

О.Я.Григоренко¹, Л.С.Рожок²

**НАПРУЖЕНИЙ СТАН НЕТОНКИХ ЕЛІПТИЧНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБО-
ЛОНОК ПІД ДІЄЮ ЛОКАЛЬНОГО ПОЗДОВЖНЬОГО НАВАНТАЖЕННЯ**

¹Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: ayagrigorenko1991@gmail.com

²Національний транспортний університет,
вул. Омеляновича-Павленка, 1, 01010, Київ, Україна; e-mail: r.l.s@ua.fm

Abstract. A problem of the stress state of the non-thin noncircular cylindrical shells with an elliptical cross-section is considered based on the spatial theory of elasticity. The numerical analytical approach based on the methods of separation of variables, approximation of functions by discrete Fourier series, and method of discrete orthogonalization are used. The numerical analysis of the noncircular cylindrical shells made of isotropic and orthotropic material is carried out under the action of the local longitudinal loading. The results of calculations of the corresponding components of the stress tensor and the displacement vector are presented.

Key words: 3D theory of elasticity, elliptical cylindrical non-thin shells, isotropic and orthotropic material, longitudinal local loading, numerical-analytical approach.

Вступ.

Широке використання оболонкових елементів пояснюється бажанням задовольнити вимогам, які зумовлені складними умовами роботи машин, літальних та транспортних апаратів, різноманітних промислових та громадських споруд, тощо [14, 19]. Значна кількість елементів конструкцій сучасної техніки, що виконана у вигляді оболонок складної форми та структури, перебуває під дією навантажень різної природи [4, 13, 18, 20, 21].

Для розв'язання задач про напружено-деформований стан пластин та оболонок застосовуються різноманітні підходи, виходячи із специфіки експлуатації та поставлених вимог для забезпечення міцності і надійності розглядуваних конструкцій та елементів з них [8, 17].

В загальному випадку проблему розрахунку нетонких циліндричних оболонок слід розглядати як проблему розв'язання відповідної крайової задачі просторової теорії пружності. При цьому вдале поєднання аналітичних та чисельних методів дозволяє отримати розв'язок задачі з наперед заданою точністю в широкому діапазоні зміни геометричних та механічних параметрів оболонок даного класу [15].

Дана стаття є продовженням досліджень, пов'язаних із визначенням напруженого стану нетонких циліндричних оболонок за певних граничних умов на торцях при дії поверхневого навантаження в просторовій постановці. При цьому зведення тривимірної крайової задачі до одновимірної здійснюється на основі методу розділення змінних та апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є. Для розв'язання отриманої одновимірної крайової задачі використовується стійкий чисельний метод дискретної ортогоналізації. Ефективність застосування даної методики перевірено при розв'язуванні задач про напружений стан порожнистих циліндрів з некруговою формою поперечного перерізу, що перебувають під дією розподіленого та локального поперечного навантаження [8 – 10, 15]. В даній роботі досліджується напружений стан циліндричних нетонких оболонок з еліптичним поперечним перерізом, що перебувають під дією локального поздовжнього навантаження.

§1. Постановка задачі та метод розв'язування.

Розглянемо ортотропні пружні тіла у вигляді нетонких циліндричних оболонок скінченної довжини в криволінійній ортогональній системі координат (s, t, γ) , де $s = \text{const}$, $t = \text{const}$ – лінії головних кривизн на деякій координатній циліндричній поверхні, що являють собою сімейства напрямних та твірних, а координата γ відкладається вздовж нормалі до цієї поверхні [5]. Дугову координату t відкладемо від деякої фіксованої твірної, а координату s вважаємо такою, що дорівнює відстані від початкового граничного контуру. Таким чином, положення довільної точки простору однозначно визначатиметься трьома величинами s, t, γ .

За координатну поверхню може бути вибрана будь-яка, що є рівновіддаленою від бічних поверхонь, які обмежують оболонку. Оберемо за серединну поверхню оболонки координатну. В прийнятій системі координат перша квадратична форма координатної поверхні має вигляд

$$ds_1^2 = ds^2 + dt^2.$$

Квадрат довжини лінійного елемента визначається рівністю

$$dS^2 = H_1^2 ds^2 + H_2^2 dt^2 + H_3^2 d\gamma^2, \quad (1.1)$$

де $H_1 = H_3 = 1$, $H_2 = 1 + [\gamma / R(t)]$ – параметри Ламе; $R(t)$ – радіус кривизни напрямної серединної поверхні. При цьому параметри Ламе пов'язані між собою відповідними диференціальними співвідношеннями.

Задача розв'язується з врахуванням таких передумов: напрямна серединної поверхні являє собою довільну неперервну криву; механічні характеристики можуть бути змінними за товщиною та напрямною, але сталими за твірною; закон розподілення прикладеного навантаження може бути заданим довільним чином.

Розглядатимемо циліндричні оболонки з еліптичним поперечним перерізом. Напряму поверхні відліку в площині поперечного перерізу задано в параметричній формі у вигляді

$$x = b \cos \theta; \quad z = a \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi), \quad (1.2)$$

де a, b – півосі еліпса ($b > a$); θ – кутовий параметр в поперечному перерізі поверхні відліку.

Нехай в оболонках, що розглядаються, периметр поперечного перерізу поверхні відліку дорівнює довжині кола радіуса r , тоді має місце рівність

$$\pi(a+b) \left(1 + \frac{\Delta^2}{4} + \frac{\Delta^4}{64} + \frac{\Delta^6}{256} + \dots \right) = 2\pi r; \quad \Delta = \frac{b-a}{b+a}.$$

Враховуючи члени ряду до Δ^6 включно, отримаємо

$$a = \frac{r}{f}(1-\Delta); \quad b = \frac{r}{f}(1+\Delta); \quad f = 1 + \frac{\Delta^2}{4} + \frac{\Delta^4}{64} + \frac{\Delta^6}{256}; \quad \frac{a}{b} = \frac{1-\Delta}{1+\Delta}.$$

Переходячи до координати θ , рівність (1.1) запишемо у вигляді

$$dS^2 = ds^2 + H_2^2(\theta, \gamma) \omega(\theta) d\theta^2 + d\gamma^2,$$

де коефіцієнт переходу

$$\omega = \omega(\theta) = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{b^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta};$$

$H_2(\theta, \gamma) = 1 + [\gamma / R(\theta)]$; $R(\theta)$ – радіус кривизни поперечного перерізу поверхні відліку.

Переміщення довільної точки оболонки визначається трьома компонентами $u_s(s, \theta, \gamma)$, $u_\theta(s, \theta, \gamma)$, $u_\gamma(s, \theta, \gamma)$, які в силу того, що оболонка розглядається як пружне тіло, мають бути неявними функціями s, θ, γ в усьому об'ємі. Напружений стан у вибраній системі координат характеризується нормальними $\sigma_s, \sigma_\theta, \sigma_\gamma$ та дотичними напруженнями $\tau_{s\theta}, \tau_{\theta\gamma}, \tau_{\gamma s}$. При цьому має місце закон парності дотичних напружень $\tau_{s\theta} = \tau_{\theta s}$, $\tau_{\theta\gamma} = \tau_{\gamma\theta}$, $\tau_{\gamma s} = \tau_{s\gamma}$.

За основні приймемо рівняння просторової лінійної теорії пружності: вирази деформацій через переміщення, рівняння рівноваги та узагальненого закону Гука для ортотропного тіла [1, 7, 11]. Обравши за розв'язувальні функції три компоненти напружень $\sigma_\gamma, \tau_{\theta\gamma}, \tau_{\gamma s}$ та три компоненти переміщень u_s, u_θ, u_γ , після певних перетворень отримуємо розв'язувальну систему диференціальних рівнянь в частинних похідних шостого порядку зі змінними коефіцієнтами [15].

На обмежуючих поверхнях ($0 \leq s \leq l$; $0 \leq \theta \leq 2\pi$; $-h/2 \leq \gamma \leq h/2$, тут l – довжина оболонки; h – її товщина) задаються відповідні граничні умови.

На торцях оболонки розглядаємо умови, що дозволяють зведення вихідної тривимірної крайової задачі до двовимірної шляхом подання розв'язувальних функцій та компонент навантаження у вигляді розвинень в ряди Фур'є за координатою твірної s . Нехай на торцях має місце діафрагма абсолютно жорстка в своїй площині та гнучка при виході з неї

$$\sigma_s = u_\theta = u_\gamma = 0 \quad \text{при } s = 0; s = l. \quad (1.3)$$

Оболонки, що розглядаються, замкнені в напрямку прямої, тож мають місце умови періодичності усіх факторів напружено-деформованого стану оболонок.

Розглянемо циліндричні оболонки, що перебувають під дією локального поздовжнього навантаження, прикладеного на зовнішній бічний поверхні $q_\gamma = q_0 \sin^n(\pi s / l)$ ($q_0 = \text{const}$ (n – непарне)). Дане навантаження розкладається в ряд Фур'є за непарними гармоніками

$$q_\gamma = q_0 \sum_{n=1}^{2N-1} a_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} s\right). \quad (1.4)$$

Відповідні граничні умови на обмежуючих бічних поверхнях мають вигляд

$$\sigma_\gamma = 0; \tau_{s\gamma} = 0; \tau_{\theta\gamma} = 0 \quad \text{при } \gamma = -h/2; \quad (1.5)$$

$$\sigma_\gamma = q_\gamma; \tau_{s\gamma} = 0; \tau_{\theta\gamma} = 0 \quad \text{при } \gamma = h/2.$$

Враховуючи граничні умови (1.3), подаючи розв'язувальні функції та компоненти навантаження у вигляді розвинень в ряди Фур'є вздовж твірної, після підстановки їх до розв'язувальної системи та розділення змінних, приходимо до двовимірної крайової задачі, що описується системою диференціальних рівнянь в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{\gamma,n}}{\partial \gamma} = & (c_2 - 1) \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \sigma_{\gamma,n} + \lambda_n \tau_{s\gamma,n} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial \tau_{\theta\gamma,n}}{\partial \theta} + b_{22} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \right)^2 u_{\gamma,n} + \\ & + b_{12} \lambda_n \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_{s,n} + b_{22} \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \frac{\partial u_{\theta,n}}{\partial \theta}; \\ \frac{\partial \tau_{s\gamma,n}}{\partial \gamma} = & -c_1 \lambda_n \sigma_{\gamma,n} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \tau_{s\gamma,n} - b_{12} \lambda_n \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_{\gamma,n} + b_{11} \lambda_n^2 u_{s,n} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -b_{66} \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial u_{s,n}}{\partial \theta} \right) - (b_{12} + b_{66}) \lambda_n \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_{\theta,n}}{\partial \theta}; \\
& \frac{\partial \tau_{\theta\gamma,n}}{\partial \gamma} = -c_2 \frac{1}{H_2} \frac{\partial \sigma_{\gamma,n}}{\partial \theta} - \frac{2}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \tau_{\theta\gamma,n} - b_{22} \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_{\gamma,n} \right) + \\
& + (b_{12} + b_{66}) \lambda_n \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_{s,n}}{\partial \theta} - b_{22} \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial u_{\theta,n}}{\partial \theta} \right) + b_{66} \lambda_n^2 u_{\theta,n}; \\
& \frac{\partial u_{\gamma,n}}{\partial \gamma} = c_4 \sigma_{\gamma,n} - c_2 \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_{\gamma,n} + c_1 \lambda_n u_{s,n} - c_2 \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_{\theta,n}}{\partial \theta}; \\
& \frac{\partial u_{s,n}}{\partial \gamma} = a_{55} \tau_{s\gamma,n} - \lambda_n u_{\gamma,n}; \\
& \frac{\partial u_{\theta,n}}{\partial \gamma} = a_{44} \tau_{\theta\gamma,n} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_{\gamma,n}}{\partial \theta} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_{\theta,n} \quad \left(n = \overline{0, N}; \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{l} \right)
\end{aligned} \tag{1.6}$$

з граничними умовами

$$\begin{aligned}
& \sigma_{\gamma,n} = 0; \quad \tau_{s\gamma,n} = 0; \quad \tau_{\theta\gamma,n} = 0 \quad \text{при } \gamma = -h/2; \\
& \sigma_{\gamma,n} = q_{\gamma,n}; \quad \tau_{s\gamma,n} = 0; \quad \tau_{\theta\gamma,n} = 0 \quad \text{при } \gamma = h/2.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Сталі коефіцієнти a_{ij} , b_{ij} , c_k , що входять до системи рівнянь (1.6), визначаються через пружні сталі ортотропного матеріалу таким чином:

$$\begin{aligned}
& a_{11} = \frac{1}{E_s}; \quad a_{12} = -\frac{\nu_{s\theta}}{E_\theta} = -\frac{\nu_{\theta s}}{E_s}; \quad a_{13} = -\frac{\nu_{s\gamma}}{E_\gamma} = -\frac{\nu_{\gamma s}}{E_s}; \quad a_{22} = \frac{1}{E_\theta}; \\
& a_{23} = -\frac{\nu_{\gamma\theta}}{E_\theta} = -\frac{\nu_{\theta\gamma}}{E_\gamma}; \quad a_{33} = \frac{1}{E_\gamma}; \quad a_{44} = \frac{1}{G_{\theta\gamma}}; \quad a_{55} = \frac{1}{G_{s\gamma}}; \quad a_{66} = \frac{1}{G_{\theta s}}; \\
& b_{11} = a_{22} a_{66} / \Omega; \quad b_{12} = -a_{12} a_{66} / \Omega; \quad b_{22} = a_{11} a_{66} / \Omega; \\
& b_{66} = (a_{11} a_{22} - a_{12}^2) / \Omega; \quad \Omega = (a_{11} a_{22} - a_{12}^2) a_{66};
\end{aligned}$$

$$c_1 = -(b_{11} a_{13} + b_{12} a_{23}); \quad c_2 = -(b_{12} a_{13} + b_{22} a_{23}); \quad c_4 = a_{33} + c_1 a_{13} + c_2 a_{23},$$

де E_s , E_θ , E_γ – модулі пружності; $G_{\theta\gamma}$, $G_{s\gamma}$, $G_{s\theta}$ – модулі зсуву; $\nu_{\theta\gamma}$, $\nu_{s\gamma}$, $\nu_{s\theta}$, $\nu_{\gamma\theta}$, $\nu_{\gamma s}$, $\nu_{\theta s}$ – відповідні коефіцієнти Пуассона.

У випадку ізотропного матеріалу маємо

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = \frac{1}{E}; \quad a_{12} = a_{13} = a_{23} = -\frac{\nu}{E}; \quad a_{55} = a_{44} = a_{66} = \frac{1}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}.$$

Розв'язувальна система диференціальних рівнянь (1.6) крім зазначених сталих містить в собі також змінні коефіцієнти, що залежать від двох координат θ , γ , які перешкоджають розділенню змінних в напрямку координати θ .

Для подолання цієї перешкоди при розділенні змінних в напрямку координати θ перепишемо систему диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами (1.6) у вигляді (індекс n в позначеннях розв'язувальних функцій опустимо)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \gamma} &= (c_2 - 1)\varphi_1^1 + \lambda_n \tau_{\theta\gamma} - \varphi_4^1 + b_{22}\varphi_1^5 + b_{12}\lambda_n \varphi_1^4 + b_{22}\varphi_4^3; \\ \frac{\partial \tau_{s\gamma}}{\partial \gamma} &= -c_1 \lambda_n \sigma_\gamma - \varphi_1^2 - b_{12}\lambda_n \varphi_1^3 + b_{11}\lambda_n^2 u_s - b_{66}\varphi_6 - (b_{12} + b_{66})\lambda_n \varphi_4^2; \\ \frac{\partial \tau_{\theta\gamma}}{\partial \gamma} &= -c_2 \varphi_3^1 - 2\varphi_2^1 - b_{22}\varphi_5 + (b_{12} + b_{66})\lambda_n \varphi_3^3 - b_{22}\varphi_7 - b_{66}\lambda_n^2 u_\theta; \\ \frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} &= c_4 \sigma_\gamma - c_2 \varphi_4^2 + c_1 \lambda_n u_s - c_2 \varphi_1^3; \quad \frac{\partial u_s}{\partial \gamma} = a_{55} \tau_{s\gamma} - \lambda_n u_\gamma; \quad \frac{\partial u_\theta}{\partial \gamma} = a_{44} \tau_{\theta\gamma} - \varphi_3^2 + \varphi_2^2,\end{aligned}\tag{1.8}$$

де φ_i^j назвемо доповняльними функціями. Вони являють собою добутки розв'язувальних функцій або їх похідних на коефіцієнти, залежні від двох координат, які визначаються виразами

$$\begin{aligned}\varphi_1^j &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \left\{ \sigma_\gamma; \tau_{s\gamma}; u_\gamma; u_s; \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_\gamma \right\} \quad (j = \overline{1, 5}); \\ \varphi_2^j &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \{ \tau_{\theta\gamma}; u_\theta \} \quad (j = \overline{1, 2}); \\ \varphi_3^j &= \frac{1}{H_2} \left\{ \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \theta}; \frac{\partial u_\gamma}{\partial \theta}; \frac{\partial u_s}{\partial \theta} \right\} \quad (j = \overline{1, 3}); \\ \varphi_4^j &= \frac{1}{H_2} \left\{ \frac{\partial \tau_{\theta\gamma}}{\partial \theta}; \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}; \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right\} \quad (j = \overline{1, 3}); \\ \varphi_5 &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \theta} \varphi_1^3; \quad \varphi_6 = \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \theta} \varphi_3^3; \quad \varphi_7 = \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \theta} \varphi_4^2.\end{aligned}\tag{1.9}$$

Формальне введення доповняльних функцій дозволяє розглядати систему диференціальних рівнянь (1.8) як систему зі сталими коефіцієнтами, яка допускає розділення змінних в напрямку координати θ за рахунок подання усіх функцій і розв'язувальних, і доповняльних, а також компонент навантаження, у вигляді розв'язувань в ряди Фур'є за координатою θ

$$X(\theta, \gamma) = \sum_{k=0}^K X_k(\gamma) \cos k\theta; \quad Y(\theta, \gamma) = \sum_{k=1}^K Y_k(\gamma) \sin k\theta;\tag{1.10}$$

$$X = \{ \sigma_\gamma, \tau_{s\gamma}, u_\gamma, u_s, \varphi_1^j, \varphi_4^j, \varphi_6, q_\gamma \}; \quad Y = \{ \tau_{\theta\gamma}, u_\theta, \varphi_2^j, \varphi_3^j, \varphi_5, \varphi_7 \}.$$

Після підстановки рядів (1.10) до розв'язувальної системи диференціальних рівнянь (1.8), граничних умов (1.6) і розділення змінних, приходимо до одновимірної крайової задачі, що описується системою звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами відносно амплітудних значень рядів (1.10)

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma_{\gamma,k}}{d\gamma} &= (c_2 - 1)\varphi_{1,k}^1 + \lambda_n \tau_{s\theta,k} - \varphi_{4,k}^1 + b_{22}\varphi_{1,k}^5 + b_{12}\lambda_n \varphi_{1,k}^4 + b_{22}\varphi_{4,k}^3; \\
\frac{d\tau_{s\gamma,k}}{d\gamma} &= -c_1 \lambda_n \sigma_{\gamma,k} - \varphi_{1,k}^2 - b_{12}\lambda_n \varphi_{1,k}^3 + b_{11}\lambda_n^2 u_{s,k} - b_{66}\varphi_{6,k} - (b_{12} + b_{66})\lambda_n \varphi_{4,k}^2; \\
\frac{d\tau_{\theta\gamma,k}}{d\gamma} &= -c_2 \varphi_{3,k}^1 - 2\varphi_{2,k}^1 - b_{22}\varphi_{5,k} + (b_{12} + b_{66})\lambda_n \varphi_{3,k}^3 - b_{22}\varphi_{7,k} + b_{66}\lambda_n^2 u_{\theta,k}; \quad (1.11) \\
\frac{du_{\gamma,k}}{d\gamma} &= c_4 \sigma_{\gamma,k} - c_2 \varphi_{4,k}^2 + c_1 \lambda_n u_{s,k} - c_2 \varphi_{1,k}^3; \\
\frac{du_{s,k}}{d\gamma} &= a_{55}\tau_{s\gamma,k} - \lambda_n u_{\gamma,k}; \quad \frac{du_{\theta,k}}{d\gamma} = a_{44}\tau_{\theta\gamma,k} - \varphi_{3,k}^2 + \varphi_{2,k}^2 \quad (k = \overline{0, K})
\end{aligned}$$

з граничними умовами

$$\begin{aligned}
\gamma = -h/2: \quad \sigma_{\gamma,k} &= 0; \quad \tau_{s\gamma,k} = 0; \quad \tau_{\theta\gamma,k} = 0; \\
\gamma = h/2: \quad \sigma_{\gamma,k} &= q_{\gamma,k}; \quad \tau_{s\gamma,k} = 0; \quad \tau_{\theta\gamma,k} = 0.
\end{aligned} \quad (1.12)$$

Для інтегрування отриманої системи звичайних диференціальних рівнянь використовується стійкий чисельний метод дискретної ортогоналізації [3] одночасно для всіх гармонік розвинень (1.10). При цьому, оскільки кількість невідомих у розв'язувальній системі (1.11) перевищує кількість рівнянь (за рахунок введення доповняльних функцій), для замикання отриманої системи рівнянь на кожному кроці застосування чисельного методу амплітудні значення доповняльних функцій обчислюються за поточними значеннями амплітуд розв'язувальних функцій за допомогою апроксимації їх дискретними рядами Фур'є [12]. Для цього в ряді точок напрямної інтервалу $0 \leq \theta \leq 2\pi$ при фіксованому значенні координати товщини γ обчислюємо табличні значення доповняльних функцій за поточним значенням амплітуд розв'язувальних функцій згідно виразів (1.9). Будуємо далі ряди Фур'є для функцій, заданих таблицею значень. При цьому слід зазначити, що при збільшенні кількості точок, в яких обчислюються табличні значення доповняльних функцій, дискретний ряд Фур'є все менше буде відрізнятися від звичайного ряду Фур'є і, таким чином, можна отримати розв'язок задачі з високою точністю. Знайшовши коефіцієнти побудованих дискретних рядів Фур'є, наприклад за схемою Рунге [16], підставляємо їх до розв'язувальної системи рівнянь (1.11) і робимо наступний крок інтегрування. На кінцях інтервалу інтегрування $-h/2 \leq \gamma \leq h/2$ задовольняються відповідні граничні умови (1.12).

§2. Оцінка точності отриманих результатів.

Методика розв'язання задачі, що базується на апроксимації доповняльних функцій дискретними рядами Фур'є, дозволяє отримати розв'язок задачі з наперед заданою точністю. Контроль точності отримуваних результатів здійснюється за рахунок варіації кількості точок напрямної для побудови табличних значень доповняльних функцій та кількості членів відповідних дискретних рядів Фур'є. В роботі [6] показано, що збіжність розв'язків задачі про напружений стан еліптичних ізотропних порожнистих циліндрів під дією нормального рівномірного навантаження до 4 – 5-и значущих цифр спостерігається для 40-а точок напрямної при побудові таблиць значень доповняльних функцій та врахуванні 9-и членів дискретних рядів Фур'є.

Для оцінки достовірності отриманих результатів на основі розглянутої методики, що базується на застосуванні методу апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є, розв'язано задачу про напружений стан циліндричних оболонок з еліптичним поперечним перерізом (1.2), виготовлених з ізотропного та ортотропного матеріалів, які перебувають під дією зовнішнього локального поздовжнього навантаження $q_\gamma = q_0 \sin^9(\pi s/l)$ ($q_0 = \text{const}$).

Задане навантаження подається у вигляді відповідного розвинення в ряд Фур'є (1.4)

$$q_\gamma = q_0 \sum_{n=1}^9 a_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} s\right) = q_0 \left[\frac{1}{256} \left(126 \sin\left(\frac{\pi}{l} s\right) - 84 \sin\left(\frac{\pi \cdot 3}{l} s\right) + 36 \sin\left(\frac{\pi \cdot 5}{l} s\right) - 9 \sin\left(\frac{\pi \cdot 7}{l} s\right) + \sin\left(\frac{\pi \cdot 9}{l} s\right) \right) \right].$$

Згідно розглянутої методики, розв'язок задачі для зазначеного навантаження зводиться до розв'язку послідовності задач для кожної гармоніки розвитку навантаження в ряд Фур'є за координатою s та послідовного підсумовування отриманих результатів.

Задачу розв'язано за таких вихідних даних: довжина оболонки $l=60$, її товщина $h=6$, радіус вихідного кола $r=30$, степінь еліптичності $\Delta=0; 0,2; 0,3$ для ізотропного матеріалу та $\Delta=0; 0,3$ для ортотропного. Для механічних характеристик ізотропного матеріалу вибрано $E=E_0$; $\nu=0,3$; для ортотропного – $E_s=10E_0$; $E_\theta=2E_0$; $E_\gamma=E_0$; $\nu_{s\theta}=0,06$; $\nu_{\gamma s}=0,4$; $\nu_{\theta\gamma}=0,1$; $G_{s\theta}=2E_0$; $G_{s\gamma}=1,5E_0$; $G_{\theta\gamma}=E_0$.

Тут і надалі усі лінійні розміри та значення переміщень віднесено до одиниці довжини, а напруження – до одиничного навантаження.

В роботі [2] наведено розв'язок цієї задачі з використанням підходу, що базується на застосуванні методу різницевої апроксимації за товщиною оболонок.

В табл. 1 наведено розв'язок для розподілу полів нормальних переміщень в серединному перерізі довжини оболонки на зовнішній ($\gamma=h/2$), внутрішній ($\gamma=-h/2$) та поверхні відліку ($\gamma=0$) в двох перерізах напрямної: в зоні максимальної жорсткості ($\theta=0$) та в зоні мінімальної жорсткості ($\theta=\pi/2$). Цифрою I позначені результати, отримані за розглянутою методикою, цифрою II – за різницевою апроксимацією.

Таблиця 1

Матеріал	Δ	γ	θ				Похибка (%)
			0		$\theta = \pi / 2$		
			I	II	I	II	
ізотропний	0	$-h/2$	102,13	102,0	102,13	102,0	0,1 – 0,2
		0	101,11	101,0	101,11	101,0	
		$h/2$	99,04	98,2	99,04	98,2	
	0,2	$-h/2$	-64,92	-65,01	358,96	358,8	
		0	-66,59	-66,67	359,20	359,0	
		$h/2$	-63,73	-63,81	352,98	352,8	
	0,3	$-h/2$	-121,94	-122,1	531,71	531,4	
		0	-123,51	-123,6	533,00	532,7	
		$h/2$	-117,56	-117,1	524,82	524,5	
ортотропний	0	$-h/2$	33,51	33,47	33,51	33,47	0,1 – 0,9
		0	33,66	33,61	33,66	33,61	
		$h/2$	34,86	34,81	34,86	34,81	
	0,3	$-h/2$	-15,15	-15,21	123,14	123,1	
		0	-14,18	-14,26	123,50	123,5	
		$h/2$	-11,20	-11,30	123,74	123,7	

З результатів (табл. 1) видно, що похибка отриманих розв'язків за двома підходами не перевищує 1%.

Також можна контролювати точність розв'язку при порівнянні результатів розв'язання крайових задач зліва-направо та справа-наліво за рахунок різних обчислювальних схем, де збіг результатів свідчить про точність розв'язку. Задачу було розв'язано в двох напрямках, починаючи з внутрішньої, ненавантаженої бічної поверхні, та в зворотному напрямку – із зовнішньої, навантаженої. При цьому результати розв'язку для розподілу полів нормальних переміщень та напружень в різних перерізах товщини та напрямної оболонки співпадали до п'яти-шести знаків.

§ 3. Числові результати та їх аналіз.

На основі викладеного підходу розв'язана задача про напружений стан ізотропних та ортотропних циліндричних оболонок з еліптичним поперечним перерізом (1.2), що перебувають під дією локального поздовжнього навантаження $q_\gamma = q_0 \sin^n(\pi s/l)$ ($q_0 = \text{const}$).

Задачу розв'язано за таких значень геометричних і механічних параметрів: довжина оболонок $l=60$, товщина $h=4$, радіус вихідного кола $r=40$, степінь еліптичності $\Delta=0; 0,02; 0,04; 0,06; 0,08; 0,1$. Для механічних характеристик ізотропного матеріалу вибрано $E=E_0$; $\nu=0,3$; для ортотропного – $E_s=10E_0$; $E_\theta=2E_0$; $E_\gamma=E_0$; $\nu_{s\theta}=0,06$; $\nu_{\gamma s}=0,4$; $\nu_{\theta\gamma}=0,1$; $G_{s\theta}=2E_0$; $G_{s\gamma}=1,5E_0$; $G_{\theta\gamma}=E_0$. Для степеня навантаження вибрано $n=1; 5; 9$. Для $n=1$ маємо розподілене по довжині навантаження. Для $n=5; 9$ – локальне; при цьому для $n=9$ ділянка прикладеного навантаження зменшується, порівняно з $n=5$.

Для значення показника $n=5$ відповідне навантаження розкладається в ряд Фур'є у вигляді

$$q_\gamma = q_0 \sum_{n=1}^5 a_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} s\right) = q_0 \left[\frac{1}{16} \left(10 \sin\left(\frac{\pi}{l} s\right) - 5 \sin\left(\frac{\pi \cdot 3}{l} s\right) + \sin\left(\frac{\pi \cdot 5}{l} s\right) \right) \right].$$

Результати розв'язання задачі для трьох видів прикладеного навантаження в середньому перерізі довжини (максимального значення прикладеного навантаження) для розподілу полів нормальних переміщень u_γ та напружень σ_θ , σ_s наведено для ізотропного матеріалу на рис. 1 – 3 і в табл. 2 – 4, для ортотропного – на рис. 4 – 6 та в табл. 5 – 7.

На рис. 1, 4 наведено графіки розподілу нормальних переміщень поверхні відліку в залежності від величини степеня еліптичності Δ . На рис. 2, 5 наведено графіки розподілу нормальних поздовжніх напружень σ_s і на рис. 3, 6 – нормальних колових напружень σ_θ на внутрішній поверхні (рис. 2, а; 3, а; 5, а) та зовнішній поверхні (рис. 2, б; 3, б; 5, б). В зоні максимальної жорсткості ($\theta=0$) криві на усіх рисунках позначені штриховою лінією, в зоні мінімальної жорсткості ($\theta=\pi/2$) – суцільною.

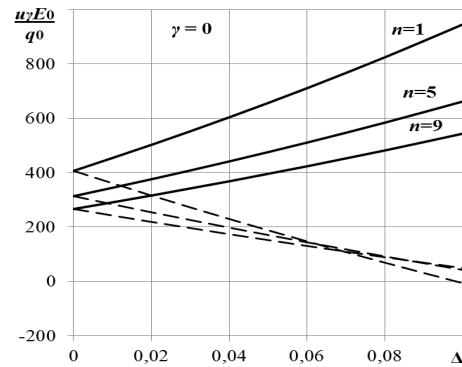
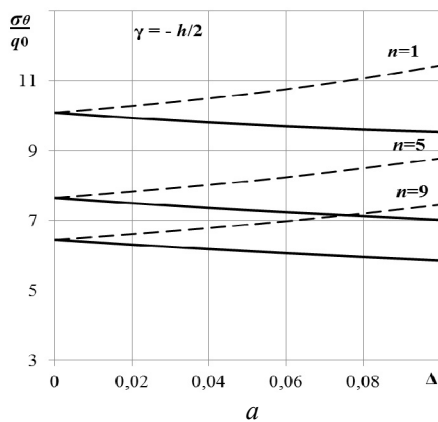
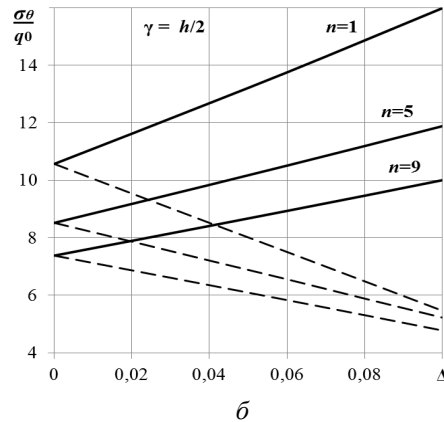


Рис. 1



а



б

Рис. 2

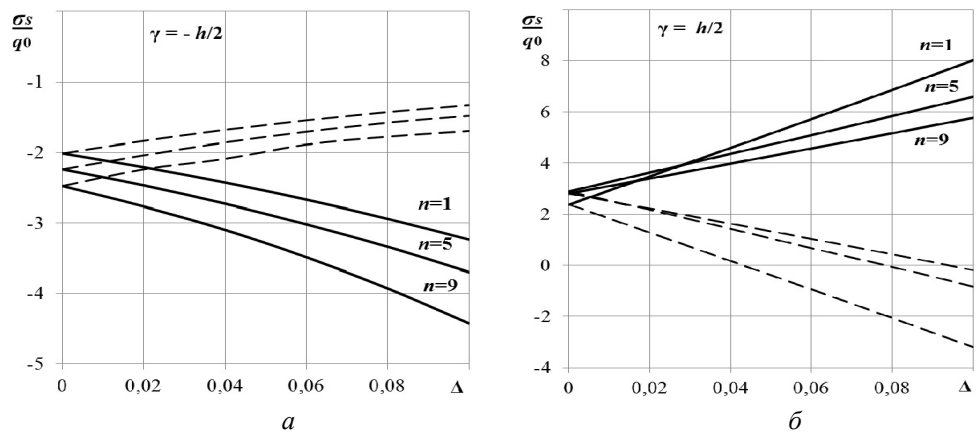


Рис. 3

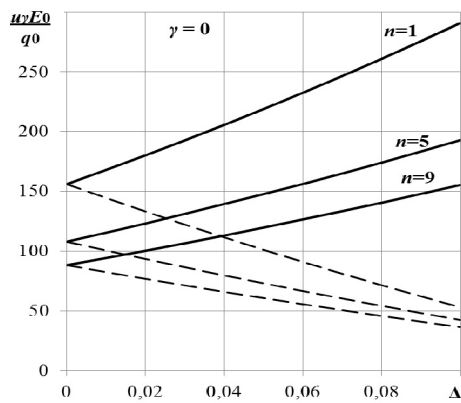


Рис. 4

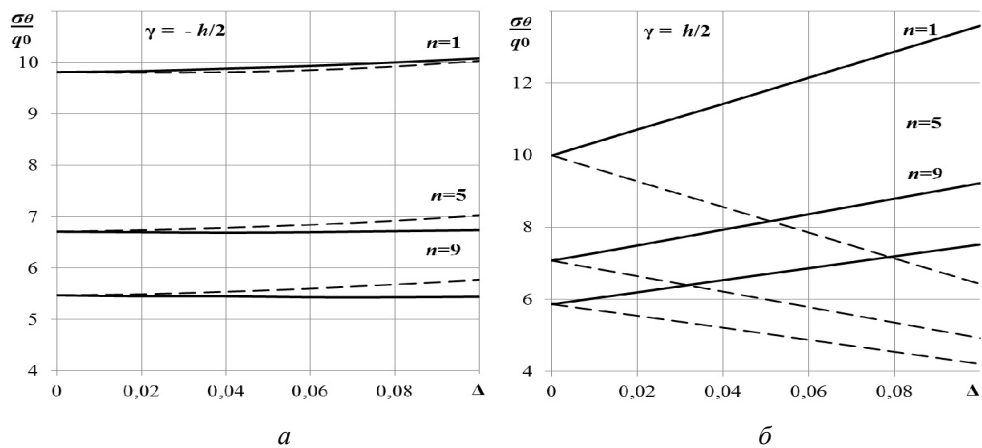


Рис. 5

В табл. 2 – 7 наведено значення нормальних переміщень та напружень в зонах максимальної та мінімальної жорсткості, на зовнішній та внутрішній поверхнях для трьох значень степеня еліптичності $\Delta=0; 0,06; 0,1$ та трьох видів прикладеного навантаження.

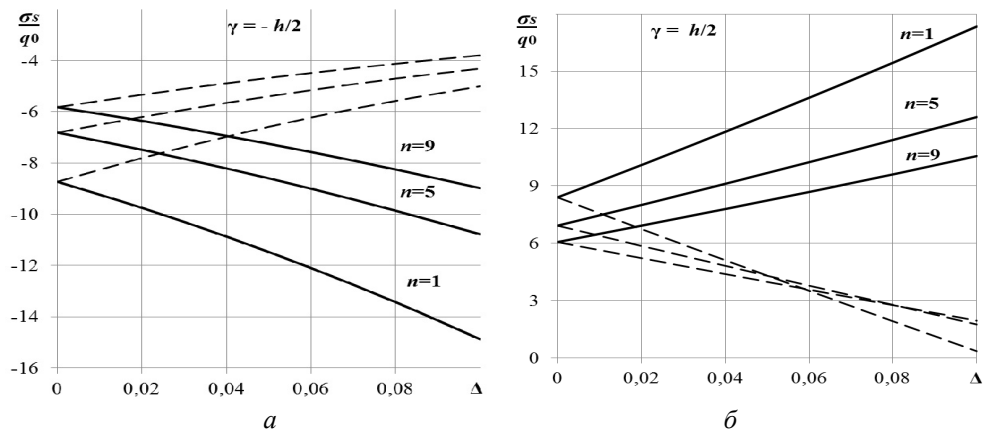


Рис. 6

З даних, наведених на рис. 1 – 3 та в табл. 2 – 4 видно, що при зменшенні ділянки локального навантаження нормальні переміщення зменшуються для всіх значень степеня еліптичності: так, для $\Delta=0$ – в 1,5 рази при $n=9$ та в 1,3 рази при $n=5$; для $\Delta=0,06$ – в 1,7 рази при $n=9$, в 1,4 рази при $n=5$; для $\Delta=0,1$ – в 2 рази при $n=9$, в 1,5 рази при $n=5$. Максимального значення нормальні переміщення досягають на внутрішній поверхні в зоні мінімальної жорсткості.

Таблиця 2

Δ	γ	$u_\gamma E_0 / q_0$					
		$n=9$		$n=5$		$n=1$	
		$\theta=0$	$\theta=\pi/2$	$\theta=0$	$\theta=\pi/2$	$\theta=0$	$\theta=\pi/2$
0	$-h/2$	268,14		316,29		411,77	
	$h/2$	262,08		308,82		404,48	
0,06	$-h/2$	132,12	425,56	146,19	513,77	151,69	716,57
	$h/2$	127,61	418,01	140,74	504,36	144,74	703,04
0,1	$-h/2$	90,57	483,89	44,58	664,78	-2,52	951,50
	$h/2$	86,61	475,87	40,54	654,11	-7,17	935,72

Таблиця 3

Δ	γ	σ_s / q_0					
		$n=9$		$n=5$		$n=1$	
		$\theta=0$	$\theta=\pi/2$	$\theta=0$	$\theta=\pi/2$	$\theta=0$	$\theta=\pi/2$
0	$-h/2$	-2,01		-2,24		-2,48	
	$h/2$	2,81		2,90		2,38	
0,06	$-h/2$	-1,55	-2,67	-1,71	-3,02	-1,89	-3,49
	$h/2$	1,04	4,57	0,69	5,10	-0,94	5,72
0,1	$-h/2$	-1,43	-2,94	-1,48	-3,70	-1,70	-4,43
	$h/2$	0,43	5,17	-0,83	6,60	-3,20	8,02

Таблиця 4

Δ	γ	σ_θ / q_0					
		$n=9$		$n=5$		$n=1$	
		$\theta=0$	$\theta=\pi/2$	$\theta=0$	$\theta=\pi/2$	$\theta=0$	$\theta=\pi/2$
0	$-h/2$	6,45		7,65		10,09	
	$h/2$	7,38		8,52		10,57	
0,06	$-h/2$	6,98	6,07	8,24	7,24	10,76	9,70
	$h/2$	5,84	8,94	6,56	10,51	7,51	13,75
0,1	$-h/2$	7,20	5,96	8,78	7,02	11,44	9,54
	$h/2$	5,31	9,46	5,23	11,88	5,47	15,98

Поздовжні напруження σ_s досягають свого максимального значення на навантаженій поверхні в зоні мінімальної жорсткості і при зменшенні ділянки локального навантаження їх величина зменшується в еліптичних оболонках для $\Delta=0,06$ в 1,3 рази при $n=9$, в 1,4 рази при $n=5$; для $\Delta=0,1$ – в 1,6 рази при $n=9$, в 1,2 рази при $n=5$ і збільшується для кругових оболонок $\Delta=0$ в 1,4 рази при $n=9$, в 1,2 рази при $n=5$.

Колові напруження σ_θ досягають свого максимального значення на зовнішній навантаженій поверхні в зоні мінімальної жорсткості і зі зменшенням ділянки локального навантаження зменшуються для $\Delta=0$ в 1,4 рази при $n=9$, в 1,2 рази при $n=5$; для $\Delta=0,06$ – в 1,8 рази при $n=9$, в 1,5 рази при $n=5$; для $\Delta=0,1$ – в 1,7 рази при $n=9$, в 1,3 рази при $n=5$.

Переважають є колові напруження як на зовнішній, так і на внутрішній поверхні.

При збільшенні степеня еліптичності максимальні значення переміщень збільшуються в 1,7 рази для $\Delta=0,06$ та в 2,3 рази для $\Delta=0,1$ при $n=1$; в 1,6 рази для $\Delta=0,06$ та в 2,1 рази для $\Delta=0,1$ при $n=5$; в 1,6 рази для $\Delta=0,06$ та в 1,8 рази для $\Delta=0,1$ при $n=9$ порівняно з круговими оболонками $\Delta=0$.

З даних, наведених на рис. 4 – 6 та в табл. 5 – 7, видно, що у випадку ортотропного матеріалу зменшення ділянки локального навантаження призводить до зменшення величини нормальних переміщень для всіх значень степеня еліптичності; так, для $\Delta=0$ – в 1,8 рази при $n=9$, в 1,5 рази при $n=5$; для $\Delta=0,06$ – в 1,8 рази при $n=9$, в 1,7 рази при $n=5$; для $\Delta=0,1$ – в 1,9 рази при $n=9$, в 1,5 рази при $n=5$. Максимального значення нормальні переміщення досягають як і для ізотропного матеріалу на внутрішній поверхні в зоні мінімальної жорсткості. При цьому максимальні значення нормальних переміщень зменшуються порівняно з ізотропним матеріалом в 3,3 рази для $\Delta=0,1$, в 3 рази для $\Delta=0,06$ і в 2,6 рази для $\Delta=0$ при $n=1$; в 3,1 рази для $\Delta=0,1$, в 3,4 рази для $\Delta=0,06$ і в 3 рази для $\Delta=0$ при $n=5$; в 3,4 рази для $\Delta=0,1$, в 3,3 рази для $\Delta=0,06$ і в 2,9 рази для $\Delta=0$ при $n=9$.

Таблиця 5

Δ	γ	$u_\gamma E_0 / q_0$					
		$n=9$		$n=5$		$n=1$	
		$\theta=0$	$\theta=\pi/2$	$\theta=0$	$\theta=\pi/2$	$\theta=0$	$\theta=\pi/2$
0	$-h/2$	88,42		108,25		157,01	
	$h/2$	81,21		107,56		155,14	
0,06	$-h/2$	55,74	126,56	66,95	156,52	99,89	233,48
	$h/2$	55,86	126,04	66,69	155,43	90,75	230,92
0,1	$-h/2$	36,49	155,53	42,68	193,22	53,82	291,78
	$h/2$	36,85	154,82	42,74	191,87	53,20	288,79

Таблиця 6

Δ	γ	σ_s / q_0					
		$n=9$		$n=5$		$n=1$	
		$\theta=0$	$\theta=\pi/2$	$\theta=0$	$\theta=\pi/2$	$\theta=0$	$\theta=\pi/2$
0	$-h/2$	-5,82		-6,81		-8,73	
	$h/2$	6,07		6,93		8,41	
0,06	$-h/2$	-4,48	-7,57	-5,15	-9,00	-6,22	-12,10
	$h/2$	3,58	8,69	3,79	10,25	3,52	13,62
0,1	$-h/2$	-3,79	-8,98	-4,31	-10,78	-5,00	-14,88
	$h/2$	1,96	10,57	1,76	12,61	0,36	17,35

Поздовжні напруження σ_s досягають свого максимального значення на навантаженій поверхні в зоні мінімальної жорсткості і при зменшенні ділянки локального навантаження їх величина зменшується: для $\Delta=0,06$ – в 1,6 рази при $n=9$, в 1,3 рази при $n=5$; для $\Delta=0,1$ – в 1,6 рази при $n=9$, в 1,5 рази при $n=5$ і для $\Delta=0$ – в 1,6

рази при $n = 9$, в 1,4 рази при $n = 5$. При цьому максимальні значення поздовжніх напружень збільшуються порівняно з ізотропним матеріалом для еліптичних оболонок приблизно в 2 рази для $\Delta = 0,1$ при $n = 1$, в 2 рази при $n = 5, 9$, в 2,4 рази для $\Delta = 0,06$ при $n = 1$, в 2 рази при $n = 5, 9$ і зменшуються в 1,1 рази для кругових оболонок $\Delta = 0$ при $n = 1$; в 1,2 рази при $n = 5, 9$.

Таблиця 7

Δ	γ	σ_θ / q_0					
		$n = 9$		$n = 5$		$n = 1$	
		$\theta = 0$	$\theta = \pi / 2$	$\theta = 0$	$\theta = \pi / 2$	$\theta = 0$	$\theta = \pi / 2$
0	$-h/2$	5,47		6,71		9,81	
	$h/2$	5,87		7,07		9,99	
0,06	$-h/2$	5,61	5,43	6,84	6,70	9,85	9,93
	$h/2$	6,51	6,86	5,78	8,36	7,85	12,15
0,1	$-h/2$	5,77	5,44	7,03	6,34	10,03	10,08
	$h/2$	4,20	7,52	4,92	9,22	6,42	13,59

Колові напруження σ_θ приймають свого максимального значення на зовнішній навантаженій поверхні в зоні мінімальної жорсткості і зі зменшенням ділянки локального навантаження зменшуються: для $\Delta = 0$ – в 1,7 рази при $n = 9$, в 1,4 рази при $n = 5$; для $\Delta = 0,06$ – в 1,8 рази при $n = 9$, в 1,5 рази при $n = 5$; для $\Delta = 0,1$ – в 1,8 рази при $n = 9$, в 1,5 рази при $n = 5$. При цьому максимальні значення колових напружень зменшуються порівняно з ізотропним матеріалом для еліптичних оболонок приблизно в 1,2 – 1,3 рази всіх значень степеня еліптичності та степеня навантаження.

Переважними є поздовжні напруження як на зовнішній, так і на внутрішній поверхні.

При збільшенні степеня еліптичності максимальні значення колових напружень збільшуються в 1,2 рази для $\Delta = 0,06$ та в 1,4 рази для $\Delta = 0,1$ при $n = 1$; в 1,2 рази для $\Delta = 0,06$ та в 1,3 рази для $\Delta = 0,1$ при $n = 5$; в 1,2 рази для $\Delta = 0,06$ та в 1,3 рази для $\Delta = 0,1$ при $n = 9$ порівняно з круговими оболонками $\Delta = 0$.

Висновки.

В просторовій постановці лінійної теорії пружності на основі методів розділення змінних, апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є та дискретної ортогоналізації розв'язано задачу про напружений стан нетонких ізотропних та ортотропних циліндричних оболонок з еліптичним поперечним перерізом, що перебувають під дією локального поздовжнього навантаження.

Достовірність отриманих результатів при застосуванні розглянутої методики розв'язання даного класу задач перевірено на основі порівняння результатів, знайдених за допомогою іншого підходу, що базується на використанні різницевої апроксимації по товщині оболонки [2], а також на основі чисельного розв'язання задачі за двома різними розрахунковими схемами. Контроль точності отриманих результатів при застосуванні методу апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є здійснюється за рахунок варіації кількості табличних значень доповняльних функцій і відповідної кількості членів дискретних рядів Фур'є.

Проведено аналіз напруженого стану нетонких еліптичних циліндричних оболонок, виготовлених з ізотропного і ортотропного матеріалів під дією локального поздовжнього навантаження в залежності від степеня еліптичності та довжини прикладеного навантаження. Показано вплив зміни степеня еліптичності та ділянки прикладання поздовжнього локального навантаження на характеристики напруженого стану оболонок для ізотропного та ортотропного матеріалу. Отримані результати можуть бути використані при розрахунках на міцність елементів конструкцій у вигляді нетонких циліндричних оболонок з еліптичним поперечним перерізом, що перебувають під дією локального поздовжнього навантаження.

РЕЗЮМЕ. В просторовій постановці із застосуванням аналітичних методів розділення змінних, апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є та чисельного методу дискретної ортогоналізації проведено дослідження напруженого стану нетонких циліндричних оболонок з еліптичним поперечним перерізом, що виготовлені з ортотропного та ізотропного матеріалів і перебувають під дією локального поздовжнього навантаження. Результати дослідження задачі наведено у вигляді графіків та таблиць розподілу полів переміщень і напружень. Проведено аналіз отриманих результатів.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: просторова теорія пружності, еліптичні циліндричні нетонкі оболонки, ізотропний та ортотропний матеріал, поздовжнє локальне навантаження, чисельно-аналітичний підхід.

1. Ашкенази Е.К., Гольфман И.Б., Рожков Л.П., Сидоров Н.П. Детали из стеклопластика в судовом машиностроении. – Ленинград: Судостроение, 1974. – 199 с.
2. Влайков Г.Г., Григоренко А.Я., Шевченко С.Н. Некоторые задачи теории упругости для анизотропных цилиндров с некруговым поперечным сечением. – Киев: НАН Украины, Ин-т механики им. С.П. Тимошенко, 2001. – 147 с.
3. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. – 1961. – **16**, № 3. – С. 171 – 174.
4. Григоренко Я.М., Беспалова О.І., Бореико Н.П. Коливання спряжених оболонкових систем у полі комбінованих статичних навантажень // Мат. методи та фіз.- мех. поля. – 2020. – **63**, № 3. – С. 5 – 18.
5. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Емельянов И.Г. и др. Механика композитов: в 12-и томах. Т. 8. Статика элементов конструкций. – Киев: «А.С.К.», 1999. – 379 с.
6. Григоренко Я.М., Рожок Л.С. Застосування дискретних рядів Фур'є до розв'язання крайових задач статички пружних тіл неканонічної форми // Мат. методи та фіз.- мех. поля. – 2005. – **48**, №2. – С. 79 – 100.
7. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – Москва: Наука, 1977. – 415 с.
8. Ревенко В.П. Розв'язки тривимірних задач теорії пружності для ортотропних тіл // Мат. методи та фіз.- мех. поля. – 2020. – **63**, № 3. – С. 78 – 84.
9. Рожок Л.С. Дослідження впливу локального навантаження на напружений стан гофрованих порожнистих циліндрів // Доп. НАН України. – 2006. – № 7. – С. 56 – 59.
10. Рожок Л.С. Рівновага порожнистих циліндрів з гофрованим еліптичним поперечним перетином при дії локального навантаження // Доп. НАН України. – 2009. – № 3. – С.90 – 94.
11. Тимошенко С.П. Курс теории упругости. – Киев: Наук. думка, 1972. – 501 с.
12. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.3. – Москва: Наука, 1949. – 783 с.
13. Bepalova E.I., Boreiko N.P. Vibrations of Compound Shell Systems Under Subcritical Loads. Models // Int. Appl. Mech. – 2020. – **56**, N 4. – P. 415 – 423.
14. Grigorenko A.Y., Malanchuk V.A., Sorochenko G.V. et al. Application of the Inhomogeneous Elasticity Theory to the Description of the Mechanical State of a Single-Rooted Tooth // Int. Appl. Mech. – 2021. – **57**, N 3. – P. 249 – 262.
15. Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Influence of Orthotropy Parameters on the Stress State of Hollow Cylinders with Elliptic Cross-Section // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, N 12. – P. 1372 – 1379.
16. Korn G.A., Korn T.M. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. – New York: MG Graw-Hill, 1961. – 720 p.
17. Marchuk A.V., Reneiskaya S.V., Leshchuk O.N. Three-Dimensional Analysis of the Free Vibrations of Layered Composite Plates Based on the Semianalytic Finite-Element Method // Int. Appl. Mech. – 2020. – **56**, N 4. – P. 481 – 497.
18. Meish V.F., Meish Y.A., Kornienko V.F. Dynamics of Three-Layer Shells of Different Geometry with Piecewise-Homogeneous Core Under Distributed Loads // Int. Appl. Mech. – 2021. – **57**, N 6. – P. 659 – 668.
19. Ozguc O. Nonlinear Buckling Simulations of Stiffened Panel Exposed to Combination of Transverse Compression, Shear Force and Lateral Pressure Loadings // J. Inst. Eng. India Ser. C. – 2021. – **102**. – P. 397 – 408.
20. Semenyuk N.P., Zhukova N.B. Stability of a Sandwich Cylindrical Shell with Core Subject to External Pressure and Pressure in the Inner Cylinder // Int. Appl. Mech. – 2020. – **56**, N 1. – P. 52 – 66.
21. Storozhuk E.A. Stress-Strain State and Stability of a Flexible Circular Cylindrical Shell with Transverse Shear Strains // Int. Appl. Mech. – 2021. – **57**, N 5. – P. 554 – 567.

Надійшла 22.04.2022

Затверджена до друку 13.12.2022