А. С. Х о р о ш у н

СТАБІЛІЗАЦІЯ РУХУ МОДЕЛІ TORA ІЗ ВРАХУВАННЯМ НЕЛІНІЙНОСТІ ЇЇ ПРУЖНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail:khoroshunanatoliy@gmail.com

Abstract. The control law of the eccentric wheel rotation which asymptotically stabilizes an equilibrium of the Translational Oscillator with a Rotating Actuator (TORA) is proposed. A nonlinear dependence of the force on displacement that occurs during the deformation of the elastic elements of the model on displacement is taken into account because in some cases the disregard of nonlinearity can lead to the loss of correctness of the model. It is shown that such control is robust, and the way of estimating the region of robustness in the space of the system parameters of the mechanical system is suggested. The obtained results are illustrated by an example of the real system.

Key words: Translational Oscillator with Rotating Actuator, underactuated mechanical system, dynamic surface control, sliding surface, low-pass filter, slow-fast system.

Вступ.

Супутники з подвійним обертанням є одним з основних типів безпілотних космічних апаратів. Наближено такий супутник можна представити у вигляді двох твердих тіл, платформи та ротора, що з'єднані жорстким валом. Після доставки на орбіту супутник рухається без взаємного обертання його частин одна відносно іншої, як одне тверде тіло. Задача полягає в тому, щоб забезпечити необертання платформи, наприклад, для проведення досліджень чи фотозйомки в заданому напрямку. Для цього електродвигун, що розташований на платформі, обертає за допомогою валу ротор у напрямку, який співпадає із напрямком початкового обертання. Таким чином, кутова швидкість платформи прямує до нуля, а момент імпульсу ротора стає рівним початковому моменту системи. Однак відомо [4, 9], що внаслідок такого маневру супутник може «перекинутись» через збільшення кута нутації чи швидкість обертання ротора почне необмежено зростати. Це може призвести до значного відхилення руху космічного апарату від бажаного. В роботі [17] для дослідження цих негативних режимів було запропоновано використовувати механічну модель, що отримала назву TORA, яка має схожу математичну природу з моделлю супутника із подвійним обертанням. Відзначимо, що окрім застосування до вивчення поведінки космічних апаратів, сама модель TORA є цікавою для теоретичного дослідження. Зокрема, в роботі [3] запропоновано використовувати TORA як модель механізму, призначеного для активного гасіння вібрації обертанням ексцентрикового маховика [18].

Аналіз літератури показав, що здебільшого розглядається лінійна залежність сили, яка виникає при деформації пружини, від зміщення. Це добре узгоджується з тим, що при невеликих амплітудах зміщення та деформаціях неушкодженого матеріалу нелінійні ефекти, які традиційно пов'язують із слабким ангармонізмом міжатомного потенціалу, проявляються несуттєво і їх вплив може не враховуватись. Однак, відомо [2], що для великих амплітуд зміщення та при наявності дефектів мікроструктури матеріалів вплив нелінійних ефектів може стати суттєвим. Тому аналіз динаміки механічних систем та побудова математичних моделей, які враховують нелінійність сил, що виникають при деформації пружних елементів цих систем, становить значний інтерес. Зокрема тому, що неврахування цього ефекту може зменшити адекватність моделі та привести до розбіжностей між реальною та прогнозованою поведінкою системи, що моделюється [6]. У Додатку проілюстровано подібну розбіжність. Виходячи зі слабкої вивченості моделі TORA при врахуванні нелінійності сили, що виникає при деформації пружини, від зміщення, процедура побудови керування, яке забезпечує бажану динаміку такої моделі, становить значний інтерес і є новою.

TORA може бути віднесений до класу т.зв. малоприводних механічних систем (ММС) (англ. underactuated mechanical system), які характеризуються тим, що кількість входів керування в них менша кількості змінних, яка описує поведінку системи. Системи такого класу широко використовуються при конструюванні різноманітних роботів, аерокосмічних та морських апаратів [10, 11], оскільки мають переваги в меншому споживанні енергії і меншій вартості у порівнянні з механічними системами з більшою кількістю входів керування. В роботі [10] також можна знайти список робіт, присвячених основним підходам до побудови керування TORA. Згадаємо також роботи [12, 16], де за допомогою перетворення змінних початкова система диференціальних рівнянь, яка описує поведінку TORA, зводиться до т.зв. «каскадного вигляду». З умови глобальної асимптотичної стійкості нульового стану рівноваги цієї системи отримано закон керування, що забезпечує такий же тип стійкості TORA. Відзначимо надзвичайно громіздкий вигляд отриманого закону керування, що ускладнює його застосування на практиці.

Ефективним методом побудови закону керування для нелінійних систем є метод динамічного керування по поверхні (ДКП) (англ. Dynamic Surface Control) [14, 15]. Однією з його особливостей є те, що керування, побудоване з його допомогою, забезпечує прямування траєкторій системи диференціальних рівнянь, що досліджується, не до рівноважних значень змінних, а до деяких наперед заданих траєкторій, прямування яких до рівноважних значень змінних постулюється. Також особливістю даного методу є застосування фільтрів, які дозволяють уникнути наростання складності елементів системи диференціальних рівнянь, в тому числі й закону керування, хоча й збільшують її розмірність. Крім того, оскільки часові константи фільтрів можуть бути вибрані фіксованими, але як завгодно малими додатними числами, то початкова система диференціальних рівнянь природнім чином може бути представлена у вигляді швидко-повільної системи. Подібний підхід до побудови керування TORA частково реалізовано в роботі [13]. Слід відзначити, що повністю вирішити питання із громіздкістю керування не вдалося. Також вибір параметрів керування й часових констант фільтрів відбувається лише, виходячи із загальних рекомендацій, на інтуітивному рівні.

Головні цілі даної роботи полягають в наступному:

1) розвинути метод ДКП побудови керування для ММС шляхом специфічного вибору параметрів і констант фільтрів, що дозволить уникнути зростання порядку допоміжної системи, а також явища значного ускладнення вигляду як допоміжної системи диференціальних рівнянь, так і закону керування, т. зв. явища «вибуху членів» (англ. explosion of terms);

2) побудувати закон обертання електродвигуна, який забезпечить асимптотичну стійкість стану рівноваги математичної моделі TORA при врахуванні нелінійної залежності сили, що виникає при деформації пружини, від зміщення для всіх початкових значень змінних відносно деякої області, яку також буде визначено, а також наявності неточностей в параметрах моделі;

3) побудувати в явному вигляді функцію Ляпунова, яка дозволяє отримати доведення щодо бажаних динамічних характеристик моделі, що досліджується, при запропонованому керуванні, не розділяючи відповідну систему диференціальних рівнянь на «швидку» та «повільну» підсистеми;

4) довести робастність керування та визначити область робастності у просторі параметрів моделі.

1. Постановка задачі.

Розглянемо конструкцію TORA. Основою моделі є прикріплений до стіни за допомогою пружини візок, центр мас якого може рухатися у вертикальній площині XOY вздовж горизонтальної осі OX. На візку розташовано маховик, який несе точкову масу і є симетричним відносно центру. Вісь обертання маховика перпендикулярна до площини руху візка, навколо якої він може обертатися в ту чи іншу сторону. Маховик приводиться в рух електродвигуном, статор якого жорстко скріплений з візком, а вісь ротора жорстко скріплена з віссю маховика.

На рис. 1 зображено схему TORA, де q_1 – горизонтальне зміщення центру маховика C від його положення рівноваги O; q_2 – кут відхилення точкової маси від вертикалі. Керування TORA відбувається за допомогою обертання ексцентрикового маховика, яке задається електродвигуном, тому керуючим параметром в системі вважаємо момент електромагнітних сил, що прикладені до ротора зі сторони статора. Задача керування полягає у стабілізації TORA в його положенні рівноваги $q_1 = 0$, $q_2 = 0$.

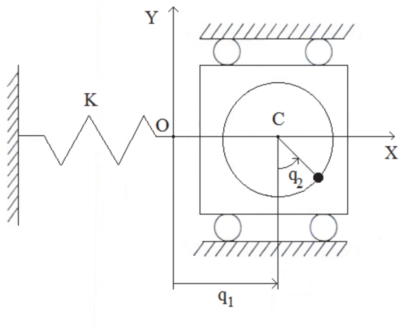

Рис. 1

2. Рівняння руху.

Введемо позначення: m – точкова маса; M – маса візка, двигуна і маховика; r – відстань між центром маховика і точковою масою; J – момент інерції маховика; Δ – момент електромагнітних сил, які прикладені до ротора електродвигуна зі сторони статора. Жорсткість K пружини вважаємо нелінійно залежною від зміщення: $K = K_1 q_1 + K_2 q_1^3$, де K_1 і K_2 – коефіцієнти жорсткості.

Використовуючи метод Лагранжа, отримаємо рівняння руху TORA [12]

$$\begin{gathered}(M+m)\ddot{q}_1 + mr\left(\ddot{q}_2\cos(q_2) - \dot{q}_2^2\sin(q_2)\right) + K_1 q_1 + K_2 q_1^3 = 0;\\ (I+mr^2)\ddot{q}_2 + mr\cos(q_2)\ddot{q}_1 + mgr\sin(q_2) = \Delta,\end{gathered} \tag{1}$$

де g – прискорення вільного падіння. Відзначимо, що в ряді робіт, напр. [16], рівняння руху TORA розглядались без доданку $mgr\sin(q_2)$, що відповідає знаходженню супутника на орбіті. Однак, в даній роботі рівняння руху розглядаються без цього припущення, що дозволяє використовувати отримані результати як для супутника, так і для моделі активного гасіння вібрацій, на чому було зроблено акцент у вступі.

Вважаємо, що параметри моделі задані неточно, тобто вони неперервно залежать від числового векторного параметра, який належить замкненій множині. Під «параметрами моделі» розуміються числові величини, від яких залежать коефіцієнти системи диференціальних рівнянь (1). В такому випадку систему диференціальних рівнянь (1) будемо розглядати у вигляді

$$\begin{gathered}\left(M(p)+m(p)\right)\ddot{q}_1 + m(p)r(p)\left(\ddot{q}_2\cos(q_2) - \dot{q}_2^2\sin(q_2)\right) + K_1(p)q_1 + K_2(p)q_1^3 = 0;\\ \left(I(p)+m(p)r^2(p)\right)\ddot{q}_2 + m(p)r(p)\cos(q_2)\ddot{q}_1 + m(p)gr(p)\sin(q_2) = \Delta,\end{gathered} \tag{2}$$

де $p \subseteq P \subset R^n$, $n \in N$.

Зауваження 1. Вважаємо, що область P містить тільки допустимі значення параметрів. Допустимими вважаємо ті значення параметрів, при яких не виникає протиріч із фізичною природою величин, що входять до складу моделі, тобто з невід’ємністю мас, довжин, осьових моментів інерції, коефіцієнтів жорсткості, тощо.

Нехай $\tau = t\sqrt{\dfrac{K_1(p)}{M(p)+m(p)}}$ – узагальнений час. Тоді, позначивши [8],

$$\tilde{q}_1 = q_1\sqrt{\frac{M(p)+m(p)}{I(p)+m(p)r^2(p)}};\ \nu = \frac{M(p)+m(p)}{K_1(p)\left(I(p)+m(p)r^2(p)\right)}\Delta;$$

$$\varepsilon(p) = \frac{m(p)r(p)}{\sqrt{\left(I(p)+m(p)r^2(p)\right)\left(M(p)+m(p)\right)}};\ \mu(p) = \frac{K_2(p)\left(I(p)+m(p)r^2(p)\right)}{K_1(p)\left(M(p)+m(p)\right)},$$

отримаємо безрозмірну систему диференціальних рівнянь (диференціювання ведеться за узагальненим часом τ), яка, очевидно, еквівалентна системі диференціальних рівнянь (2):

$$\begin{gathered}\ddot{\tilde{q}}_1 + \tilde{q}_1 + \mu(p)\tilde{q}_1^3 - \varepsilon(p)\left(\dot{q}_2^2\sin(q_2) - \ddot{q}_2\cos(q_2)\right) = 0;\\ \ddot{q}_2 + \varepsilon(p)\cos(q_2)\ddot{\tilde{q}}_1 + \frac{m(p)gr(p)\left(M(p)+m(p)\right)}{K_1(p)\left(I(p)+m(p)r^2(p)\right)}\sin(q_2) = \nu,\end{gathered} \tag{3}$$

Відзначимо, що далі, якщо не вказано іншого, $\left(\dot{}\right)$ означає диференціювання за узагальненим часом τ . Легко бачити, що $0<\varepsilon(p)<1$, $0<\mu(p)$ і вирази під коренями додатні для всіх $p\in P$.

Слідуючи [12], використаємо перетворення керування та координат за такими правилами:

$$\begin{gathered}\nu = \alpha(p,\, q_2)u + \beta(p,\, \tilde{q}_1,\, q_2,\, \dot{q}_2);\ \eta_1 = \tilde{q}_1 + \varepsilon(p)\sin(q_2);\\ \eta_2 = \dot{\tilde{q}}_1 + \varepsilon(p)\dot{q}_2\cos(q_2);\ \eta_3 = q_2;\ \eta_4 = \dot{q}_2,\end{gathered} \tag{4}$$

де

$$\alpha(p,q_2) = 1-\varepsilon^2(p)\cos^2(q_2) \neq 0;$$

$$\begin{gathered}\beta(p,\, \tilde{q}_1,\, q_2,\, \dot{q}_2) = \varepsilon^2(p)\dot{q}_2^2\sin(q_2)\cos(q_2) - \varepsilon(p)\cos(q_2)\tilde{q}_1 +\\ +\frac{m(p)gr(p)\left(M(p)+m(p)\right)}{K_1(p)\left(I(p)+m(p)r^2(p)\right)}\sin(q_2) - \varepsilon(p)\mu(p)\cos(q_2)\tilde{q}_1^3.\end{gathered}$$

Тоді система диференціальних рівнянь (3) буде мати наступний вигляд:

$$\dot{\eta}_1 = \eta_2;\ \dot{\eta}_2 = -\left(\eta_1 - \varepsilon(p)\sin(\eta_3)\right) - \mu(p)\left(\eta_1 - \varepsilon(p)\sin(\eta_3)\right)^3;\ \dot{\eta}_3 = \eta_4;\ \dot{\eta}_4 = u. \tag{5}$$

Зауваження 2. Відображення, яке задається перетворенням координат (4) є дифеоморфізмом. Це випливає з того, що воно, очевидно, бієктивне, гладке, так як частинні похідні відповідних функцій неперервні на всій області існування і якобіан цього відображення

$$\det\begin{pmatrix}1 & 0 & \varepsilon(p)\cos(q_2) & 0\\ 0 & 1 & -\varepsilon(p)\dot{q}_2\sin(q_2) & \varepsilon(p)\cos(q_2)\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = 1 \text{ для всіх } (q_2,\, \dot{q}_2,\, p)\in R^2\times P\,.$$

Так як в стані рівноваги TORA $q_1=0$, $q_2=0$ і швидкості $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ також рівні 0, то задача стабілізації цього стану рівноваги керуванням Δ еквівалентна задачі побудови керування u, яке забезпечить асимптотичну стійкість стану рівноваги $\eta_1=0$, $\eta_2=0$, $\eta_3=0$, $\eta_4=0$ системи диференціальних рівнянь (5).

3. Побудова керування.

Для побудови керування застосуємо метод ДКП, що був запропонований в [15]. Нехай $\tilde{\eta}_3$ – бажана траєкторія, до якої прямує змінна η_3 при керуванні u. Позначимо величину S_1 наступним чином:

$$S_1 = \eta_3 - \bar{\eta}_3, \tag{6}$$

де $\bar{\eta}_3$ – результат застосування фільтра до $\tilde{\eta}_3$, тобто

$$\tau_1 \dot{\bar{\eta}}_3 + \bar{\eta}_3 = \tilde{\eta}_3; \;\; \bar{\eta}_3(0) = \tilde{\eta}_3(0), \tag{7}$$

де τ_1 – довільна додатна як завгодно мала константа. Продиференціювавши (6) за узагальненим часом отримаємо, враховуючи (5), що

$$\dot{S}_1 = \dot{\eta}_3 - \dot{\bar{\eta}}_3 = \eta_4 - \dot{\bar{\eta}}_3,$$

звідки випливає, що якщо змінна η_4 асимптотично прямує до

$$\tilde{\eta}_4 = -c_1 S_1 + \dot{\bar{\eta}}_3, \tag{8}$$

де $c_1 > 0$ деяка константа, то величина S_1 асимптотично прямує до 0 незалежно від свого початкового значення.

Діючи аналогічно, позначимо величину S_2 наступним чином:

$$S_2 = \eta_4 - \bar{\eta}_4, \tag{9}$$

де $\bar{\eta}_4$ – результат застосування фільтра до $\tilde{\eta}_4$, тобто

$$\tau_2 \dot{\bar{\eta}}_4 + \bar{\eta}_4 = \tilde{\eta}_4; \;\; \bar{\eta}_4(0) = \tilde{\eta}_4(0), \tag{10}$$

де τ_2 – довільна додатна як завгодно мала константа. Продиференціювавши (9) за узагальненим часом отримаємо, враховуючи (5), що

$$\dot{S}_2 = \dot{\eta}_4 - \dot{\bar{\eta}}_4 = u - \dot{\bar{\eta}}_4.$$

Обравши керування

$$u = -c_2 S_2 + \dot{\bar{\eta}}_4, \tag{11}$$

де $c_2 > 0$ – деяка константа, забезпечимо асимптотичне прямування до нуля величини S_2 при довільному її початковому значенні.

Нехай

$$z_1 = \bar{\eta}_3 - \tilde{\eta}_3 \tag{12}$$

та

$$z_2 = \bar{\eta}_4 - \tilde{\eta}_4 \tag{13}$$

– похибки фільтрів. Тоді з (6) та (12) отримаємо, що

$$S_1 + z_1 = \eta_3 - \bar{\eta}_3 + \bar{\eta}_3 - \tilde{\eta}_3 = \eta_3 - \tilde{\eta}_3. \tag{14}$$

Аналогічно, з (9) та (13) отримаємо, що

$$S_2 + z_2 = \eta_4 - \bar{\eta}_4 + \bar{\eta}_4 - \tilde{\eta}_4 = \eta_4 - \tilde{\eta}_4. \tag{15}$$

Враховуючи співвідношення (7), (8), (12) та (14) і вибираючи $c_1 = 1/\tau_1$, перетворимо (15) наступним чином:

$$S_2 + z_2 = \eta_4 - \tilde{\eta}_4 = \eta_4 + c_1 S_1 - \dot{\bar{\eta}}_3 = \eta_4 + \frac{S_1}{\tau_1} + \frac{z_1}{\tau_1} = \eta_4 + \frac{1}{\tau_1}(\eta_3 - \tilde{\eta}_3). \tag{16}$$

Тоді, вибираючи $c_2 = 1/\tau_2$ і враховуючи (10), (13), (16), з (11) отримаємо вираз для керування:

$$u = -c_2 S_2 + \dot{\tilde{\eta}}_4 = -c_2 S_2 - \frac{z_2}{\tau_2} = -\frac{1}{\tau_2}(S_2 + z_2) = -\frac{\eta_4}{\tau_2} - \frac{\eta_3}{\tau_1\tau_2} + \frac{\tilde{\eta}_3}{\tau_1\tau_2}. \tag{17}$$

Таким чином, оскільки τ_1 і τ_2 можуть бути довільними додатними як завгодно малими константами, то система диференціальних рівнянь (5) при керуванні (17) є різнотемповою і має наступний вигляд:

$$\begin{gathered}\dot{\eta}_1 = \eta_2;\ \dot{\eta}_2 = -\left(\eta_1 - \varepsilon(p)\sin(\eta_3)\right) - \mu(p)\left(\eta_1 - \varepsilon(p)\sin(\eta_3)\right)^3;\\ \dot{\eta}_3 = \eta_4;\ \dot{\eta}_4 = -\frac{\eta_4}{\tau_2} - \frac{\eta_3}{\tau_1\tau_2} + \frac{\tilde{\eta}_3}{\tau_1\tau_2}.\end{gathered} \tag{18}$$

Нехай $\tilde{\eta}_3 = \tilde{\eta}_3(\eta_1, \eta_2, p) = -\arctan\left(\eta_2 \Big/ \sqrt{1 + \frac{\eta_1^2}{2} + \frac{\eta_2^2}{2} + \mu(p)\frac{\eta_1^4}{4}}\right)$. Тоді керування (17) має вигляд

$$u = -\frac{\eta_4}{\tau_2} - \frac{\eta_3}{\tau_1\tau_2} - \frac{1}{\tau_1\tau_2}\arctan\left(\eta_2 \Big/ \sqrt{1 + \frac{\eta_1^2}{2} + \frac{\eta_2^2}{2} + \mu(p)\frac{\eta_1^4}{4}}\right), \tag{19}$$

а система диференціальних рівнянь (18) –

$$\begin{gathered}\dot{\eta}_1 = \eta_2;\ \dot{\eta}_2 = -\left(\eta_1 - \varepsilon(p)\sin(\eta_3)\right) - \mu(p)\left(\eta_1 - \varepsilon(p)\sin(\eta_3)\right)^3;\\ \dot{\eta}_3 = \eta_4;\ \dot{\eta}_4 = -\frac{\eta_4}{\tau_2} - \frac{\eta_3}{\tau_1\tau_2} - \frac{1}{\tau_1\tau_2}\arctan\left(\eta_2 \Big/ \sqrt{1 + \frac{\eta_1^2}{2} + \frac{\eta_2^2}{2} + \mu(p)\frac{\eta_1^4}{4}}\right).\end{gathered} \tag{20}$$

Зауважимо, що при іншому виборі $\tilde{\eta}_3$ отримаємо інший вигляд керування (17).

Заміною змінних

$$x = \eta_1;\ y = \eta_2;\ \varphi = \eta_3 - \tilde{\eta}_3(\eta_1, \eta_2, p);\ \psi = \eta_4 + \frac{\eta_3 - \tilde{\eta}_3(\eta_1, \eta_2, p)}{\tau_1} \tag{21}$$

система диференціальних рівнянь (20) може бути представлена у вигляді

$$\begin{gathered}\dot{x} = y;\ \dot{y} = -\left(x - \varepsilon(p)\sin(\varphi + \tilde{\eta}_3(x, y, p))\right) - \mu(p)\left(x - \varepsilon(p)\sin(\varphi + \tilde{\eta}_3(x, y, p))\right)^3;\\ \dot{\varphi} = -\frac{\varphi}{\tau_1} + \psi - \dot{\tilde{\eta}}_3(x, y, p);\ \dot{\psi} = -\left(\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1}\right)\psi - \frac{\varphi}{\tau_1^2} - \frac{\dot{\tilde{\eta}}_3(x, y, p)}{\tau_1},\end{gathered} \tag{22}$$

де

$$\dot{\tilde{\eta}}_3(x, y, p) = \frac{1 + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \mu(p)\frac{x^4}{4}}{1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3y^2}{2} + \mu(p)\frac{x^4}{4}}\left[\frac{\left(x - \varepsilon(p)\sin(\varphi + \tilde{\eta}_3)\right) + \mu(p)\left(x - \varepsilon(p)\sin(\varphi + \tilde{\eta}_3)\right)^3}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \mu(p)\frac{x^4}{4}}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon(p)y^2\sin(\varphi + \tilde{\eta}_3)}{\sqrt{\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \mu(p)\frac{x^4}{4}\right)^3}}\left(1 + \mu(p)\left(3x^2 - 3\varepsilon(p)x\sin(\varphi + \tilde{\eta}_3) + \varepsilon^2(p)\sin^2(\varphi + \tilde{\eta}_3)\right)\right)\right)$$

Зауваження 3. Відображення, яке задається перетворенням координат (21), є дифеоморфізмом. Це випливає з того, що воно, очевидно, бієктивне, гладке, так як частинні похідні відповідних функцій неперервні в усій області існування, зокрема

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\eta_1}=-\frac{\eta_1\eta_2\left(1+\mu(p)\eta_1^2\right)}{2\left(1+\frac{\eta_1^2}{2}+3\frac{\eta_2^2}{2}+\mu(p)\frac{\eta_1^4}{4}\right)\sqrt{1+\frac{\eta_1^2}{2}+\frac{\eta_2^2}{2}+\mu(p)\frac{\eta_1^4}{4}}};\ \frac{\partial\psi}{\partial\eta_1}=\frac{1}{\tau_1}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta_1};$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\eta_2}=-\frac{1+\frac{\eta_1^2}{2}+\mu(p)\frac{\eta_1^4}{4}}{\left(1+\frac{\eta_1^2}{2}+3\frac{\eta_2^2}{2}+\mu(p)\frac{\eta_1^4}{4}\right)\sqrt{1+\frac{\eta_1^2}{2}+\frac{\eta_2^2}{2}+\mu(p)\frac{\eta_1^4}{4}}},\ \frac{\partial\psi}{\partial\eta_2}=\frac{1}{\tau_1}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta_2}$$

неперервні функції для всіх $(\eta_1,\,\eta_2,\,p)\in R^2\times P$ і якобіан цього відображення

$$\det\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\\frac{\partial\varphi}{\partial\eta_1}&\frac{\partial\varphi}{\partial\eta_2}&1&0\\\frac{\partial\psi}{\partial\eta_2}&\frac{\partial\psi}{\partial\eta_2}&\frac{1}{\tau_1}&1\end{pmatrix}=1\ \text{ для всіх }(\eta_1,\eta_2,p)\in R^2\times P.$$

4. Дослідження стійкості.

Розглянемо скалярну функцію $V(x,\,y,\,\varphi,\,\psi,\,p):\ R^4\times R^n\to R$, $V(0,\,0,\,0,\,0,\,p)=0$ наступного вигляду:

$$V(x,\,y,\,\varphi,\,\psi,\,p)=\ln\left(V_1(x,\,y,\,p)\right)+\frac{\varphi^2}{2}+\frac{\tau_1^2\psi^2}{2},\tag{23}$$

де

$$V_1(x,y,p)=1+\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\mu(p)\frac{x^4}{4}+\frac{A(p)xy}{\sqrt{V_2(x,y,p)}};$$

$$A(p)=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon(p)}{1+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\varepsilon(p)\left(1+\mu(p)\varepsilon^2(p)+2\sqrt{3\mu(p)}+\sqrt{6}\varepsilon(p)\mu(p)\right)+\varepsilon^2(p)\left(1+\mu(p)\varepsilon^2(p)\right)^2};$$

$$V_2(x,\,y,\,p)=1+\frac{3x^2}{2}+\frac{3y^2}{2}+3\mu(p)\frac{x^4}{4}.$$

Легко бачити, що для всіх p з P має місце оцінка $0<A(p)<1/4$, тому $V_1(x,\,y,\,p)\ge 1$ для всіх $(x,y,p)\in R^2\times P$, причому рівність досягається лише при $x=y=0$. Отже, функція (23) приймає невід'ємні значення в усіх точках простору $R^4\times P$, причому рівність нулю досягається лише при $x=y=\varphi=\psi=0$, тобто функція (23) додатно визначена.

Знайдемо похідну функції (23) за узагальненим часом τ в силу системи диференціальних рівнянь (22).

$$dV(x,\,y,\,\varphi,\,\psi,\,p)/d\tau\big|_{(22)}=$$

$$
=\frac{x\dot{x}+y\dot{y}+\mu(p)x^3\dot{x}+\dfrac{A(p)(\dot{x}y+x\dot{y})}{\sqrt{V_2(x,y,p)}}-\dfrac{3}{2}A(p)xy\dfrac{x\dot{x}+y\dot{y}+\mu(p)x^3\dot{x}}{\sqrt{(V_2(x,y,p))^3}}}{V_1(x,y,p)}+\varphi\dot{\varphi}+\tau_1^2\psi\dot{\psi}=
$$

$$
=\frac{1}{V_1(x,y,p)}\Big[\varepsilon(p)y\sin(\varphi+\tilde{\eta}_3)+\mu(p)\varepsilon(p)y\sin(\varphi+\tilde{\eta}_3)\Big(3x^2-3\varepsilon(p)x\sin(\varphi+\tilde{\eta}_3)+
$$

$$
+\varepsilon^2(p)\sin^2(\varphi+\tilde{\eta}_3)\Big)+\frac{A(p)y^2}{\sqrt{V_2(x,\ y,\ p)}}-\frac{A(p)x^2}{\sqrt{V_2(x,\ y,\ p)}}-
$$

$$
-\frac{A(p)\varepsilon(p)\sin(\varphi+\tilde{\eta}_3)x}{\sqrt{V_2(x,\ y,\ p)}}+\frac{\mu(p)A(p)\varepsilon^3(p)x\sin^3(\varphi+\tilde{\eta}_3)}{\sqrt{V_2(x,\ y,\ p)}}-
$$

$$
-\frac{A(p)\mu(p)x^2\left(x^2-3\varepsilon(p)x\sin(\varphi+\tilde{\eta}_3)+3\varepsilon^2(p)\sin^2(\varphi+\tilde{\eta}_3)\right)}{\sqrt{V_2(x,\ y,\ p)}}-
$$

$$
-\frac{3}{2}\frac{\varepsilon(p)A(p)xy^2}{V_2(x,\ y,\ p)}\left(\frac{1+\mu(p)\Big(3x^2-3\varepsilon(p)x\sin(\varphi+\tilde{\eta}_3)+\varepsilon^2(p)\sin^2(\varphi+\tilde{\eta}_3)\Big)}{\sqrt{V_2(x,\ y,\ p)}}\right)\sin(\varphi+\tilde{\eta}_3)\Bigg]-
$$

$$
-\frac{\varphi^2}{\tau_1}-\frac{V_3(x,\ y,\ p)}{V_3(x,\ y,\ p)+y^2}\left[\frac{x\varphi-\varepsilon(p)\varphi\sin(\varphi+\tilde{\eta}_3)}{\sqrt{V_3(x,\ y,\ p)}}+\frac{\varepsilon(p)y^2\varphi\sin(\varphi+\tilde{\eta}_3)}{2\sqrt{(V_3(x,\ y,\ p))^3}}+\right.
$$

$$
+\frac{\mu(p)x\varphi\Big(x^2-3x\varepsilon(p)\sin(\varphi+\tilde{\eta}_3)+3\varepsilon^2(p)\sin^2(\varphi+\tilde{\eta}_3)\Big)}{\sqrt{V_3(x,\ y,\ p)}}-\frac{\mu(p)\varepsilon^3(p)\sin^3(\varphi+\tilde{\eta}_3)\varphi}{\sqrt{V_3(x,\ y,\ p)}}+
$$

$$
\left.+\frac{\mu(p)\varepsilon(p)y^2\varphi\sin(\varphi+\tilde{\eta}_3)}{2V_3(x,\ y,\ p)}\left(\frac{3x^2-3\varepsilon(p)x\sin(\varphi+\tilde{\eta}_3)+\varepsilon^2(p)\sin^2(\varphi+\tilde{\eta}_3)}{\sqrt{V_3(x,\ y,\ p)}}\right)\right]- \qquad (24)
$$

$$
-\tau_1^2\left(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1}\right)\psi^2-\frac{\tau_1V_3(x,\ y,\ p)}{V_3(x,\ y,\ p)+y^2}\left[\frac{x\psi-\varepsilon(p)\psi\sin(\varphi+\tilde{\eta}_3)}{\sqrt{V_3(x,\ y,\ p)}}+\frac{\varepsilon(p)y^2\psi\sin(\varphi+\tilde{\eta}_3)}{2\sqrt{(V_3(x,\ y,\ p))^3}}+\right.
$$

$$
+\frac{\mu(p)x\psi\Big(x^2-3x\varepsilon(p)\sin(\varphi+\tilde{\eta}_3)+3\varepsilon^2(p)\sin^2(\varphi+\tilde{\eta}_3)\Big)}{\sqrt{V_3(x,\ y,\ p)}}-\frac{\mu(p)\varepsilon^3(p)\sin^3(\varphi+\tilde{\eta}_3)\psi}{\sqrt{V_3(x,\ y,\ p)}}+
$$

$$
\left.+\frac{\mu(p)\varepsilon(p)y^2\psi\sin(\varphi+\tilde{\eta}_3)}{2V_3(x,\ y,\ p)}\left(\frac{3x^2-3\varepsilon(p)x\sin(\varphi+\tilde{\eta}_3)+\varepsilon^2(p)\sin^2(\varphi+\tilde{\eta}_3)}{\sqrt{V_3(x,\ y,\ p)}}\right)\right],
$$

де позначено $V_3(x,y,p)=1+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}+\mu(p)\dfrac{x^4}{4}$.

Враховуючи, що згідно формули Лагранжа про скінченні прирости

$$
\sin(\varphi+\tilde{\eta}_3)=\sin(\tilde{\eta}_3)+\cos(\hat{\varphi}+\tilde{\eta}_3)\varphi=\frac{-y}{\sqrt{V_3(x,\ y,\ p)+y^2}}+\cos(\hat{\varphi}+\tilde{\eta}_3)\varphi,
$$

де $\hat{\varphi}$ – деяка точка з R, з (24) випливає, що

$$\frac{dV(x,\,y,\,\varphi,\,\psi,\,p)}{d\tau}\Big|_{(22)}=\mu(p)\varepsilon(p)\left(\frac{-y^2}{\sqrt{V_1(x,\,y,\,p)}\sqrt{V_3(x,\,y,\,p)+y^2}}+\frac{\varphi y\cos(\hat{\varphi}+\tilde{\eta}_3)}{\sqrt{V_1(x,\,y,\,p)}}\right)\times$$

$$\times\frac{\left(3x^2-3\varepsilon(p)x\sin(\varphi+\tilde{\eta}_3)+\varepsilon^2(p)\sin^2(\varphi+\tilde{\eta}_3)\right)}{\sqrt{V_1(x,\,y,\,p)}}+\frac{1}{V_1(x,\,y,\,p)}\left[\frac{-\varepsilon(p)y^2}{\sqrt{V_3(x,\,y,\,p)+y^2}}+\right.$$

$$+\varepsilon(p)y\varphi\cos(\hat{\varphi}+\tilde{\eta}_3)+\frac{A(p)y^2}{\sqrt{V_2(x,\,y,\,p)}}-\frac{A(p)x^2}{\sqrt{V_2(x,\,y,\,p)}}-\frac{A(p)\varepsilon(p)xy}{\sqrt{V_2(x,\,y,\,p)}\sqrt{V_3(x,\,y,\,p)+y^2}}+$$

$$+\frac{A(p)\varepsilon(p)x\varphi\cos(\hat{\varphi}+\tilde{\eta}_3)}{\sqrt{V_2(x,\,y,\,p)}}-\frac{A(p)\mu(p)x^2\left(x^2-3\varepsilon(p)x\sin(\varphi+\tilde{\eta}_3)+3\varepsilon^2(p)\sin^2(\varphi+\tilde{\eta}_3)\right)}{\sqrt{V_2(x,\,y,\,p)}}-$$

$$-\frac{A(p)\mu(p)\varepsilon^3(p)xy\sin^2(\varphi+\tilde{\eta}_3)}{\sqrt{V_2(x,\,y,\,p)}\sqrt{V_3(x,\,y,\,p)+y^2}}+\frac{A(p)\mu(p)\varepsilon^3(p)x\varphi\cos(\hat{\varphi}+\tilde{\eta}_3)\sin^2(\varphi+\tilde{\eta}_3)}{\sqrt{V_2(x,\,y,\,p)}}-$$

$$\left.-\frac{3\varepsilon(p)A(p)xy^2\sin(\varphi+\tilde{\eta}_3)}{2V_2(x,\,y,\,p)}\left(\frac{1+\mu(p)\left(3x^2-3\varepsilon(p)x\sin(\varphi+\tilde{\eta}_3)+\varepsilon^2(p)\sin^2(\varphi+\tilde{\eta}_3)\right)}{\sqrt{V_2(x,\,y,\,p)}}\right)\right]-$$

$$-\frac{\varphi^2}{\tau_1}-\tau_1^2\left(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1}\right)\psi^2-$$

$$-\frac{V_3(x,\,y,\,p)}{V_3(x,\,y,\,p)+y^2}\left[\frac{x\varphi}{\sqrt{V_3(x,\,y,\,p)}}+\frac{\varepsilon(p)\varphi y}{\sqrt{V_3(x,\,y,\,p)}\sqrt{V_3(x,\,y,\,p)+y^2}}-\frac{\varepsilon(p)\varphi^2\cos(\hat{\varphi}+\tilde{\eta}_3)}{\sqrt{V_3(x,\,y,\,p)}}+\right.$$

$$+\frac{\mu(p)x\varphi\left(x^2-3x\varepsilon(p)\sin(\varphi+\tilde{\eta}_3)+3\varepsilon^2(p)\sin^2(\varphi+\tilde{\eta}_3)\right)}{\sqrt{V_3(x,\,y,\,p)}}+\frac{\mu(p)\varepsilon^3(p)y\varphi\sin^2(\varphi+\tilde{\eta}_3)}{\sqrt{V_3(x,\,y,\,p)}\sqrt{V_3(x,\,y,\,p)+y^2}}-$$

$$-\frac{\mu(p)\varepsilon^3(p)\varphi^2\cos(\hat{\varphi}+\tilde{\eta}_3)\sin^2(\varphi+\tilde{\eta}_3)}{\sqrt{V_3(x,\,y,\,p)}}+\frac{\varepsilon(p)y^2\varphi\sin(\varphi+\tilde{\eta}_3)}{2\sqrt{(V_3(x,\,y,\,p))^3}}+$$

$$+\frac{\mu(p)\varepsilon(p)y^2\sin(\varphi+\tilde{\eta}_3)}{2V_3(x,\,y,\,p)}\left(\frac{3x^2\varphi}{\sqrt{V_3(x,\,y,\,p)}}-\frac{3\varepsilon(p)x\varphi\sin(\varphi+\tilde{\eta}_3)}{\sqrt{V_3(x,\,y,\,p)}}-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\varepsilon^2(p)y\varphi\sin(\varphi+\tilde{\eta}_3)}{\sqrt{V_3(x,\,y,\,p)}\sqrt{V_3(x,\,y,\,p)+y^2}}+\frac{\varepsilon^2(p)\varphi^2\sin(\varphi+\tilde{\eta}_3)\cos(\hat{\varphi}+\tilde{\eta}_3)}{\sqrt{V_3(x,\,y,\,p)}}\right)\right]-$$

$$-\frac{\tau_1V_3(x,\,y,\,p)}{V_3(x,\,y,\,p)+y^2}\left[\frac{x\psi}{\sqrt{V_3(x,\,y,\,p)}}+\frac{\varepsilon(p)\psi y}{\sqrt{V_3(x,\,y,\,p)}\sqrt{V_3(x,\,y,\,p)+y^2}}-\frac{\varepsilon(p)\varphi\psi\cos(\hat{\varphi}+\tilde{\eta}_3)}{\sqrt{V_3(x,\,y,\,p)}}+\right.$$

$$+\frac{\mu(p)x\psi(x^2-3x\varepsilon(p)\sin(\varphi+\tilde\eta_3)+3\varepsilon^2(p)\sin^2(\varphi+\tilde\eta_3))}{\sqrt{V_3(x,\ y,\ p)}}+\frac{\mu(p)\varepsilon^3(p)y\psi\sin^2(\varphi+\tilde\eta_3)}{\sqrt{V_3(x,\ y,\ p)}\sqrt{V_3(x,\ y,\ p)+y^2}}-$$

$$-\frac{\mu(p)\varepsilon^3(p)\varphi\psi\cos(\hat\varphi+\tilde\eta_3)\sin^2(\varphi+\tilde\eta_3)}{\sqrt{V_3(x,\ y,\ p)}}+\frac{\varepsilon(p)y^2\psi\sin(\varphi+\tilde\eta_3)}{2\sqrt{(V_3(x,y,\ p))^3}}+ \tag{25}$$

$$+\frac{\mu(p)\varepsilon(p)y^2\sin(\varphi+\tilde\eta_3)}{2V_3(x,\ y,\ p)}\left(\frac{3x^2\psi}{\sqrt{V_3(x,\ y,\ p)}}-\frac{3\varepsilon(p)x\psi\sin(\varphi+\tilde\eta_3)}{\sqrt{V_3(x,\ y,\ p)}}-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\varepsilon^2(p)y\psi\sin(\varphi+\tilde\eta_3)}{\sqrt{V_3(x,\ y,\ p)}\sqrt{V_3(x,\ y,\ p)+y^2}}+\frac{\varepsilon^2(p)\varphi\psi\sin(\varphi+\tilde\eta_3)\cos(\hat\varphi+\tilde\eta_3)}{\sqrt{V_3(x,\ y,\ p)}}\right)\right].$$

Так як

$$3x^2-3x\varepsilon(p)\sin(\varphi+\tilde\eta_3)+\varepsilon^2(p)\sin^2(\varphi+\tilde\eta_3)\ge 0 \text{ для всіх } (x,\ y,\varphi,\ p)\in R^3\times P\ ;$$

$$x^2-3x\varepsilon(p)\sin(\varphi+\tilde\eta_3)+3\varepsilon^2(p)\sin^2(\varphi+\tilde\eta_3)\ge 0 \text{ для всіх } (x,\ y,\ \varphi,\ p)\in R^3\times P\ ;$$

$$|\cos(\hat\varphi+\tilde\eta_3)|\le 1 \text{ для всіх } (x,\ y,\ \hat\varphi,\ p)\in R^3\times P\ ;$$

$$|\sin(\varphi+\tilde\eta_3)|\le 1 \text{ для всіх } (x,\ y,\ \varphi,p)\in R^3\times P\ ;$$

$$1\big/\sqrt{V_2(x,\ y,\ p)}\le 1\big/\sqrt{V_3(x,\ y,\ p)+y^2}\le 1\big/\sqrt{V_3(x,\ y,\ p)}\le 1 \text{ для всіх } (x,\ y,\ p)\in R^2\times P;$$

$$x\big/\sqrt{V_2(x,y,p)}\le\sqrt{2/3} \text{ для всіх } (x,y,p)\in R^2\times P\ ;$$

$$1+\mu(p)\left(3x^2-3\varepsilon(p)x\sin(\varphi+\tilde\eta_3)+\varepsilon^2(p)\sin^2(\varphi+\tilde\eta_3)\right)\big/\sqrt{V_2(x,\ y,\ p)}\le$$
$$\le 1+\mu(p)\varepsilon^2+2\sqrt{3\mu(p)}+\sqrt{6}\varepsilon(p)\mu(p) \text{ для всіх } (x,\ y,\ \varphi,\ p)\in R^3\times P;$$

$$x^2-3x\varepsilon(p)\sin(\varphi+\tilde\eta_3)+3\varepsilon^2(p)\sin^2(\varphi+\tilde\eta_3)\big/\sqrt{V_3(x,\ y,\ p)}\le$$

$$\le 2\big/\sqrt{\mu(p)}+3\sqrt{2}\varepsilon(p)+3\varepsilon^2(p) \text{ для всіх } (x,y,p)\in R^2\times P\ ;$$

$$y\big/\sqrt{V_3(x,\ y,\ p)}\le\sqrt{2} \text{ для всіх } (x,\ y,\ p)\in R^2\times P\ ;$$

$$x\big/\sqrt{V_3(x,\ y,\ p)}\le\sqrt{2} \text{ для всіх } (x,\ y,\ p)\in R^2\times P\ ;$$

$$V_3(x,\ y,\ p)\big/\sqrt{V_3(x,\ y,\ p)+y^2}\le\sqrt{2} \text{ для всіх } (x,\ y,\ p)\in R^2\times P\ ;$$

$$\frac{y^2}{V_3(x,y,p)}\le 2 \text{ для всіх } (x,y,p)\in R^2\times P\ ,$$

то з (25) отримаємо наступну оцінку:

$$\left.\frac{dV(x,\,y,\,\varphi,\,\psi,\,p)}{d\tau}\right|_{(22)} \le \mu(p)\varepsilon(p)\left(\frac{-y^2}{\sqrt{V_1(x,y,p)}\sqrt{V_3(x,y,p)+y^2}}+\frac{|\varphi\|y|}{\sqrt{V_1(x,y,p)}}\right)\times$$

$$\times\frac{\left(3x^2-3\varepsilon(p)x\sin(\varphi+\tilde{\eta}_3)+\varepsilon^2(p)\sin^2(\varphi+\tilde{\eta}_3)\right)}{\sqrt{V_1(x,\,y,\,p)}}+\frac{1}{V_1(x,\,y,\,p)}\left[-\frac{A(p)x^2}{\sqrt{V_2(x,\,y,\,p)}}+\right.$$

$$+\varepsilon|\,y\|\varphi|+\frac{\left(1+\mu(p)\varepsilon^2(p)\right)A(p)\varepsilon(p)|\,x\|\,y\,|}{\sqrt{V_2(x,\,y,\,p)}}+\frac{\left(1+\mu(p)\varepsilon^2(p)\right)A(p)\varepsilon(p)|\,x\|\varphi|}{\sqrt{V_2(x,\,y,\,p)}}-$$

$$\left.-\frac{y^2}{\sqrt{V_2(x,\,y,\,p)}}\left(\varepsilon(p)-A(p)-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\varepsilon(p)A(p)\left(1+\mu(p)\varepsilon^2(p)+2\sqrt{3\mu(p)}+\sqrt{6}\varepsilon(p)\mu(p)\right)\right)\right]-$$

$$-\tau_1^2\left(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1}\right)\psi^2+\left(1+\mu(p)\varepsilon(p)\left(3\sqrt{2}+3\varepsilon(p)\right)+\mu(p)\left(\frac{2}{\sqrt{\mu(p)}}+3\sqrt{2}\varepsilon(p)+3\varepsilon^2(p)\right)\right)|\,x\|\varphi|+$$

$$+\left(2\mu(p)\varepsilon^3(p)+\varepsilon+\frac{\varepsilon(p)}{\sqrt{2}}\right)\frac{|\,y\|\varphi|}{V_3(x,\,y,\,p)}+\left(-\frac{1}{\tau_1}+\varepsilon(p)+2\mu(p)\varepsilon^3(p)\right)\varphi^2+ \qquad (26)$$

$$+\tau_1\left(1+\mu(p)\varepsilon(p)\left(3\sqrt{2}+3\varepsilon(p)\right)+\mu(p)\left(\frac{2}{\sqrt{\mu(p)}}+3\sqrt{2}\varepsilon(p)+3\varepsilon^2(p)\right)\right)|\,x\|\psi|+$$

$$+\tau_1\left(\varepsilon+2\mu(p)\varepsilon^3(p)+\frac{\varepsilon(p)}{\sqrt{2}}\right)\frac{|\,y\|\psi|}{V_3(x,y,p)}+\tau_1\left(\varepsilon(p)+2\mu(p)\varepsilon^3(p)\right)|\varphi\|\psi|$$

для всіх $(x,\,y,\,\varphi,\,\psi,\,p)\in R^4\times P$.

Скориставшись нерівністю $-az^2+bz\le-\frac{a}{2}z^2+\frac{b^2}{2a}$, яка вірна для всіх $a,\,b,\,z\in R$, $a>0$ та співвідношеннями

$$\frac{3x^2-3x\varepsilon(p)\sin(\varphi+\tilde{\eta}_3)+\varepsilon^2(p)\sin^2(\varphi+\tilde{\eta}_3)}{\sqrt{V_1(x,\,y,\,p)}}\le\frac{6}{\sqrt{\mu(p)}}+3\sqrt{2}\varepsilon(p)+\varepsilon^2(p);$$

$$\frac{\sqrt{V_3(x,y,p)+y^2}}{\sqrt{V_1(x,y,p)}}\le\sqrt{3};\quad \frac{\sqrt{V_2(x,y,p)}}{V_1(x,y,p)}\le\sqrt{\frac{2+\sqrt{1+A^2(p)}}{1-A^2(p)/3}};$$

$$\frac{V_1(x,\,y,\,p)}{V_3(x,\,y,\,p)}\le 1+\frac{A(p)}{\sqrt{3}};\quad \frac{\sqrt{V_2(x,\,y,\,p)}}{V_3(x,\,y,\,p)}\le\sqrt{3},$$

які справджуються для всіх $(x,y,p)\in R^2\times P$, із (26) отримаємо наступну оцінку:

$$\left.\frac{dV(x,\,y,\,\varphi,\,\psi,\,p)}{d\tau}\right|_{(22)} \le \frac{-A(p)x^2}{16V_1(x,\,y,\,p)\sqrt{V_2(x,\,y,\,p)}}-\frac{\varepsilon(p)y^2}{16V_1(x,\,y,\,p)\sqrt{V_2(x,\,y,\,p)}}+$$

$$+\varphi^2\left[\frac{2V_1(x,y,p)\sqrt{V_2(x,y,p)}}{A(p)}\times\right.$$

$$\times\left(1+\mu(p)\left(\frac{2}{\sqrt{\mu(p)}}+3\sqrt{2}\varepsilon(p)+3\varepsilon^2(p)\right)+\mu(p)\varepsilon(p)\left(3\sqrt{2}+3\varepsilon(p)\right)\right)^2+$$

$$\left.+2\sqrt{3}\varepsilon(p)\left(1+\frac{A(p)}{\sqrt{3}}\right)\left(1+2\mu(p)\varepsilon^2(p)+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tau_1}-B(p)\right)\right]+ \tag{27}$$

$$+\tau_1^2\psi^2\left[\frac{4V_1(x,\,y,\,p)\sqrt{V_2(x,\,y,\,p)}}{A(p)}\times\right.$$

$$\times\left(1+\mu(p)\left(\frac{2}{\sqrt{\mu(p)}}+3\sqrt{2}\varepsilon(p)+3\varepsilon^2(p)\right)+\mu(p)\varepsilon(p)\left(3\sqrt{2}+3\varepsilon(p)\right)\right)^2+$$

$$\left.+4\sqrt{3}\varepsilon(p)\left(1+\frac{A(p)}{\sqrt{3}}\right)\left(1+2\mu(p)\varepsilon^2(p)+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{\left(\varepsilon(p)+2\mu(p)\varepsilon^3(p)\right)^2}{2\left(1/\tau_1-B(p)\right)}+\frac{1}{\tau_1}-\frac{1}{\tau_2}\right]$$

для всіх $(x,y,\varphi,\psi,p)\in R^4\times P$, де

$$B(p)=\varepsilon(p)+2\mu(p)\varepsilon^3(p)+A(p)\varepsilon^2(p)\left(1+\mu(p)\varepsilon^2(p)\right)^2+$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{2}\mu(p)\varepsilon(p)\left(\frac{6}{\sqrt{\mu(p)}}+3\sqrt{2}\varepsilon(p)+\varepsilon^2(p)\right)+$$

$$+\frac{\varepsilon^2(p)\sqrt{2+\sqrt{1+A^2(p)}\Big/1-A^2(p)/3}}{2\left(\varepsilon(p)-A(p)-\sqrt{\dfrac{3}{2}}\varepsilon(p)A(p)\left(1+\mu(p)\varepsilon^2(p)+2\sqrt{3\mu(p)}+\sqrt{6}\varepsilon(p)\mu(p)\right)\right)}$$

і величина $\tau_1>0$ вважається такою, що $1/\tau_1-B(p)>0$ для всіх p з P. Крім того, згідно вибору величини $A(p)$, очевидно, що для всіх p з P

$$\varepsilon(p)-A(p)-\sqrt{\frac{3}{2}}\varepsilon(p)A(p)\left(1+\mu(p)\varepsilon^2(p)+2\sqrt{3\mu(p)}+\sqrt{6}\varepsilon(p)\mu(p)\right)>0\,.$$

Сформулюємо і доведемо теорему, яка містить основний результат даної роботи.

Теорема. Для всіх значень параметра p з області P існують такі значення констант фільтрів $\tau_1^*>0$, $\tau_2^*>0$, що для всіх $\tau_1<\tau_1^*$, $\tau_2<\tau_2^*$ нульовий стан рівноваги системи диференціальних рівнянь (22) асимптотично стійкий для всіх початкових значень змінних з області

$$\Omega=\Big\{(x,\,y,\,\varphi,\,\psi)\in R^4\;|\;V(x,\,y,\,\varphi,\,\psi,p)\le$$

$$\le\ln\left(\sqrt{\left(1-A^2(p)\right)/3\Big/\left(2+\sqrt{1+A^2(p)}\right)}\min\{M_1(\tau_1,p),M_2(\tau_1,\tau_2,p)\}\right)^{2/3}\Bigg\},$$

де

$$V(x,\ y,\ \varphi,\ \psi,\ p)=\ln\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\mu(p)\frac{x^4}{4}+\frac{A(p)xy}{\sqrt{V_2(x,\ y,\ p)}}\right)+\frac{\varphi^2}{2}+\frac{\tau_1^2\psi^2}{2};$$

$$V_2(x,y,p)=1+\frac{3x^2}{2}+\frac{3y^2}{2}+3\mu(p)\frac{x^4}{4};$$

$$A(p)=\frac{\varepsilon(p)}{2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\varepsilon(p)\left(1+\mu(p)\varepsilon^2(p)+2\sqrt{3\mu(p)}+\sqrt{6}\varepsilon(p)\mu(p)\right)+\varepsilon^2(p)\left(1+\mu(p)\varepsilon^2(p)\right)^2\right)};$$

$$M_1(\tau_1,p)=\frac{A(p)}{2\left(1+\mu(p)\left(\frac{2}{\sqrt{\mu(p)}}+3\sqrt{2}\varepsilon(p)+3\varepsilon^2(p)\right)+\mu(p)\varepsilon(p)\left(3\sqrt{2}+3\varepsilon(p)\right)\right)^2}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tau_1}-B(p)\right)-2\sqrt{3}\varepsilon(p)\left(1+\frac{A(p)}{\sqrt{3}}\right)\left(1+2\mu(p)\varepsilon^2(p)+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right];$$

$$M_2(\tau_1,\tau_2,p)=\frac{A(p)}{4\left(1+\mu(p)\left(\frac{2}{\sqrt{\mu(p)}}+3\sqrt{2}\varepsilon(p)+3\varepsilon^2(p)\right)+\mu(p)\varepsilon(p)\left(3\sqrt{2}+3\varepsilon(p)\right)\right)^2}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1}-4\sqrt{3}\varepsilon(p)\left(1+\frac{A(p)}{\sqrt{3}}\right)\left(1+2\mu(p)\varepsilon^2(p)+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\frac{\left(\varepsilon(p)+2\mu(p)\varepsilon^3(p)\right)^2}{2\left(1/\tau_1-B(p)\right)}\right];$$

$$B(p)=\varepsilon(p)+2\mu(p)\varepsilon^3(p)+$$

$$+A(p)\varepsilon^2(p)\left(1+\mu(p)\varepsilon^2(p)\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{2}\mu(p)\varepsilon(p)\left(\frac{6}{\sqrt{\mu(p)}}+3\sqrt{2}\varepsilon(p)+\varepsilon^2(p)\right)+$$

$$+\frac{\varepsilon^2(p)\sqrt{\left(2+\sqrt{1+A^2(p)}\right)\Big/\left(1-A^2(p)/3\right)}}{2\left(\varepsilon(p)-A(p)-\sqrt{\frac{3}{2}}\varepsilon(p)A(p)\left(1+\mu(p)\varepsilon^2(p)+2\sqrt{3\mu(p)}+\sqrt{6}\varepsilon(p)\mu(p)\right)\right)}.$$

Доведення. Виберемо довільне значення параметра p^* з області P і величину $\tau_1^*>0$ таким чином, щоб виконувалось співвідношення

$$M_1(\tau_1^*,p^*)=\sqrt{\left(2+\sqrt{1+A^2(p^*)}\right)\Big/\left(1-A^2(p^*)/3\right)}.$$

Тоді для довільного значення константи фільтра $0<\hat{\tau}_1<\tau_1^*$ величину $\tau_2^*>0$ виберемо таким чином, щоб виконувалось співвідношення

$$M_2(\hat{\tau}_1,\tau_2^*,p^*)=\sqrt{\left(2+\sqrt{1+A^2(p^*)}\right)\Big/\left(1-A^2(p^*)/3\right)}.$$

Вибравши довільне значення константи фільтра $0 < \hat{\tau}_2 < \tau_2^*$, розглянемо систему диференціальних рівнянь (22) при значенні параметра p^* та значеннях констант фільтрів $\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2$.

Функція $V(x, y, \varphi, \psi, p)$, як було показано вище, додатно визначена для всіх p з області P на R^4, тобто додатно визначеною на R^4 є функція $V(x, y, \varphi, \psi, p^*)$. Легко бачити, що $1/\hat{\tau}_1 - B(p^*) > 0$, тому для похідної функції $V(x, y, \varphi, \psi, p^*)$ по узагальненому часу τ в силу системи диференціальних рівнянь (22) виконується оцінка (27), з якої випливає, що вказана похідна від'ємна в області

$$\Omega_1 = \left\{(x, y, \varphi, \psi) \in R^4 \mid V_1(x, y, p^*)\sqrt{V_2(x, y, p^*)} \le \min\{M_1(\hat{\tau}_1, p^*), M_2(\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, p^*)\}\right\},$$

де, очевидно,

$$M_1(\hat{\tau}_1, p^*) > M_1(\tau_1^*, p^*) > 0 \text{ і } M_2(\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, p^*) > M_2(\hat{\tau}_1, \tau_2^*, p^*) > 0.$$

Так як

$$\sqrt{V_2(x, y, p^*)\big/V_1(x, y, p^*)} \le \sqrt{\left(2 + \sqrt{1 + A^2(p^*)}\right)\Big/\left(1 - A^2(p^*)/3\right)} \text{ для всіх } (x, y) \in R^2,$$

то в області Ω_1 повністю міститься область

$$\Omega_2 = \Bigg\{(x, y, \varphi, \psi) \in R^4 \mid V_1(x, y, p^*) \le$$

$$\le \left(\sqrt{\left(1 - A^2(p^*)/3\right)\Big/\left(2 + \sqrt{1 + A^2(p^*)}\right)} \min\{M_1(\hat{\tau}_1, p^*), M_2(\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, p^*)\}\right)^{2/3}\Bigg\}.$$

Дійсно, нехай $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$ – довільна точка з області Ω_2. Тоді, очевидно,

$$\left(V_1(\tilde{x}, \tilde{y}, p^*)\right)^{3/2} \le \sqrt{\left(1 - A^2(p^*)/3\right)\Big/\left(2 + \sqrt{1 + A^2(p^*)}\right)} \min\{M_1(\hat{\tau}_1, p^*), M_2(\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, p^*)\}$$

і

$$\sqrt{V_2(\tilde{x}, \tilde{y}, p^*)} \le \sqrt{\left(2 + \sqrt{1 + A^2(p^*)}\right)\Big/\left(1 - A^2(p^*)/3\right)} \sqrt{V_1(\tilde{x}, \tilde{y}, p^*)}.$$

Перемножаючи ці нерівності, отримаємо, що

$$V_1(\tilde{x}, \tilde{y}, p^*)\sqrt{V_2(\tilde{x}, \tilde{y}, p^*)} \le \min\{M_1(\hat{\tau}_1, p^*), M_2(\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, p^*)\},$$

тобто точка $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$ міститься в області Ω_1 і область $\Omega_2 \subseteq \Omega_1$.

Міркуючи аналогічно, з урахуванням того, що функція $\ln(\cdot): R_+ \setminus \{0\} \to R$ монотонно зростаюча і

$$\sqrt{\left(1 - A^2(p^*)/3\right)\Big/\left(2 + \sqrt{1 + A^2(p^*)}\right)} \min\{M_1(\hat{\tau}_1, p^*), M_2(\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, p)\} > 1,$$

легко показати, що область

$$\Omega_3 = \Bigg\{(x, y, \varphi, \psi) \in R^4 \mid \ln(V_1(x, y, p^*)) + \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\hat{\tau}_1^2\psi^2}{2} \le$$

$$\le \ln\left(\sqrt{\left(1 - A^2(p^*)/3\right)\Big/\left(2 + \sqrt{1 + A^2(p^*)}\right)} \min\{M_1(\hat{\tau}_1, p^*), M_2(\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, p^*)\}\right)^{2/3}\Bigg\}$$

повністю міститься в області Ω_2.

Дійсно, нехай $(\tilde{\tilde{x}},\ \tilde{\tilde{y}},\ \tilde{\tilde{\varphi}},\ \tilde{\tilde{\psi}})$ – довільна точка з області Ω_3. Тоді, очевидно,

$$\ln(V_1(\tilde{\tilde{x}},\ \tilde{\tilde{y}},\ p^*)) \le \ln(V_1(\tilde{\tilde{x}},\ \tilde{\tilde{y}},\ p^*)) + \frac{\tilde{\tilde{\varphi}}^2}{2} + \frac{\hat{\tau}_1^2\tilde{\tilde{\psi}}^2}{2} \le$$

$$\le \ln\left(\sqrt{\left(1-A^2(p^*)/3\right)\Big/\left(2+\sqrt{1+A^2(p^*)}\right)}\min\{M_1(\hat{\tau}_1,\ p^*),\ M_2(\hat{\tau}_1,\ \hat{\tau}_2,\ p^*)\}\right)^{2/3},$$

або

$$V_1(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p^*) \le \left(\sqrt{\left(1-A^2(p^*)/3\right)\Big/\left(2+\sqrt{1+A^2(p^*)}\right)}\min\{M_1(\hat{\tau}_1,\ p^*),\ M_2(\hat{\tau}_1,\ \hat{\tau}_2,\ p^*)\}\right)^{2/3},$$

тобто точка $(\tilde{\tilde{x}},\ \tilde{\tilde{y}},\ \tilde{\tilde{\varphi}},\ \tilde{\tilde{\psi}})$ міститься в області Ω_2 і область $\Omega_3 \subseteq \Omega_2$.

Таким чином, область Ω_3 повністю міститься в області Ω_1, в якій функція $V(x,\ y,\ \varphi,\ \psi,\ p^*)$ додатно визначена, а її похідна за узагальненим часом τ в силу системи диференціальних рівнянь (22) від'ємно визначена. Це значить [1, 5], що нульовий стан рівноваги системи диференціальних рівнянь (22) асимптотично стійкий для всіх початкових значень змінних з області Ω_3. Оскільки p^* – довільне значення параметра з області P, а $0<\hat{\tau}_1<\tau_1^*$ і $0<\hat{\tau}_2<\tau_2^*$ довільні значення констант фільтрів з указаних інтервалів, то теорема повністю доведена.

Зауваження 4. Доведена теорема для всіх значень параметра p з області P постулює наявність значень констант фільтрів $\tau_1^*>0$, $\tau_2^*>0$ таких, що для всіх $0<\tau_1<\tau_1^*$ і $0<\tau_2<\tau_2^*$ нульовий стан рівноваги системи диференціальних рівнянь (22) асимптотично стійкий для всіх початкових значень змінних з області Ω.

Нехай для деякого значення параметра p^* з області P обрано константи $\hat{\tau}_1 \in (0,\tau_1^*)$, $\hat{\tau}_2 \in (0,\tau_2^*)$. Оскільки відображення, що задається перетворенням координат (21), як було показано, є дифеоморфізмом, то, очевидно, керування (19) асимптотично стабілізує нульовий стан рівноваги системи диференціальних рівнянь (5) для всіх початкових значень змінних з області $\tilde{\Omega}$, яка отримується з області Ω при переході від координат $(x,\ y,\ \varphi,\ \psi)$ до координат $(\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3,\ \eta_4)$ за формулами (21) при зафіксованому значенні параметра p^* і вибраних значеннях констант $\hat{\tau}_1$, $\hat{\tau}_2$.

Оскільки відображення, що задається перетворенням координат (4), як було показано, також є дифеоморфізмом, то враховуючи (4) та переходячи до розмірних величин, очевидно, керування

$$\Delta(p^*) = \frac{K_1(p^*)\left(I(p^*)+m(p^*)r^2(p^*)\right)}{M(p^*)+m(p^*)}\Big[\left(1-\varepsilon^2(p^*)\cos^2(q_2)\right)\times$$

$$\times\left(-\frac{1}{\hat{\tau}_2}\sqrt{\frac{M(p^*)+m(p^*)}{K_1(p^*)}}\frac{dq_2}{dt}-\frac{q_2}{\hat{\tau}_1\hat{\tau}_2}-\arctan\left(\frac{\eta_2}{\sqrt{1+\frac{\eta_1^2}{2}+\frac{\eta_2^2}{2}+\mu(p^*)\frac{\eta_1^4}{4}}}\right)\right)+$$

$$+\frac{\varepsilon^2(p^*)\left(M(p^*)+m(p^*)\right)}{K_1(p^*)}\left(\frac{dq_2}{dt}\right)^2\sin(q_2)\cos(q_2)-$$

$$-\varepsilon(p^*)\sqrt{\frac{M(p^*)+m(p^*)}{I(p^*)+m(p^*)r^2(p^*)}}q_1\cos(q_2)+\frac{m(p^*)gr(p^*)\left(M(p^*)+m(p^*)\right)}{K_1(p^*)\left(I(p^*)+m(p^*)r^2(p^*)\right)}\sin(q_2)-$$

$$-\varepsilon(p^*)\,\mu(p^*)\left(\sqrt{\frac{M(p^*)+m(p^*)}{I(p^*)+m(p^*)r^2(p^*)}}\right)^3 q_1^3\cos(q_2)\Bigg], \qquad (28)$$

де

$$\eta_1=\sqrt{\frac{M(p^*)+m(p^*)}{I(p^*)+m(p^*)r^2(p^*)}}q_1+\varepsilon(p^*)\sin(q_2),$$

$$\eta_2=\frac{M(p^*)+m(p^*)}{\sqrt{K_1(p^*)\left(I(p^*)+m(p^*)r^2(p^*)\right)}}\frac{dq_1}{dt}+\varepsilon(p^*)\sqrt{\frac{M(p^*)+m(p^*)}{K_1(p^*)}}\frac{dq_2}{dt}\cos(q_2)$$

асимптотично стабілізує нульовий стан рівноваги системи диференціальних рівнянь (1) для всіх початкових значень змінних з області $\tilde{\tilde{\Omega}}$, яка отримується з області $\tilde{\Omega}$ при переході від координат $(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)$ до розмірних фазових координат за формулами

$$\eta_1=\sqrt{\frac{M(p^*)+m(p^*)}{I(p^*)+m(p^*)r^2(p^*)}}q_1+\varepsilon(p^*)\sin(q_2);\quad \eta_4=\sqrt{\frac{M(p^*)+m(p^*)}{K_1(p^*)}}\frac{dq_2}{dt};$$

$$\eta_2=\frac{M(p^*)+m(p^*)}{\sqrt{K_1(p^*)\left(I(p^*)+m(p^*)r^2(p^*)\right)}}\frac{dq_1}{dt}+\varepsilon(p^*)\sqrt{\frac{M(p^*)+m(p^*)}{K_1(p^*)}}\frac{dq_2}{dt}\cos(q_2);\ \eta_3=q_2$$

при зафіксованому значенні параметра p^* і вибраних значеннях констант $\hat{\tau}_1$, $\hat{\tau}_2$.

Зауваження 5. Нехай для значення параметра p^* з області P обрано константи $\hat{\tau}_1\in(0,\,\tau_1^*)$, $\hat{\tau}_2\in(0,\,\tau_2^*)$ відповідно до зауваження 4, тобто побудовано керування вигляду (28), яке асимптотично стабілізує нульовий стан рівноваги системи диференціальних рівнянь (1) для всіх початкових значень змінних з області $\tilde{\tilde{\Omega}}$. При виконанні нерівностей

$$\hat{\tau}_1<\min_{p\in P_1}(\tau_1(p));\ \hat{\tau}_2<\min_{p\in P_1}(\tau_2(p)), \qquad (29)$$

де $\tau_1(p)$, $\tau_2(p)$ визначаються з

$$M_1(\tau_1(p),\,p)=\sqrt{\left(2+\sqrt{1+A^2(p^*)}\right)\Big/\left(1-A^2(p^*)/3\right)};$$

$$M_2(\hat{\tau}_1(p),\,\tau_2(p),\,p)=\sqrt{\left(2+\sqrt{1+A^2(p^*)}\right)\Big/\left(1-A^2(p^*)/3\right)},$$

$P_1\subseteq P$, $p^*\in P_1$, керування $\Delta(p)$, очевидно, буде асимптотично стабілізувати нульовий стан рівноваги системи диференціальних рівнянь (1) для всіх початкових значень змінних з області $\tilde{\tilde{\Omega}}$, при відповідному значенні параметра $p\in P_1$ і вибраних значеннях констант $\hat{\tau}_1$, $\hat{\tau}_2$.

Таким чином, нерівності (29) можуть бути використані для визначення області P_1 робастності керування $\Delta(p)$.

5. Приклад.

Проілюструємо отримані результати на прикладі конкретної моделі. Нехай параметри моделі такі: $M = 10$ кг; $m = 1$ кг; $g = 9{,}8$ м/с^2; $r = 1$ м; $I = 1$ кг × м^2; $K_1 = 5$ Н/м; $K_2 = 2$ Н/м^3. Вважаємо, що значення величин є точними, тобто не залежать від параметра. Тоді $A = 0{,}068$ та із співвідношення $M_1(\tau_1^*) = \sqrt{\left(2+\sqrt{1+A^2}\right)\Big/\left(1-A^2/3\right)}$ визначимо величину $\tau_1^* = 3{,}38\times10^{-3}$. Виберемо $\hat{\tau}_1 = 2\times10^{-3} < \tau_1^*$ і зі співвідношення $M_2(\hat{\tau}_1, \tau_2^*) = \sqrt{\left(2+\sqrt{1+A^2}\right)\Big/\left(1-A^2/3\right)}$ визначимо величину $\tau_2^* = 1{,}258\times10^{-3}$. Виберемо $\hat{\tau}_2 = 1\times10^{-3} < \tau_2^*$ і обрахуємо величини $M_1(\hat{\tau}_1) = 2{,}953$ і $M_2(\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2) = 2{,}958$. Згідно теореми і зауваження 4, керування Δ вигляду (28), де коефіцієнти є незалежними від параметра, асимптотично стабілізує нульовий стан рівноваги системи диференціальних рівнянь (1) для всіх початкових значень змінних з області

$$\tilde{\tilde{\Omega}} = \left\{(q_1, dq_1/dt, q_2, dq_2/dt) \in R^4 \mid V(x, y, \varphi, \psi) \le 0{,}355\right\},$$

де

$$V(x, y, \varphi, \psi) = \ln\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \mu\frac{x^4}{4} + \left(Axy\Big/\sqrt{1 + \frac{3x^2}{2} + \frac{3y^2}{2} + 3\mu\frac{x^4}{4}}\right)\right) + \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\hat{\tau}_1^2\psi^2}{2};$$

$$x = \sqrt{\frac{M+m}{I+mr^2}}q_1 + \varepsilon\sin(q_2); \quad y = \frac{M+m}{\sqrt{K_1(I+mr^2)}}\frac{dq_1}{dt} + \varepsilon\sqrt{\frac{M+m}{K_1}}\frac{dq_2}{dt}\cos(q_2);$$

$$\varphi = q_2 + \arctan\left(y\Big/\sqrt{1 + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \mu\frac{x^4}{4}}\right); \quad \psi = \sqrt{\frac{M+m}{K_1}}\frac{dq_2}{dt}.$$

Еволюція змінних q_1 і q_2, їх швидкостей dq_1/dt і dq_2/dt та керування Δ при початкових значеннях $q_1 = 0{,}38$ м; $dq_1/dt = 1$ м/с; $q_2 = 0$; $dq_2/dt = -11$ с$^{-1}$, які потрапляють в область $\tilde{\tilde{\Omega}}$, показана на рис. 2. Як бачимо, керування Δ вирішує поставлену задачу.

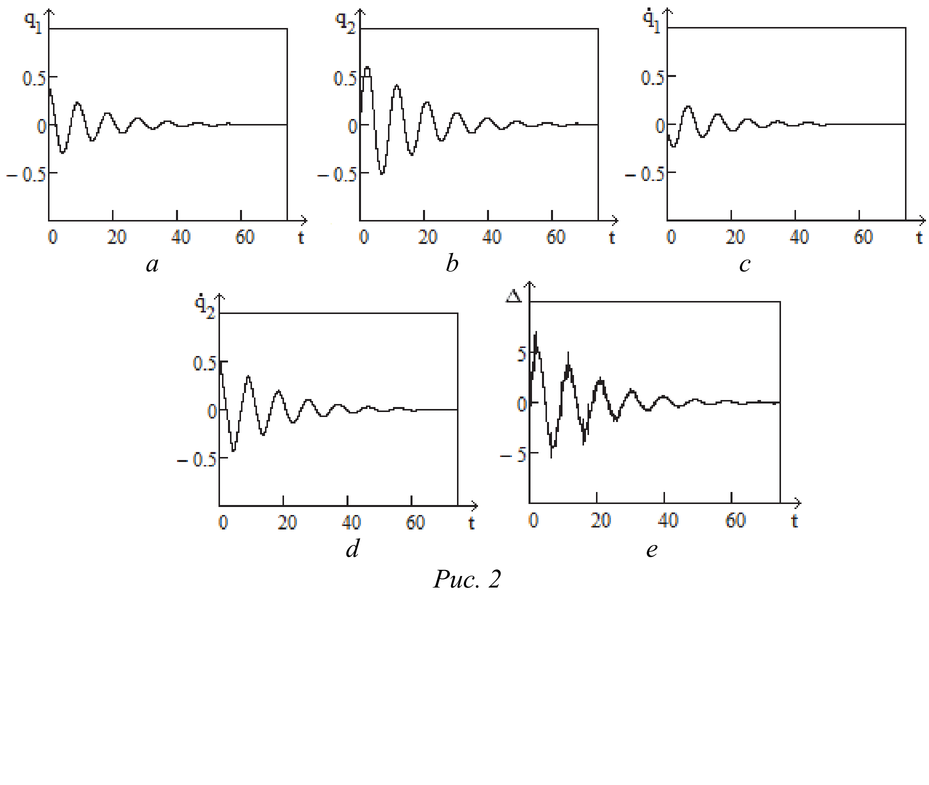

Рис. 2

Припустимо, наприклад, що маса m задана неточно. В цьому випадку вважаємо її величиною залежною від параметра: $m(p) = (1+p)$. Тоді $p^* = 0$ і величини $\hat{\tau}_1 = 2\cdot 10^{-3}$ та $\hat{\tau}_2 = 1\times 10^{-3}$ обрано вище відповідно цьому значенню параметра. Очевидно, що область допустимих значень параметра $P = \{p \in R \mid p > -1\}$. Визначимо область P_1 зміни параметра p, при всіх значеннях параметра з якої керування $\Delta(p)$ вигляду (28) асимптотично стабілізуватиме нульовий стан рівноваги моделі для всіх початкових значень змінних з області $\tilde{\tilde{\Omega}}$ при відповідному значенні параметра p і вибраних значеннях констант $\hat{\tau}_1$, $\hat{\tau}_2$. Згідно співвідношень (29) такою областю може бути інтервал $[-0,7;\ 2,3]$, тобто $P_1 = \{p \in R \mid -0,7 \le p \le 2,3\}$. Як бачимо, $P_1 \subseteq P$. Тоді область $\tilde{\tilde{\Omega}} = \Big\{(q_1,\, dq_1/dt,\, q_2,\, dq_2/dt) \in R^4 \mid V(x, y, \varphi, \psi, p) \le$

$$\le \ln\left(\sqrt{\left(1 - A(p)^2/3\right)\Big/\left(2 + \sqrt{1 + A(p)^2}\right)}\min\{M_1(\hat{\tau}_1, p), M_2(\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, p)\}\right)^{2/3}\Big\},$$

де

$$V(x, y, \varphi, \psi, p) =$$

$$= \ln\left\{1 + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \mu(p)\frac{x^4}{4} + \left(A(p)xy\Big/\sqrt{1 + \frac{3x^2}{2} + \frac{3y^2}{2} + 3\mu(p)\frac{x^4}{4}}\right)\right\} + \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\hat{\tau}_1^2\psi^2}{2};$$

$$x = \sqrt{\frac{M + m(p)}{I + m(p)r^2}}q_1 + \varepsilon(p)\sin(q_2); \quad \varphi = q_2 + \arctan\left(y\Big/\sqrt{1 + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \mu(p)\frac{x^4}{4}}\right);$$

$$y = \frac{M + m(p)}{\sqrt{K_1\left(I + m(p)r^2\right)}}\frac{dq_1}{dt} + \varepsilon(p)\sqrt{\frac{M + m(p)}{K_1}}\frac{dq_2}{dt}\cos(q_2); \quad \psi = \sqrt{\frac{M + m(p)}{K_1}}\frac{dq_2}{dt}.$$

Виберемо значення параметра $p = 2$ з області P_1. Тоді $A(2) = 0,087$; $M_1(\hat{\tau}_1, 2) = 2,08$; $M_2(\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, 2) = 2,089$ і область

$$\tilde{\tilde{\Omega}} = \left\{(q_1,\, dq_1/dt,\, q_2,\, dq_2/dt) \in R^4 \mid V(x, y, \varphi, \psi, 2) \le 0,121\right\}.$$

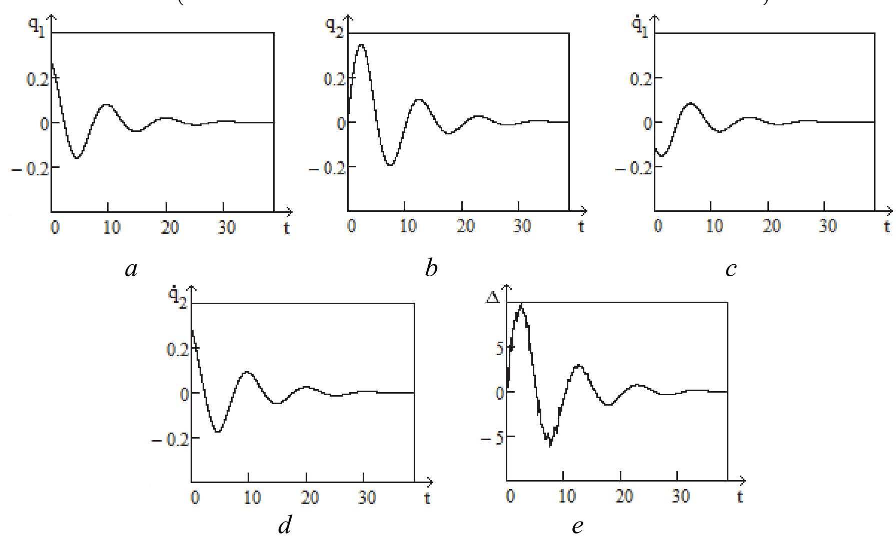

Рис. 3

Еволюція змінних q_1 і q_2, їх швидкостей dq_1/dt і dq_2/dt та керування $\Delta(2)$ вигляду (28), де залежними від параметра є величини m, μ та ε, при початкових значеннях $q_1 = 0,27$ м; $dq_1/dt = 0$ м/с; $q_2 = 0$; $dq_2/dt = 0$ с$^{-1}$, які потрапляють в область $\tilde{\tilde{\Omega}}$, показана на рис. 3. Як бачимо, керування вирішує поставлену задачу.

Додаток.

Наведемо приклад, який демонструє важливість врахування нелінійної залежності сили, яка виникає при деформації пружини, від зміщення. Нехай параметри моделі: $M = 10$ кг; $m = 5$ кг; $g = 9,8$ м/с^2; $r = 1$ м; $I = 1$ кг $\cdot$ м^2; $K_1 = 5$ Н/м; $K_2 = 2$ Н/м^3.

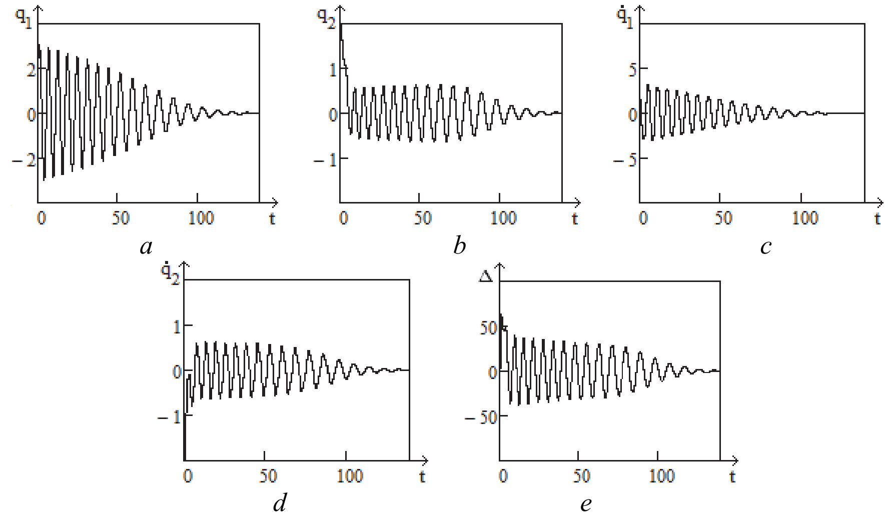

Рис. 4

На рис. 4 представлено динаміку моделі TORA при запропонованих параметрах моделі, а на рис. 5 – припускаючи, що параметр K_2, який відповідає за нелінійні члени залежності сили, яка виникає при деформації пружини, від зміщення, рівний нулю. Керування Δ в обох випадках має вигляд (28) із незалежними від параметра коефіцієнтами, де $\hat{\tau}_1 = 1$ і $\hat{\tau}_2 = 0,1$. Початкові значення змінних однакові: $q_1 = 1$ м, $dq_1/dt = 5$ м/с; $q_2 = \pi$; $dq_2/dt = 5$ с$^{-1}$.

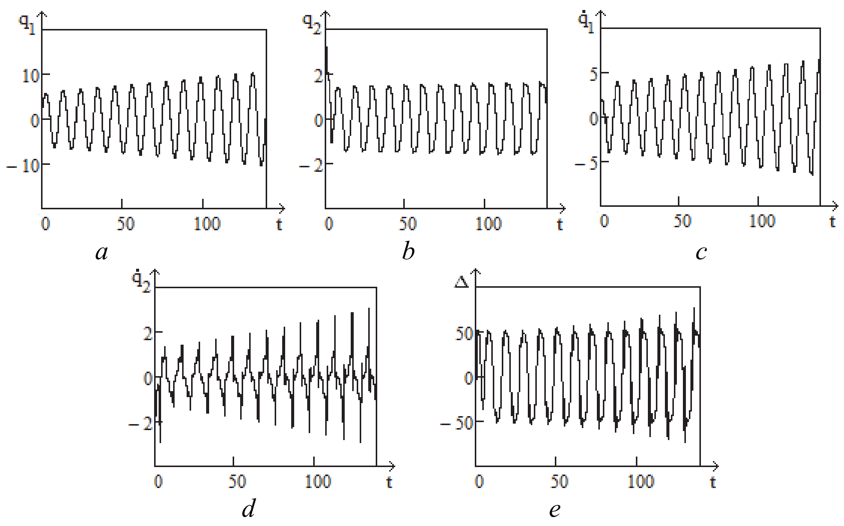

Рис. 5

Висновок.

В роботі отримано закон обертання електродвигуна, який забезпечує асимптотичне прямування траєкторії руху моделі TORA із врахуванням нелінійної залежності сили, яка виникає при деформації пружини, що входить до складу моделі, від зміщення, до положення рівноваги. Нелінійність сили пружності пружини значно ускладнює задачу побудови керування. Також складності додає те, що деякі параметри моделі можуть бути задані неточно і певним чином залежати від деякого числового параметра (вимагається лише неперервність цієї залежності та «допустимість» значень параметрів в контексті зауваження 1), область зміни якого наперед невідома. Проте, застосування техніки ДКП дозволяє отримати бажане керування. Запропоновано розвиток методу ДКП, який полягає у специфічному виборі параметрів і констант фільтрів. Це дозволяє уникнути зростання порядку допоміжної системи, а також явища значного ускладнення вигляду як допоміжної системи диференціальних рівнянь, так і закону керування, т. зв. «explosion of terms», внаслідок того, що потрібно диференціювати за часом в силу системи (можливо декілька раз) певну, часто нелінійну, функцію, див. [7,12]. В даному випадку ця функція входить в закон керування без диференціювання. Це, в свою чергу, спрощує доведення того факту, що отримане керування вирішує поставлену задачу керування методом функцій Ляпунова. Оскільки відсутні регулярні методи побудови функцій для більшості нелінійних систем диференціальних рівнянь, то в більшості випадків побудова в явному вигляді бажаної функції Ляпунова для такої системи являє собою складну задачу. Зниження порядку системи диференціальних рівнянь та спрощення її вигляду дозволили в даному випадку отримати в явному вигляді відповідну функцію та з її допомогою довести, що запропоноване керування вирішує поставлену задачу керування. Також доведена робастність такого керування та визначена область робастності у просторі параметрів системи. Отримані результати проілюстровані на прикладі конкретної механічної моделі.

Таким чином, головні досягнення даної роботи полягають в наступному:

1) розвинуто метод ДКП побудови керування для ММС шляхом специфічного вибору параметрів і констант фільтрів, що дозволяє уникнути зростання порядку допоміжної системи, а також явища значного ускладнення вигляду як допоміжної системи диференціальних рівнянь, так і закону керування, т. зв. «explosion of terms»;

2) побудовано закон обертання електродвигуна, який забезпечує асимптотичне прямування траєкторії руху моделі TORA до стану рівноваги, враховуючи нелінійну залежність сили, що виникає при деформації пружини, від зміщення, а також наявність неточностей в параметрах моделі;

3) побудовано в явному вигляді функцію Ляпунова, яка дозволяє довести бажані динамічні характеристики моделі, що досліджується, при запропонованому керуванні, не розділяючи відповідну систему диференціальних рівнянь на «швидку» та «повільну» підсистеми та отримано оцінку області збіжності у просторі початкових значень моделі;

4) доведена робастність керування та визначена область робастності у просторі параметрів моделі;

5) розроблено чисельно-аналітичний підхід для аналізу механічних систем, що можуть бути використані для моделювання поведінки супутника із подвійним обертанням та застосовуватись для активного гасіння вібрацій.

Частина роботи виконана за рахунок коштів бюджетної програми НАН України за КПКВК 6541230 «Підтримка розвитку пріоритетних напрямів наукових досліджень».

РЕЗЮМЕ. Запропоновано керування обертанням ексцентрикового колеса, що асимптотично стабілізує стан рівноваги Translational Oscillator with Rotating Actuator (TORA). Враховується нелінійна залежність сили, що виникає при деформації пружних елементів моделі від зміщення, оскільки в деяких випадках ігнорування нелінійності може призвести до втрати коректності моделі. Показано, що таке керування є робастним і запропоновано спосіб оцінки області робастності в просторі параметрів механічної системи. Отримані результати проілюстровано на прикладі реальної моделі.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: поступальний осцилятор з обертовим приводом, малоприводна механічна система, динамічне керування по поверхні, ковзаюча поверхня, фільтр низьких частот, швидко-повільна система.

1. *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости – Москва: Наука, 1967. – 223 с.
2. *Зайцев В.Ю., Назаров В.Е, Таланов В.И.* «Неклассические» проявления микроструктурно-обусловленной нелинейности: новые возможности для акустической диагностики // УФН. – 2006. – № 176:1. – С. 97 – 102.
3. *Bupp R.T., Bernstein D.S., Coppola V.T.* Vibration suppression of multi-modal translational motion using a rotational actuator // Proc. of the 33rd IEEE Conf. on Decision and Control, Lake Buena Vista, FL, USA. – 1994. – P. 4030 – 4034.
4. *Hall C.D.* Resonance capture in axial gyrostats // J. of the Astronautical Sci. – 1995. – **43**. – P. 127 – 138.
5. *Khalil Hassan K.* Nonlinear Systems. 3rd ed. – New Jersey: Prentice Hall, 2002. – 750 p.
6. *Khoroshun A.S.* On Global Positional Stabilization of a Single-Link Manipulator with a Nonlinear Elastic Joint // Int. Appl. Mech. – 2021. –**57**, N 5. – P. 578 – 590.
7. *Khoroshun A.S.* Stabilization of Translation by an Accentric Flywheel // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 5. – P. 600 – 610.
8. *Kinsey R.J., Mingori D.L., Rand R.H.* Nonlinear controller to reduce resonance effects during despin of a dual-spin spacecraft through precession phase lock // Proc. of the Conf. on Decision and Control, Tucson, AZ. – 1992. – P. 3025 – 3030.
9. *Kinsey R.J., Mingori D.L., Rand R.H.* Spinup Through Resonance of Rotating Unbalanced Systems with Limited Torque// Proc. of the AIAA/AAS Astrodynamics Conf., Washington, DC. – 1990. – P. 805 – 813.
10. *Liu Y., Yu H.* A survey of underactuated mechanical systems // IET Control Theory Appl. – 2013. – **7**, N 7. – P. 921 – 935.
11. *Loveikin V.S., Romasevich Y.A., Khoroshun A.S.* Optimal Stabilization Control of an Inverted Pendulum with a Flywheel. Part 1 // Int. Appl. Mech. – 2020. – **56**, N 4. – P. 462 – 470.
12. *Olfati-Saber R.* Nonlinear control of underactuated mechanical systems with application to robotics and aerospace vehicles. – Ph.D. thesis, Department of Electrical Engineering and Computer Sciense, MIT, USA(2001). – 316 p.
13. *Qaiser N., Hussain A., Iqbal N., Qaiser N.* Dynamic surface control for stabilization of the oscillating eccentric rotor. Proc. of the Institution of Mechanical Engineers, Part I. // J. of Systems and Control Engng. – 2007. – **221**, N 3. – P. 311 – 319.
14. *Song B., Hedrick J.K.* Dynamic Surface Control of Uncertain Nonlinear Systems: An LMI Approach. – London: Springer – Verlag, 2011. – 268 p.
15. *Swaroop D., Hedrick J.K., Yip P.P., Gerdes J.C.* Dynamic surface control for a class of nonlinear systems // IEEE Trans. of Automatic Control. – 2000. – **45**, N 11. – P. 1893 – 1899.
16. *Wan C.J., Bernstein D.S., Coppola V.T.* Global stabilization of the oscillating eccentric rotor // Proc. of the 33rd IEEE Conf. on Decision and Control, Lake Buena Vista, FL, USA. – 1994. – P. 4024 – 4029.
17. *Yee R. K.* Spinup dynamics of a rotating system with limiting torque// Master's Thesis, UCLA, 1981.
18. *Zhang Y., Li L., Cheng B., Zhang X.* An active mass damper using rotating actuator for structural vibration control // Advances in Mech. Engng. – 2016. – **8**, N 7. – P. 1 – 9.

Надійшла 23.12.2021 Затверджена до друку 13.12.2022