(\omega R)\right\}\omega P_m(\cos\theta_1)=0\,; \tag{3.4}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left\{X_m^{(2)}h_m'(\omega R)+j_m'(\omega R)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\begin{array}{c}X_k^{(1)}Q_{0m0k}^{(1)}(2h\omega)-\\-\dfrac{2m+1}{2\omega}i^{m-k}\left(X_k^{(1)}q_{km}^{(1)}+X_k^{(2)}q_{km}\right)\end{array}\right)+\right.$$

$$\left.+i^m F(\omega)(2m+1)\left[e^{-i\omega h}+(-1)^m e^{i\omega h}\right]j_m'(\omega R)\right\}\omega P_m(\cos\theta_2)=0\,. \tag{3.5}$$

Тут введені позначання $h_m'(\omega R)=\dfrac{d}{dx}h_m(x)\Big|_{x=\omega R}$; $j_m'(\omega R)=\dfrac{d}{dx}j_m(x)\Big|_{x=\omega R}$.

Скориставшись властивістю ортогональності поліномів Лежандра, із співвідношень (3.4) і (3.5) отримаємо дві нескінченні системи алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів $X_n^{(1)}$, $X_n^{(2)}$:

$$h_n'(\omega R)X_n^{(1)}+j_n'(\omega R)\sum_{m=0}^{\infty}\left[\begin{array}{l}X_m^{(2)}Q_{0n0m}^{(2)}(2h\omega)-\\-\dfrac{2n+1}{2\omega}i^{n-m}\left(X_m^{(1)}q_{mn}+X_m^{(2)}q_{mn}^{(2)}\right)\end{array}\right]=$$

$$=-i^n F(\omega)(2n+1)\left[e^{i\omega h}+(-1)^n e^{-i\omega h}\right]j_n'(\omega R)\quad (n=0,1,\ldots,\infty); \tag{3.6}$$

$$h_n'(\omega R)X_n^{(2)}+j_n'(\omega R)\sum_{m=0}^{\infty}\left[\begin{array}{l}X_m^{(1)}Q_{0n0m}^{(1)}(2h\omega)-\\-\dfrac{2n+1}{2\omega}i^{n-m}\left(X_m^{(1)}q_{mn}^{(1)}+X_m^{(2)}q_{mn}\right)\end{array}\right]=$$

$$=-i^n F(\omega)(2n+1)\left[e^{-i\omega h}+(-1)^n e^{i\omega h}\right]j_n'(\omega R)\quad (n=0,1,\ldots,\infty). \tag{3.7}$$

Гранична умова (1.7) на торці у випадку жорсткої границі при $z=0$ дає співвідношення між коефіцієнтами [13]

$$X_m^{(2)}=(-1)^m X_m^{(1)}\,. \tag{3.8}$$

В результаті задача зводиться до розв’язання нескінченної лінійної системи алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів $X_n^{(1)}$:

$$h_n'(\omega R)X_n^{(1)}+j_n'(\omega R)\sum_{m=0}^{\infty}X_m^{(1)}\left[\begin{array}{l}(-1)^m Q_{0n0m}^{(2)}(2h\omega)-\\-\dfrac{2n+1}{2\omega}i^{n-m}\left(q_{mn}+(-1)^m q_{mn}^{(2)}\right)\end{array}\right]= \tag{3.9}$$

$$=-i^n F(\omega)(2n+1)\left[e^{i\omega h}+(-1)^n e^{-i\omega h}\right]j_n'(\omega R)\quad (n=0,1,\ldots,\infty\ ).$$

Таким чином, задачу визначення гідродинамічних параметрів рідини, яка заповнює напівнескінченну кругову циліндричну порожнину і містить тверде сферичне включення, при дії плоскої акустичної хвилі зведено до розв’язання нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Для систем такого типу доведено, що їх розв’язок можна одержати методом редукції.

Для зручності використання при обчисленнях доцільно переписати вираз для повного потенціалу $\Phi=\Phi_0+\Phi^*$ в пов’язаній з тілом сферичній системі координат (r_1, θ_1) у компактній формі. Потенціал Φ_0 представлений формулою (2.2), потенціал

Φ^* – формулою (2.13), де коефіцієнт $B_m^{(1)}$ має вигляд (3.2). Використовуючи при перетвореннях також співвідношення (3.8) і нескінченну систему рівнянь (3.9), отримаємо повний потенціал в наступному компактному вигляді:

$$\Phi(r_1,\theta_1)=\sum_{n=0}^{\infty}X_n^{(1)}\left(h_n(\omega r_1)-\frac{h_n'(\omega R)}{j_n'(\omega R)}j_n(\omega r_1)\right)P_n(\cos\theta_1). \qquad (3.10)$$

Якщо скористатись представленням $h_n(\omega r)=j_n(\omega r)+iy_n(\omega r)$, де j_n і y_n – сферичні функції 1-го і 2-го роду, одержимо остаточно вираз, зручний для використання при обчисленнях

$$\Phi(r_1,\theta_1)=\sum_{n=0}^{\infty}i\,X_n^{(1)}\left(y_n(\omega r_1)-\frac{y_n'(\omega R)}{j_n'(\omega R)}j_n(\omega r_1)\right)P_n(\cos\theta_1). \qquad (3.11)$$

§4. Числові результати.

Конкретні обчислення були виконані для механічної системи, обезрозмірений радіус R сфери якої приймався рівним 0,25. При цьому відстань h від її центру до торцевої стінки напівциліндричної порожнини дорівнювала 1 (рис. 2).

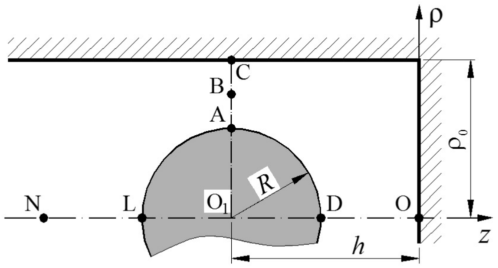


Рис. 2

Розрахунки були проведені у припущенні, що гідродинамічний тиск (1.1) у поширюваній вздовж осі порожнини стаціонарній плоскій хвилі має одиничну амплітуду ($D=1$). Безрозмірна частота ω хвилі варіювалася в діапазоні від 0,1 до 10. Крок сканування частоти при дослідженні гідродинамічних параметрів механічної системи приймався рівним 0,01, а для уточнення розрахункових значень в околі певних значень частоти використовувався дрібніший крок – 0,0001.

Гідродинамічні параметри середовища (тиск і швидкості) обчислювалися для всього околу сферичного тіла, в тому числі для точок з наступними координатами в циліндричній системі (O,ρ,z) (рис. 2):

$$\mathrm{O}(0,0);\quad \mathrm{D}(0,R-h);\quad \mathrm{L}(0,-h-R);\quad \mathrm{N}(0,-2h);$$

$$\mathrm{A}(R,-h);\quad \mathrm{B}\left((\rho_0+R)/2,-h\right);\quad \mathrm{C}(\rho_0,-h).$$

Значення параметра редукції системи алгебраїчних рівнянь (3.9) прийнято рівним $N=20$.

На рис. 3 представлений модуль детермінанта оберненої матриці $\|\mathbf{A}^{-1}\|$ системи лінійних алгебраїчних рівнянь (3.9) в залежності від частоти ω. Графік даної функції дозволяє виявити такі частоти збудження механічної системи, при яких шукані гідродинамічні характеристики середовища можуть приймати великі значення. Таким частотам відповідають максимуми детермінанта оберненої матриці. Ці частоти не є власними значеннями механічної системи, оскільки детермінант приймає хоч і великі, але разом з тим скінченні значення. Тому такі частоти будемо називати «умовно резонансними».

Як випливає з рис. 3, для механічної системи з $R=0,25$ і $h=1$ в діапазоні сканування $0,1\le\omega\le10$ мають місце одна «умовно резонансна» частота в околі $\omega=4$ і три на інтервалі для $7\le\omega\le9$. Два найбільш різких стрибків значень детермінанта оберненої матриці $\|\mathbf{A}^{-1}\|$ розрахункової системи (3.9) мають місце, коли ω з точністю до трьох знаків після коми приймає наступні значення: $\omega_3 = 7,755$, $\omega_4 = 8,335$.

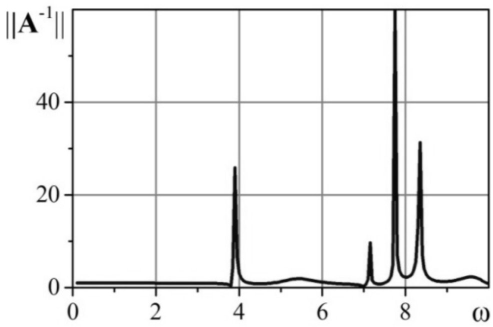


Рис. 3

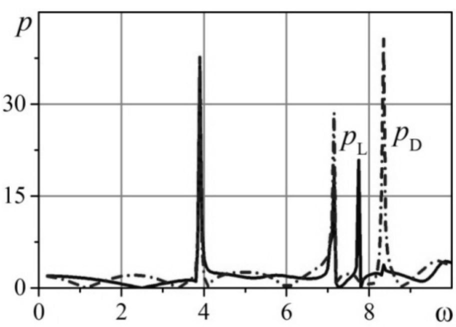


Рис. 4

На рис. 4 показані абсолютні значення тиску в точках L (неперервна крива) і D (штрихова крива). Ці значення були обчислені на підставі рівностей (3.11) і (1.2). Як видно з рисунків, положення піків на графіках $\|\mathbf{A}^{-1}\|$ і $|p|$ збігаються. Однак, з порівняння наведених на рис. 3, 4 кривих також випливає, що максимум модуля $\|\mathbf{A}^{-1}\|$ при обраному кроці сканування не визначає максимум гідродинамічного параметра на відповідній частоті, а тому графік $\|\mathbf{A}^{-1}\|$ може бути використаний виключно для уточнення області пошуку таких «умовно резонансних» частот механічної системи.

Збіг значень тиску в точках D та L на першій «умовно резонансній» частоті ($\omega \approx 4$, рис. 3) свідчить про те, що на відносно низьких частотах розподіл гідродинамічного тиску є близьким до симетричного відносно площини $z = -R$ (центру сфери). Максимуми тиску – в зазначених точках і при $\omega \approx 7$, хоча на наступних «умовно резонансних» частотах ці максимуми p_{L} і p_{D} вже суттєво відрізняються. Тобто, при частотах $\omega > 7$ умовна симетричність поля гідродинамічного тиску в околі сферичного тіла втрачається і на частоті $\omega_3 = 7,755$ тиск у точці L значно перевищує тиск в точці D, а при $\omega_4 = 8,335$ – навпаки (рис. 4).

Для нескінченної циліндричної порожнини графіки як оберненого детермінанту матриці розрахункової системи рівнянь (рис. 5), так і гідродинамічного тиску у точках L і D (рис. 6), суттєво відрізняються від попереднього випадку, коли циліндрична порожнина є напівнескінченною. На діапазоні сканування ω чітко виділяються два значення частоти ($\omega \approx 4$ і $\omega \approx 7$), на яких має місце скінченний стрибок значень як $\|\mathbf{A}^{-1}\|$, так і p_{L}, p_{D}. Однак, на відміну від попереднього випадку (рис. 3, 4), на дано-

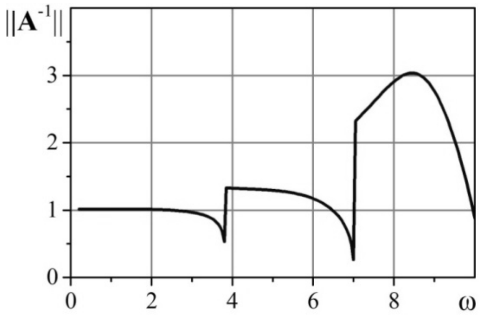


Рис. 5

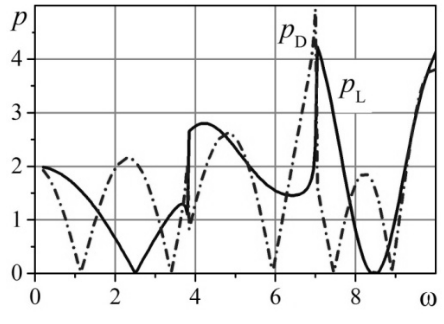


Рис. 6

му графіку $\|\mathbf{A}^{-1}\|$ (рис. 5), а отже і на графіках p_{L}, p_{D} (рис. 6), чітко виражені піки відсутні. Це свідчить про те, що саме наявність торцевого перерізу і зумовлює можливість суттєвого зростання амплітудних значень гідродинамічних параметрів середовища в околі сферичного тіла за рахунок відповідно підібраної частоти акустичної хвилі.

З рис. 6 видно, що характери зміни тиску в розрахункових точках суттєво відрізняються один від одного, при цьому їх значення значно менші, ніж у випадку напівобмеженої порожнини (рис. 4).

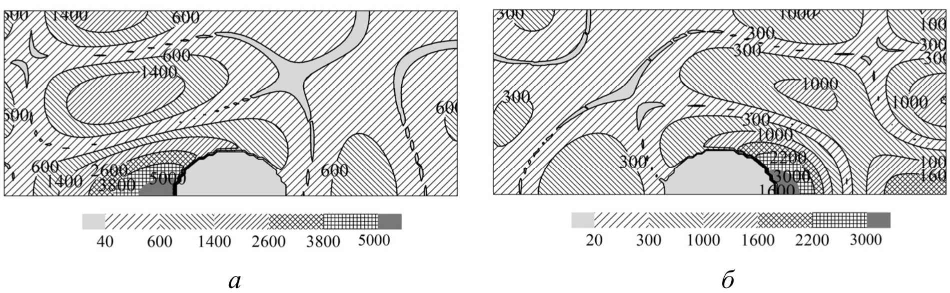
Слід зазначити, що для дослідження гідродинамічних процесів у нескінченній циліндричній порожнині з твердим сферичним тілом на її осі застосована розрахункова система рівнянь (3.9) за тією відмінністю, що коефіцієнти матриці обчислюються за більш простою формулою

$$\{\mathbf{A}\}_{nm} = \delta_{nm} - \frac{j_n'(\omega R)}{h_m'(\omega R)} \frac{2n+1}{2\omega} i^{n-m} q_{mn} . \tag{4.1}$$

Ця формула відображає збіг початків циліндричної та сферичної систем координат ($Q^{(2)}_{0n0m} = 0$) та відсутність уявної сфери ($q^{(2)}_{mn} = 0$), яка штучно вводилася для виконання граничних умов на торці напівнескінченної порожнини (δ_{nm} – символ Кронекера). Права частина розрахункової системи рівнянь при цьому залишається без змін і визначає фіксоване положення однієї з вузлових точок стоячої хвилі на осі циліндричної системи координат, яке віддалене на відстань h від центру сфери.

Розглянемо розподіл гідродинамічних параметрів акустичного середовища при фіксованому значенні частоти ω, особливий інтерес серед яких становлять, у першу чергу, «умовно резонансні» частоти. Так на рисунках нижче представлені поля гідродинамічного тиску $|p|$ в околі сферичного тіла (рис. 7, 8; $\omega = 7,755$ – рис. 7, *а* та рис. 8, *а*; $\omega = 8,335$ – рис. 7, *б* та рис. 8, *б*) та графіки розподілу швидкостей U (рис. 9, 10) точок середовища уздовж характерних відрізків циліндричної порожнини (рис. 2).

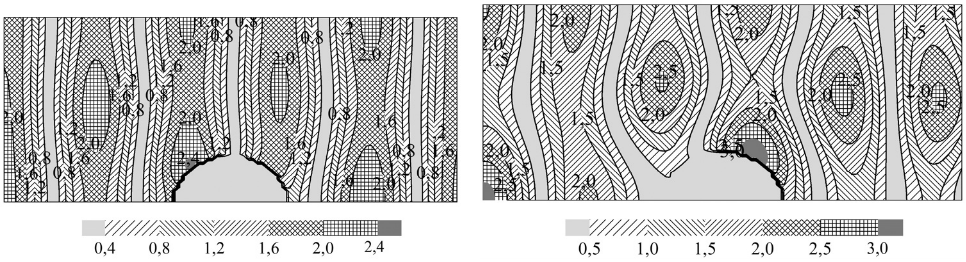
Аналіз представленого на рис. 7, *а* поля тиску показує, що при значенні частоти $\omega = 7,755$ область максимального тиску знаходиться в околі найбільш віддаленої від торця порожнини точки сферичного тіла L (рис. 2). При збудженні механічної системи стоячою хвилею з частотою $\omega = 8,335$ область максимального тиску знаходиться з протилежної сторони – в околі точки D (рис. 7, *б*). У відповідних локаціях розташовані зони з великим (відносно інших областей) тиском у акустичному середовищі. Це може свідчити про зміну не лише значення, а і напряму радіаційної сили, що діє на сферичне тіло, в залежності від частоти стоячої хвилі.



а *б*

Рис. 7

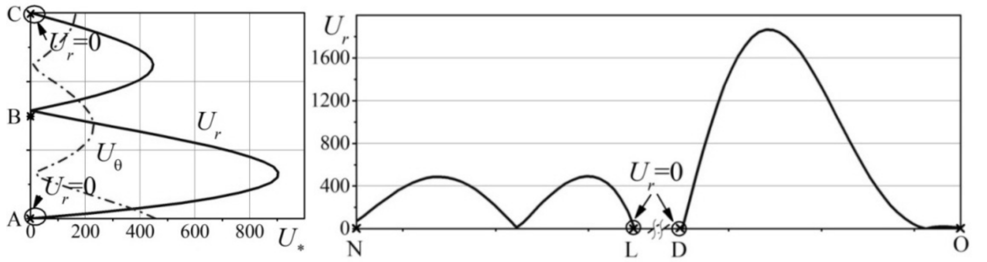
У випадку нескінченної циліндричної порожнини (без торця) максимальні значення тиску значно менші у порівнянні з напівнескінченною порожниною. Аналіз представленого на рис. 8 поля тиску в нескінченній порожнині показує, що при зазначених вище частотах ($\omega = 7,755$ і $\omega = 8,335$) зони максимального тиску зміщені відносно центральної осі порожнини приблизно на 45 градусів у локальній сферичній системі координат. І на відміну від системи з напівнескінченною циліндричною порожниною (рис. 7) області підвищеного гідродинамічного тиску розподілені майже рівномірно в околі сферичного тіла (рис. 8).



а *б*

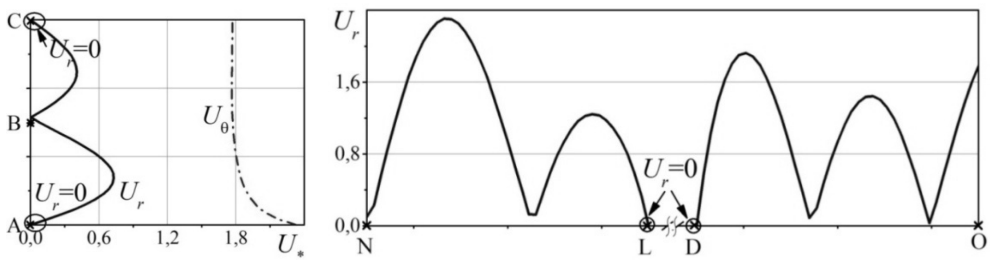
Рис. 8

На рис. 9 та 10 відображені обчислені при $\omega = 8,335$ епюри розподілу радіальної U_r та тангенціальної U_θ швидкостей точок середовища уздовж найбільш характерних відрізків циліндричної порожнини – AC і NO (рис. 2). При цьому, як і на рис. 7, 8, представлені абсолютні значення розрахункових величин.



а *б*

Рис. 9



а *б*

Рис. 10

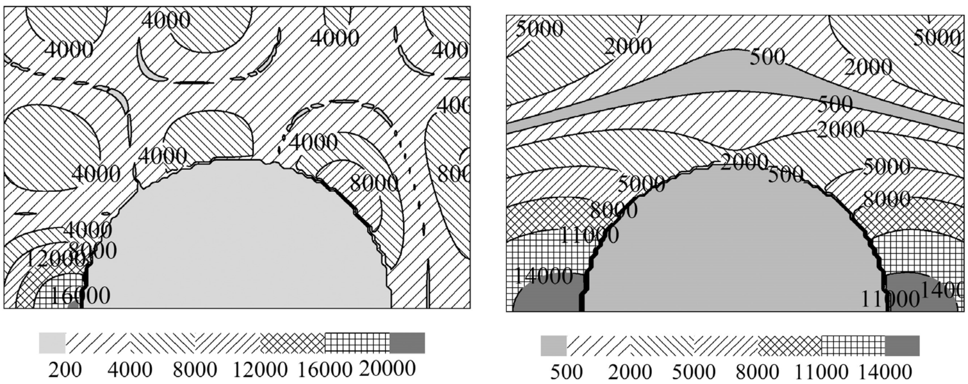
Наведені на рис. 9, 10 графіки свідчать про виконання граничних умов.

В цілому, мінімальні значення абсолютної швидкості на обраній «умовно резонансній» частоті падаючої акустичної хвилі спостерігаються в околі точки B – середини відрізку AC між сферичним тілом і циліндричною порожниною (рис. 9, *а*, 10, *а*). На цьому відрізку радіальні швидкості U_r (неперервні криві на рис. 9, *а* та 10, *а*) мають два максимуми. Разом з тим максимальні значення у випадку напівнескінченної порожнини (рис. 9, *а*) на два порядки більше максимумів для нескінченної (рис. 10, *а*).

Тангенціальна швидкість U_θ точок середовища на відрізку AC напівнескінченної порожнини (рис. 9, *а*) має дещо менші значення ніж радіальна швидкість U_r; у випадку нескінченної порожнини – більші. Однак в обох випадках максимуми мають місце поблизу поверхонь сферичного тіла (в околі точки A).

Як і на відрізку AC, так і на осі порожнини, наявність торця і збудження механічної системи хвилею з «умовно резонансною» частотою визначає суттєве (на два порядки) збільшення максимальних значень радіальної швидкості (рис. 9, *б*; 10, *б*). І, якщо за відсутності торця максимальні значення більш-менш симетрично розташовані відносно центру сферичного тіла, то для напівнескінченного випадку максимум має місце на відрізку DO між сферичним тілом та торцем (рис. 9, *б*). На протилежному від центру сфери тіла відрізку (відрізок NL) максимальні значення швидкості у декілька разів менші.

Виконані для інших геометричних параметрів механічної системи розрахунки для напівнескінченної та нескінченної циліндричних порожнин свідчать про суттєвий вплив торця на гідродинамічні параметри у акустичному середовищі в околі сферичного тіла. Отримані числові результати не наводяться для зменшення об'єму даної статті. В цілому виявлено, що зі збільшенням відносного радіусу сферичного тіла та зменшенням відстані h максимальні значення гідродинамічного тиску у механічних системах з напівнескінченною та нескінченною порожнинами при їх збудженні стоячою хвилею з відповідною «умовно резонансною» частотою вирівнюються. Разом з тим картина розподілу тиску у випадку напівнескінченної порожнини не є симетричною відносно центру сферичного тіла. Як приклад на рис. 11 показані числові значення тиску в околі сферичного тіла радіусу $R = 0{,}5$ у випадку $h = 0{,}75$.



а *б*

Рис. 11

Рис. 11, *а*, зокрема, відображає поле максимально можливого тиску у механічній системі з напівнескінченною порожниною при її збудженні акустичною хвилею з «умовно резонансною» частотою $\omega = 9{,}195$ з обраного діапазону сканування ($0 < \omega \leq 10$). Аналогічні результати, однак для нескінченної порожнини з її «умовно резонансною» частотою $\omega = 4{,}461$, зображені на рис. 11, *б*. З порівняння представлених на рис. 7, 8 і рис. 11 полів тиску можна зробити висновок про зростання впливу на гідродинамічні параметри середовища при збільшенні розміру сферичного тіла.

Слід зауважити, що асиметрія розподілу тиску на рис. 7, 8 і рис. 11 відносно центру сферичного тіла свідчить про наявність діючої на нього так званої «радіаційної сили» [19], при чому положення зони його максимального значення визначає напрям цієї сили. Питання розрахунку радіаційної сили, що діє на сферичне тіло у напівнескінченній циліндричній порожнині, будуть розглянуті авторами роботи у подальших дослідженнях.

Висновок.

В публікації сформульовано і отримано чисельно-аналітичний розв'язок задачі про дифракцію плоскої стаціонарної хвилі на сферичному включенні, розташованому в заповненій рідиною напівнескінченній круговій циліндричній порожнині. При цьому вважалося, що діюча плоска хвиля поширюється вздовж осі порожнини, а включення розташоване на осі поблизу торцевого перерізу. Розробленим методом можна визначити гідродинамічні параметри в рідині, яка заповнює порожнину. Виконані числові розрахунки показали, що наявність торцевої стінки в циліндричній порожнині призводить до зміни властивих нескінченній порожнині «умовно резонансних» частот, при яких амплітуди гідродинамічних параметрів різко зростають. Значення цих частот та інтенсивність акустичних характеристик залежать як від відносного радіусу сферичного тіла, так і від відстані між цим тілом і торцем.

В цілому можна припустити, що наведені в даній публікації результати і висновки сприятимуть кращому розумінню сутності реальних процесів в прикладних областях, пов'язаних з використанням методів акустики в гідродинамічних системах у вигляді ємностей з рідиною та зануреними частинками.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за фінансової підтримки бюджетної програми Національного фонду досліджень України (Проєкт 2020.02/0112 «Дифракційні процеси і радіаційні сили в обмежених гідропружних системах»).

Р Е З Ю М Е. Розглянуто заповнену ідеальною стисливою рідиною напівнескінченну кругову циліндричну порожнину, яка містить розташоване поблизу її торця сферичне тіло. Уздовж осі порожнини поширюється плоска акустична хвиля. Розв'язується задача визначення гідродинамічних характеристик системи в залежності від частоти плоскої хвилі і геометричних параметрів. Застосовується метод поділу змінних, трансляційні теореми додавання для сферичних хвильових функцій і співвідношення, які представляють сферичні хвильові функції через циліндричні і навпаки. Такий підхід дозволяє задовольнити всі граничні умови і отримати точний аналітичний розв'язок граничної задачі. Обчислення зведені до розв'язання нескінченної системи алгебраїчних рівнянь. Визначення полів тиску і швидкості показало, що дана механічна система має низку значень частоти, при яких акустичні характеристики середовища можуть суттєво зростати. Ці аномальні частоти відрізняються від частот, властивих нескінченній циліндричній порожнині зі сферичним тілом. Таким чином, розроблений підхід дозволяє виявляти аномальні особливості дифракції плоскої хвилі, зумовлені наявністю торцевої стінки.

К Л Ю Ч О В І С Л О В А : напівнескінченна циліндрична порожнина, стислива рідина, плоска акустична хвиля, «умовно резонансні» частоти, гідродинамічні параметри.

1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции: функции Бесселя, функции параболич. цилиндра, ортогон. многочлены. – Москва: Наука, 1965. – 296 с.

2. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции: гипергеометрическая функция, функция Лежандра. – Москва: Наука, 1965. – 294 с.

3. *Гузь А.Н., Головчан В.Т.* Дифракция упругих волн в многосвязных телах. – Киев: Наук. думка, 1972. – 254 с.

4. *Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А.* Дифракция упругих волн. – Киев: Наук. думка, 1978. – 308 с.

5. *Ерофеенко В.Т.* Связь между основными решениями в цилиндрических и сферических координатах уравнений Гельмгольца и Лапласа // Изв. АН БССР. Сер. Физ.-мат. наук. – 1972. – № 4. – С. 42 – 46.

6. *Иванов Е.А.* Дифракция электромагнитных волн на двух телах. – Минск: Наука и техника, 1968. – 584 с.

7. *Кубенко В.Д., Луговий П.З., Головко К.Г.* Спосіб обробки привибійної зони пласта. – Патент України на корисну модель № 65064 від 25.11.2011.

8. *Морс Ф.М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики: в 2-х томах. Т. 2. – Москва: ИЛ. – 1960. – 896 с.
9. *Hasheminejad S.M., Miri E.K.* Dynamic interaction of an eccentric multipole cylindrical radiator suspended in a fluid-filled borehole within a poroelastic formation // Acta Mechanica Sinica. – 2007. – **23**, P. 399 – 408.
10. *Hasheminejad S.M., Hosseini M.* Nonaxisymmetric interaction of a spherical radiator in a fluid-filled permeable borehole // Int. J. Solids and Struct. – 2008. – **45,** N 1. – P. 24 – 47.
11. *Kubenko V.D., Yanchevskii I.V.* Abnormal Frequencies in f Semi-Infinite Cylindrical Vessel Filled with a Fluid and Dynamically Excited by a Spherical Oscillator // Int. Appl. Mech. – 2020. – **56**, N 2. – P. 141 – 155.
12. *Kubenko V.D., Yanchevskyi I.V.* «Resonance» phenomenon of kinematic excitation by a spherical body in a semi-infinite cylindrical vessel filled with liquid // Acta Mechanica. – 2019. – **230**, N 3. – P. 1009 – 1025.
13. *Martin P.A.* Multiple Scattering Interaction of Time-harmonic Waves with N Obstacles. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications. – **107**. – Cambridge: Cambridge University Press, 2006. – 437 p.
14. *Mishchenko M.I., Travis I.D., Lacis A.A.* Multiple Scattering of Light by Particles. Radiative Transfer and Coherent Backscattering. – Cambridge: Cambridge University Press, 2006. – 478 p.
15. *Pao Y.H., Mow C.C.* Diffraction of elastic waves and dynamic stress concentrations. – New York: Crane, Russak & Co. – 1973. – 620 p.
16. *Shi J., Zhang X., Chen R., Zhang X.* Acoustic radiation force of a solid elastic sphere immersed in a cylindrical cavity filled with ideal fluid // Wave Motion. –2018. – **80**, – P. 37 – 46.
17. *Shi J., Li S., Deng Y., Zhang X., Zhang G.* Analysis of acoustic radiation force on a rigid sphere in a fluid-filled cylindrical cavity with an abruptly changed cross-section // J. Acoust. Soc. America. – 2020. – **147.** – P. 516 – 520.
18. *Wood R.W.* Anomalous diffraction gratings // Phys. Rev. – 1935. – **48**. – P. 928 – 933.
19. *Zhuk A.P., Kubenko V.D., Zhuk Y.A.* Acoustic radiation force on a spherical particle in a fluid-filled cavity // J. Acoust. Soc. America. – 2012. – **132**. – P. 2189 – 2197.

Надійшла 02.11.21 Затверджена до друку 13.12.2022