

Ю. М. Кононов¹, Я. І. Святенко²

ПРО СТАБІЛІЗАЦІЮ ОБЕРТАННЯ У СЕРЕДОВИЩІ З ОПОРОМ
ГІРОСКОПА ЛАГРАНЖА З ІДЕАЛЬНОЮ РІДИНОЮ

¹Інститут прикладної математики і механіки НАН України,
вул. Генерала Батюка, 19, 84116, Донецька область, Слов'янськ, Україна;
e-mail: kononov.yuriy.nikitovich@gmail.com

²Донецький національний університет ім. Василя Стуса,
вул. 600-річчя, 21, 21021, м. Вінниця, Україна; e-mail: filioeee@gmail.com

Abstract. The possibility of stabilizing the unstable uniform rotation in a medium with the resistance of the "sleeping" Lagrangian gyroscope with an ideal fluid is shown when using a second rotating gyroscope and elastic spherical joints. The "sleeping" gyroscope has an arbitrary axisymmetric cavity, completely filled with an ideal incompressible fluid and rotating around a fixed point. The second gyroscope is located above the first one. The gyroscopes are connected by an elastic spherical joint. Their rotation is supported by the constant moments directed along the gyroscopes axes of symmetry. The conditions are found for the elasticity coefficients of hinges, the first tone of oscillations of an ideal fluid, and the position of the centers of mass of gyroscopes, under which the stabilization is possible. Using the example of a compressed ellipsoidal cavity, it is shown that at a sufficiently high angular speed of rotation of the second gyroscope, stabilization will always be possible, provided that the center of mass of the second gyroscope is below the common point of the gyroscopes. The resulting stabilization conditions are compared with similar conditions in the absence of dissipation.

Key words: Lagrange gyroscope, arbitrary axisymmetric cavity, ideal incompressible fluid, resisting medium, stabilization, asymptotic stability.

Вступ.

Відомо, що гіроскоп із порожниною, яка містить рідину, обертається досить нестійко [3, 4, 6, 7, 16 – 18]. У зв'язку з цим виникає питання про можливість стабілізації такого гіроскопа за допомогою іншого гіроскопа, який обертається. Задача ускладнюється ще і тим, що гіроскоп обертається в середовищі з опором. Для консервативних механічних систем ефект стабілізації неврівноваженого гіроскопа Лагранжа іншим обертовим гіроскопом був досліджений в монографії [11] та в багатьох інших роботах. В роботі [6] розглянута можливість стабілізації гіроскопа з циліндричною порожниною за допомогою поділу її безмасовими поперечними перегородками. Показано, що введення навіть однієї перегородки може істотно стабілізувати нестійке обертання гіроскопа. В статтях [17, 18] була розглянута задача про можливість стабілізації обертовими твердими тілами нестійкого обертання гіроскопа Лагранжа з довільною осесиметричною порожниною, що містить ідеальну рідину. У цих роботах були проведені аналітичні і числові дослідження з урахування основного і додаткових тонів коливань ідеальної рідини в еліпсоїдальній і циліндричній порожнинах.

На даний час є досить велика кількість робіт, в яких проводяться різні дослідження динаміки твердих тіл, які обертаються у середовищі з опором, наприклад, [5, 11, 13 – 17, 19, 20]. Найбільш інформативний огляд літератури по цим задачам наведено в

роботах [13 – 17, 19]. Наведемо лише деякі роботи, які близькі до розглянутої задачі. В статті [15] на підставі критерію Льєнара-Шіпара в іннерному вигляді отримано умови асимптотичної стійкості рівномірного обертання в середовищі з опором несиметричного твердого тіла під дією постійного моменту. Отримано умови для величини постійного моменту і моменту інерції третьої головної осі, які при дії відновлювального моменту достатні для асимптотичної стійкості. У статті [16] розглянута задача про можливість стабілізації нестійкого обертання в середовищі з опором гіроскопа Лагранжа іншим гіроскопом, який пов'язаний з першим відновлювальним сферичним шарніром. Обертання гіроскопів підтримуються постійними моментами, спрямованими вздовж осей симетрії. Показано, що стабілізація завжди буде можлива при досить великій кутовій швидкості обертання другого гіроскопа в припущенні, що його центр мас знаходиться нижче нерухомої точки. В статті [12] досліджуються збурені обертальні рухи твердого тіла, близькі до випадку Лагранжа, під дією повільно змінного з часом крутного моменту. В роботі [13] розглядається динаміка і орієнтація твердого тіла при вході в атмосферу, динаміка і управління коаксіальними гіростатами супутників та багато інших оригінальних задач космічної механіки. В [14] представлено уніфікований і добре розроблений підхід до динаміки кутових рухів твердих тіл, що зазнають моментів збурення різної фізичної природи. Детально розглядається дія різних збурень, як зовнішніх (гравітаційний, аеродинамічний, сонячний тиск), так і внутрішніх (завдяки в'язкій рідині в резервуарах, пружним і в'язкопружним властивостям тіла). Новий клас обертань динамічно симетричного твердого тіла навколо нерухомої точки з урахуванням нестационарного збурюючого моменту і повільно змінного з часом відновлюючого моменту вивчається у роботі [19]. В статті [20] розглянуто рух навколо центру мас сфероїда з порожниною, заповненою в'язкою рідиною. Момент сил, що діють на тіло з боку в'язкої рідини в порожнині, визначають за методикою, розробленою в роботі [14]. Асимптотичний підхід дозволяє отримати деякі якісні результати та описати нелінійну еволюцію кутового руху за допомогою спрощених усереднених рівнянь.

Дослідження впливу дисипативного і двох постійних моментів на стійкість стаціонарних рухів гіроскопа Лагранжа проведені в статті [5]. Перший момент є постійним в інерціальній системі відліку, а другий – в неінерціальній, тобто в системі відліку, яка зв'язана з твердим тілом. Із цієї роботи випливає нестійкість рівномірного обертання в середовищі з опором «сплячого» гіроскопа Лагранжа, який перебуває тільки під дією постійного моменту в системі відліку, пов'язаної з твердим тілом. Це випливає також з четвертої теореми Томсона – Тета – Четаєва [9], що дисипація руйнує гіроскопічну стабілізацію. Як зазначено вище, гіроскоп Лагранжа з порожниною, яка містить рідину, обертається нестійко. У зв'язку з цим в даній роботі розглянуто можливість стабілізації нестійкого рівномірного обертання в середовищі з опором «сплячого» гіроскопа Лагранжа з ідеальною рідиною за допомогою другого гіроскопа, який обертається. Перший гіроскоп має довільну осесесиметричну порожнину, повністю заповнену ідеальною нестисливою рідиною і обертається навколо нерухомої точки, в якій на нього діє відновлювальний пружний сферичний шарнір, а над ним розташований другий гіроскоп. Гіроскопи також пов'язані пружним відновлювальним сферичним шарніром. Обертання гіроскопів підтримуються постійними моментами, спрямованими вздовж їх осей симетрії. На основі критерію Льєнара – Шіпара, записаного в іннерному вигляді, отримані умови стабілізації у вигляді системи чотирьох нерівностей відносно кінетичного моменту другого гіроскопа та коефіцієнтів пружності шарнірів. Знайдено умови для коефіцієнтів пружності, першого тону коливання ідеальної рідини та положення центру мас другого гіроскопа, при яких старші коефіцієнти цих нерівностей додатні. На прикладі стиснутої еліпсоїдальної порожнини показано, що при досить великій кутовій швидкості обертання другого гіроскопа стабілізація завжди буде можлива в припущенні, що центр мас другого гіроскопа знаходиться нижче загальної точки обох гіроскопів. Отримані умови стабілізації порівнюються з аналогічними умовами за відсутності дисипації. При відсутності відносного руху рідини і пружного відновлювального шарніру в нерухомій точці отримані результати збігаються з результатами статті [16].

§1. Постановка задачі. Основні рівняння.

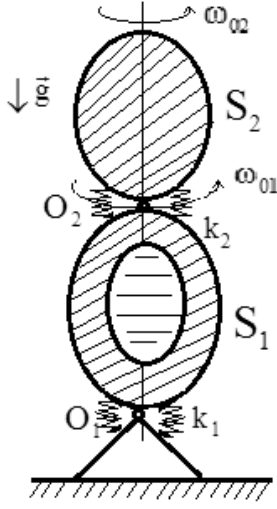


Рис. 1

Нехай динамічно симетричні тверді тіла S_1 і S_2 пов'язані в точці O_2 пружним відновлювальним сферичним шарніром $L_2 = k_2 \mathbf{s}_1 \times \mathbf{c}_2 / (|\mathbf{s}_1| |\mathbf{c}_2|)$, $k_2 \geq 0$. Тверде тіло S_1 має осесиметричну порожнину τ , яка повністю заповнена ідеальною нестисливою рідиною густини ρ . В нерухомій точці O_1 на тіло S_1 діє пружний відновлювальний сферичний шарнір $L_1 = k_1 \mathbf{v} \times \mathbf{s}_1 / |\mathbf{s}_1|$, $k_1 \geq 0$. Тверде тіло S_i ($i = 1, 2$) знаходиться під дією сили тяжіння, дисипативного моменту $\mathbf{M}_i = \mathbf{D}_i \boldsymbol{\omega}_i$, $\mathbf{D}_i = \text{diag}(D_{i1}, D_{i1}, D_{i3})$, $D_{ij} > 0$; $i = 1, 2; j = 1, 3$, що моделює середовище з опором і постійного моменту $\mathbf{M}_{iq} = Q_i \mathbf{e}_3^i$, який спрямований вздовж осі симетрії твердого тіла S_i та підтримує його рівномірне обертання. Тут $\boldsymbol{\omega}_i$ – кутова швидкість твердого тіла S_i , $\mathbf{s}_1 = \overline{O_1 O_2 S_1}$; $\mathbf{c}_i = \overline{O_i C_i}$; m_i і C_i – маса і центр мас тіла S_i ;

$\mathbf{v} = -\mathbf{g} / |\mathbf{g}|$, $\mathbf{g}$ – вектор прискорення вільного падіння, $g = |\mathbf{g}|$ (рис. 1).

Рівняння обертання в середовищі з опором двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа, один з яких має порожнину з ідеальною рідиною, матимуть вигляд [1, 5, 7, 11, 16]:

$$\begin{aligned} (J_1 \cdot \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\lambda})' + m_2 \mathbf{s}_1 \times (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{s}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{c}_2) &= (m_1 \mathbf{c}_1 + m_2 \mathbf{s}_1) g \times \mathbf{v} + L_1 - L_2 + \mathbf{M}_{1q} - D_1 \boldsymbol{\omega}_1; \\ (J_2 \cdot \boldsymbol{\omega}_2)' + m_2 \mathbf{c}_2 \times (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{s}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{c}_2) &= m_2 \mathbf{c}_2 g \times \mathbf{v} + L_2 + \mathbf{M}_{2q} - D_2 \boldsymbol{\omega}_2. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Тут $J_i = \text{diag}(A_i, A_i, C_i)$ – тензор інерції твердого тіла S_i відносно точки O_i ; $\mathbf{s}_1 = \overline{O_1 O_2}$; $\mathbf{c}_i = \overline{O_i C_i}$; m_i і C_i – маса і центр мас тіла S_i ; так як тверде тіло S_1 має порожнину з рідиною, то при обчисленні моментів інерції A_1 і C_1 , маси m_1 та центру мас C_1 необхідно враховувати моменти інерції рідини та її масу; $\mathbf{v} = -\mathbf{g} / |\mathbf{g}|$, $\mathbf{g}$ – вектор прискорення вільного падіння, $g = |\mathbf{g}|$; точкою « $\cdot$ » позначена абсолютна похідна; $\boldsymbol{\lambda} = \rho \int_{\tau} \mathbf{r} \times \mathbf{u} d\tau$ – гіростатичний момент рідини; $\mathbf{u}$ – вектор відносної швидкості рідини в порожнині τ .

У разі сильно в'язкої рідини ($\text{Re} \ll 1$) гіростатичний момент $\boldsymbol{\lambda}$ обчислюється за формулою $\boldsymbol{\lambda} = -\rho P^{(1)} \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \text{Re} + \rho (P^{(2)} \ddot{\boldsymbol{\omega}}_1 + \omega_{01} Q^{(2)} \dot{\boldsymbol{\omega}}_1) \text{Re}^2 + O(\text{Re}^3)$. Властивості тензорів $P^{(1)}$, $P^{(2)}$ и $Q^{(2)}$ описані в [8]. Випадок ідеальної рідини буде розглянуто нижче.

Зв'яжемо з кожним із тіл S_i незмінно базис $\mathbf{e}_1^i \mathbf{e}_2^i \mathbf{e}_3^i$ з вершиною в точці O_i , осі якого направимо по головних осях тензора інерції J_i і введемо нерухомий базис $\mathbf{e}_1^0 \mathbf{e}_2^0 \mathbf{e}_3^0$, вектор $\mathbf{e}_3^0$ якого збігається з векторами $\mathbf{v}$. Нехай $\mathbf{s}_1 = s_1 \mathbf{e}_3^1$, $\mathbf{c}_i = c_i \mathbf{e}_3^i$.

Векторні рівняння (1.1) в проєкціях на осі рухомого базису $\mathbf{e}_1^i \mathbf{e}_2^i \mathbf{e}_3^i$ отримують вигляд:

$$\begin{aligned} A_1' \dot{p}_1 + (C_1 - A_1) q_1 r_1 + \mu \left[(\dot{p}_2 - q_2 r_2) \alpha_{22}^{11} - (\dot{q}_2 + p_2 r_2) \alpha_{21}^{11} + (p_2^2 + q_2^2) \alpha_{23}^{11} \right] + \tilde{Q}_{11} = \\ = (a_1 g - k_1) \alpha_{32}^{01} - k_2 (\alpha_{31}^{20} \alpha_{21}^{10} + \alpha_{32}^{20} \alpha_{22}^{10} + \alpha_{33}^{20} \alpha_{23}^{10}) - D_{11} p_1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A'_1 \dot{q}_1 - (C_1 - A'_1) p_1 r_1 - \mu \left[(\dot{p}_2 - q_2 r_2) \alpha_{12}^{11} - (\dot{q}_2 + p_2 r_2) \alpha_{11}^{11} + (p_2^2 + q_2^2) \alpha_{13}^{11} \right] + \tilde{Q}_{12} = \\
& = (-a_1 g + k_1) \alpha_{31}^{01} + k_2 (\alpha_{31}^{20} \alpha_{11}^{10} + \alpha_{32}^{20} \alpha_{12}^{10} + \alpha_{33}^{20} \alpha_{13}^{10}) - D_{11} q_1 ; \\
& A'_2 \dot{p}_2 + (C_2 - A'_2) q_2 r_2 + \mu \left[(\dot{p}_1 - q_1 r_1) \alpha_{22}^{12} - (\dot{q}_1 + p_1 r_1) \alpha_{12}^{12} + (p_1^2 + q_1^2) \alpha_{32}^{12} \right] = \\
& = (a_2 g - k_1) \alpha_{32}^{02} - k_2 (\alpha_{31}^{10} \alpha_{21}^{20} + \alpha_{32}^{10} \alpha_{22}^{20} + \alpha_{33}^{10} \alpha_{23}^{20}) - D_{21} p_2 ; \quad (1.2) \\
& A'_2 \dot{q}_2 - (C_2 - A'_2) p_2 r_2 - \mu \left[(\dot{p}_1 - q_1 r_1) \alpha_{21}^{12} - (\dot{q}_1 + p_1 r_1) \alpha_{11}^{12} + (p_1^2 + q_1^2) \alpha_{31}^{12} \right] = \\
& = (-a_1 g + k_1) \alpha_{31}^{02} + k_2 (\alpha_{31}^{10} \alpha_{21}^{20} + \alpha_{32}^{10} \alpha_{22}^{20} + \alpha_{33}^{10} \alpha_{23}^{20}) - D_{21} q_2 ; \\
& C_i \dot{r}_i = -D_{i3} r_i + Q_i, \quad i = 1, 2, \quad (1.3)
\end{aligned}$$

де p_i, q_i, r_i – проекції вектора кутової швидкості ω_i твердого тіла S_i на осі $\mathbf{e}_1^i \mathbf{e}_2^i \mathbf{e}_3^i$; $\tilde{Q}_{1j} = (\omega_1 \times \lambda + \dot{\lambda}) \cdot \mathbf{e}_j^1$; $\mu = s_1 a_2$; $A'_1 = A_1 + s_1^2 m_2$; $A'_2 = A_2$; $a_1 = m_1 c_1 + m_2 s_1$; $a_2 = m_2 c_2$.

До системи рівнянь (1.2) – (1.3) потрібно додати рівняння для напрямних косинусів [11, 16]:

$$\begin{aligned}
& \dot{\alpha}_{11}^{i0} = -q_i \alpha_{31}^{i0} + r_i \alpha_{21}^{i0}; \quad \dot{\alpha}_{21}^{i0} = p_i \alpha_{31}^{i0} - r_i \alpha_{11}^{i0}; \\
& \dot{\alpha}_{12}^{i0} = -q_i \alpha_{32}^{i0} + r_i \alpha_{22}^{i0}; \quad \dot{\alpha}_{22}^{i0} = p_i \alpha_{32}^{i0} - r_i \alpha_{12}^{i0}; \\
& \dot{\alpha}_{13}^{i0} = -q_i \alpha_{33}^{i0} + r_i \alpha_{23}^{i0}; \quad \dot{\alpha}_{23}^{i0} = p_i \alpha_{33}^{i0} - r_i \alpha_{13}^{i0}; \quad (1.4) \\
& \dot{\alpha}_{31}^{i0} = -p_i \alpha_{21}^{i0} + q_i \alpha_{11}^{i0}; \quad \dot{\alpha}_{32}^{i0} = -p_i \alpha_{22}^{i0} + q_i \alpha_{12}^{i0}; \\
& \dot{\alpha}_{33}^{i0} = -p_i \alpha_{23}^{i0} + q_i \alpha_{13}^{i0}.
\end{aligned}$$

Система (1.2) – (1.4) допускає розв'язки:

$$\begin{aligned}
& p_i = q_i = 0; \quad r_i = \omega_{0i} = Q_i / D_{i3}; \quad \mathbf{u} = 0 \quad (\tilde{Q}_{1j} = 0); \\
& \alpha_{11}^{i0} = \cos \omega_{0i} t; \quad \alpha_{12}^{i0} = \pm \sin \omega_{0i} t; \quad \alpha_{13}^{i0} = 0; \quad (1.5) \\
& \alpha_{21}^{i0} = -\sin \omega_{0i} t; \quad \alpha_{22}^{i0} = \pm \cos \omega_{0i} t; \quad \alpha_{23}^{i0} = 0; \quad \alpha_{31}^{i0} = 0; \quad \alpha_{32}^{i0} = 0; \quad \alpha_{33}^{i0} = \pm 1,
\end{aligned}$$

які відповідають рівномірним обертанням твердих тіл S_i з кутовими швидкостями ω_{0i} навколо вертикалі. У незбуреному русі рідини в твердому тілі S_1 теж рівномірно обертається з кутовою швидкістю ω_{01} . При цьому розв'язку з верхнім знаком відповідає випадок «сплячих» гіроскопів, на які діють перекидальні моменти (центри мас тіл S_i знаходиться вище точки O_i), а розв'язку з нижнім знаком – випадок статично врівноважених гіроскопів, на які діють відновлювальні моменти (центр мас тіл S_i знаходиться нижче точки O_i).

§2. Умови стабілізації нестійкого рівномірного обертання гіроскопа Лагранжа з ідеальною рідиною.

Рівняння (1.3) відокремлюється від інших рівнянь і його характеристичне рівняння має один дійсний негативний корінь.

Розглянемо випадок ідеальної рідини. Нехай в збуреному русі $\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega}_{0i} + \boldsymbol{\Omega}_i$. Гіро-статичний момент в разі ідеальної рідини запишеться наступним чином $\boldsymbol{\lambda}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(t) \mathbf{e}_n$, $\mathbf{e}_n = \rho \int_{\tau} \mathbf{r} \times \mathbf{v}_n d\tau$. У випадку осесиметричної порожнини $\mathbf{e}_n = (e_n, -e_n)$; $\tilde{Q}_{i2} = i\tilde{Q}_{i1}$; $\tilde{Q}_{i3} = 0$; $\tilde{Q}_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} e_n (\dot{S}_n - i\omega_{01} S_n)$. Коефіцієнти розкладання $S_n(t)$ знаходяться при розв'язуванні наступної системи звичайних лінійних диференціальних рівнянь [3, 4]:

$$N_n^2 (\dot{S}_n - i\lambda_n S_n) + \mathbf{e}_n \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}}_1 = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots, \infty). \quad (2.1)$$

Тут $\lambda_n = 2\omega_{01}/\kappa_n$, $N_n^2 = \int_{\tau} \mathbf{v}_n^2 d\tau$, комплексні власні векторні функції $\mathbf{v}_n$ та відповідні їм власні числа κ_n визначаються лише геометрією порожнини та знаходяться з розв'язування відповідної крайової задачі [3, 4, 6, 7, 10]. Власні векторні функції $\mathbf{v}_n$ ортогональні в області τ . Слід зазначити, що гіростатичний момент не залежить від вибору полюса і тому може бути обчислений відносно центру порожнини τ [3, 4, 8].

Запишемо рівняння (1.2) для збуреного руху, зберігаючи для інших змінних їхні попередні позначення:

$$\begin{aligned} A_1' \dot{p}_1 + (C_1 - A_1') \omega_{01} q_1 + \mu \left[(\dot{p}_2 - \omega_{02} q_2) \alpha_{22}^{11} - (\dot{q}_2 + \omega_{02} p_2) \alpha_{21}^{11} \right] + \tilde{Q}_{11} = \\ = (a_1 g - k_1) \alpha_{23}^{10} - k_2 \alpha_{32}^{21} - D_{11} p_1; \\ A_1' \dot{q}_1 - (C_1 - A_1') \omega_{01} p_1 - \mu \left[(\dot{p}_2 - \omega_{02} q_2) \alpha_{12}^{11} - (\dot{q}_2 + \omega_{02} p_2) \alpha_{11}^{11} \right] + i\tilde{Q}_{12} = \\ = -(a_1 g - k_1) \alpha_{13}^{10} - k_2 \alpha_{32}^{11} - D_{11} q_1; \\ A_2' \dot{p}_2 + (C_2 - A_2') \omega_{02} q_2 + \mu \left[(\dot{p}_1 - \omega_{01} q_1) \alpha_{22}^{12} - (\dot{q}_1 + \omega_{01} p_1) \alpha_{12}^{12} \right] = \\ = a_2 g \alpha_{23}^{20} - k_2 \alpha_{32}^{22} - D_{21} p_2; \\ A_2' \dot{q}_2 - (C_2 - A_2') \omega_{02} p_2 - \mu \left[(\dot{p}_1 - \omega_{01} q_1) \alpha_{21}^{12} - (\dot{q}_1 + \omega_{01} p_1) \alpha_{11}^{12} \right] = -a_2 g \alpha_{13}^{10} - k_2 \alpha_{32}^{12} - D_{21} q_2; \\ \dot{\alpha}_{13}^{i0} = \omega_{0i} \alpha_{23}^{i0} - q_i; \quad \dot{\alpha}_{23}^{i0} = -\omega_{0i} \alpha_{13}^{i0} + p_i. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Тут $\alpha_{11}^{ik} = \cos \varphi_{ki}$; $\alpha_{12}^{ik} = -\sin \varphi_{ki}$; $\alpha_{21}^{ik} = \sin \varphi_{ki}$; $\alpha_{22}^{ik} = \cos \varphi_{ki}$; $\varphi_{ki} = \varphi_k - \varphi_i$; $\varphi_i = \omega_{0i} t$, $i, k = 1, 2$.

Перейдемо до нових змінних p_i' , q_i' , α_{13}^i , α_{23}^i , S_n' [8 – 10, 14, 18]:

$$\begin{aligned} p_i' &= p_i \sin \varphi_i + q_i \cos \varphi_i; \quad q_i' = p_i \cos \varphi_i - q_i \sin \varphi_i; \\ \alpha_{13}^i &= \alpha_{13}^{0i} \sin \varphi_i + \alpha_{23}^{0i} \cos \varphi_i; \quad \alpha_{23}^i = \alpha_{13}^{0i} \cos \varphi_i - \alpha_{23}^{0i} \sin \varphi_i. \end{aligned}$$

Нехай $\Omega_i = q_i' - ip_i'$; $\gamma_i = \alpha_{13}^i + i\alpha_{23}^i$; $S_n' = e^{-\varphi_i} S_n$, тоді система рівнянь (2.1) – (2.2) може бути записана наступним чином:

$$S_n' + i(\omega_{01} - \lambda_n) S_n' + (\ddot{\gamma}_1 + i\omega_{01} \dot{\gamma}_1) e_n / N_n^2 = 0 \quad (n = 1, 2, \dots);$$

$$A_1' \ddot{\gamma}_1 + (i\tilde{C}_1 + D_{11}) \dot{\gamma}_1 + \mu \ddot{\gamma}_2 + \sum_{n=1}^{\infty} e_n \dot{S}_n' = (a_1 g - k_1 - k_2) \gamma_1; \quad (2.3)$$

$$A_2' \ddot{\gamma}_2 + (i\tilde{C}_2 + D_{21}) \dot{\gamma}_2 + \mu \ddot{\gamma}_1 = (a_2 g - k_2) \gamma_2.$$

Представивши шукані функції у вигляді $a e^{\lambda t}$, запишемо характеристичне рівняння збуреного руху (2.3) у вигляді:

$$\begin{vmatrix} F_1 & \mu - \frac{k_2}{\lambda^2} \\ \mu - \frac{k_2}{\lambda^2} & F_2 \end{vmatrix} = 0, \quad (2.4)$$

де

$$F_1 = A_1' + \frac{i\tilde{C}_1 + D_{11}}{\lambda} - \frac{a_1 g - k_1 - k_2}{\lambda^2} - (i\lambda - \omega_{01}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n}{i\lambda - \tilde{\lambda}_n}; \quad E_n = \frac{2e_n^2}{N_n^2}; \quad \tilde{\lambda}_n = (1 - \lambda_n) \omega_{01};$$

$$\lambda_n = 2/\kappa_n; \quad F_2 = A_2' + \frac{i\tilde{C}_2 + D_{21}}{\lambda} - \frac{a_2 g - k_2}{\lambda^2}.$$

У більшості практично важливих випадків основний ефект впливу рідини на рух твердого тіла можна врахувати, розглядаючи тільки основний тон коливання рідини λ_1 . В роботі [3, 4] оцінено вплив більш високих тонів на стійкість обертання твердого тіла з циліндричною порожниною та показано, що за певних умов додавання нових тонів коливань рідини призводить до незначної кількісної зміни області нестійкості. Слід зазначити, що у випадку еліпсоїдальної порожнини та порожнини, утвореної співфокусними еліпсоїдами, з нескінченного спектру власних частот λ_n на рух твердого тіла впливає лише основна частота λ_1 ($E_n = 0$ при $n \neq 1$) [3, 4, 10].

При $n = 1$ рівняння (2.4) отримає вигляд:

$$a_5 \lambda^5 + (a_4 + ib_4) \lambda^4 + (a_3 + ib_3) \lambda^3 + (\tilde{a}_2 + ib_2) \lambda^2 + (\tilde{a}_1 + ib_1) \lambda + a_0 + ib_0 = 0. \quad (2.5)$$

Тут

$$\begin{aligned} a_5 &= A_1^* A_2' - \mu^2 = (A_1 - E_1) A_2 + \tilde{A}_2 s_1^2 m_2 > 0; \quad b_5 = 0; \\ a_4 &= A_1^* D_2 + A_2' D_1; \quad b_4 = \tilde{C}_1^* A_2' + \tilde{C}_2 A_1^* + (A_1' A_2' - \mu^2) \tilde{\lambda}_1; \\ a_3 &= D_1 D_2 - \tilde{C}_1^* \tilde{C}_2 + (A_1^* + A_2' + 2\mu) k_2 - (A_1^* a_2 + A_2' a_1) g - (\tilde{C}_1 A_2' + \tilde{C}_2 A_1') \tilde{\lambda}_1; \\ b_3 &= \tilde{C}_2 D_1 + C_1^* D_2 + (A_1' D_2 + A_2' D_1) \tilde{\lambda}_1; \\ \tilde{a}_2 &= (k_2 - a_2 g) D_1 + (k_1 + k_2 - a_1 g) D_2 - (\tilde{C}_2 D_1 + \tilde{C}_1 D_2) \tilde{\lambda}_1; \\ b_2 &= -(\tilde{C}_1 a_2 + \tilde{C}_2 a_1) g + (k_1 + k_2) \tilde{C}_2 + \tilde{C}_1^* k_2 - \\ &- [\tilde{C}_1 \tilde{C}_2 - D_1 D_2 + (A_1' a_2 + A_2' a_1) g - (A_1' + A_2' + 2\mu) k_2 - A_2' k_1] \tilde{\lambda}_1; \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\tilde{a}_1 = k_1 k_2 - (k_2 - a_2 g) g a_1 - (k_1 + k_2) g a_2 - [(k_2 - a_2 g) \tilde{C}_1 + (k_1 + k_2 - a_1 g) \tilde{C}_2] \tilde{\lambda}_1;$$

$$b_1 = [(k_2 - a_2 g) D_1 + (k_1 + k_2 - a_1 g) D_2] \tilde{\lambda}_1;$$

$$a_0 = 0; \quad b_0 = [a_1 a_2 g^2 + (k_2 - a_2 g) k_1 - (a_1 + a_2) k_2] \tilde{\lambda}_1; \quad \tilde{\lambda}_1 = (1 - \lambda_1) \omega_{01};$$

$\tilde{C}_i = C_i \omega_{0i}$; $A_1^* = A_1' - E_1 > 0$; $\tilde{C}_1^* = \tilde{C}_1 - \tilde{E}_1$; $D_1 = D_{11}$; $D_2 = D_{21}$; $\tilde{A}_2$ – момент інерції тіла S_2 відносно його центру мас.

За відсутності рідини ($\rho = 0$) у коефіцієнтах (2.6) слід покласти $E_1 = \tilde{\lambda}_1 = 0$ ($a_0 = b_0 = 0$). В цьому випадку ми отримуємо рівняння четвертого ступеня, яке було розглянуто і досліджено в роботі [16].

З рівняння (2.4) випливає, що коли центр мас другого тіла збігається з точкою O_2 ($c_2 = 0$, $a_2 = 0$, $\mu = 0$), а також відсутній пружний відновлювальний момент ($k_2 = 0$), то в цьому випадку це рівняння розпадається на два рівняння і відсутній взаємовплив першого тіла на друге. Тому стабілізація стає неможливою.

Для того, щоб всі нулі рівняння (2.5) знаходились у відкритій лівій півплощині, згідно критерію Ляпуна – Шіпара, записаного в іннормному вигляді [2], необхідно і достатньо, щоб матриця дев'ятого порядку, складена з коефіцієнтів многочлена (2.5), була іннормно-позитивною, тобто були позитивно визначеними матриці Δ_1 , Δ_3 , Δ_5 , Δ_7 і Δ_9 :

$$I_1 = |\Delta_1| = a_4 = A_1^* D_2 + A_2' D_1 > 0;$$

$$I_3 = |\Delta_3| = \begin{vmatrix} a_5 & -b_4 & -a_3 \\ 0 & a_4 & -b_3 \\ a_4 & -b_3 & -\tilde{a}_2 \end{vmatrix} > 0; \quad (2.7)$$

$$I_5 = |\Delta_5| = \begin{vmatrix} a_5 & -b_4 & -a_3 & b_2 & \tilde{a}_1 \\ 0 & a_5 & -b_4 & -a_3 & b_2 \\ 0 & 0 & a_4 & -b_3 & -\tilde{a}_2 \\ 0 & a_4 & -b_3 & -\tilde{a}_2 & b_1 \\ a_4 & -b_3 & -\tilde{a}_2 & b_1 & a_0 \end{vmatrix} > 0; \quad (2.8)$$

$$I_7 = |\Delta_7| = \begin{vmatrix} a_5 & -b_4 & -a_3 & b_2 & \tilde{a}_1 & -b_0 & 0 \\ 0 & a_5 & -b_4 & -a_3 & b_2 & \tilde{a}_1 & -b_0 \\ 0 & 0 & a_5 & -b_4 & -a_3 & b_2 & \tilde{a}_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & -b_3 & -\tilde{a}_2 & b_1 \\ 0 & 0 & a_4 & -b_3 & -\tilde{a}_2 & b_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & -b_3 & -\tilde{a}_2 & b_1 & a_0 & 0 \\ a_4 & -b_3 & -\tilde{a}_2 & b_1 & a_0 & 0 & 0 \end{vmatrix} > 0; \quad (2.9)$$

$$I_9 = |\Delta_9| = \begin{vmatrix} a_5 & -b_4 & -a_3 & b_2 & \tilde{a}_1 & -b_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_5 & -b_4 & -a_3 & b_2 & \tilde{a}_1 & -b_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_5 & -b_4 & -a_3 & b_2 & \tilde{a}_1 & -b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 & -b_4 & -a_3 & b_2 & \tilde{a}_1 & -b_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_4 & -b_3 & -\tilde{a}_2 & b_1 & a_0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & -b_3 & -\tilde{a}_2 & b_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & -b_3 & -\tilde{a}_2 & b_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & -b_3 & -\tilde{a}_2 & b_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & -b_3 & -\tilde{a}_2 & b_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} > 0. \quad (2.10)$$

Так як $I_1 > 0$, то асимптотична стійкість рівномірних обертань в середовищі з опором двох гіроскопів Лагранжа, один із яких має рідину, визначається чотирма нерівностями (2.7) – (2.10).

З нерівності (2.6) видно, що при частковій дисипації ($D_{11} = D_{21} = 0$, $D_{i3} \neq 0$) асимптотична стійкість неможлива.

Стабілізувати нестійке рівномірне обертання першого гіроскопа можна за допомогою кінетичного моменту другого гіроскопа $\tilde{C}_2$ ($\tilde{C}_2 = C_2 \omega_{02}$), розташуванням центру мас і значеннями коефіцієнтів пружності сферичних шарнірів k_1 і k_2 .

Умови стабілізації відносно кінетичного моменту $\tilde{C}_2$ запишуться таким чином:

$$\begin{aligned} I_{32}\tilde{C}_2^2 + I_{31}\tilde{C}_2 + I_{30} &> 0; \\ I_{54}\tilde{C}_2^4 + I_{53}\tilde{C}_2^3 + \dots + I_{51}\tilde{C}_2 + I_{50} &> 0; \\ I_{76}\tilde{C}_2^6 + I_{75}\tilde{C}_2^5 + \dots + I_{71}\tilde{C}_2 + I_{70} &> 0; \\ I_{96}\tilde{C}_2^6 + I_{95}\tilde{C}_2^5 + \dots + I_{91}\tilde{C}_2 + I_{90} &> 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Тут

$$\begin{aligned} I_{32} &= D_1 g_3; \quad I_{54} = D_1^2 g_3 f_5; \quad I_{76} = D_1^3 E_1 \tilde{\lambda}_1^2 \omega_{01}^2 \lambda_1 (\lambda_1 - 1) (k_1 + k_2 - a_1 g) g_3; \\ I_{96} &= D_1^3 E_1 \tilde{\lambda}_1^4 \omega_{01}^2 \lambda_1 (\lambda_1 - 1) f_9 h_9 g_3; \\ g_3 &= \mu^2 D_1 + A_1^{*2} D_2 > 0; \quad f_5 = k_1 + k_2 - a_1 g + E_1 \lambda_1 (\lambda_1 - \omega_1); \\ f_9 &= (k_1 - a_1 g) k_2 - (k_1 + k_2 - a_1 g) a_2 g; \quad h_9 = k_2^2 D_1 + (k_1 + k_2 - a_1 g)^2 D_2 > 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Інші коефіцієнти не наведено через їхню громіздкість.

Знайдемо умови для коефіцієнтів пружності k_1 і k_2 , для коефіцієнтів a_1 і a_2 , які характеризують розташування центрів мас тіл S_1 і S_2 та на власні значення λ_1 , при яких нерівності (2.11) виконуватимуться при досить великих значеннях кутової швидкості ω_{02} .

Із (2.12) випливає, що коефіцієнти I_{54} , I_{76} , I_{96} будуть додатними при

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 - a_1 g + E_1 \omega_{01}^2 \lambda_1 (\lambda_1 - 1) &> 0; \\ (\lambda_1 - 1)(k_1 + k_2 - a_1 g) &> 0; \\ (k_1 - a_1 g) k_2 - (k_1 + k_2 - a_1 g) a_2 g &> 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Для виконання нерівностей (2.13) достатньо, щоб

$$k_1 \geq a_1 g ; \quad (2.14)$$

$$\lambda_1 > 1 ; \quad (2.15)$$

$$a_2 < 0 . \quad (2.16)$$

Отже, якщо нерівності (2.14) – (2.16) виконуються, то старші коефіцієнти у системі нерівностей (2.11) додатні і при досить великих значеннях кутової швидкості ω_{02} буде можлива стабілізація нестійкого обертання вихідного гіроскопа Лагранжа з ідеальною рідиною.

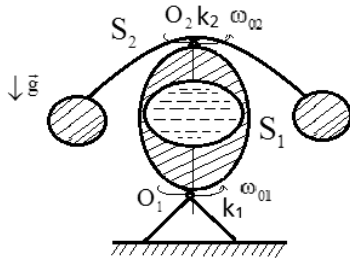


Рис. 2

У разі еліпсоїдальної порожнини $\lambda_1 = 2/(1 + \beta^2)$, де $\beta = c/a$, a і c – її півосі, причому c – величина півосі, спрямованої вздовж осі обертання [3, 4]. У цьому випадку із нерівності (2.15) випливає, що $c < a$ і еліпсоїдальна порожнина має бути стиснутою вздовж осі обертання.

Так як $a_2 = m_2 c_2$, то із нерівності (2.16) випливає, що центр мас другого гіроскопа повинен перебувати нижче точки O_2 , тобто спільної точки двох гіроскопів (рис. 2).

§3. Випадок відсутності дисипативного і постійного моментів.

Розглянемо випадок відсутності дисипативних ($D_{ij} = 0, i = 1, 2; j = 1, 3$) і постійних ($Q_i = 0$) моментів і розглянемо можливість стабілізації «сплячого» гіроскопа Лагранжа з рідиною за допомогою другого гіроскопа, який обертається, та пружних моментів. У цьому випадку система рівнянь (1.2) – (1.3) допускає розв'язки (1.5), де $r_i = \omega_{0i}$, а характеристичне рівняння (2.4) при $\tilde{a}_2 = a_4 = b_3 = b_1 = 0$ матиме вигляд

$$a_5 \lambda^5 + ib_4 \lambda^4 + a_3 \lambda^3 + ib_2 \lambda^2 + \tilde{a}_1 \lambda + ib_0 = 0 . \quad (3.1)$$

Коефіцієнти рівняння (3.1) визначаються за формулами (2.6), в яких потрібно прийняти $D_{ij} = 0$.

Стійкість консервативних систем визначається тим, що корені рівняння (3.1) повинні знаходитися на уявній осі. Для цього в рівнянні (3.1) покладемо $\lambda = i\mu$ і це рівняння матиме вигляд:

$$a_5 \mu^5 + b_4 \mu^4 - a_3 \mu^3 - b_2 \mu^2 + \tilde{a}_1 \mu + b_0 = 0 . \quad (3.2)$$

Для того, щоб всі нулі рівняння (3.2) були різні і лежали на дійсній осі, згідно критерію Лєнара – Шіпара, записаного в іннормному вигляді [2], необхідно і достатньо, щоб матриця дев'ятого порядку, яка складена з коефіцієнтів цього рівняння, була іннормно-позитивною, тобто щоб були позитивно визначеними матриці $\Delta_1, \Delta_3, \Delta_5, \Delta_7$ і Δ_9 :

$$I_1 = |\Delta_1| = 5a_5 > 0 ;$$

$$I_3 = |\Delta_3| = \begin{vmatrix} a_5 & b_4 & -a_3 \\ 0 & 5a_5 & 4b_4 \\ 5a_5 & 4b_4 & -3a_3 \end{vmatrix} > 0 ; \quad (3.3)$$

$$I_5 = |\Delta_5| = \begin{vmatrix} a_5 & b_4 & -a_3 & -b_2 & \tilde{a}_1 \\ 0 & a_5 & b_4 & -a_3 & -b_2 \\ 0 & 0 & 5a_5 & 4b_4 & -3a_3 \\ 0 & 5a & 4b_4 & -3a_3 & -2b_2 \\ 5a & 4b_4 & -3a_3 & -2b_2 & \tilde{a}_1 \end{vmatrix} > 0; \quad (3.4)$$

$$I_7 = |\Delta_7| = \begin{vmatrix} a_5 & b_4 & -a_3 & -b_2 & \tilde{a}_1 & b_0 & 0 \\ 0 & a_5 & b_4 & -a_3 & -b_2 & \tilde{a}_1 & b_0 \\ 0 & 0 & a_5 & b_4 & -a_3 & -b_2 & \tilde{a}_1 \\ 0 & 0 & 0 & 5a_5 & 4b_4 & -3a_3 & -2b_2 \\ 0 & 0 & 5a_5 & 4b_4 & -3a_3 & -2b_2 & \tilde{a}_1 \\ 0 & 5a_5 & 4b_4 & -3a_3 & -2b_2 & \tilde{a}_1 & 0 \\ 5a_5 & 4b_4 & -3a_3 & -2b_2 & \tilde{a}_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} > 0; \quad (3.5)$$

$$I_9 = |\Delta_9| = \begin{vmatrix} a_5 & b_4 & -a_3 & -b_2 & \tilde{a}_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_5 & b_4 & -a_3 & -b_2 & \tilde{a}_1 & b_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_5 & b_4 & -a_3 & -b_2 & \tilde{a}_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 & b_4 & -a_3 & -b_2 & \tilde{a}_1 & b_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5a_5 & 4b_4 & -3a_3 & -2b_2 & \tilde{a}_1 \\ 0 & 0 & 0 & 5a_5 & 4b_4 & -3a_3 & -2b_2 & \tilde{a}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 5a_5 & 4b_4 & -3a_3 & -2b_2 & \tilde{a}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 5a_5 & 4b_4 & -3a_3 & -2b_2 & \tilde{a}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 5a_5 & 4b_4 & -3a_3 & -2b_2 & \tilde{a}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} > 0. \quad (3.6)$$

Так як $I_1 > 0$, то стійкість рівномірних обертань двох гіроскопів Лагранжа, один з яких має порожнину з ідеальною рідиною, визначається чотирма нерівностями (3.3) – (3.6).

Так як і раніше, стабілізувати нестійке рівномірне обертання першого гіроскопа можна за допомогою кінетичного моменту другого гіроскопа $\tilde{C}_2$ ($\tilde{C}_2 = C_2 \omega_{02}$), розташуванням його центру мас і коефіцієнтів пружності сферичних шарнірів k_1 і k_2 .

Таким чином, умови стабілізації відносно кінетичного моменту $\tilde{C}_2$ запишуться наступним чином:

$$\begin{aligned} I_{32}\tilde{C}_2^2 + I_{31}\tilde{C}_2 + I_{30} &> 0; \\ I_{54}\tilde{C}_2^4 + I_{53}\tilde{C}_2^3 + \dots + I_{51}\tilde{C}_2 + I_{50} &> 0; \\ I_{76}\tilde{C}_2^6 + I_{75}\tilde{C}_2^5 + \dots + I_{71}\tilde{C}_2 + I_{70} &> 0; \\ I_{98}\tilde{C}_2^8 + I_{97}\tilde{C}_2^7 + \dots + I_{91}\tilde{C}_2 + I_{90} &> 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Тут

$$\begin{aligned} I_{32} &= 2A_1^{*2} > 0; \quad I_{54} = A_1^{*2} \left[8(k_1 + k_2 - a_1 g - \tilde{C}_1 \lambda_1) A_1^* + 3(\tilde{C}_1 + A_1^* \lambda_1)^2 \right] = \\ &= A_1^{*2} \left[8(k_1 + k_2 - a_1 g) A_1^* + (\tilde{C}_1 - A_1^* \lambda_1)^2 + 2(\tilde{C}_1^2 + A_1^{*2} \lambda_1^2) \right], \quad A_1^* > 0; \\ I_{76} &= 4A_1^* k_1^3 + I_{762} k_1^2 + I_{761} k_1 + I_{760} = 4A_1^* k_2^3 + \tilde{I}_{762} k_2^2 + \tilde{I}_{761} k_2 + \tilde{I}_{760}; \end{aligned}$$

$$I_{98} = 4A_1^*k_1^3 + I_{982}k_1^2 + I_{98}k_1 + I_{980} = 4A_1^*k_2^3 + \tilde{I}_{982}k_2^2 + \tilde{I}_{981}k_2 + \tilde{I}_{980}.$$

Щоб I_{54} було додатне, достатньо покласти $k_1 + k_2 - a_1g \geq 0$. Коефіцієнти I_{76} і I_{98} є кубічними багаточленами відносно k_1 і k_2 з додатними коефіцієнтами при старших ступенях. Таким чином, при досить великих значення k_1 або k_2 коефіцієнти I_{76} і I_{98} будуть додатні.

Отже, за досить великих значень кінетичного моменту і одного з відновлювальних моментів, або обох цих моментів нерівності (3.7) будуть виконані і буде можлива стабілізація нестійкого обертання твердого тіла з рідиною. Слід зазначити, що центр мас другого гіроскопа може мати довільне розташування, а у випадку еліпсоїдальної порожнини вона може бути не тільки стиснута, а й витягнута. При $k_1 = 0$ отримані результату співпадають з результатами роботи [17].

Таким чином, у випадку наявності дисипації стабілізація можлива, коли центр мас другого гіроскопа знаходиться нижче загальної точки обох гіроскопів і еліпсоїдальна порожнина стиснута (рис. 2). За відсутності дисипації маса другого гіроскопа може мати довільне розташування, а еліпсоїдальна порожнина може бути не тільки стиснутою, але й витягнутою (рис. 1). У цьому є принципова різниця в цих двох випадках.

Висновок.

Розглянуто можливість стабілізації нестійкого рівномірного обертання в середовищі з опором «сплячого» гіроскопа Лагранжа з ідеальною рідиною за допомогою другого гіроскопа, який обертається. Показано, що стабілізація буде неможлива за відсутності пружності в спільному шарнірі та співпадинні центру мас другого гіроскопа з цим шарніром. На основі критерію Льєнара – Шіпара, записаного в інваріантному вигляді, отримані умови стабілізації у вигляді системи чотирьох нерівностей відповідно кінетичного моменту другого гіроскопа. Знайдено умови для коефіцієнтів пружності шарнірів, першого тону коливання ідеальної рідини та для положення центрів мас гіроскопів, при яких старші коефіцієнти цих нерівностей позитивні. На прикладі стиснутої еліпсоїдальної порожнини показано, що при досить великій кутовій швидкості обертання другого гіроскопа стабілізація завжди буде можлива в припущенні, що центр мас другого гіроскопа знаходиться нижче спільної точки обох гіроскопів. Проведено порівняння випадків наявності і відсутності дисипації. Показано, що при відсутності дисипації маса другого гіроскопа може мати довільне розташування, а еліпсоїдальна порожнина може бути не тільки стиснута, а й витягнута. У цьому є принципова різниця в цих двох випадках.

Автори частково підтримані грантом EFDS-FL2-08 Європейської федерації академій наук і гуманітарних наук (ALLEA).

РЕЗЮМЕ. Показана можливість стабілізації нестійкого рівномірного обертання в середовищі з опором «сплячого» гіроскопа Лагранжа з ідеальною рідиною за допомогою другого обертового гіроскопа та пружних сферичних шарнірів. «Сплячий» гіроскоп має довільну осесиметричну порожнину, повністю заповнену ідеальною нестисливою рідиною і обертається навколо нерухомої точки, а над ним розташований другий гіроскоп. Гіроскопи з'єднані пружним сферичним шарніром, а їх обертання підтримуються сталими моментами, спрямованими вздовж їх осей симетрії. Знайдено умови для коефіцієнтів пружності шарнірів, першого тону коливання ідеальної рідини та для положення центрів мас гіроскопів, при яких стабілізація буде можлива. На прикладі стиснутої еліпсоїдальної порожнини показано, що при досить високій кутовій швидкості обертання другого гіроскопа стабілізація завжди буде можливою за умови, що центр мас другого гіроскопа розміщується нижче спільної точки гіроскопів. Отримані умови стабілізації порівнюються з аналогічними умовами за відсутності дисипації.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: гіроскоп Лагранжа, довільна осесиметрична порожнина, ідеальна нестислива рідина, середовище з опором, стабілізація, асимптотична стійкість.

1. Болграбская И.А., Лесина М.Е., Чебанов Д.А. Динамика систем связанных твёрдых тел. Т.9. Задачи и методы: математика, механика, кибернетика. – Киев: Наук. думка, 2012. – 395 с.
2. Джурри Э. Инноры и устойчивость динамических систем. – Москва: Наука, 1979. – 304 с.
3. Докучаев Л.В. Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами. – Москва: Машиностроение, 1987. – 232 с.
4. Докучаев Л.В., Рвалов Р.В. Об устойчивости стационарного вращения твердого тела с полостью, содержащей жидкость // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1973. – № 2. – С. 6 – 14.
5. Карапетян А.В. О стационарных движениях волчка Лагранжа с возбуждением в сопротивляющейся среде // Вестник Московского ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. – 2000. – № 5. – С. 39 – 43.
6. Кононов Ю.Н. О влиянии перегородок в цилиндрической полости на устойчивость равномерного вращения волчка Лагранжа // Матем. физ. и нелин. механика. – 1992. – 17, № 51. – С. 33 – 37.
7. Кононов Ю.Н. Об устойчивости движения системы n связанных твердых тел с полостями, содержащими жидкость // Механика твердого тела. Межвед. сб. науч. тр. – 2006. – Вып. 36. – С. 75– 82.
8. Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Кан Н.З. Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. – Москва: Наука, 1989. – 416 с.
9. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. – Москва: Наука, 1976. – 320 с.
10. Рвалов Р.В., Роговой В.М. О вращательном движении тела с полостью, содержащей жидкость // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1972. – № 3. – С. 15 – 20.
11. Савченко А.Я., Болграбская И.А., Кононыхин Г.А. Устойчивость движения систем связанных твёрдых тел. – Киев: Наук. думка, 1991. – 166 с.
12. Akulenko L.D., Zinkevich Ya.S., Kozachenko T.A., Leshchenko D.D. The evolution of the motions of a rigid body close to the Lagrange case under the action of an unsteady torque // J. of Appl. Mathem. and Mech. – 2017. – 81, N 2. – P. 79 – 84.
13. Aslanov V.S. Rigid Body Dynamics for Space Applications. – Oxford: Butterworth Heinemann, 2017. – 410 p.
14. Chernousko F.L., Akulenko L.D., Leshchenko D.D. Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass. – Berlin: Springer, 2017. – 260 p.
15. Kononov Yu.M. Stability of a Uniform Rotation of an Asymmetric Rigid Body in a Resisting Medium under a Constant Moment // Int. Appl. Mech. – 2021. – 57, N 4. – P. 432 – 439.
16. Kononov Yu.M., Syvatenko Ya.I. Stabilization of Unstable Spinning of a Lagrange Gyroscope in a Resisting Medium by Another Spinning Gyroscope // Int. Appl. Mech. – 2022. – 58, N 5. – P. 605 – 612
17. Kononov Y.N., Khomyak T.V. On the rotation stabilization of the unstable gyroscope containing fluid by rotating the rigid body // Facta Universitatis. Series Mechanics, Automatic Control and Robotics. – 2005. – 4, N 17 – P. 195 – 201.
18. Khomyak T.V. Stabilization of the Unstable Spinning of a Lagrange Top Filled with a Fluid // Int. Appl. Mech. – 2015. – 51, N 6. – P. 702 – 705.
19. Leshchenko D.D., Ershkov S.V., Kozachenko T.A. Evolution of a heavy rigid body rotation under the action of unsteady restoring and perturbation torques // Nonlinear Dyn. – 2021. – N 103– P. 1517 – 1528.
20. Leshchenko D., Ershkov S., Kozachenko T. Rotations of a Rigid Body Close to the Lagrange Case under the Action of Nonstationary Perturbation Torque // J. Appl. Comput. Mech. – 2022. – 8, N 3 – P. 1023 – 1031.

Надійшла 24.05.2022

Затверджена до друку 13.12.2022