О . М . Б а г н о

ВПЛИВ В'ЯЗКОСТІ РІДИНИ НА УЗАГАЛЬНЕНІ ХВИЛІ ЛЕМБА В СИСТЕМІ, ЩО СКЛАДАЄТЬСЯ З ПРУЖНОГО ШАРУ ТА В'ЯЗКОГО РІДКОГО ШАРУ

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: desc@inmech.kiev.ua

Abstract. Based on the three-dimensional linearized Navier – Stokes equations for the viscous fluid and linear equations of the classical theory of elasticity for the elastic layer, the dispersion curves are constructed, and the propagation of generalized Lamb waves within the wide range of frequencies are studied. An effect of the viscosity of the fluid, the thickness of elastic and fluid layers on the phase velocities, and attenuation coefficients of generalized Lamb modes for the thick fluid layers are analyzed. It is shown that for all modes, the elastic layer of a certain thickness exists, for which the effect of the viscosity of fluid on the phase velocities and attenuation coefficients of modes is minimal. It is also revealed that for certain modes, some thickness and ranges of thickness exist wherein the influence of fluid viscosity on the phase velocities and attenuation coefficients of these modes is significant. It is established that in the case of a rigid material of an elastic layer, for some modes the layer thicknesses (frequencies) exist at which the viscosity of the liquid does not affect the phase velocities of these modes. The approach developed and the results obtained make it possible to establish the limits for the wave processes within which the model of an ideal compressible fluid can be applied. The numerical results are presented in the form of plots and analyzed.

Key words: generalized Lamb modes, elastic layer, layer of viscous compressible fluid.

Вступ.

Особливість гідропружної системи, яка складається з шару в'язкої рідини і пружного шару, полягає в тому, що поздовжні і зсувні хвилі, взаємодіючи на вільних поверхнях, а також на поверхні контакту середовищ, породжують у ній хвильове поле, дисперсійна картина якого дуже складна. Одним з найбільш важливих механічних параметрів, які впливають на фазові швидкості, структуру, хвилеводні властивості та локалізацію хвиль в середовищах, є жорсткість матеріалу пружного шару. Хвильовий процес у системі, матеріалом пружного шару якої було органічне скло, що відноситься до розряду слабо жорстких, розглядався в роботах [8, 13 – 15]. Разом з тим, незважаючи на значну кількість публікацій, для більш жорстких матеріалів (метали, сплави) закономірності поширення хвиль у гідропружній системі «шар в'язкої стисливої рідини – пружний шар» вивчені недостатньо повно.

У даній роботі для дослідження поширення хвиль у системі «шар рідини – пружний шар» залучається модель в'язкої стисливої ньютонівської рідини. При цьому використовуються тривимірні лінеаризовані рівняння Нав'є – Стокса для рідини та лінійні рівняння класичної теорії пружності для твердого тіла. Передбачається, що початково рідина перебуває у стані спокою і теплові ефекти не враховуються. Застосовуються постановки задач і метод, основані на використанні представлень загальних розв'язків рівнянь руху в'язкої стисливої рідини і пружного тіла, які запропоновані в роботах [3 – 6, 9 – 12].

§1. Постановка задачі. Основні рівняння.

Розглянемо задачу про поширення акустичних хвиль у гідропружній системі, яка складається з ізотропного пружного шару і шару в'язкої стисливої рідини. Розв'язок отримаємо із залученням тривимірних лінійних рівнянь класичної теорії пружності для твердого тіла та лінеаризованих рівнянь Нав'є – Стокса для рідини, яка початково перебуває у стані спокою. В рамках прийнятих моделей основні співвідношення для системи «пружне тіло – в'язка стислива рідина» мають вигляд:

$$\mu\Delta\boldsymbol{u}+(\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u})-\rho\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2}=0\,;\quad \sigma_{ij}=\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial u_j}+\frac{\partial u_j}{\partial u_i}\right)+\lambda\delta_{ij}\nabla\cdot\boldsymbol{u}\,; \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}-\nu^*\Delta\boldsymbol{v}+\frac{1}{\rho_0}\nabla p-\frac{1}{3}\nu^*\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v})=0\,;\quad \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\rho^*}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0\,; \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial\rho^*}=a_0^2,\quad a_0=\text{const};$$

$$P_{ij}=-p\delta_{ij}+\lambda^*\delta_{ij}\nabla\cdot\boldsymbol{v}+\mu^*\left(\frac{\partial v_i}{\partial z_j}+\frac{\partial v_j}{\partial z_i}\right);\quad \lambda^*=-\frac{2}{3}\mu^*. \tag{1.3}$$

Вище прийняті наступні позначення: u_i – компоненти вектора $\boldsymbol{u}$ зсувів пружного тіла; ρ – густина матеріалу пружного шару; λ і μ – модулі пружності Ламе матеріалу твердого тіла; v_i – складові вектора $\boldsymbol{v}$ збурень швидкості рідини; ρ^* і p – збурення густини і тиску в рідині; ν^* і μ^* – кінематичний і динамічний коефіцієнти в'язкості рідини; ρ_0 і a_0 – густина рідини і швидкість звуку в рідині в стані спокою; P_{ij} і σ_{ij} – складові напружень, відповідно, в рідині та пружному тілі.

Рівності (1.1) описують поведінку пружного тіла. Малі коливання в'язкої рідини в початковому стані спокою і без урахування теплових ефектів описують співвідношення (1.2) – (1.3).

Далі припустимо, що ізотропний пружний шар ($-\infty<z_1<\infty,\ \ -h_2\le z_2\le 0, -\infty<$ $<z_3<\infty$) контактує з шаром стисливої в'язкої рідини ($-\infty<z_1<\infty,\ \ 0\le z_2\le h_1$, $-\infty<z_3<\infty$). Приймемо, що зовнішні сили, які діють на зазначені середовища, розподілені рівномірно вздовж осі Oz_3. У цьому випадку задача є плоскою і можна обмежитися вивченням процесу поширення хвиль у площині Oz_1z_2. Отже, зазначена задача зводиться до розв'язання системи рівнянь (1.1) – (1.3) при наступних граничних умовах:

$$\sigma_{12}\big|_{z_2=0}=P_{12}\big|_{z_2=0}\,;\ \ \sigma_{22}\big|_{z_2=0}=P_{22}\big|_{z_2=0}\,;\ \ \sigma_{12}\big|_{z_2=-h_2}=0\,;\ \ \sigma_{22}\big|_{z_2=-h_2}=0\,; \tag{1.4}$$

$$P_{12}\big|_{z_2=h_1}=0\,;\ P_{22}\big|_{z_2=h_1}=0\,;\ v_1\big|_{z_2=0}=\frac{\partial u_1}{\partial t}\Big|_{z_2=0}\,;\ v_2\big|_{z_2=0}=\frac{\partial u_2}{\partial t}\Big|_{z_2=0}\,. \tag{1.5}$$

§2. Методика розв'язання.

Надалі для розв'язання задачі гідропружності скористаємося представленнями загальних розв'язків для пружних тіл і в'язкої стисливої рідини, запропонованими в роботах [3 – 6, 9 – 12]

$$u_1=-\frac{\partial^2\chi_1}{\partial z_1\partial z_2}\,;\ \ u_2=\left(\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{\partial^2}{\partial z_2^2}-\frac{\rho}{\lambda+\mu}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\chi_1\,;$$

$$v_1 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_1 \partial t} + \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial z_2 \partial t}; \quad v_2 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_2 \partial t} - \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial z_1 \partial t},$$

де введені функції χ_i є розв'язками наступних рівнянь:

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}\frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda + 2\mu}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) - \frac{(\lambda+\mu)^2}{\mu(\lambda+2\mu)}\frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial z_2^2}\right]\chi_1 = 0;$$

$$\left[\left(1 + \frac{4\nu^*}{3a_0^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2}\right) - \frac{1}{a_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\chi_2 = 0; \quad \left[\frac{\partial}{\partial t} - \nu^*\left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2}\right)\right]\chi_3 = 0.$$

Для аналізу поширення збурень, гармонічно змінних в часі, розв'язки системи рівнянь визначаємо в класі біжучих хвиль $\chi_j = X_j(z_2)\exp\left[i(kz_1 - \omega t)\right]$ ($j = \overline{1,3}$), де k $(k = \beta + \mathrm{i}\gamma)$ – хвильове число; γ – коефіцієнт згасання хвилі; ω – кругова частота; i – уявна одиниця ($i = \sqrt{-1}$).

Зауважимо, що вибраний в даній роботі клас гармонічних хвиль, будучи найбільш простим і зручним в теоретичних дослідженнях, не обмежує загальності отриманих результатів, оскільки лінійна хвиля довільної форми, як відомо, може бути представлена набором гармонічних складових. Далі, застосовуючи метод Фур'є, приходимо до трьох задач про власні значення для рівнянь руху пружного тіла і рідини. Розв'язуючи їх, визначаємо відповідні власні функції. Після підстановки отриманих загальних розв'язків в граничні умови (1.4) і (1.5) одержуємо однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо довільних сталих. Виходячи з умови існування нетривіального розв'язку цієї системи, отримуємо дисперсійне рівняння

$$\det\left\| e_{mn}\left(c, \gamma, \mu, \rho, \rho_0, a_0, \mu^*, \omega h_1/c_s, \omega h_2/c_s\right)\right\| = 0 \quad \left(m, n = \overline{1,8}\right), \tag{2.1}$$

де c – фазова швидкість мод у гідропружній системі; h_1 – товщина шару рідини; h_2 – товщина пружного шару; $c_s = \sqrt{\mu/\rho}$ – швидкість хвилі зсуву в матеріалі пружного тіла.

Як відомо, в необмеженому стисливому пружному тілі існують поздовжня і поперечна хвилі. В ідеальному стисливому рідкому середовищі поширюється лише поздовжня хвиля. У в'язкій стисливій рідині існують як поздовжня хвиля, так і хвиля зсуву. Саме ці хвилі, взаємодіючи між собою на вільних граничних поверхнях, а також на поверхні контакту середовищ, породжують складне хвильове поле в гідропружній системі.

Зауважимо, що дисперсійне рівняння (2.1) є найбільш загальним і з нього можна отримати співвідношення для ряду окремих випадків, які розглянуті в роботах [1, 3, 4, 15]. Зокрема, якщо a_0 спрямувати до нескінченності, то (2.1) переходить в рівняння для визначення параметрів мод у разі взаємодії пружного шару з в'язкою нестисливою рідиною. Якщо μ^* прийняти рівним нулю, то з (2.1) після заміни рівняння Нав'є – Стокса на рівняння Ейлера і спрощення граничних умов отримаємо результати для гідропружної системи з ідеальною рідиною, наведені в роботах [3, 4, 15]. Інші окремі випадки, які випливають з даної роботи, пов'язані з дослідженням хвиль Лемба (при $\rho_0 = 0$), Релея (при $h_2 \to \infty$, $\rho_0 = 0$), а також хвиль Стоунлі – Шольте (при $\rho_0 \neq 0$ і $h_1 \to \infty$, $h_2 \to \infty$), розглянуті у публікаціях [1, 3, 4, 15].

§3. Числові результати і їх аналіз.

Надалі дисперсійне рівняння (2.1) розв'язуємо чисельно. Розрахунки проводимо для хвилеводу зі сталі марки 09Г2С і води. При цьому механічні параметри гідропружної системи вибираємо наступними: пружне тіло – $\rho = 7800$ кг/м³, $\lambda = 9,26 \cdot 10^{10}$ Па, $\mu = 7,75 \cdot 10^{10}$ Па; рідина – $\rho_0 = 1000$ кг/м³, $a_0 = 1459,5$ м/с, $\overline{\mu}^* = 0,001$, $\overline{a}_0 = a_0 / c_s =$ $= 0,463021$. Цей хвилевід відрізняється тим, що матеріал пружного тіла (сталь) відноситься до розряду жорстких.

Результати обчислень у вигляді графіків представлені на рис. 1 – 17.

Всі графіки побудовані для пружного шару зі сталі марки 09Г2С (жорсткий матеріал) та шару води ($\overline{a}_0 = 0,463021$).

На рис. 1 для пружного шару, який не взаємодіє з рідиною, представлені залежності безрозмірних величин фазових швидкостей нормальних хвиль Лемба $\overline{c}$ ($\overline{c} = c/c_s$) від безрозмірної величини товщини пружного шару (частоти) $\overline{h}_2$ ($\overline{h}_2 = \omega h_2 / c_s$) [1, 7]. Номерами n_a позначені антисиметричні моди, а n_s – відповідно, симетричні моди. На цьому рисунку штриховою лінією позначена асимптота, до якої прямують фазові швидкості нульових антисиметричної та симетричної мод при зростанні товщини пружного шару ($\overline{h}_2 \to \infty$).

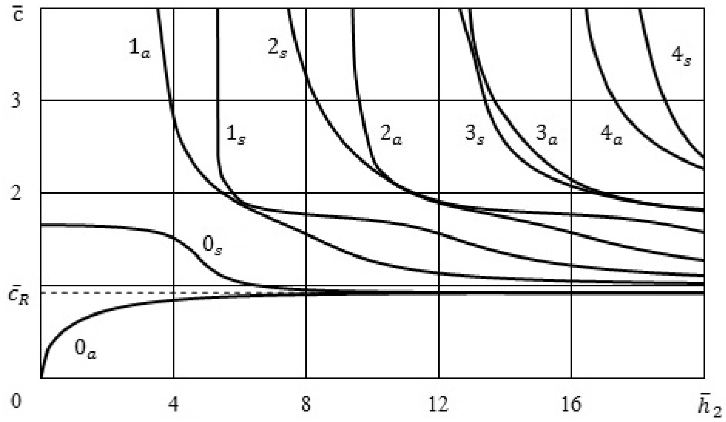

Рис. 1

З графіків, представлених на рис. 1, випливає, що швидкість нульової антисиметричної моди Лемба при зростанні товщини пружного шару (частоти) $\overline{h}_2$ ($\overline{h}_2 \to \infty$) прямує до швидкості хвилі Релея $\overline{c}_R$ ($\overline{c}_R = 0,923008$) знизу, а швидкість нульової симетричної моди – до швидкості хвилі Релея $\overline{c}_R$ ($\overline{c}_R = 0,923008$) зверху. Швидкості всіх мод Лемба високого порядку зі збільшенням товщини пружного шару (частоти) $\overline{h}_2$ ($\overline{h}_2 \to \infty$) прямують до швидкості хвилі зсуву в матеріалі пружного тіла $\overline{c}_s$ [1, 7].

На рис. 2 – 4 зображені дисперсійні криві для гідропружного хвилеводу, які відображають залежності безрозмірних величин фазових швидкостей $\overline{c}$ узагальнених мод Лемба від безрозмірної величини товщини пружного шару $\overline{h}_2$ для рідкого шару з товщиною $\overline{h}_1 = 20$ ($\overline{h}_1 = \omega h_1 / c_s$) і $\overline{\mu}^* = 0,001$. При цьому на рис. 2 наведено дисперсійні криві для перших 10-и мод. Дисперсійні криві для мод з 11-ої по 14-у зображені на рис. 3. На рис. 4 представлені графіки для мод 15 – 24. На рис. 2 штриховою лінією позначена асимптота, до якої прямує фазова швидкість моди 1 при зростанні товщини пружного шару $\overline{h}_2$ ($\overline{h}_2 \to \infty$). На рис. 3 штриховою лінією позначена асимптота, до якої прямують фазові швидкості мод 13 і 14. Відзначимо також, що на рис. 4 товстою штриховою лінією позначена дисперсійна крива моди 16_i, яка існує при взаємодії пружного шару з шаром ідеальної стисливої рідини. У разі гідропружного хвилеводу з в'язким рідким шаром ця мода відсутня.

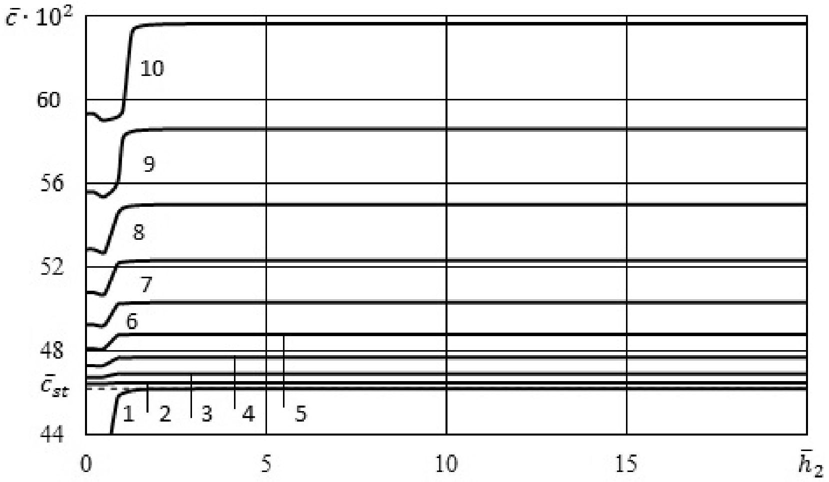

Рис. 2

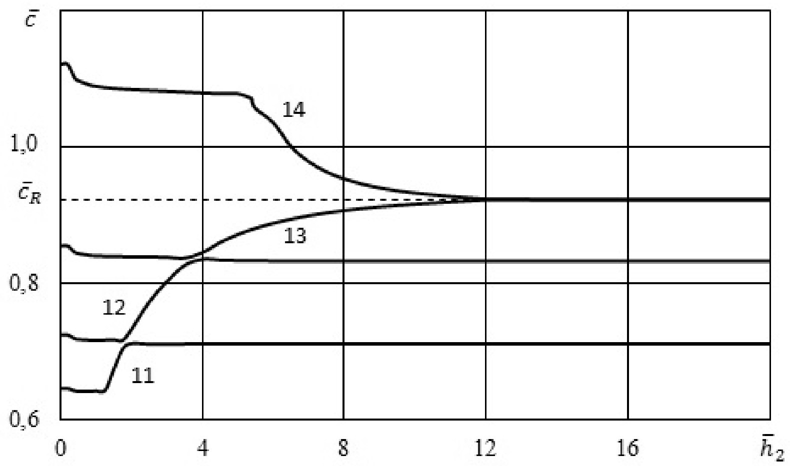

Рис. 3

Графічний матеріал для гідропружної системи, представлений на рис. 2 і 3, показує, що при зростанні товщини пружного шару $\overline{h}_2$ швидкість першої моди прямує знизу до швидкості хвилі Стоунлі $\overline{c}_{st}$ ($\overline{c}_{st} = 0,461819$), яка дещо менша за швидкість хвилі звуку в рідкому середовищі $\overline{a}_0$ ($\overline{a}_0 = 0,463021$). Величини фазових швидкостей мод 2 – 12 прямують до швидкостей хвиль, величини яких більші швидкості звукової хвилі в рідині $\overline{a}_0$ ($\overline{a}_0 = 0,463021$), але менші швидкості квазірелеївської хвилі $\overline{c}_R$ ($\overline{c}_R = 0,923063$). Характерною особливістю дисперсійних кривих цих нормальних хвиль є наявність у них нульових частот запирання. Крім того, при зменшенні довжини хвиль і віддаленні їх від частот запирання вони стають практично бездисперсійними. З графіків рис. 3 також випливає, що швидкість 13-ої моди зі збільшенням товщини пружного шару прямує до швидкості хвилі Релея $\overline{c}_R$ ($\overline{c}_R = 0,923063$) знизу, а фазова швидкість 14-ої моди – до швидкості хвилі Релея $\overline{c}_R$ ($\overline{c}_R = 0,923063$) зверху.

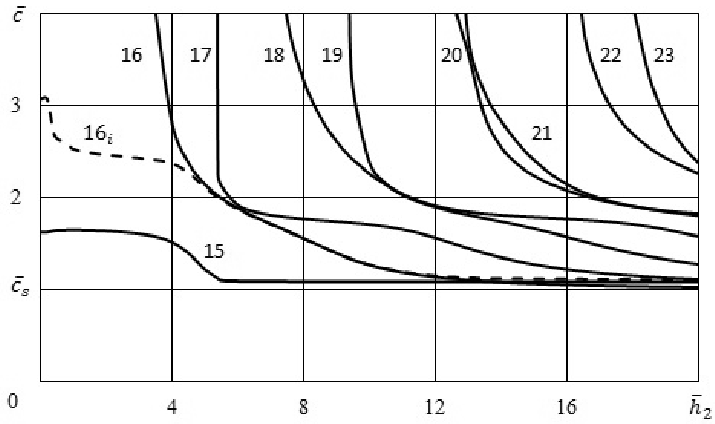

Рис. 4

З рис. 4 випливає, що фазові швидкості всіх наступних мод високого порядку зі зростанням товщини (частоти) пружного шару ($\overline{h}_2 \to \infty$) прямують до швидкості $\overline{c}_s$ хвилі зсуву в матеріалі пружного тіла.

На рис. 5 – 9 наведено графіки залежностей безрозмірних величин коефіцієнтів згасання мод $\overline{\gamma}$ ($\overline{\gamma} = \gamma / k_s$, k_s – хвильове число хвилі зсуву в матеріалі пружного шару) від безрозмірної величини товщини пружного шару $\overline{h}_2$ для шару в'язкої рідини з товщиною $\overline{h}_1 = 20$ і $\overline{\mu}^* = 0{,}001$.

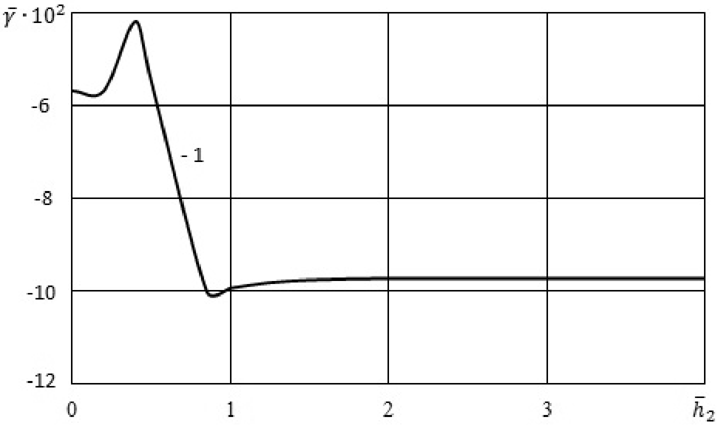

Рис. 5

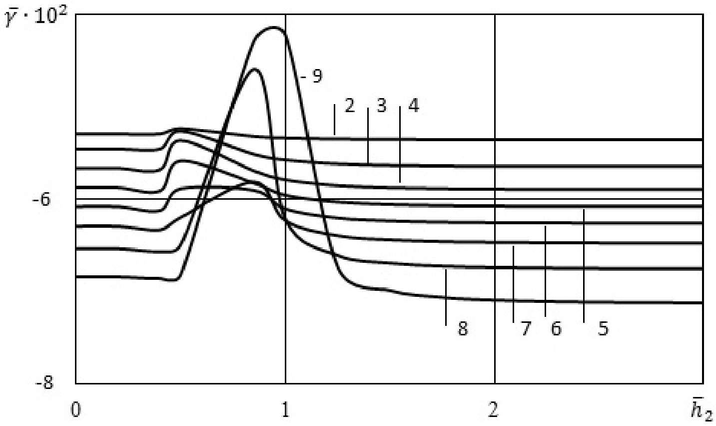

Рис. 6

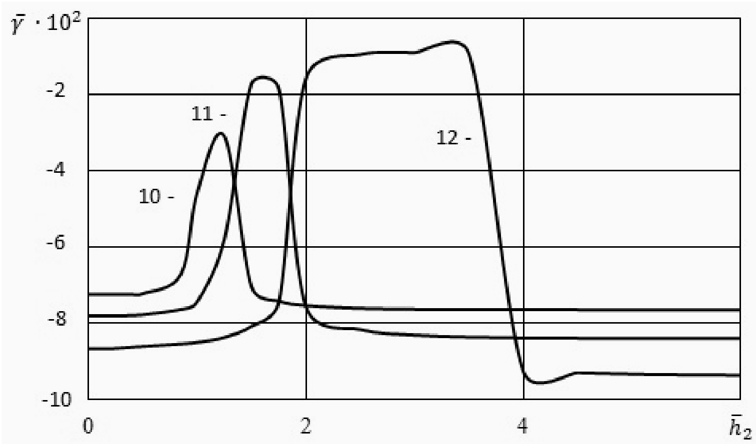

Рис. 7

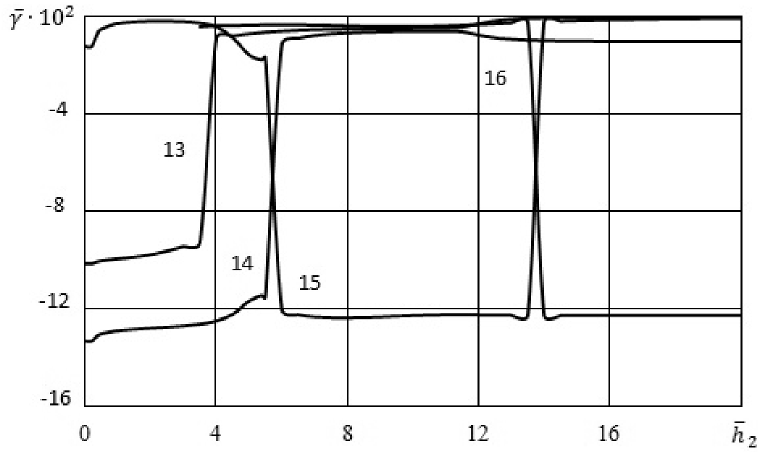

Рис. 8

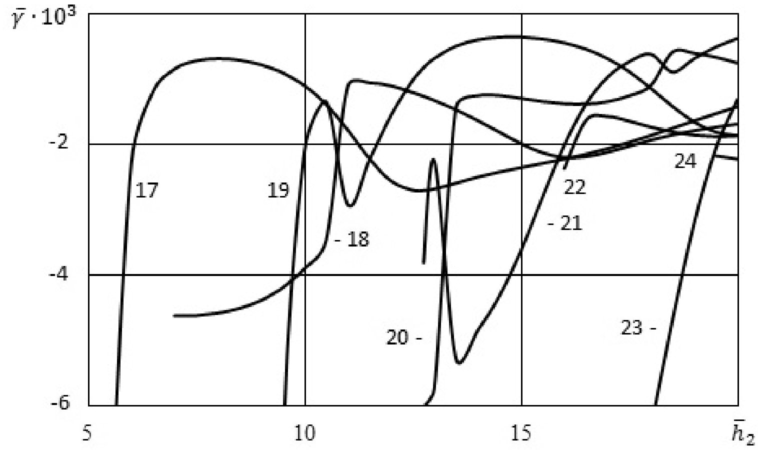

Рис. 9

З графіків, наведених на рис. 5 – 9, безпосередньо випливає, що для всіх мод існують пружні шари певної товщини, у яких узагальнені моди Лемба поширюються як із найменшим, так і з найбільшим згасанням. Зі зростанням товщини пружного шару для мод, починаючи з 13-ої, характерно зменшення їх величин коефіцієнтів згасання та загального впливу в'язкої рідини на них.

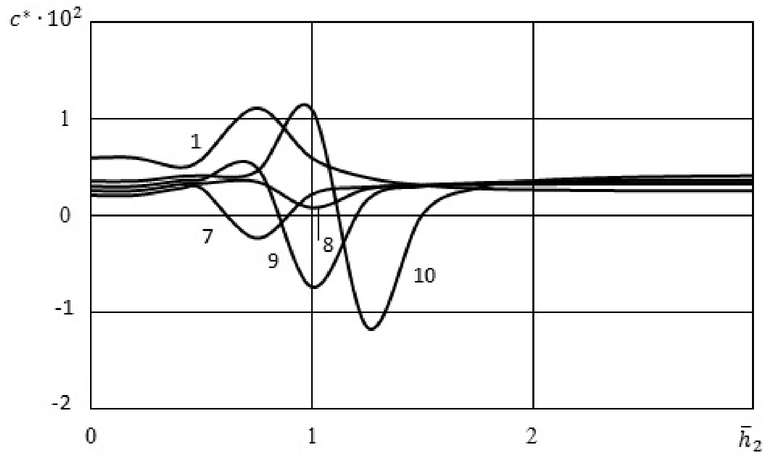

Рис. 10

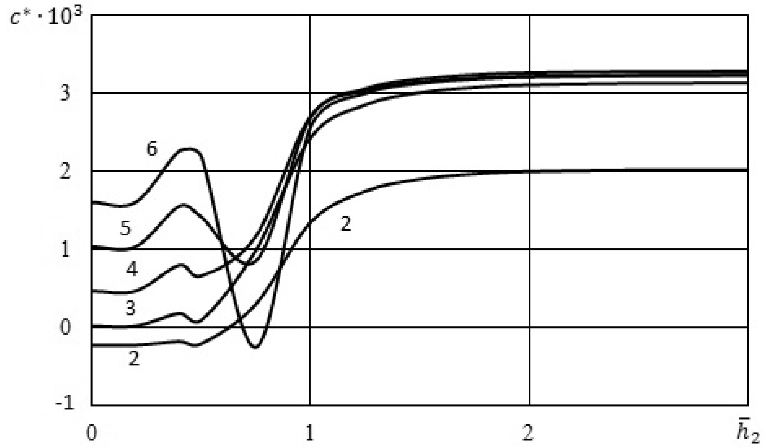

Рис. 11

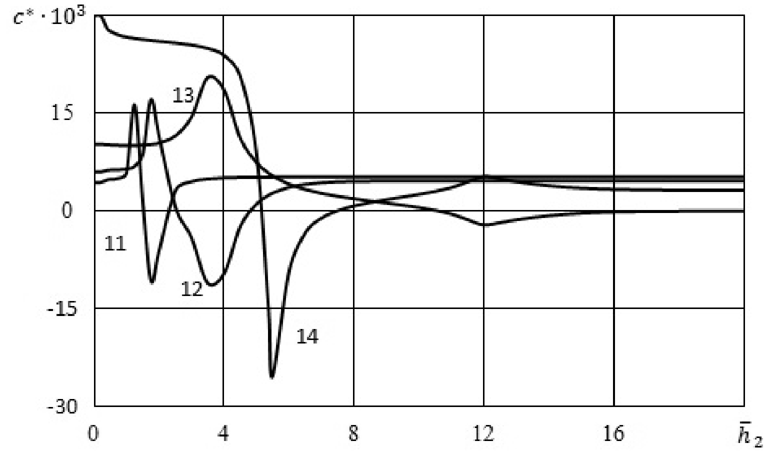

Рис. 12

Характер впливу в'язкості рідини ($\overline{\mu}^* = 0,001$) на швидкості узагальнених мод Лемба в гідропружній системі ілюструють графіки на рис. 10 – 13, на яких представлені залежності відносних змін величин фазових швидкостей мод c^* [$c^* = (c_i - c_v)/c_i$,

c_i – фазова швидкість хвиль у гідропружній системі з ідеальною рідиною, c_v – фазова швидкість мод у системі з в'язкою рідиною] від безрозмірної величини товщини пружного шару $\overline{h}_2$. На цих рисунках наведено графіки для гідропружного хвилеводу, товщина рідкого шару якого $\overline{h}_1 = 20$.

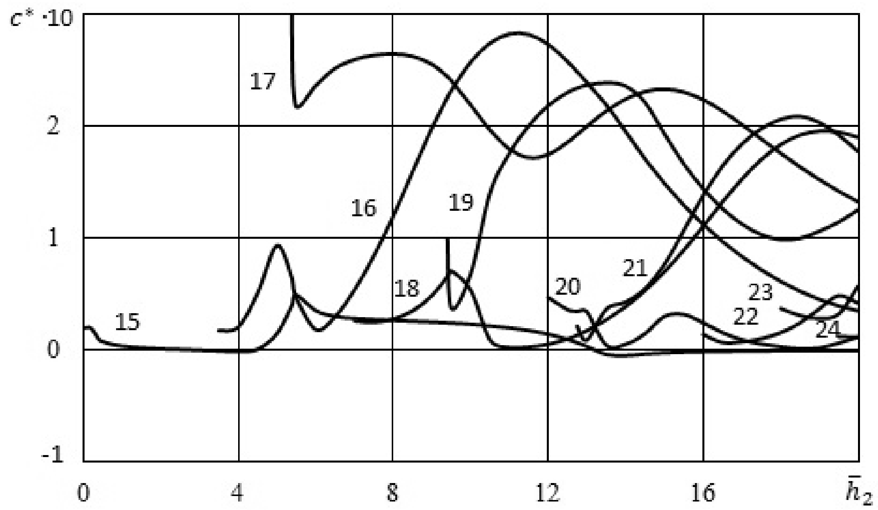

Рис. 13

З графіків, які ілюструють вплив в'язкості рідини на фазові швидкості узагальнених мод Лемба (рис. 10 – 13), випливає, що для ряду мод існують товщини пружного шару (частоти), для яких в'язкість рідини не впливає на фазові швидкості цих мод.

Графіки, представлені на рис. 14, 15, відображають розподіл амплітуд зміщень (швидкостей) для гідропружного хвилеводу, який складається з пружного шару зі сталі ($-\overline{h}_2 \le \overline{z}_2 \le 0$) і шару ($0 \le \overline{z}_2 \le \overline{h}_1$) ідеальної рідини ($\overline{\mu}^* = 0$). На них наведено залежності безрозмірних величин поздовжніх $\overline{V}_{z_1}$ (рис. 14) та поперечних $\overline{V}_{z_2}$ (рис. 15) зміщень (швидкостей $\partial u_i / \partial t$ і v_i) від безрозмірної поперечної координати $\overline{z}_2$ для поверхневої хвилі 1 (рис. 2).

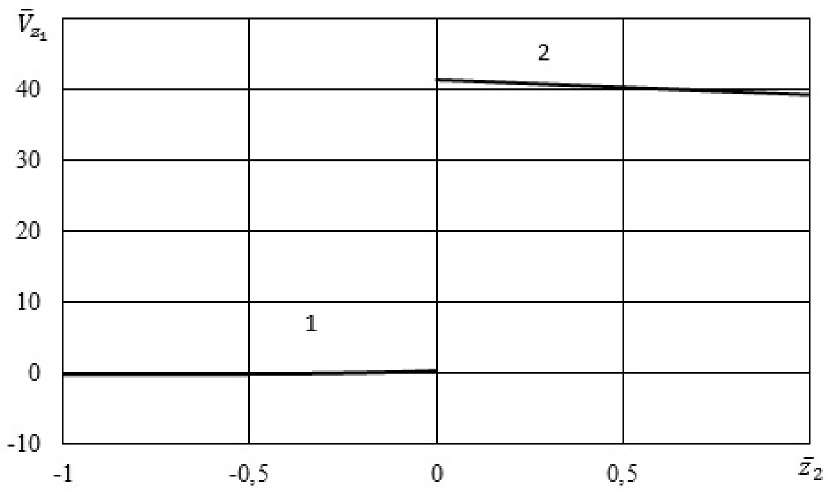

Рис. 14

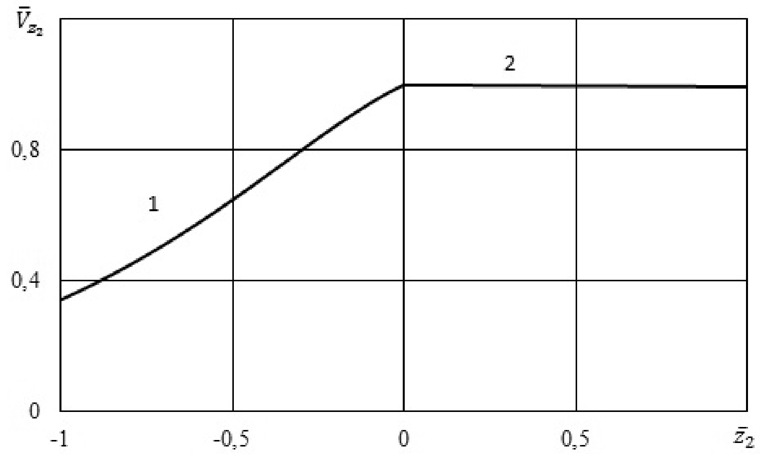

Рис. 15

Аналогічні залежності для гідропружної системи, яка складається з пружного шару та в'язкого рідкого шару ($\overline{\mu}^* = 0,001$), наведені на рис. 16, 17.

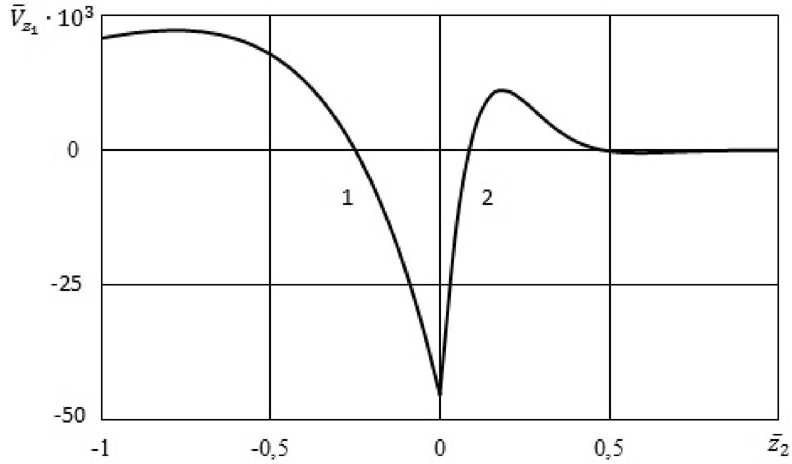

Рис. 16

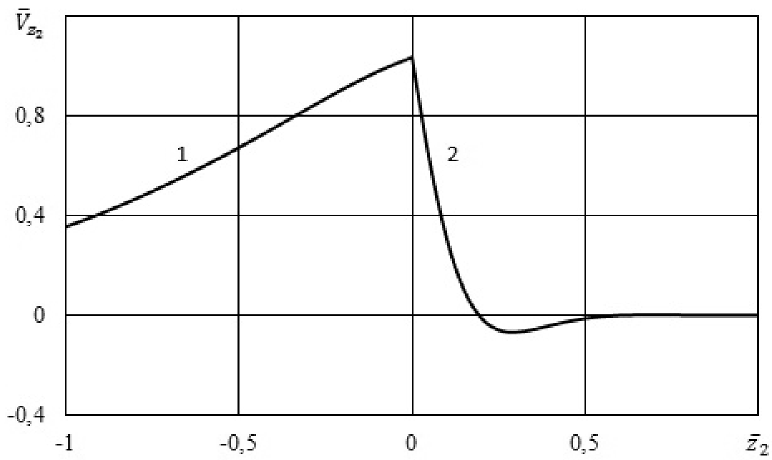

Рис. 17

Графіки, представлені на рис. 14 – 17, отримані для першої нижчої квазіповерхневої моди 1 в короткохвильовій частині спектра при частоті (товщині) $\overline{h}_2 = 20$. Зазначимо, що розрив поздовжніх зміщень $\overline{V}_{z_1}$ в пружному тілі (крива *1*) та в ідеальній рідині (крива *2*) на межі контакту середовищ ($\overline{z}_2 = 0$) обумовлений нев'язкістю (ідеальністю $\overline{\mu}^* = 0$) рідини (рис. 14).

Щодо нижчої моди 1 (рис. 2) зауважимо наступне. Як видно з графіків рис. 14, 15, у приконтактній області ($-1 \le \overline{z}_2 \le 0$) пружного шару поздовжні зміщення $\overline{V}_{z_1}$ (крива *1*, рис. 14) мізерно малі, а поперечні зміщення $\overline{V}_{z_2}$ (крива *1*, рис. 15) швидко зменшуються при віддаленні від межі поділу середовищ ($\overline{z}_2 = 0$). У рідкому шарі ($0 \le \overline{z}_2 \le 1$) протилежна ситуація. Поздовжні $\overline{V}_{z_1}$ і поперечні $\overline{V}_{z_2}$ зміщення (криві *2*, рис. 14, 15), набуваючи найбільших значень на межі контакту ($\overline{z}_2 = 0$), повільно спадають із глибиною. Це свідчить про концентрацію хвильових рухів у рідині. Як бачимо, глибина проникнення квазіповерхневої моди 1 в ідеальну рідину значно більша глибини проникнення в пружний шар. Тому в гідропружній системі при $\overline{a}_0 = 0,463021 < \overline{c}_R = 0,924531$, як випливає з графіків рис. 14, 15, зі збільшенням частоти (товщини пружного шару $\overline{h}_2 \to \infty$) нижча мода, поширюючись уздовж межі розділу середовищ, локалізується, головним чином, у приконтактній ділянці рідкого шару. Моди з 2-ої по 12-у зі зростанням частоти також локалізуються в рідкому шарі. Тринадцята та чотирнадцята моди зі зростанням товщини (частоти) поширюються вздовж поверхонь пружного шару. На відміну від цих мод рухи в модах високого порядку, починаючи з 15-ої, поширюючись у твердому тілі при $\overline{h}_2 \to \infty$, зміщуються від поверхонь пружного шару в його товщу. З цим пов'язано зменшення впливу в'язкої рідини на параметри цих хвиль в гідропружному хвилеводі, який розглядається.

Порівняння графіків розподілу амплітуд зміщень, які представлені на рис. 14 – 17, показує, що жорсткий контакт, обумовлений в'язкістю рідини (рис. 16, 17), на відміну від контакту з ковзанням, характерного для ідеальної рідини (рис. 14, 15), призводить до зменшення глибини проникнення квазіповерхневої моди 1 в рідкий шар.

§4. Вплив в'язкості рідини на хвильовий процес.

Аналіз числових результатів показує, що в гідропружному хвилеводі рідина сприяє появі нових мод, які мають нульові частоти запирання. Крім того, для ряду узагальнених мод Лемба рідинне навантаження викликає зміну критичних частот, зміщення дисперсійних кривих в довгохвильову частину спектра, а також зміну їх конфігурації. Це призводить до того, що в околі товщин пружного шару (частот), при яких відбувається зародження мод, вплив рідини на величини фазових швидкостей цих мод стає значним.

Вплив в'язкості рідини пов'язаний з її взаємодією зі зміщеннями, які виникають в пружно-рідинній системі при поширенні хвильових збурень. У тих точках мод, де переважними є зсувні зміщення на межі розділу середовищ, вплив в'язкості найбільший і величини коефіцієнтів згасання, а також відносні зміни величин фазових швидкостей набувають максимального значення. У точках хвилі з малими поверхневими поперечними зміщеннями, відповідно, і вплив в'язкості найменший. Як зазначалося вище, зі збільшенням товщини пружного шару у всіх модах високого порядку, починаючи з п'ятнадцятої моди, переважають поперечні зміщення, амплітуди яких на поверхнях пружного шару прямують до нуля в порівнянні з їх амплітудами в товщі шару, тобто рухи в модах високого порядку зміщуються від поверхонь в середину пружного шару і локалізуються в його товщі. Наслідком цього є зменшення впливу в'язкої рідини на величини фазових швидкостей мод високого порядку у короткохвильовій частині спектру. Для рідинних мод з 1-ої по 12-у, які розповсюджуються в рідкому шарі, ситуація протилежна. Для них характерний вплив в'язкості рідини на хвильові параметри на всьому частотному інтервалі.

§5. Властивості локалізації узагальнених мод Лемба.

Зазначимо також, що, як відомо [2], фазова швидкість і структура хвилі Стоунлі при взаємодії твердого та рідкого півпросторів залежать від механічних параметрів гідропружної системи та визначаються співвідношенням між швидкостями хвиль звуку в рідкому та Релея у твердому півпросторах. У роботі [2] показано, що, якщо швидкість хвилі звуку в рідкому середовищі більша за швидкість хвилі Релея, то хвиля Стоунлі локалізується в пружному тілі. В іншому випадку ця хвиля поширюється в рідкому півпросторі. До хвильового процесу в системі «шар рідини – пружний шар» цей критерій також може бути застосований, оскільки нижча квазіповерхнева мода 1 є хвилею типу Стоунлі і граничне значення її швидкості зі збільшенням товщини (частоти) прямує до швидкості хвилі Стоунлі. Відмінність полягає лише в тому, що в цій гідропружній системі порівнюються швидкості звукової хвилі в рідкому шарі зі швидкістю квазірелеївської хвилі, яка поширюється вздовж вільної поверхні пружного шару.

Графіки, представлені на рис. 2 для пружно-рідинної системи «сталь – вода», показують, що в гідропружному хвилеводі при збільшенні товщини пружного шару $\overline{h}_2$ швидкість першої моди 1, яка поширюється вздовж межі контакту середовищ, прямує до швидкості хвилі Стоунлі $\overline{c}_{st}$ знизу. При цьому в даному випадку механічні параметри гідропружної системи «сталь – вода» такі, що швидкість поширення звукової хвилі в рідині $\overline{a}_0$ менша швидкості квазірелеївської хвилі $\overline{c}_R$. У цьому випадку (при $\overline{a}_0 < \overline{c}_R$), як випливає з графіків (рис. 14, 15), в короткохвильовій частині спектра глибина проникнення квазіповерхневої моди 1 в ідеальну рідину значно більша глибини проникнення в пружне тіло. Тому мода 1, поширюючись вздовж межі розділу середовищ, локалізується, переважно, в приконтактній області ідеального рідкого шару. Це відноситься і до мод 2 – 12, які також розповсюджуються в рідині. Внаслідок того, що жодна з нижчих мод (1 – 12) не проникає у тверде тіло, поверхня пружного шару, яка межує з рідиною, залишається вільною від рідинних мод. Цю область займає мода 13. Швидкість цієї моди, яка розповсюджується вздовж межі поділу середовищ у приконтактній області пружного шару, прямує до швидкості хвилі Релея $\overline{c}_R$ знизу, як і у разі твердого шару, що не взаємодіє з рідиною. Швидкість моди 14, яка поширюється в пружному шарі вздовж його вільної поверхні, прямує до швидкості хвилі Релея $\overline{c}_R$ зверху. Швидкості всіх мод вищого порядку прямують до швидкості хвилі зсуву в матеріалі твердого тіла $\overline{c}_s$ і, як зазначено вище, їх рухи локалізуються в товщі пружного шару.

Таким чином, аналіз показує, що в даній пружно-рідинній системі не тільки перша мода, але і нижчі моди (2 – 12), які виникають в результаті взаємодії пружного шару з рідким шаром, не проникають в тверде тіло і поширюються вздовж межі розділу середовищ, переважно, у приконтактній ділянці рідини. Всі інші моди вищого порядку, як зазначалося раніше, поширюються в пружному шарі. У цьому випадку хвилеводами для поширення нормальних хвиль і перенесення хвильової енергії служать як пружний, так і рідкий шари. З аналізу графіків, представлених на рис. 14 – 17, випливає, що для гідропружної системи «пружний шар – рідкий шар» в'язкість рідини зменшує глибину проникнення хвильових рухів нижчої моди в рідкий шар.

Висновки.

Таким чином, аналіз показує, що в пружно-рідинній системі «сталь – вода» не тільки перша мода, але і нижчі моди (2 – 12), які виникають в результаті взаємодії пружного шару з рідким шаром, не проникають у тверде тіло і поширюються вздовж межі поділу середовищ, переважно, у приконтактній ділянці рідини. Квазіповерхневі моди (13 і 14) зі зростанням товщини (частоти) поширюються вздовж поверхонь пружного шару. Решта мод вищого порядку, починаючи з моди 15, поширюються в пружному шарі в його товщі. У цьому випадку хвилеводами для поширення нормальних хвиль і переносу хвильової енергії служать як пружний, так і рідкий шари. Встановлено, що у разі сильно жорсткого матеріалу (сталь) пружного шару для ряду мод існують товщини шару (частоти), при яких в'язкість рідини не впливає на фазові швидкості цих мод. Показано, що для гідропружної системи «пружний шар – рідкий шар» в'язкість рідини зменшує глибину проникнення хвильових рухів нижчої моди в рідкий шар.

Отримані результати дозволяють встановлювати межі застосування моделей хвильових процесів, основаних на моделі ідеальної рідини.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в цій статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Наукова та науково-технічна діяльність наукових установ Національної академії наук України» (КПКВК 6541030).

РЕЗЮМЕ. На основі тривимірних лінеаризованих рівнянь Нав'є – Стокса для шару в'язкої стисливої рідини та лінійних рівнянь класичної теорії пружності для пружного шару побудовано дисперсійні криві та досліджено поширення узагальнених хвиль Лемба у широкому діапазоні частот. Проаналізовано вплив в'язкості рідини, товщини пружного та рідкого шарів на фазові швидкості та коефіцієнти згасання узагальнених мод Лемба у випадку товстого шару рідини. Показано, що для всіх мод існують пружні шари певної товщини, при яких вплив в'язкості рідини на фазові швидкості та коефіцієнти згасання мод є мінімальним. Виявлено також, що для ряду мод існують як певні товщини, так й інтервали товщин, при яких вплив в'язкості рідини на фазові швидкості та коефіцієнти згасання цих мод значний. Встановлено, що у випадку жорсткого матеріалу пружного шару для ряду мод існують товщини шару (частоти), при яких в'язкість рідини не впливає на фазові швидкості цих мод. Розвинутий підхід та отримані результати дозволяють встановити межі застосування моделей хвильових процесів, основаних на моделі ідеальної стисливої рідини. Числові результати наведено у вигляді графіків та дано їх аналіз.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: узагальнені моди Лемба, пружний шар, шар в'язкої стисливої рідини.

1. *Викторов И.А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. – Москва: Наука, 1981. – 288 с.
2. *Волькенштейн М.М., Левин В.М.* Структура волны Стоунли на границе вязкой жидкости и твердого тела // Акуст. журн. – 1988. – **34**, № 4. – С. 608 – 615.
3. *Гузь А.Н.* Динамика сжимаемой вязкой жидкости. – Киев: А.С.К., 1998. – 350 с.
4. *Гузь А.* Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями: в 2-х частях. Ч. 1. Общие вопросы. Волны в бесконечных телах и поверхностные волны. – Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. – 501 с.
5. *Гузь А.* Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями: в 2-х частях. Ч. 2. Волны в частичноограниченных телах. – Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. – 505 с.
6. *Гузь А.Н.* Введение в динамику сжимаемой вязкой жидкости. – Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing RU, 2017. – 244 с.
7. *Гузь А.Н., Жук А.П., Махорт Ф.Г.* Волны в слое с начальными напряжениями. – Киев: Наук. думка, 1976. – 104 с.
8. *Bagno A.M.* Propagation of Waves in an Elastic Half-Space Interacting with a Viscous Liquid Layer // Int. Appl. Mech. – 2020. – **56**, N 6. – P. 700 – 707.
9. *Guz A.N.* Aerohydroelasticity Problems for Bodies with Initial Stresses // Int. Appl. Mech. – 1980. – **16**, N 3. – P. 175 – 190.
10. *Guz A.N.* Compressible, Viscous Fluid Dynamics (review). Part 1 // Int. Appl. Mech. – 2000. – **36**, N 1. – P. 14 – 39.
11. *Guz A.N.* The Dynamics of a Compressible Viscous Liquid (review). II // Int. Appl. Mech. – 2000. – **36**, N 3. – P. 281 – 302.
12. *Guz A.N.* Dynamics of compressible viscous fluid. – Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2009. – 428 p.
13. *Guz A.N., Bagno A.M.* Effect of Liquid Viscosity on Dispersion of Quasi-Lamb Waves in an Elastic-Layer–Viscous-Liquid-Layer System // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 4. – P. 361 – 367.
14. *Guz A.N., Bagno A.M.* Propagation of Quasi-Lamb Waves in an Elastic Layer Interacting with a Viscous Liquid Half-Space // Int. Appl. Mech. – 2019. – **55** N 5. – P. 459 – 469.
15. *Guz A.N., Zhuk A.P., Bagno A.M.* Dynamics of Elastic Bodies, Solid Particles, and Fluid Parcels in a Compressible Viscous Fluid (Review) // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 5. – P. 449 – 507.

Надійшла 16.06.2022 Затверджено до друку 13.12.2022