**П.З.Луговий[1], В.В.Гайдайчук[2],
С.П.Орленко[1], К.Е.Котенко[2]**

ДИНАМІКА ТРИШАРОВИХ НЕСИМЕТРИЧНИХ СФЕРИЧНИХ ОБОЛОНОК З ДИСКРЕТНО-НЕОДНОРІДНИМ ЗАПОВНЮВАЧЕМ ПРИ НЕСТАЦІОНАРНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ

*[1]Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: plugovyy@inmech.kiev.ua*
*[2]Київський національний університет будівництва і архітектури,
просп. Повітрофлотський, 31, 03037, Київ, Україна; e-mail: viktor_gaydaychuk@ukr.net*

Abstract. The dynamics of asymmetric three-layer spherical shells with the discrete- -symmetric light, reinforced ribbed filler under non-stationary loads is studied. When analyzing the elements of elastic structure, Timoshenko's model of the theory of shells and rods is used under independent static and kinematic hypotheses for each layer. According to the Hamilton-Ostrogradsky variational principle, the motion equations are obtained for the shells above. The numerical results of the study of the nature of oscillations of chosen elastic structure, the load-bearing layers of which are made of different materials, are obtained by the finite element method. The effect of geometrical and physical-mechanical parameters of asymmetric shell layers on its dynamic behavior is revealed for the case of axisymmetric internal impulse loading and new mechanical effects are described.

Key words: dynamics, asymmetric three-layer spherical shell, discrete-symmetric lightweight filler, reinforcing ribs, non-stationary load, finite element method, stress-strain state, mechanical phenomena.

Вступ.

В даний час спостерігається тенденція широкого використання шаруватих структур в сучасних надзвукових (гіперзвукових) літальних апаратах та багаторазових космічних транспортних системах і дослідження таких структур стає все більш актуальним. Ефективна несуча здатність тришарової оболонкової конструкції робить її дуже корисною в різних інженерних застосуваннях. Постійний розвиток нових конструкційних матеріалів призводить до все більш складних конструкцій, які вимагають ретельного аналізу. В літературі є достатньо робіт, присвячених дослідженню динаміки шаруватих оболонок з підкріпленнями і технічними особливостями, виконаних різними методами [8 – 10, 12, 13, 19 – 22, 24]. Однак, останнім часом створення нових технологій, об’єктів спеціального призначення і т. п. часто призводить до необхідності розробки конструктивних тришарових оболонкових елементів із заповнювачем ускладненої геометричної структури. При цьому зазначені елементи перебувають під динамічними навантаженнями різного виду, в тому числі нестаціонарними. Для таких оболонок проблеми динамічної поведінки вивчені недостатньо [6].

В даній роботі розглядаються несиметричні тришарові сферичні оболонки з дискретно-симетричним легким армованим ребрами заповнювачем. Армуючі ребра розташовані по лініях головних кривизн і з’єднують несучі шари, які виготовлені з різних матеріалів. Відстані між армуючими ребрами значно більші від розмірів їх поперечних перерізів, тому доцільно застосовувати теорії шаруватих оболонок з використанням незалежних гіпотез для кожного із шарів. Дослідження динаміки симетричних тришарових оболонок обертання з дискретно-симетричним заповнювачем було розпочато в роботах [18, 23] і продовжується до цих пір [3, 15, 16] з допомогою скінченно-різницевих методів. Динамічна поведінка тришарових сферичних оболонок з несиметричною структурою пакету шарів вивчена недостатньо [5, 14, 17, 19]. Такі оболонки є досить жорсткими елементами і їх дослідження має теоретичний і практичний інтерес. Наявність легкого заповнювача, розташованого між несучими шарами і армуючими ребрами, суттєво ускладнює задачу, тому для дослідження динаміки несиметричних тришарових оболонок застосовується скінченно-елементний метод [15, 16].

Поставлена задача розв'язана з застосуванням теорії оболонок і стержнів згідно з зсувною моделлю Тимошенка за незалежних статичних та кінематичних гіпотез для кожного шару. Використовуючи варіаційний принцип стаціонарності Гамільтона – Остроградського, виведено рівняння коливань тришарової неоднорідної за товщиною структури. Це дало можливість більш цілеспрямовано створити адекватну скінченно-елементну модель для проведення чисельного аналізу впливу несиметрії тришарових сферичних оболонок з дискретно-симетричним легким армованим ребрами заповнювачем на їх динамічну поведінку. Приведено числові результати розв'язування конкретних задач і виявлено нові механічні ефекти.

§1. Постановка задачі. Основні рівняння.

Тришарова несиметрична сферична оболонка з легким заповнювачем, армованим дискретно симетричними ребрами, являє собою пружну структуру, яка складається з внутрішнього (індекс 1), зовнішнього (індекс 2) несучих шарів, легкого заповнювача (індекс t) і набору дискретних ребер (індекс j), жорстко з'єднаних із зазначеними несучими шарами. Оболонка має постійну загальну товщину h і віднесена до координат α, z. При цьому координатна лінія $R\alpha$ на серединній поверхні оболонки при $z=0$ збігається з твірною; координатна лінія z є ортогональною до серединних поверхонь. Вважається, що величина z є додатною, якщо точка перебуває з боку опуклості серединної поверхні. Оболонки жорстко з'єднані між собою дискретними ребрами і легким заповнювачем. Вид деформованого стану внутрішнього і зовнішнього несучих шарів може бути визначений через компоненти узагальненого вектора переміщень $\overline{U_1}=(u_s^1, u_3^1, \varphi_1^1)^T$ і $\overline{U_2}=(u_s^2, u_3^2, \varphi_1^2)^T$ [5]. Поля переміщень для легкого ребристого заповнювача визначаються узагальненим вектором переміщення $\overline{U_t} = (u_s^t, u_3^t, \varphi_1^t)^T$ згідно з моделлю, наведеною в [7]. Кривизни і коефіцієнти першої квадратичної форми координатної поверхні сферичної оболонки записуються наступним чином: $A_1 = A_2 = R_i$; $k_1 = k_2 = 1/R_i$.

Деформований стан армуючого ребра визначається узагальненим вектором переміщень $\overline{U_j}=(u_1^j, u_3^j, \varphi_1^j)^T$. Виходячи з припущення про жорстке з'єднання армуючих ребер із сферичними несучими шарами, умови контакту центрів ребер з несучими шарами записуються [18]

$$u_1^j = u_1^{jk}(s_j) \mp \frac{H_j}{2}\varphi_1^{jk}(s_j); \quad u_3^j = u_3^{jk}(s_j); \quad \varphi_1^j = \varphi_1^{jk}(s_j) \ \ (k = 1, 2), \tag{1.1}$$

де $s_j = R\alpha_j$ – координата лінії множин точок проекцій центрів тяжіння поперечних перерізів j-го ребра на відповідну серединну поверхню несучого шару; $h_t = H_j$ – товщина легкого заповнювача. При цьому: $h_j^i = 0{,}5h_i + H_i/2$, $h_i\,(i=1,2)$ – товщини сферичних несучих шарів; $H_i/2$ – відстань від осі j - го ребра до поверхні гладких оболонок.

На основі зсувної теорії оболонок [5] переміщення u_1^i і u_3^i в несучих шарах в напрямку α (поздовжній), z (товщина) і t (час) при малих лінійних переміщеннях виражаються через наступні залежності:

$$u_1^i(s,z,t)=u_0^i(s,t)+z_i\varphi_1^i(s,t);$$
$$u_3^i(s,z,t)=u_{03}^i(s,t)\quad (i=1,2), \tag{1.2}$$

де φ_1^i – кут повороту нормалі до серединної поверхні несучих шарів.

Визначення деформацій через переміщення для несучих шарів і j - го ребра приймаються у вигляді:

$$\varepsilon_{11}^i=\frac{\partial u_0^i}{\partial s_i}+\frac{u_{03}^i}{R_i};\ \ \varepsilon_{22}^i=\frac{u_0^i}{R_i}\mathrm{ctg}\alpha+\frac{u_{03}^i}{R_i};\ \ \varepsilon_{13}^i=\varphi_1^i;$$
$$\kappa_{11}^i=\frac{\partial\varphi_1^i}{\partial s_i};\ \ \kappa_{22}^i=\frac{\varphi_1^i}{R_i}\mathrm{ctg}\alpha;\ \ \varepsilon_{22j}=\frac{u_{3j}}{R_j}. \tag{1.3}$$

Переміщення для легкого заповнювача записуються згідно моделі, запропонованій в [7]:

$$u_1^t(s,z,t)=\left(1+\frac{z_t}{R_t}\right)u_0^t(s,t)+z_t u_1^t(s,t);$$
$$u_3^t(s,z,t)=u_{03}^t(s,t). \tag{1.4}$$

Кінематичні залежності для заповнювача прийняті з врахуванням малості деформацій:

$$\varepsilon_{11}^t=\frac{1}{\left(1+z_t/R_t\right)}\left(\frac{\partial u_0^t}{\partial s}+\frac{u_{03}^i}{R_t}\right);\ \ \varepsilon_{22}^t=\frac{u_3^t}{R_t+z_t};$$
$$2\varepsilon_{13}^t=\frac{1}{\left(1+z_t/R_t\right)}\left(\frac{\partial u_{03}^t}{\partial s}-\frac{u_0^i}{R_t}\right)+u_1^t. \tag{1.5}$$

Модель, яка передбачає ідеальне сполучення між заповнювачем і несучими шарами без відриву і проковзування, описується наступним чином [11]:

$$\begin{cases} u_1^t(z=z_t^1)=u_0^i+\frac{1}{2}(-1)^k h_i\varphi_1^i, & \text{для } i=1\rightarrow(k=0;\ z_t^1=-h_t/2);\\ u_{03}^t=u_{03}^i, & \text{для } i=2\rightarrow(k=1;\ z_t^2=h_t/2). \end{cases} \tag{1.6}$$

Використовуючи вирази для поля переміщень несучих шарів (1.1), легкого заповнювача (1.4) і умов міжшарової неперервності переміщень (1.6), можна отримати спрощені умови сумісності у вигляді:

$$u_0^t=\frac{u_0^1+u_0^2}{2}-\frac{1}{4}(h_2\varphi_1^2-h_1\varphi_1^1);$$
$$u_1^t=\frac{u_0^1-u_0^2}{h_t}-\frac{1}{2h_t}(h_2\varphi_1^2+h_1\varphi_1^1); \tag{1.7}$$
$$u_{03}^t=\frac{1}{2}(u_{03}^1+u_{03}^2).$$

Рівняння руху для несиметричної тришарової структури отримані з використанням варіаційного принципу стаціонарності Гамільтона – Остроградського, згідно якого:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(K-\Pi+A)dt=0, \qquad (1.8)$$

де П – повна потенціальна енергія пружної системи; K – повна кінетична енергія пружної системи; A – робота зовнішніх сил; t_i і t_2 – фіксовані моменти часу. При виведенні рівнянь коливань несиметричних тришарових оболонок з неоднорідним заповнювачем незалежному варіюванню підлягають: компоненти переміщень несучих шарів, армуючих ребер і заповнювача з легкого матеріалу.

Вирази для варіацій повної потенціальної і кінетичної енергії вказаних компонентів записуються наступним чином:

$$\delta\Pi=\delta\sum_{i=1}^{2}\Pi^i+\delta\sum_{j=1}^{J}\Pi^j+\delta\sum_{S_t}\Pi^t;\ \delta K=\delta\sum_{i=1}^{2}K^i+\delta\sum_{j=1}^{J}K^j+\delta\sum_{S_t}K^t, \qquad (1.9)$$

де

$$\delta\Pi^i=\int_{S_i}\left[\int_{-h/2}^{h/2}\left(T_{11}^i\delta\varepsilon_{11}^i+T_{22}^i\delta\varepsilon_{22}^i+T_{13}^i\delta\varepsilon_{13}^i+M_{11}^i\delta\kappa_{11}^i+M_{22}^i\delta\kappa_{22}^i\right)dz_i\right]dS_i; \qquad (1.10)$$

$$\delta\Pi^t=\int_{S_t}\left[\int_{-h_t/2}^{h_t/2}\left(T_{11}^t\delta\varepsilon_{11}^t+T_{22}^t\delta\varepsilon_{22}^t+T_{13}^t\delta\varepsilon_{13}^t+M_{11}^t\delta\kappa_{11}^t+M_{22}^t\delta\kappa_{22}^t\right)dz_t\right]dS_t; \qquad (1.11)$$

$$\delta\Pi^j=\int_{L_J}\left(T_{11j}\delta\varepsilon_{11j}+T_{22j}\delta\varepsilon_{22j}+T_{13j}\delta\varepsilon_{13j}+M_{11j}\delta\kappa_{11j}\right)dL_J; \qquad (1.12)$$

$$\delta K^i=\int_{S_i}\left\{\int_{-h_i/2}^{h_i/2}\left[\rho_i h_i\left(\frac{\partial^2u_1^i}{\partial t^2}\delta u_1^i+\frac{\partial^2u_{03}^i}{\partial t^2}\delta u_3^i\right)+\rho_i\frac{h_i^3}{12}\left(\frac{\partial^2\varphi_1^i}{\partial t^2}\delta\varphi_1^i\right)\right]dz_i\right\}dS_i; \qquad (1.13)$$

$$\delta K^t=\int_{S_t}\left[\int_{-h_t/2}^{h_t/2}\rho_t h_t\left(\frac{\partial^2u_0^t}{\partial t^2}\delta u_0^t+\frac{\partial^2u_1^t}{\partial t^2}\delta u_1^t+\frac{h_t^2}{12}\frac{\partial^2u_{03}^t}{\partial t^2}\delta u_{03}^t\right)dz_t\right]dS_t; \qquad (1.14)$$

$$\delta K^j=\int_{L_j}\left[\rho_jF^j\left(\frac{\partial^2u_1^j}{\partial t^2}\delta u_1^j+\frac{\partial^2u_3^j}{\partial t^2}\delta u_3^j\right)+\rho_j\left(I_{kr}^j\frac{\partial^2\varphi_1^j}{\partial t^2}\delta\varphi_1^j\right)\right]dL_j. \qquad (1.15)$$

В рівняннях (1.10) – (1.15) величини F^j, I_{kr}^j характеризують геометричні параметри поперечних армуючих ребер; ρ_j – густина матеріалу армуючого ребра; ρ_i,ρ_t – густина матеріалів несучих шарів і легкого заповнювача, відповідно.

Вважається, що несиметрична тришарова сферична структура навантажена внутрішнім осесиметричним розподіленим нестаціонарним нормальним навантаженням $P_1(s,t)$, яке залежить від просторової s і часової t координат.

Зазначимо, що при розрахунку потенціальної і кінетичної енергій для легкого заповнювача в виразах $\delta\Pi^t$ та δK^t інтегрування проводиться за об'ємом, величина якого збільшена на величину обсягу армуючих ребер. Але цей факт практично не впливає на загальну похибку теорії оболонок, оскільки обсяг армуючих ребер в складі об'єму легкого заповнювача для несиметричних тришарових оболонок обертання менше 5%.

Після стандартних перетворень в варіаційному рівнянні (1.8), з урахуванням співвідношень (1.10) – (1.15), отримаємо дві системи гіперболічних рівнянь руху 9-го порядку для несиметричної тришарової сферичної оболонки з легким заповнювачем, армованим дискретними ребрами при осесиметричному імпульсному навантаженні і відповідні граничні та початкові умови:

$$\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial s_i}(\sin\alpha T_{11}^i)-\frac{1}{R_i}(\mathrm{ctg}\alpha T_{22}^i-T_{13}^i)-\frac{1}{R_t}T_{13}^i=\rho_i h_i\frac{\partial^2 u_1^i}{\partial t^2};$$

$$\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial s_i}(\sin\alpha T_{13}^i)-\frac{1}{R_i}(T_{11}^i+T_{22}^i)-\frac{1}{R_t h_t}(M_{11}^i+M_{22}^i)+P_3=\rho_i h_i\frac{\partial^2 u_3^i}{\partial t^2};$$

$$\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial s_i}(\sin\alpha M_{11}^i)-\frac{\mathrm{ctg}\alpha}{R_i}M_{22}^i-T_{13}^i=\frac{\rho_i h_i^3}{12}\frac{\partial^2\varphi_1^i}{\partial t^2}\quad (i=1,2);$$

$$\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial s_t}(\sin\alpha T_{11}^t)+\frac{1}{R_t}(T_{11}^i-T_{13}^i)+\frac{8}{h_t^2}M_{13}^t=\rho_t h_t\frac{\partial^2 u_0^i}{\partial t^2};$$

$$\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial s_t}(\sin\alpha M_{11}^t)-T_{13}^i+\frac{1}{R_{t1}}M_{13}^t=\rho_t h_t\frac{\partial^2 u_1^i}{\partial t^2};$$

$$\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial s_t}(\sin\alpha T_{13}^t)-\frac{1}{R_t}(T_{11}^i+T_{22}^i)=\rho_t h_t\frac{\partial^2 u_{03}^i}{\partial t^2};\tag{1.16}$$

$$\left[T_{11}^{\mathrm{i}\pm}\right]_j=\rho_j F_j\frac{\partial^2 u_{1j}}{\partial t^2};\quad \left[T_{13}^{\mathrm{i}\pm}\right]_j=\rho_j F_j\frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial t^2};\quad \left[M_{11}^{i\pm}\right]_j=\rho_j I_{krj}\frac{\partial^2\varphi_{1j}}{\partial t^2}.$$

Отримані рівняння коливань несиметричних тришарових пружних структур описуються двома системами гіперболічних рівнянь дев'ятого порядку. Ці системи утворюються за рахунок врахування таких факторів, як виготовлення несучих шарів з різних матеріалів, так і розривних коефіцієнтів «несучі шари-армуючі ребра».

На лініях розривів в рівняннях коливань (1.16) величини $\left[T_{11}^{\mathrm{i}\pm}\right]_j$; $\left[T_{13}^{\mathrm{i}\pm}\right]_j$; $\left[M_{11}^{i\pm}\right]_j$ відповідають зусиллям і моментам, які діють на j-й дискретний елемент з боку несучих шарів.

Залежності між величинами зусиль і моментів та відповідними величинами деформацій для несучих шарів і армуючих ребер записуються наступним чином:

$$T_{11}^i=\frac{E_i h_i}{1-\nu_i^2}(\varepsilon_{11}^i+\nu_i\varepsilon_{22}^i);\ T_{22}^i=\frac{E_i h_i}{1-\nu_i^2}(\varepsilon_{22}^i+\nu_i\varepsilon_{11}^i);\ T_{13}^i=k^2G_{13}^i\varepsilon_{13}^i\quad (i=1,2);$$

$$M_{11}^i=\frac{E_i h_i^3}{12(1-\nu_i^2)}(\kappa_{11}^i+\nu_i\kappa_{22}^i);\ M_{22}^i=\frac{E_i h_i^3}{12(1-\nu_i^2)}(\kappa_{22}^i+\nu_i^2\kappa_{11}^i);\tag{1.17}$$

$$T_{22j}=E_jF_j\varepsilon_{22j},$$

E_i, G_{13}^i, ν_i – фізико-механічні параметри матеріалів несучих шарів; k^2 – інтегральний коефіцієнт поперечного зсуву теорії пластин та оболонок; E_i, F_j – модуль пружності матеріалу і площа поперечного перерізу j-го ребра, відповідно.

Зусилля і моменти для легкого заповнювача можна визначити наступним чином:

$$T_{11}^t=\int_{-h_t/2}^{h_t/2}\left(1+\frac{z_t}{R_t}\right)\sigma_{11}^t dz_t;\quad T_{13}^t=\int_{-h_t/2}^{h_t/2}\sigma_{13}^t dz_t;\quad M_{11}^t=\int_{-h_t/2}^{h_t/2}z_t\left(1+\frac{z_t}{R_t}\right)\sigma_{11}^t dz_t.\tag{1.18}$$

Рівняння коливань (1.16) доповнюються відповідними граничними та початковими умовами.

§2. Числові результати.

Досліджено задачу динамічного деформування несиметричної тришарової напівсферичної оболонки при нестаціонарному навантаженні. В даному випадку задача розв'язувалася на інтервалі $\left[-\pi/2, \pi/2\right]$. В силу симетрії відносно вершини сфери при $\alpha = 0$ розглядався інтервал $[0, \pi/2]$. У вершині сфери має місце особливість, необхідність розкриття якої дозволила записати граничні умови при $\alpha = 0$ у наступному вигляді:

$$u_1^i = \varphi_1^i = 0; \quad 2\frac{\partial T_{13}^i}{\partial s} - P_3(s_0, t)\delta_{2i} = \rho h \frac{\partial^2 u_3^i}{\partial t^2}; \tag{2.1}$$

при $\alpha = \pi/2$ (жорстке защемлення):

$$u_1^i = u_3^i = \varphi_1^i = 0 \quad (i = 1, 2). \tag{2.2}$$

У формулах (2.1) δ_{2i} – символ Кронекера.

Зовнішнє нестаціонарне навантаження $P_3\left(s,t\right)$ задавалося у вигляді:

$$P_3 = A\sin\frac{\pi t}{T}\left[\eta(t) - \eta(t-T)\right], \tag{2.3}$$

де A – амплітуда навантаження; T – тривалість імпульсу навантаження; $T = R/c$, де c – швидкість звуку в матеріалі несучих шарів; $\eta(t)$ – функція Хевісайда.

В розрахунках покладалось: $A = 10^6$ Па; $T = R_1/c = 5\cdot 10^{-5}$ с.

Початкові умови є нульовими для несучих шарів при $t = 0$:

$$u_1^i = u_3^i = \varphi_1^i = 0; \quad \frac{\partial u_1^i}{\partial t} = \frac{\partial u_3^i}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1^i}{\partial t} = 0 \quad (i = 1, 2). \tag{2.4}$$

Відповідна початково-крайова задача (1.16), (2.1) – (2.4) розв'язується за допомогою скінченно-елементного методу. Створена адекватна скінченно-елементна модель оболонки відображає взаємозв'язок потенціальної енергії деформацій в тілі з потенціалом прикладених сил:

$$\Pi = E - W, \tag{2.5}$$

де E – потенціальна енергія деформацій, а W – потенціал прикладених сил.

Після розбивки суцільної області на окремі елементи залежність (2.5) матиме наступний вигляд:

$$\Pi = \sum_{e=1}^{E}(E^{(e)} - W^{(e)}) = \sum_{e=1}^{E}\pi^{(e)}. \tag{2.6}$$

Глобальна матриця жорсткості і глобальний вектор-стовпець в матричному рівнянні

$$\left[K\right]\left\{U\right\} = \left\{F\right\} \tag{2.7}$$

записуються наступним чином:

$$\left[K\right] = \sum_{e=1}^{E}\left[k^{(e)}\right]; \quad \left\{F\right\} = -\sum_{e=1}^{E}\left\{f^{(e)}\right\}.$$

Такий підхід відповідає формі диференціальних рівнянь (1.16) і виконанню закону збереження повної механічної енергії несиметричної тришарової структури на скінченно-елементному рівні.

Розробка скінченно-елементних моделей виконувалася з використанням тривимірного об’ємного скінченного елементу типу Solid, який по ступеню витягнутості, звуження і викривлення та інших показників відповідав вимогам забезпечення якості скінченно-елементної сітки [4]. Кількість скінченних елементів у варіанті несиметричної тришарової півсферичної структури без пінопласту і при його наявності наведено в таблиці. В обох варіантах скінченно-елементних моделей внутрішній несучий шар налічував 92700 елементів, а зовнішній – 30900. Кількість елементів легкого заповнювача (пінопласту) дорівнювала 29100, а армуючих ребер – 1800. В таблиці вказана кількість розбивки скінченно-елементної моделі на елементи і вузли, при яких забезпечується практична збіжність результатів розрахунків [4].

Вид моделі	Елементи	Вузли
без заповнювача	125400	185407
із заповнювачем	154500	185407

Отримані числові результати дозволяють проводити аналіз напружено-деформованого стану несиметричної тришарової пружної структури сферичного типу в будь який момент часу (розрахунки проводилися при $0 \le t \le 40T$).

Досліджено перші два випадки: 1 – без пінопласту; 2 – відношення модулів пружності несучих шарів до модуля пружності заповнювача (пінопласту): $E_1/E_t = 10^4$; $E_2/E_t = 3{,}5\cdot 10^3$; $(E_1/E_t = 10^5; E_2/E_t = 3{,}5\cdot 10^4)$; $E_2 = E_j = 7\cdot 10^{10}$ Па; $\nu_j = \nu_2 = 0{,}3$; $\rho_1 = \rho_j = 2{,}7\cdot 10^3$ кг$/$м^3 ; $h_1 = h_2 = 0{,}001$ м; $h_j = 10 h_2$; $R_1 = 0{,}3$ м; $F_j = 2\cdot 10^{-4}$ м^2; $h/R_1 = 0{,}04$; $E_1 = 2\cdot 10^{11}$ Па; $\rho_1 = 7{,}8\cdot 10^3$ кг$/$м^3; $\nu_1 = 0{,}3$.

Розглянуто два види фізико-механічних параметрів для легкого заповнювача: $E_t = 2\cdot 10^7$ Па; $\rho_t = 25$ кг$/$м^3; $\nu_t = 0{,}27$ і $E_t = 2\cdot 10^6$ Па.

Дискретні підкріплюючі ребра (паралелі) розташовувалися в точках $\alpha_k = [41 + 40(k-1)]\Delta\alpha_1$, $k = \overline{1,3}$, $\Delta\alpha_1 = (\pi/2)/160$.

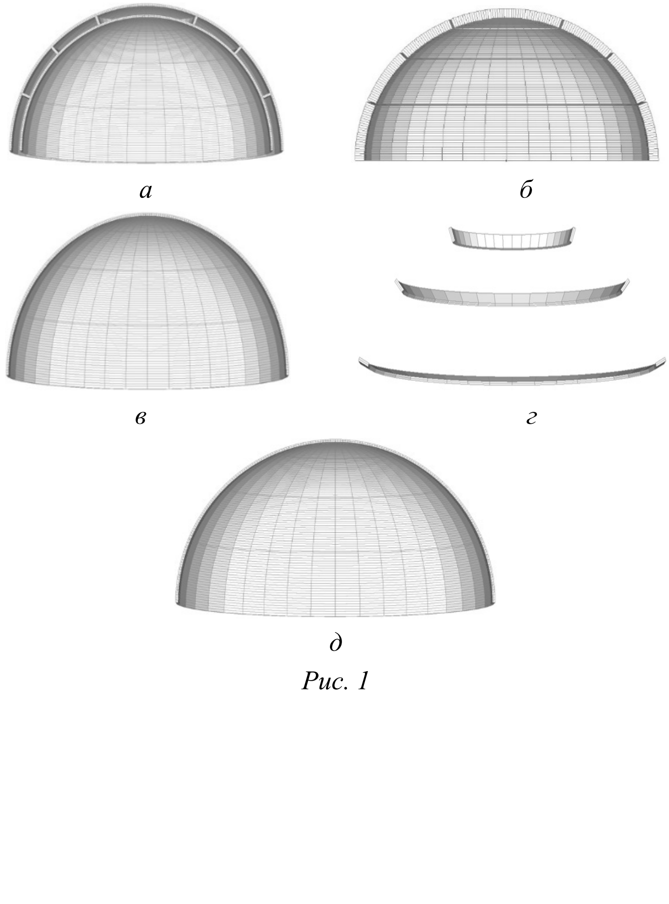
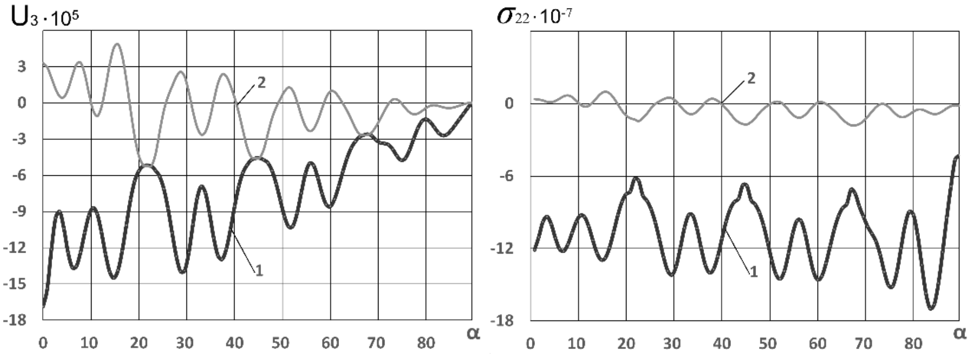


Рис. 1

Наведені параметри несиметричної сферичної структури показують, що внутрішній несучий шар виготовлений зі сталі, а зовнішній – зі сплаву АМГ-6; товщина пінопластового шару буде 0,01 м. Загальна маса такої сферичної конструкції без пінопласту дорівнює 14,28 кг, а пінопластового заповнювача – 0,279 кг.

Створена скінченно-елементна модель несиметричної тришарової півсфери з трьома ребрами (рис. 1, *а* – *д*). На всіх цих рисунках зображені поперечні перерізи в площині αz. На рис. 1, *а* представлено модель півсфери з трьома ребрами і пінопластом. На рис. 1, *б* – модель пінопласту; на рис. 1, *в* – модель внутрішнього несучого шару; на рис. 1, *г* – модель трьох ребер і на рис. 1, *д* – модель зовнішнього несучого шару.



а *б*

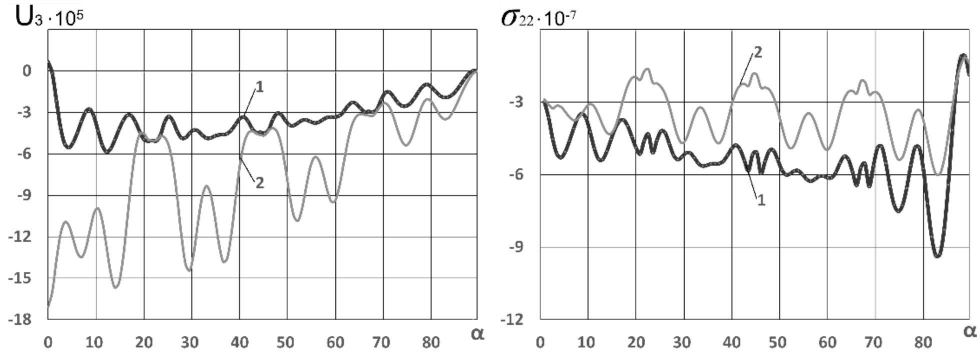
Рис. 2

На графіках рис. 2, *а* показані залежності максимальних величин нормальних прогинів $u_3^1(1)$ і $u_3^2(2)$ в серединних поверхнях несучих шарів несиметричної тришарової сферичної оболонки від кутової координати α. Тут і в подальших графіках крива *1* відповідає величині u_3^1 внутрішнього несучого шару несиметричної сферичної оболонки, а крива *2* – величині u_3^2 зовнішнього несучого шару несиметричної сферичної оболонки в момент часу $t = 8{,}35\,\mathrm{T}$ (час досягнення максимального значення величин $u_3^1(1)$ і $u_3^2(2)$). Легкий заповнювач відсутній. На даному графіку і в подальших рисунках точки з'єднання кривих *1* і *2* вказують на розташування дискретних ребер. З представленого графічного матеріалу можна візуально визначити вплив сферичності структури на антисиметричність розподілу величин $u_3^1(1)$ і $u_3^2(2)$ за просторовою координатою. Перші п'ять власних частот конструкції становлять: 1 – 1449,714 Гц; 2 – 1449,714 Гц; 3 – 1946,114 Гц; 4 – 2277,252 Гц; 5 – 2277,254 Гц.

На рис. 2, *б* в приведеному масштабі наведено залежності максимальних величин нормальних напружень $\sigma_{22}^1(1)$ і $\sigma_{22}^2(2)$ в серединних поверхнях несучих шарів від кутової координати α. Тут і в подальших графіках крива *1* відповідає величині σ_{22}^1 внутрішнього несучого шару несиметричної сферичної оболонки, а крива *2* – величині σ_{22}^2 зовнішнього несучого шару несиметричної сферичної оболонки в момент часу $t = 8{,}35\,\mathrm{T}$ (час досягнення максимального значення величин $\sigma_{22}^1(1)$ і $\sigma_{22}^2(2)$). Легкий заповнювач відсутній.

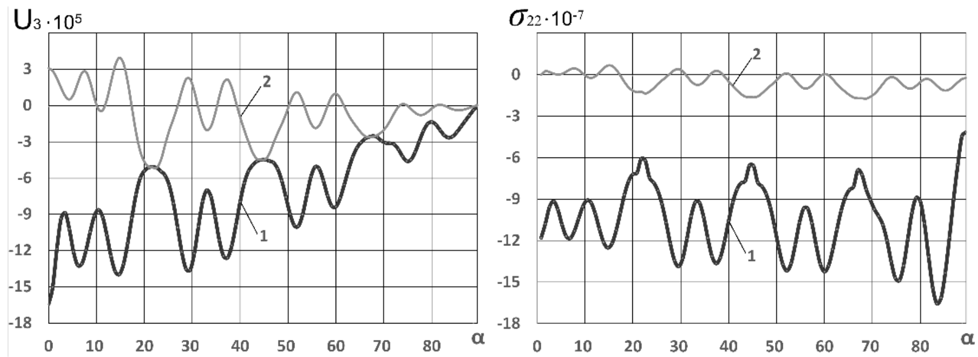
На рис. 3, *а* показані залежності максимальних величин нормальних прогинів $u_3^1(1)$ і $u_3^2(2)$ в серединних поверхнях несучих шарів несиметричної тришарової сферичної оболонки від кутової координати α оболонки в момент часу $t = 9{,}1\,\mathrm{T}$. Легкий заповнювач: $E_1/E_t = 10^4$; $E_2/E_t = 3{,}5 \cdot 10^3$. Перші п'ять власних частот конструкції приймають такі значення: 1 – 1437,637 Гц; 2 – 1437,637 Гц; 3 – 1935,072 Гц; 4 – 2278,176 Гц; 5 – 2278,178 Гц.

На рис. 3, *б* в приведеному масштабі наведено залежності максимальних величин нормальних напружень $\sigma_{22}^{1}(1)$ і $\sigma_{22}^{2}(2)$ в серединних поверхнях несучих шарів від кутової координати α в момент часу $t = 9{,}1\,\mathrm{T}$. Легкий заповнювач: $E_1/E_t = 10^4$; $E_2/E_t = 3{,}5 \cdot 10^3$.



а *б*

Рис. 3



а *б*

Рис. 4

На рис. 4, *а* показані залежності максимальних величин нормальних прогинів $u_3^1(1)$ і $u_3^2(2)$ в серединних поверхнях несучих шарів несиметричної тришарової сферичної оболонки від кутової координати α оболонки в момент часу $t = 9{,}1\,\mathrm{T}$. Легкий заповнювач: $E_1/E_t = 10^5$; $E_2/E_t = 3{,}5 \cdot 10^4$. Перші п'ять власних частот конструкції становлять: 1 – 1434,813 Гц; 2 – 1437,572Гц; 3 – 1926,881 Гц; 4 – 2263,627 Гц; 5 – 2263,627Гц.

На рис. 4, *б* в приведеному масштабі наведено залежності максимальних величин нормальних напружень $\sigma_{22}^{1}(1)$ і $\sigma_{22}^{2}(2)$ в серединних поверхнях несучих шарів від кутової координати α в момент часу $t = 9{,}1\,\mathrm{T}$. Легкий заповнювач: $E_1/E_t = 10^5$; $E_2/E_t = 3{,}5 \cdot 10^4$.

Враховуючи, що вихідна задача є багатопараметричною (в різні моменти часу t кінематичні та силові параметри приймають різні значення за координатою α), в подальшому будемо розглядати залежності вихідних величин в моменти часу досягнення ними максимальних по модулю значень.

Аналіз отриманих результатів показує, що збільшення загальної маси несиметричної тришарової оболонки при динамічних навантаженнях за рахунок пінопласту $(E_1/E_t = 10^4; E_2/E_t = 3{,}5 \cdot 10^3)$ на 1,95% зменшує максимальні нормальні переміщення внутрішньої несучої оболонки в 2,83 рази, а максимальні нормальні переміщення її зовнішньої несучої оболонки збільшує в 3,4 рази; зменшує максимальні напруження внутрішньої несучої оболонки в 1,79 рази, а максимальні напруження зовнішньої несучої оболонки збільшує приблизно в 3 рази. Розкачка конструкції з пінопластом йде значно повільніше: максимуми вихідних величин досягаються при $t = 8{,}35\,\mathrm{T}$ без пінопласту, а з пінопластом – при $t = 4{,}35\,\mathrm{T}$. Перша власна частота тришарової структури зменшилася на 1,0%.

Використання більш податливого пінопласту з властивостями $E_1/E_t = 10^5; E_2/E_t = 3{,}5 \cdot 10^4$ при даних величинах нестаціонарних навантажень практично не впливає на динаміку таких конструкцій несиметричних тришарових сферичних оболонок.

Досліджено інші два випадки: 1 – без пінопласту, 2 – відношення модулів пружності несучих шарів до модуля пружності заповнювача (пінопласту): $E_1/E_t = 3{,}5 \cdot 10^3$; $E_2/E_t = 10^4; (E_1/E_t = 3{,}5 \cdot 10^4; E_2/E_t = 10^5)$; $E_1 = E_j = 7 \cdot 10^{10}$ Па; $\nu_j = \nu_1 = 0{,}3$; $\rho_1 = \rho_j = 2{,}7 \cdot 10^3$ кг/м^3; $h_1 = h_2 = 0{,}001$ м; $h_j = 10 h_2$; $R_1 = 0{,}3$ м; $F_j = 2 \cdot 10^{-4}$ м^2; $h/R_1 = 0{,}04$; $E_1 = 2 \cdot 10^{11}$ Па; $\rho_2 = 7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3; $\nu_2 = 0{,}3$.

Наведені параметри сферичної структури відображають, що внутрішній несучий шар виготовлений зі сплаву АМГ-6, а зовнішній – зі сталі; товщина пінопластового шару буде 0,01 м. Загальна маса такої сферичної конструкції без пінопласту дорівнює 20,56 кг, а пінопластового заповнювача – 0,279 кг.

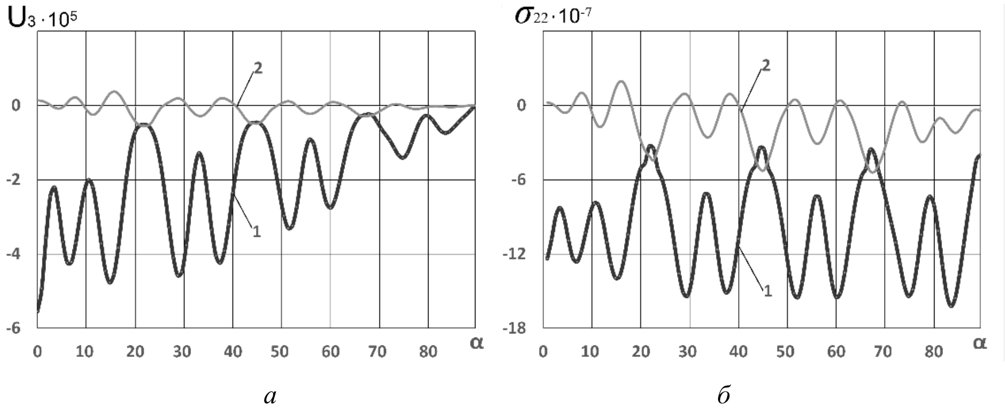
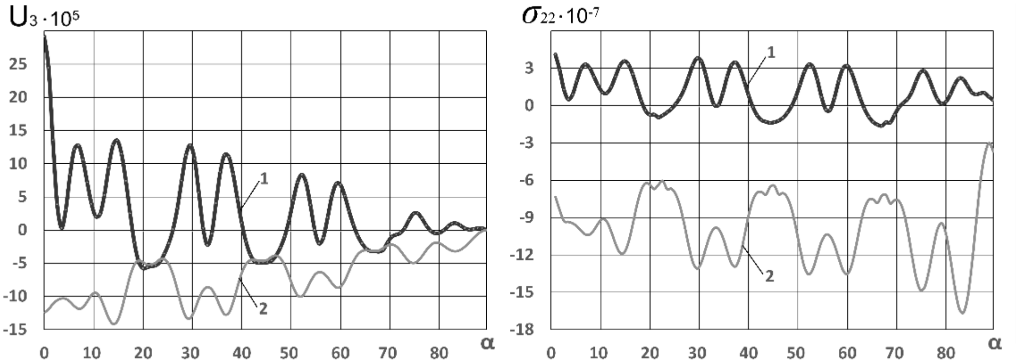


Рис. 5

На рис. 5, *а* наведено залежності максимальних величин нормальних прогинів $u_3^1(1)$ і $u_3^2(2)$ в серединних поверхнях несучих шарів несиметричної тришарової сферичної оболонки від кутової координати α в момент часу $t = 9{,}6\,\mathrm{T}$. Легкий заповнювач відсутній. Перші власні частоти конструкції становлять: 1 – 1425,786 Гц; 2 – 1912,004 Гц; 3 – 1912,004 Гц; 4 – 2227,799 Гц; 5 – 2227,8 Гц.

На рис. 5, *б* в приведеному масштабі наведено залежності максимальних величин нормальних напружень $\sigma_{22}^1(1)$ і $\sigma_{22}^2(2)$ в серединних поверхнях несучих шарів від кутової координати α в момент часу $t = 9{,}6\,\mathrm{T}$. Легкий заповнювач відсутній.

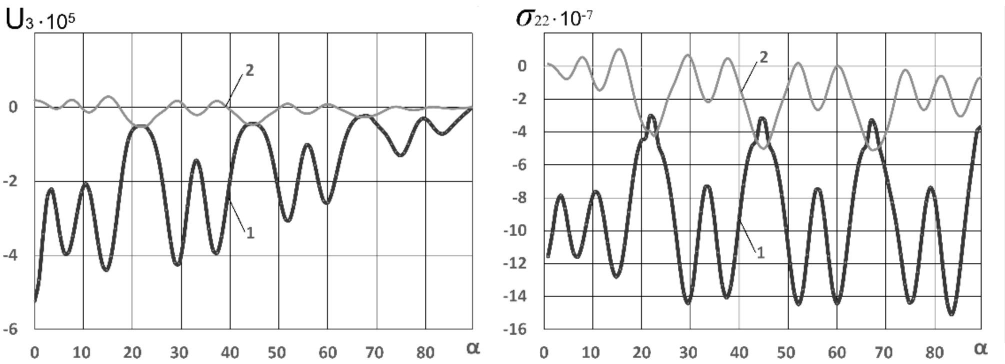


а *б*

Рис. 6

На рис. 6, *а* показані залежності максимальних величин нормальних прогинів u_3^1 (1) і u_3^2 (2) в серединних поверхнях несучих шарів несиметричної тришарової сферичної оболонки від кутової координати α оболонки в момент часу $t = 9{,}1$ T. Легкий заповнювач $E_1/E_t = 3{,}5 \cdot 10^3$; $E_2/E_t = 10^4$. Перші власні частоти конструкції становлять: 1 – 1414,383 Гц; 2 – 1414,383 Гц; 3 – 1901,153 Гц; 4 – 2230,809 Гц; 5 – 2230,809 Гц.

На рис. 6, *б* в приведеному масштабі наведено залежності максимальних величин нормальних напружень σ_{22}^1 (1) і σ_{22}^2 (2) в серединних поверхнях несучих шарів від кутової координати α в момент часу $t = 9{,}1$ T. Легкий заповнювач $E_1/E_t = 3{,}5 \cdot 10^3$; $E_2/E_t = 10^4$.



а *б*

Рис. 7

На рис. 7, *а* показані залежності максимальних величин нормальних прогинів u_3^1 (1) і u_3^2 (2) в серединних поверхнях несучих шарів несиметричної тришарової сферичної оболонки від кутової координати α оболонки в момент часу $t = 9{,}4$ T. Легкий заповнювач: $E_1/E_t = 3{,}5 \cdot 10^4$; $E_2/E_t = 10^5$. Перші власні частоти конструкції становлять: 1 – 1411,633 Гц; 2 – 1411,633 Гц; 3 – 1893,425 Гц; 4 – 2212,558 Гц; 5 – 2212,559 Гц.

На рис. 7, *б* в приведеному масштабі наведено залежності максимальних величин нормальних напружень σ_{22}^1 (1) і σ_{22}^2 (2) в серединних поверхнях несучих шарів від кутової координати α в момент часу $t = 9{,}4$ Т. Легкий заповнювач: $E_1/E_t = 3{,}5 \cdot 10^4$; $E_2/E_t = 10^5$.

Аналіз отриманих результатів показує, що збільшення загальної маси несиметричної тришарової оболонки при динамічних навантаженнях за рахунок пінопласту $(E_1/E_t = 10^4;\ E_2/E_t = 3{,}5 \cdot 10^3)$ на 1,36% збільшує максимальні нормальні переміщення внутрішньої несучої оболонки в 5,27 рази, а максимальні нормальні переміщення її зовнішньої несучої оболонки збільшує в 23,3 рази; зменшує максимальні напруження внутрішньої несучої оболонки в 3,79 рази, а максимальні напруження зовнішньої несучої оболонки збільшує приблизно в 3 рази. Розкачка конструкції з пінопластом йде значно повільніше: максимуми вихідних величин досягаються при $t = 3{,}85$ Т без пінопласту, а з пінопластом – при $t = 4{,}35$ Т. Перша власна частота тришарової структури зменшилася на 1,0%.

Використання більш податливого пінопласту з властивостями $E_1/E_t = 10^5;\ E_2/E_t = 3{,}5 \cdot 10^4$ при даних величинах нестаціонарних навантажень практично не впливає на динаміку таких конструкцій несиметричних тришарових сферичних оболонок.

Висновки.

Проведено числові розрахунки динаміки несиметричних тришарових сферичних оболонок, виготовлених з різних матеріалів, методом скінченних елементів показали, що геометричні і фізико-механічні параметри шарів оболонки значно впливають на кількісні і якісні характеристики динаміки зазначених оболонкових структур. Числові експерименти підтвердили, що збільшення маси несиметричних тришарових сферичних оболонок за рахунок легкого компонента заповнювача в межах 2% суттєво, часом в декілька разів, змінюють максимальні параметри напружено-деформованого стану в сферичних конструкціях при нестаціонарних навантаженнях. Характер залежностей максимальних деформацій та напружень в серединних поверхнях несучих шарів з пінопластом відповідної якості говорить про більш інтенсивний взаємозв’язок власних частот між собою, що викликає ефект конструкційного демпфування, оскільки досягнення максимумів параметрів напружено-деформованого стану в них відбувається значно пізніше.

Таким чином, можна стверджувати, що підбором матеріалів конструкційних елементів несиметричних тришарових сферичних структур можна створити конструкцію з прогнозованою динамічною поведінкою при нестаціонарному навантаженні.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано у цій статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Досліджено динаміку несиметричних тришарових сферичних оболонок з дискретно-симетричним легким армованим ребрами заповнювачем при нестаціонарних навантаженнях. При аналізі елементів пружної конструкції використано модель теорії оболонок і стержнів Тимошенка за незалежних статичних і кінематичних гіпотез для кожного шару. Згідно з варіаційним принципом Гамільтона – Остроградського отримано рівняння руху вказаних оболонок при осесиметричному імпульсному навантаженні. Створена відповідна скінченно-елементна модель оболонки, яка відображає взаємозв’язок потенціальної енергії деформацій в тілі з потенціалом прикладених сил. Чисельні результати дослідження динаміки несиметричної тришарової пружної структури, несучі шари якої виготовлені з різних матеріалів, отримано методом скінченних елементів. Досліджено вплив геометричних і фізико-механічних параметрів несиметричних шарів оболонки на її динамічну поведінку при осесиметричному внутрішньому нестаціонарному навантаженні та виявлено нові механічні ефекти.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: динаміка, несиметрична тришарова сферична оболонка, дискретно-симетричний легкий заповнювач, армуючі ребра, нестаціонарне навантаження, напружено-деформований стан, метод скінченних елементів, механічні явища.

1. *Лычев С.А., Сайфутдинов Ю.Н.* Динамика трехслойной непологой сферической оболочки // Механика предельного состояния. Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. – 2007. – № 2. – С. 54 – 90.
2. *Лычев С.А, Сидоров Ю.А.* Нестационарные колебания трехслойных сферических оболочек с кратным спектром // Изв. вузов. Строительство. – 2001. – № 4. – С. 31 – 39.
3. *Орленко С.П.* Чисельне моделювання динаміки тришарової сферичної оболонки з дискретно неоднорідним заповнювачем // Доп. НАН України. – 2020. – № 3 – С. 19 – 27.
4. *Рычков С.П.* Моделирование конструкций в среде Femap with NX Nastran.– Москва: ДМК Пресс, 2013. – 784 с.
5. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. – Москва: Наука, 1966. – 636 с.
6. *Успехи механики*: (под общей редакцией А.Н. Гузя): в 6-ти томах. Т.3. *Пискунов В.Г., Рассказов А.О.* Развитие теории слоистых пластин и оболочек. – Киев: «А.С.К.», 2007. – С. 141 – 175.
7. *Frostig Y., Thomsen O.T.* Higher-order free vibration of sandwich panels with a flexible core // Int. J. Solids Struct. – 2004. – **41**. – P. 1697 – 1724.
8. *Hause T., Librescu L.* Postbuckling of anisotropic flat and doubly-curved sanwich panels under complex loading conditions // Int. J. Solids Struct. – 1998. – **35**, N 23. – P. 3007 – 3027.
9. *Hause T., Librescu L.* Dynamic response of doubly-curved anisotropic sandwich panels impacted by blast loadings // Int. J. Solids Struct. – 2007. – **44**, N 20. – P. 6678 – 6700.
10. *Hohe J., Librescu L.* Nonlinear theory for double-curved anisotropic sandwich shells with cross-compressed cores // Int. J. Solids Struct. – 2003. – **40**, N 5. – P. 1059 – 1088.
11. *Kheirikhah M.M., Khalili S.M.R., Malekzadeh Fard K.* Biaxial buckling analysis of soft-core composite sandwich plates using improved high-order theory // European J. of Mechanics A/Solids. – 2011. – 31 – P. 54 – 66.
12. *Lugovoi P.Z., Meish V.F.* Dynamics of Inhomogeneous Shell Systems under Nonstationary Loading (Survey) // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 5. – P. 481 – 537.
13. *Lugovoi P.Z., Meish V.F., Meish Yu.A., Orlenko S.P.* Dynamic Design of Compound Shell Structures of Revolution Under Nonstationary Loads // Int. Appl. Mech. – 2020. – **56**, N 1. – P. 22 – 32.
14. *Lugovoi P.Z., Meish V.F., Orlenko S.P.* Numerical Simulation of the Dynamics of Spherical Sandwich Shells Reinforced with Discrete Ribs Under a Shockwave// Int. Appl. Mech. – 2020. – **56**, N 5. – P. 590 – 598.
15. *Lugovyi P.Z., Gaidaichuk V.V., Skosarenko Yy.V., Kotenko K.E.* Stress-Strain State of Three-Layer Cylindrical Shells with Reinforced Light Core under Nonstationary Loading // Int. Appl. Mech. – 2021. – **57**, N 4. – P. 395 – 404.
16. *Lugovyi P.Z., Orlenko S.P.* Effect of the Asymmetry of Cylindrical Sandwich Shells on their Stress-Strain State under Non-Stationary Loading // Int. Appl. Mech. – 2021. – **57**, N 5. – P. 543 – 553.
17. *Malekzadeh Fard K., Livani M., Veisi A., Gholami M.* Improved high-order bending analysis of double curved sandwich panels subjected to multiple loading conditions // Latin American J. Solids Struct. – 2014. – **11**. – P. 1591 – 1614.
18. *Meish V.F., Shtantsel S.E.* Dynamic Problems in the Theory of Sandwich Shells of Revolution with a Discrete Core under Nonstationary Loads // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, N 12. – P. 1501 – 1507.
19. *Mueller W., Grigorenko Y.M., Grigorenko A.Ya., Vlaikov G.G.* Mechanics of Anisotropic Heterogeneous Shells: Fundamental Relations for Different Models. From the book «Recent Developments in Anisotropic Heterogeneous Shell Theory: General Theory and Applications of Classical Theory». Volume 1. (electronic resource). – Singapure: Springer, 2016. – 116 p.
20. *Qatu M.S.* Vibration of Laminated Shells and Plates. – New York: Academic Press, 2004. – 426p.
21. *Qatu M.S., Sullivan R.W., Wang W.* Recent Research Advances in the Dynamic Behavior of Composite Shells: 2000 – 2009 // Composite Struct. – 2010. – **93**, N 1. – P. 14 – 31.
22. *Reddy J.N.* Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and application. Second Edition. – Boca Raton: CRC Press, 2003. − 858 p.
23. *Shul'ga N.A., Meish V.F.* Forced Vibration of Three-Layered Spherical and Ellipsoidal Shells under Axisymmetric Loads // Mechanics of Composite Materials. – 2003. – **39**, N 5. – P. 439 – 446.
24. *Surianinov M., Yemelianova T., Shyliaiev O.* Investigation of Free Vibrations of Three-Layered Circular Shell Supported by Annular Ribs of Rigidity // Materials Sci. Forum Actual Problems of Eng. Mech. – 2019. – **968**. – P. 437 – 443.

Надійшла 22.02.2022 Затверджена до друку 13.12.2022