

Я. Я. Рущицький<sup>1</sup>, В. М. Юрчук<sup>1,2</sup>

**НОВИЙ ВАРІАНТ МЕТОДУ ОБМЕЖЕННЯ НА ГРАДІЄНТ ЗМІЩЕННЯ,  
ЩО ВИНИКАЄ ПРИ АНАЛІЗІ ЕВОЛЮЦІЇ КРУТИЛЬНОЇ ХВИЛІ**

<sup>1</sup>Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,

вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна;

e-mail: rushch@inmtech.kiev.ua; e-mail: rheol@inmtech.kiev.ua

<sup>2</sup>Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського»,

просп. Берестейський, 37, 03056, Київ, Україна

**Abstract.** A new generalization of the method of restriction on the gradient of displacement is proposed which arose when studying the torsional wave of displacement propagating in the nonlinear elastic material within the framework of the five-constant Murnaghan model. This method enables to approximate solving of the reported recently new nonlinear wave equation and includes restrictions not only on the gradient (the two first partial derivatives) of displacement, that is, on the smallness of maximal amplitude of the wave relative to the wavelength, but also on the displacement, that is, on the real value of the maximal wave amplitude), and on the curvature of the wave profile.

**Key words:** evolution of torsional wave, five-constant Murnaghan potential, new variant of approximate method.

**Вступ.**

У недавньому повідомленні [3] описана спроба більш повного аналізу крутильної хвилі. При цьому отримане послідовно і строго нове більш загальне кубічно нелінійне хвильове рівняння. Зазначимо, що сучасна теорія хвиль [1, 2, 4, 7 – 9, 13 – 17, 20 – 23, 26, 27, 31 – 33] характерна постійним розвитком нових моделей, які у свою чергу містять нові нелінійні хвильові рівняння [3, 5, 6, 10, 28 – 33]. Так що запропонована в [3] модель крутильних хвиль, яка включає нове нелінійне хвильове рівняння, лише підтверджує існуючу тенденцію у загальній теорії хвиль.

Зважаючи на попередній досвід наближеного дослідження нелінійних хвильових рівнянь [20], які виникають при аналізі плоских та циліндричних хвиль, можна стверджувати, що ефективними в аналізі є два наближені методи. Перший метод (далі метод 1) є методом послідовних наближень і другий метод (метод 2) є методом обмеження на градієнт зміщення. Метод 1 стосовно плоских і циліндричних хвиль зміщення в нелінійно пружних матеріалах описаний докладно в книзі [20] та ряді статей, з яких вкажемо деякі [3, 22, 24 – 26]. Метод 2 теж описаний в публікаціях [24, 25]. Суть методу 1 полягає в тому, що нелінійне рівняння повинно мати класичну лінійну частину з відомим лінійним розв'язком  $\rho u_{,tt} + Lu = Nu$  ( $L$  і  $N$  є відповідно лінійним та суто нелінійним операторами щодо просторової змінної) і для знаходження  $K$ -го наближення треба знати лише попереднє  $K-1$  наближення. При цьому  $K$ -те наближення отримується з неоднорідного лінійного рівняння  $\rho u_{,tt}^{(K)} + Lu^{(K)} = Nu^{(K-1)}$ . Цей метод виявився зручним саме для плоских та циліндричних хвиль через відповідність хвильових рівнянь умовам методу. Метод 2 розроблений для аналізу нелінійного хви-

льового рівняння з іншою особливістю. Тут вимагається, щоб нелінійна частина  $N$  рівняння  $\rho u_{,tt} + Lu = Nu$  могла бути представленою у вигляді  $Nu = Lu \cdot Au_{,x}$  ( $A$  є певною константою і  $u_{,x}$  є градієнтом зміщення). Тоді нелінійне хвильове рівняння  $\rho u_{,tt} + Lu = Nu$  перетворюється якби у лінійне рівняння, але з залежною від розв'язку швидкістю хвилі  $\rho u_{,tt} + Lu(1 + Au_{,x}) = 0$ . Тут спостерігається повна аналогія з простою хвилею Ріманна [19]. Присутність градієнта в останньому рівнянні пояснює назву методу, оскільки при наближеному аналізі отриманого рівняння необхідно накладати умови на величину градієнта зміщення.

Обидва методи можуть бути застосовані в аналізі нового нелінійного хвильового рівняння, яке описує поширення крутильної хвилі.

### 1. Нове кубічно нелінійне хвильове рівняння, яке описує крутильну хвилю.

Процедура отримання цього рівняння містить ряд послідовних кроків, першим з яких є використання циліндричних координат  $\theta^1 = r$ ,  $\theta^2 = \vartheta$ ,  $\theta^3 = z$  і вибір відповідної конфігурації. Такою конфігурацією є осесиметрична конфігурація з віссю симетрії  $Oz$ , яка залежить від координат  $r$ ,  $z$  і не залежить від координати  $\vartheta$ . Далі потрібно записати класичне рівняння руху  $\nabla_k [\sigma^{ki} (\delta_i^n + \nabla_i u^n)] = \rho \ddot{u}^i$  і конститутивне рівняння, яке відповідає п'ятиконстантній моделі Мернагана [1, 18, 19]. Слід зауважити, що для вибраної конфігурації лише одне з трьох рівнянь руху не є тотожним – рівняння щодо зміщення  $u^2$  [3]

$$\begin{aligned} \nabla_k [\sigma^{k2} (\delta_2^n + \nabla_2 u^n)] &= \rho \ddot{u}^2 \rightarrow \nabla_k [\sigma^{k2} (1 + \nabla_2 u^2)] = \rho \ddot{u}^2; \\ \rightarrow \nabla_1 [\sigma^{12} (\delta_2^n + \nabla_2 u^n)] + \nabla_3 [\sigma^{32} (\delta_2^n + \nabla_2 u^n)] &= \rho \ddot{u}^2 \rightarrow \nabla_1 \sigma^{12} + \nabla_3 \sigma^{32} = \rho \ddot{u}^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Тоді для аналізу рівняння (1) з шести конститутивних рівнянь потрібні лише два [3]

$$\begin{aligned} \sigma^{12} &= \mu \frac{\partial I_2}{\partial \varepsilon^{12}} + \frac{1}{3} A \frac{\partial I_3}{\partial \varepsilon^{12}} + B I_1 \frac{\partial I_2}{\partial \varepsilon^{12}} = \\ &= 2\mu \varepsilon^{12} + \frac{1}{3} A (\varepsilon^{13} \varepsilon^{23} - \varepsilon^{12} \varepsilon^{33}) + 2B \varepsilon^{12} (\varepsilon^{11} + \varepsilon^{22} + \varepsilon^{33}); \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sigma^{23} &= +\mu \frac{\partial I_2}{\partial \varepsilon^{23}} + \frac{1}{3} A \frac{\partial I_3}{\partial \varepsilon^{23}} + B I_1 \frac{\partial I_2}{\partial \varepsilon^{23}} = \\ &= 2\mu \varepsilon^{23} + \frac{1}{3} A [\varepsilon^{13} \varepsilon^{12} - \varepsilon^{11} \varepsilon^{23}] + 2B \varepsilon^{23} [\varepsilon^{11} + \varepsilon^{22} + \varepsilon^{33}]. \end{aligned} \quad (3)$$

Якщо в (2),(3) врахувати представлення нелінійного тензора деформації

$$\begin{aligned} \varepsilon^{11} &= \frac{1}{2} (\nabla_1 u_2 \nabla_1 u^2) = \frac{1}{2} \left( u_{2,1} - \frac{1}{r} u_2 \right) \left( u_{,1}^2 + \frac{1}{r} u^2 \right); \quad \varepsilon^{22} = \frac{1}{2} (\nabla_2 u_1 \nabla_2 u^1) = \frac{1}{2} u^2 u_2; \\ \varepsilon^{33} &= \frac{1}{2} \nabla_3 u_2 \nabla_3 u^2 = \frac{1}{2} u_{,3}^2 u_{2,3}; \quad \varepsilon^{12} = \frac{1}{2} \nabla_1 u^2 = \frac{1}{2} \left( u_{,1}^2 + \frac{1}{r} u^2 \right); \\ \varepsilon^{23} &= \frac{1}{2} \nabla_3 u^2 = \frac{1}{2} u_{,3}^2; \quad \varepsilon^{13} = \frac{1}{2} \nabla_1 u_2 \nabla_3 u^2 = \left( u_{2,1} - \frac{1}{r} u_2 \right) u_{,3}^2 \end{aligned} \quad (4)$$

через зміщення в рівнянні руху (1), то отримується записане через зміщення нове кубічно нелінійне хвильове рівняння [3]

$$\begin{aligned}
& \mu \left[ Lu_g \equiv \left( u_{g,rr} + (1/r)u_{g,r} - (1/r^2)u_g + u_{g,zz} \right) \right] - \rho u_{g,tt} = \\
& = \left[ Lu_g (1/2) B \left[ \left( u_{g,r} \right)^2 + \frac{1}{r} u_{g,r} u_g + \frac{2}{r^2} u_g^2 + \left( u_{g,z} \right)^2 \right] - \right. \\
& \quad \left. - (1/6)(A - 9B) \left[ u_{g,r} \left( u_{g,z} \right)^2 + \frac{2}{r} u_g \left( u_{g,z} \right)^2 \right] + \right. \\
& \quad \left. + (1/3) A \left[ r u_{g,r} u_{g,z} u_{g,rz} - (1/2) r \left( u_{g,z} \right)^2 u_{g,rr} + (1/2) r \left( u_{g,r} \right)^2 u_{g,zz} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (3/2) u_g u_{g,r} u_{g,zz} + 2 u_g u_{g,z} u_{g,rz} + (1/2 r^2) \left( u_g \right)^2 u_{g,z} + (1/2 r) \left( u_g \right)^2 u_{g,zz} \right] + \right. \\
& \quad \left. + B \left[ r \left( u_{g,z} \right)^2 u_{g,zz} + 2 r \left( u_{g,r} \right)^2 u_{g,rr} + r^2 \left( u_{g,r} \right)^2 u_{g,rz} + (1/2) r \left( u_{g,r} \right)^2 u_{g,rr} + 4 \left( 1/r^2 \right) u_g \left( u_{g,r} \right)^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (3/2) \left( u_{g,r} \right)^3 + (5/2) r^2 \left( u_g \right)^2 u_{g,r} + (5/2) u_g u_{g,z} u_{g,rz} + 2 u_g u_{g,r} u_{g,rr} + (1/2 r) u_g^2 u_{g,rr} \right] \right].
\end{aligned} \tag{5}$$

Відзначимо спершу основну властивість рівняння (5): у лівій частині воно повністю співпадає з лінійним хвильовим рівнянням для крутильної хвилі [3, 19]. Вимога обох вказаних раніше методів наближеного розв'язування нелінійних хвильових рівнянь якраз полягає в наявності в записі рівнянь класичної лінійної частини. Отже, як метод 1, так і метод 2 можуть застосовуватись до рівняння (5).

Далі слід відзначити важливу особливість рівняння (5): воно у правій частині містить доданки, які є кубічно нелінійними щодо зміщення і тому крутильні хвилі є виключно кубічно нелінійними в рамках реалізованого підходу. Цей факт вирізняє крутильну хвилю спосеред інших циліндричних хвиль, досліджених раніше [19, 23, 24].

Для цих хвиль характерна квадратична нелінійність.

Ще однією особливістю рівняння (5) є те, що нелінійна частина цього рівняння включає лише дві з трьох пружних констант третього порядку –  $A$  і  $B$ .

Також доцільно прокоментувати факт, що права нелінійна частина рівняння (5) містить тринадцять нелінійних доданків. Подібна ситуація з присутністю багатьох нелінійних доданків виникала і раніше при вивченні плоских і циліндричних хвиль [21, 25, 26]. При застосуванні різних підходів до знаходження наближених розв'язків такого роду нелінійних хвильових рівнянь було виявлено, що певними нелінійними доданками можна знехтувати, враховуючи лише доданок, подібний до лінійної частини хвильового рівняння. Отже, наявність в рівнянні багатьох нелінійних доданків у ряді випадків не створює великих перепон в знаходженні наближеного розв'язку методами 1 і 2.

Нове нелінійне рівняння (5) виявило ще одну особливість в описі крутильної хвилі. Звичайно в нелінійній теорії пружності розрізняють два типи нелінійностей в основних рівняннях – геометричну і фізичну. Геометрична виникає, коли в записі тензора деформації враховуються квадратично нелінійні доданки. Тоді у загальному випадку при записі хвильових рівнянь у цих рівняннях виникають нелінійні доданки з множниками у вигляді пружних постійних Ляме  $\mu$ ,  $\lambda$ . З хвильового рівняння (5), в рамках прийнятої постановки задачі про крутильні хвилі, випливає, що такі доданки відсутні. Присутні лише нелінійні доданки з множниками у вигляді пружних постійних Мернагана  $A$ ,  $B$ , що свідчить про врахування у рівнянні (5) лише фізичної нелінійності. Ця ситуація не є наслідком нехтування геометричної нелінійності, а наслідком специфіки загальної для теорії пружності постановки задачі про крутильні хвилі.

Наостанок, вкажемо на ще одну особливість рівняння (5), яка пов'язана з виразом у правій частині, який поміщений у рамку. Він містить лінійний оператор  $L$ . Якщо знехтувати всіма іншими нелінійними доданками і врахувати лише вказаний вище вираз, то можна застосувати до аналізу наближених розв'язків рівняння (5) метод 2 [3, 25, 26]. Однак, у цьому випадку метод 2 слід узагальнити, зважаючи на чотири доданки у виразі з рамкою. Але спочатку доцільно коротко згадати основні факти з теорії лінійно пружної крутильної хвилі, оскільки теоретичне представлення цієї хвилі необхідно використовується в методі 2.

## 2. Класична лінійна задача про крутильну хвилю.

Як відомо, в задачі про поширення гармонічної хвилі негласно приймається, що така хвиля збуджується гармонічним у часі імпульсом. Наприклад, плоска поздовжня хвиля зміщення в напрямку осі  $Ox$  збуджується гармонічним імпульсом заданої амплітуди і частоти  $u_x(t) = u_x^0 e^{i\omega t}$ , прикладеним до площини  $x = 0$ . Аналогічно, вважається, що гармонічна крутильна хвиля в напрямку осі симетрії циліндра  $Oz$  збуджується імпульсом  $u_\theta(t) = u_\theta^0 e^{i\omega t}$ , прикладеним до поперечного перерізу циліндра (круга)  $z = 0$ . Тоді в циліндрі виникає гармонічна у часі крутильна хвиля, яка поширюється вздовж осі циліндра.

Особливості лінійної крутильної хвилі в пружному циліндрі кругового поперечного перерізу є такими [3, 19]:

А) застосовуються циліндричні координати  $(r, \vartheta, z)$ ;

Б) деформований стан є осесиметричним і тому не залежить від координати  $\vartheta$ ;

В) радіальне і осьове зміщення відсутні  $u_r(r, z, t) = u_z(r, z, t) = 0$  (ці ж особливості зберігаються і при нелінійному описі). Тоді система з трьох рівнянь руху циліндра спрощується до вигляду

$$u_{\theta,rr} + (1/r)u_{\theta,r} - (1/r^2)u_\theta + u_{\theta,zz} - (1/v_T^2)u_{\theta,tt} = 0, \quad (6)$$

де  $v_T = \sqrt{\mu/\rho}$  є фазовою швидкістю зсувної чи плоскої поперечної хвилі в лінійно пружному матеріалі;  $\mu$  – модулем зсуву і  $\rho$  – густиною цього матеріалу.

Класичний аналіз крутильної хвилі проводиться у декілька кроків. Спочатку припускається, що колове зміщення  $u_\theta$  є гармонічним у часі і просторі (тобто, розглядається розв'язок у вигляді хвилі)

$$u_\theta(r, z, t) = \tilde{u}_\theta(r) e^{i(k_z z - \omega t)}. \quad (7)$$

Вважається, що такий розв'язок є гармонічною крутильною хвилею, оскільки кожен поперечний переріз циліндра здійснює гармонічне коливання у коловому напрямку з заданою частотою  $\omega$  у часі і за просторовою координатою  $z$  рухається хвиля з довжиною  $\lambda = (2\pi/k_z)$  та хвильовим числом  $k_z$ . При цьому циліндр піддається деформації кручення і саме тому хвилю називають крутильною.

Далі амплітуда хвилі, що змінюється зі зміною радіуса, визначається з рівняння

$$u_{\theta,rr} + (1/r)u_{\theta,r} + [k_z^2 - k_T^2 - (1/r^2)]u_\theta = 0. \quad (8)$$

Тоді розв'язок рівняння (8) виражається через циліндричну функцію (функцію Бесселя першого роду і першого індексу)  $\tilde{u}(r) = \tilde{u}^0 J_1(\beta r)$ ,  $\beta = \sqrt{k_T^2 - k_z^2}$  і розв'язок (7) у вигляді крутильної хвилі набуває вигляду

$$u_\theta(r, z, t) = \tilde{u}_\theta^0 J_1(\beta r) e^{i(k_z z - \omega t)}. \quad (9)$$

Невідоме хвильове число  $k_z$  і відповідна фазова швидкість  $v_z = (\omega/k_z)$  визначаються з умови відсутності напружень на боковій поверхні циліндра  $r = r^0$

$$\sigma_{rr}(r^0, z, t) = \sigma_{rg}(r^0, z, t) = \sigma_{rz}(r^0, z, t) = 0. \quad (10)$$

Далі слід врахувати необхідні компоненти тензорів напружень та деформацій

$$\sigma_{rr} = 2\mu\varepsilon_{rr} + \lambda e; \quad \sigma_{rg} = 2\mu\varepsilon_{rg}; \quad \sigma_{rz} = 2\mu\varepsilon_{rz};$$

$$\varepsilon_{rr} = 0; \quad \varepsilon_{rg} = (1/2)[u_{g,r} - (1/r)u_g]; \quad \varepsilon_{rz} = 0, \quad e = 0$$

і підставити розв'язок (5) у граничні умови (6). Так для знаходження хвильового числа  $k_z$  отримують трансцендентне рівняння  $\beta r^0 J_0(\beta r^0) = 2J_1(\beta r^0)$ . Це рівняння має нескінченну кількість коренів  $\beta_k r^0$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), які для конкретної задачі знаходять чисельно. Відповідно, крутильна хвиля має нескінченну кількість мод з відмінними між собою фазовими швидкостями

$$(v_z)_k = v_T \sqrt{1 + \beta^2 (k_z)_k^2}.$$

Отже, розв'язок класичної лінійної задачі про поширення крутильної хвилі має вигляд (9) і може у такому вигляді бути використаний для наближеного аналізу нелінійного хвильового рівняння (5) методами 1 та 2. Рівняння (5) може аналізуватись як при збереженні всіх 13 нелінійних доданків, так і при нехтуванні якоїсь частини цих доданків з тих чи інших причин. Спосеред всіх варіантів найпростішим є варіант збереження перших чотирьох нелінійних доданків, які виділені рамкою у рівнянні (5). Саме цей варіант розглянемо далі з метою застосування методу обмеження на величину змінної швидкості крутильної хвилі зміщення, який в застосуванні до аналізу плоских і циліндричних хвиль названий методом обмеження на градієнт зміщення.

### 3. Побудова наближеного розв'язку нелінійного рівняння (5) при застосуванні методу обмеження на величину змінної швидкості хвилі.

Виберемо найпростіший варіант рівняння (5)

$$\begin{aligned} & \mu \left[ Lu_g \equiv \left( u_{g,rr} + (1/r)u_{g,r} - (1/r^2)u_g + u_{g,zz} \right) \right] - \rho u_{g,tt} = \\ & = \boxed{Lu_g (1/2) B \left[ (u_{g,r})^2 + \frac{1}{r}u_{g,1}u_g + \frac{2}{r^2}u_g^2 + (u_{g,z})^2 \right]}, \text{ або} \\ & (c_T)^2 \left\{ 1 - \frac{B}{2\mu} \left[ (u_{g,r})^2 + \frac{1}{r}u_{g,1}u_g + \frac{2}{r^2}u_g^2 + (u_{g,z})^2 \right] \right\} \times \\ & \times \left[ u_{g,rr} + (1/r)u_{g,r} - (1/r^2)u_g + u_{g,zz} \right] - u_{g,tt} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

і шукатимемо розв'язок рівняння (11) у вигляді хвилі (7)  $u_g(r, z, t) = \tilde{u}_g(r) e^{i(k_z z - \omega t)}$ .

Тоді рівняння (11) спрощується до вигляду

$$\begin{aligned} & (v_K)^2 \left[ u_{g,11} + (1/r)u_{g,1} + \left( (k_z)^2 - (1/r^2) \right) u_g \right] - \omega^2 u_g = 0, \text{ або} \\ & u_{g,11} + (1/r)u_{g,1} + \left( (k_z)^2 - (k_T)^2 - (1/r^2) \right) u_g = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

де

$$k_Z = (\omega/v_Z); \quad v_Z = c_T \sqrt{1 - \frac{B}{2\mu} \left[ (u_{g,1})^2 + \frac{1}{r} u_{g,1} u_g + \frac{2}{r^2} u_g^2 + (u_{g,3})^2 \right]}. \quad (13)$$

Отже, нелінійне хвильове рівняння перетворилось на якби лінійне рівняння (12) зі змінною швидкістю хвилі  $v_K$ .

Зазначимо тут, що метод обмеження на градієнт зміщення застосовувався раніше до нелінійного хвильового рівняння [21]  $u_{1,tt} - \left\{ (v_L)^2 + (N_1/\rho) u_{1,1} \right\} u_{1,11} = 0$  щодо плоскої поздовжньої хвилі, яке далі перетворювалось у якби лінійне рівняння  $u_{1,tt} - v^2 u_{1,11} = 0$  зі змінною швидкістю хвилі  $v = \sqrt{1 + \alpha u_{1,1}} v_L$ ,  $\alpha = [N_1/(\lambda + 2\mu)]$ . Далі накладалося обмеження на невелику зміну швидкості (на невелику зміну градієнта зміщення).

Введемо обмеження на зміну швидкості (13)

$$\frac{B}{2\mu} M(u_g) \ll 1, \quad M(u_g) = \left[ (u_{g,1})^2 + \frac{1}{r} u_{g,1} u_g + \frac{2}{r^2} u_g^2 + (u_{g,3})^2 \right] \quad (14)$$

і розкладемо корінь у виразі для швидкості в ряд зі збереженням перших двох членів

$$\sqrt{1 - (B/2\mu) M(u_g)} \approx 1 - (B/4\mu) M(u_g).$$

Тоді

$$v_Z = c_T \left[ 1 - (B/4\mu) M(u_g) \right]. \quad (15)$$

Повернемось до рівняння (12) і запишемо формально його розв'язок через функцію Бесселя

$$\tilde{u}(r) = \tilde{u}^0 J_1(\beta_K r), \quad \beta_K = \sqrt{k_T^2 - k_Z^2}. \quad (16)$$

Зазначимо, що особливістю наближеного представлення хвилі (16) є те, що воно вже включає постійну швидкість хвилі  $c_T$ , яка відповідає лінійному наближенню, але швидкість хвилі залежить від невідомого зміщення.

Також зазначимо, що адекватність наближення (16) залежить від точності виконання умови (14).

Далі представимо функцію Бесселя  $J_1(\sqrt{k_T^2 - k_Z^2} r)$  наближено формулою

$$\begin{aligned} J_1 \left\{ r \sqrt{k_T^2 - k_Z^2} \left[ 1 - \frac{B}{4\mu} M(u_g) \right] \right\} &\approx J_1 \left( r \sqrt{k_T^2 - k_Z^2} \sqrt{1 + \left( \frac{B}{4\mu} \frac{k_Z^2}{k_T^2 - k_Z^2} M(u_g) \right)} \right) \approx \\ &\approx J_1 \left( r \sqrt{k_T^2 - k_Z^2} \left[ 1 + \frac{B}{8\mu} \frac{k_Z^2}{k_T^2 - k_Z^2} M(u_g) \right] \right) = J_1 \left[ r \sqrt{k_T^2 - k_Z^2} + r \frac{B}{8\mu} \frac{k_T^2}{\sqrt{k_T^2 - k_Z^2}} M(u_g) \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Якщо до функції (17) застосувати перше наближення  $J_1(\sigma + \delta) \approx J(\sigma) + J'(\sigma)\delta$  за формулою Тейлора в околі точки  $r\sqrt{k_T^2 - k_Z^2}$ , вважаючи  $\delta = r \frac{B}{8\mu} \frac{k_T^2}{\sqrt{k_T^2 - k_Z^2}} M(u_g)$  малою величиною, то формулу (17) можна представити наближено

$$J_1 \left( r \sqrt{k_T^2 - k_Z^2} - r \frac{B}{8\mu} \frac{k_T^2}{\sqrt{k_T^2 - k_Z^2}} M(u_g) \right) \approx J_1 \left( r \sqrt{k_T^2 - k_Z^2} \right) -$$

$$-r \frac{B}{8\mu} \frac{k_T^2}{\sqrt{k_T^2 - k_z^2}} M(u_g) J_1' \left( r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right). \quad (18)$$

Далі слід перетворити вираз  $M(u_g)$ . Тут доцільно у першому наближенні використати лінійне представлення розв'язку (9) і зразу розглянути остаточний розв'язок у вигляді двох наближень

$$u_g(r, z, t) = \tilde{u}_g^o e^{i(k_z z - \omega t)} J_1 \left( r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) - r \tilde{u}_g^o \frac{B}{8\mu} \frac{k_T^2}{\sqrt{k_T^2 - k_z^2}} J_1' \left( r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) \times \\ \times \left[ (u_{g,1})^2 + \frac{1}{r} u_{g,1} u_g + \frac{2}{r^2} u_g^2 + (u_{g,3})^2 \right]. \quad (19)$$

Зважаючи на рекурентну формулу

$$J_1' \left( r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) = (1/2) \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \left[ J_0 \left( r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) - J_2 \left( r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) \right]$$

і формулу (18), наближений розв'язок (16) можна записати в іншому вигляді.

Остаточно представлення розв'язку у вигляді двох наближень – лінійного (першого) і другого (певної нелінійної добавки) – є таким

$$u_g(r, z, t) = \tilde{u}_g^o e^{i(k_z z - \omega t)} J_1 \left( r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) - \\ - r \frac{B}{8\mu} \frac{k_T^2}{\sqrt{k_T^2 - k_z^2}} (\tilde{u}_g^o)^3 e^{i3(k_z z - \omega t)} \left\{ (k_T^2 - k_z^2) \left[ J_1' \left( r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) \right]^3 + \right. \quad (20) \\ + \frac{1}{r} \sqrt{k_T^2 - k_z^2} J_1 \left( r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) \left[ J_1' \left( r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) \right]^2 + \frac{2}{r^2} \left[ J_1 \left( r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) \right]^2 J_1' \left( r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) - \\ \left. - (k_z)^2 J_1' \left( r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) \left[ J_1 \left( r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) \right]^2 \right\}.$$

З точки зору механіки хвиль наявність другого наближення означає спотворення початкового профіля хвилі, тому що вплив нелінійної добавки збільшується з відстанню від центру до поверхні циліндра (добавка містить  $r$  як множник). На поверхні циліндра лінійна гармонічна хвиля (перша гармоніка) отримує постійну добавку у вигляді третьої гармоніки, тобто, хвиля спотворюється до вигляду модульованої хвилі, але ця добавка не змінюється з відстанню поширення хвилі у вертикальному напрямку. Можна вважати, що реалізований наближений підхід не описує еволюцію хвилі, а тільки одномоментно переводить гармонічну хвилю у модульовану хвилю. Поступового переходу першої гармоніки у третю цей підхід не описує.

Оскільки функції Бесселя вбудовані в більшість комп'ютерних пакетів (наприклад, в Mathematica), то ускладнень з комп'ютерним аналізом еволюції крутильної хвилі не передбачається. Однак достовірність наближеного представлення (20) регулюється певними обмеженнями – перш за все, це обмеження на профіль хвилі (відношення максимальної амплітуди до довжини хвилі) та на відстань поширення хвилі; крім того, в обмеження входять вибір початкового амплітудного множника, частоти хвилі і матеріалу. Практика комп'ютерного аналізу еволюції хвилі показує, що такий аналіз вносить корективи в розуміння обмежень в наближеному аналізі хвилі.

### Загальні висновки.

Прокоментовано нове нелінійне хвильове рівняння стосовно крутильної хвилі зміщення, яке описане в недавній публікації одного з авторів даної статті. Для наближеного аналізу найпростішого варіанту цього рівняння запропоновано новий метод, який узагальнює метод обмеження на градієнт зміщення. Він містить не лише обмеження на градієнт зміщення, а фактично обмежує зміну швидкості крутильної хвилі при її поширенні в нелінійно пружному матеріалі. Основна новизна полягає в отриманні достатньо простої формули для знаходження перших двох наближень, яка зручна в комп'ютерному аналізі поширення хвилі. Наступні наближення теж можуть бути врахованими за формулами, які нескладно узагальнюватимуть отриману.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано у цій статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

**РЕЗЮМЕ.** Запропоновано нове узагальнення методу обмеження на градієнт зміщення, що виникло при вивченні крутильної хвилі зміщення, що поширюється в нелінійному пружному матеріалі в рамках п'ятиконстантної моделі Мернагана. Цей метод дозволяє знаходити наближений розв'язок нещодавно запропонованого нового нелінійного хвильового рівняння і включає обмеження не тільки на дві перші частинні похідні зміщення, тобто на малість максимальної амплітуди хвилі відносно довжини хвилі, але і на зміщення, тобто на реальне значення максимальної амплітуди хвилі, і на кривизну профіля хвилі.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** еволюція крутильної хвилі, п'ятиконстантний потенціал Мурнагана, новий варіант наближеного методу.

1. Гузь А. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями: в 2-х частях. Ч. 1. Общие вопросы. Волны в бесконечных телах и поверхностные волны. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. – 501 с.
2. Гузь А. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями: в 2-х частях. Ч. 2. Волны в частичноограниченных телах. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. – 505 с.
3. Руцицький Я.Я. Пружна крутильна хвиля і відповідне нелінійне хвильове рівняння // Доп. НАН України. – 2022. – № 2. – С. 39 – 45.
4. Alonso M., Reguera N. Numerical detection and generation of solitary waves for a nonlinear wave equation // Wave Motion. – 2015. – 56. – P. 137 – 146.
5. Altayeb Y. New scenario of decay rate for system of three nonlinear wave equations with viscoelasticities // AIMS Mathematics. – 2021. – 6, N 7. – P. 7251 – 7265.
6. Arbab I.A. A New Wave Equation of the Electron // J. Modern Physics. – 2011. – 2, N 9. – P.1012 – 1016.
7. Arda M. Torsional Wave Propagation in Carbon Nanotube Bundles // NOISE Theory and Practice – 2018. – 4, N 2. – P. 7 – 21.
8. Arreola-Lucas A., Báez G., Cervera F., Climente A., Méndez-Sánchez R.A., Sánchez-Dehesa J. Experimental Evidence of Rainbow Trapping and Bloch Oscillations of Torsional Waves in Chirped Metallic Beams // Nature. Scientific Reports. – 2019. – 9: 1860. – P. 1 – 13.
9. Bedford A., Drumheller D. Introduction to elastic wave propagation. – New York: John Wiley, 1994. – 300 p.
10. Beli D., Arruda J.R.F., Ruzzene M. Wave propagation in elastic metamaterial beams and plates with interconnected resonators // Int. J. Solids Struct. – 2018. – 139 – 140. – P. 105 – 120.
11. Du X., Fletcher R.P., Fowler P.J. A New Pseudo-acoustic Wave Equation for VTI Media // Confer. Proc. 70th EAGE Conf. and Exhibition incorporating SPE EUROPEC 2008, Rome, Italy, June 9 –12, 2008, H033.
12. Engelbrecht J. Questions about elastic waves. – Berlin: Springer, 2015. – 148 p.
13. <https://www.physics.colostate.edu/physics-demos/torsion-wave-generator>.
14. Guz A.N., Rushchitsky J.J. Short introduction to mechanics of nanocomposites. – Rosemead, CA: Scientific & Academic Publishing, 2013. – 280 p.



15. Ishii Y., Biwa S., Adachi T. Second-harmonic generation of two-dimensional elastic wave propagation an infinite layered structure with nonlinear spring-type interfaces // *Wave Motion*. – 2020. – **97**, N 9. – P. 102569.
16. Lempriere B. *Ultrasound and elastic waves: Frequently asked questions*. – New York: Academic Press, 2002. – 154 p.
17. Li Z.N., Wang Y.Z., Wang Y.S. Three-dimensional nonreciprocal transmission in a layered nonlinear elastic wave metamaterial // *Int. J. Non-Linear Mech.* – 2020. – **125**, N 10. – P. 193531.
18. Murnaghan F. *Finite Deformation in an Elastic Solid*. 3rd ed. – Gloucester, MA, USA: Peter Smith Publisher Inc., 1985. – 140 p.
19. Rushchitsky J.J. Certain class of nonlinear hyperelastic waves: classical and novel models, wave equations, wave effects // *Int. J. Appl. Math. Mech.* – 2012. – **8**, N 6. – P. 400 – 443.
20. Rushchitsky J.J. *Nonlinear Elastic Waves in Materials*. – Heidelberg: Springer, 2014. – 455 p.
21. Rushchitsky J.J. *Plane Nonlinear Elastic Waves: Approximate Approaches to Analysis of Evolution*. Chapter in the book “Understanding Plane Waves” Ed. William A. Cooper. – London: Nova Science Publishers, 2019. – 300 p. – P. 201 – 220.
22. Rushchitsky J.J. *Foundations of Mechanics of Materials*. – Copenhagen: Ventus Publishing ApS, 2021. – 276 p.
23. Rushchitsky J.J. Scenarios of Evolution of Some Types of Simple Waves in Nonlinear Elastic Materials // *Archive of Appl. Mech.* – 2021. – **91**, N 7. – P. 3151 – 3170.
24. Rushchitsky J.J., Yurchuk V.M. Effect of the Third Approximation in the Analysis of the Evolution of a Nonlinear Elastic P-wave. Part 1 // *Int. Appl. Mech.* – 2020. – **56**, N 5. – P. 581 – 589.
25. Rushchitsky J.J., Yurchuk V.M. Effect of the Third Approximation in the Analysis of the Evolution of a Nonlinear Elastic P-wave. Part 2 // *Int. Appl. Mech.* – 2020. – **56**, N 6. – P. 666 – 673.
26. Shu H., Dong L., Li S., Liu W., Liu S., Wang W., Shi D., Zhao D. Propagation of torsional waves in a thin circular plate of generalized phononic crystals // *J. Phys. D: Appl. Phys.* – 2014. – **47**. – P. 295501-295512.
27. Tomar S., Kaur N. Role of sliding contact interface on torsional waves // *The Mathematics Student*. – 2019. – **88**, N 3 – 4. – P. 171 – 177.
28. Ueda H. A new example of the dissipative wave equations with the total energy decay // *Hiroshima Math. J.* – 2016. – **46**, N 2. – P. 187 – 193.
29. Wu Z., Alkhalifah T. A New Wave Equation Based Source Location Method with Full-waveform Inversion // *Conf. Proc., 79th EAGE Conf. and Exhibition 2017, Jun 2017*. – 2017. – P. 1 – 5.
30. Yang J., Zhu H. A new time-domain wave equation for viscoacoustic modeling and imaging // *Proc. of the 2018 SEG Int. Exp. and Annual Meeting, Anaheim, California, USA, October 2018*. Paper Number: SEG-2018-2974332.
31. Vasheghani Farahani S., Ghanbari E., Ghaffari G., Safari H. Torsional wave propagation in solar tornadoes // *Astronomy and Astrophysics*. – 2017. – **599**, A19. – P. 7 – 12.
32. Zakia T., Boulaaras S., Degaichia H., Allahem A. Existence and blow-up of a new class of nonlinear damped wave equation // *J. Intelligent & Fuzzy Systems*. – 2020. – **38**, N 3. – P. 2649 – 2660.
33. Zitzewitz P.W. *The Handy Physics Answer Book*. – New York: Visible Ink Press., 2011. – 215 p.

Надійшла 19.07.2022

Затверджена до друку 13.12.2022