

В.Д.Кубенко¹, І.В.Янчевський²

**ДИФРАКЦІЙНЕ ПОЛЕ І РАДІАЦІЙНА СИЛА ДЛЯ ПУХИРЦЯ РІДИНИ
В НЕСКІНЧЕННІЙ ЦИЛІНДРИЧНІЙ ПОРОЖНИНІ З ІНШОЮ РІДИНОЮ**

¹Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,
вул. П. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: venkub@ukr.net

²Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського»,
просп. Берестейський, 37, 03056, Київ, Україна; e-mail: i.yanchevskiy@kpi.ua

Abstract. An exact solution is obtained for the axisymmetric acoustic problem on the interaction of a plane wave with a fluid spherical bubble, which is immersed in a cylindrical cavity with another fluid. To satisfy all boundary conditions, the general solution is presented in the form of normal mode development in the spherical bubble and cylindrical cavity-related coordinate systems, and the representations of cylindrical wave functions through spherical and vice versa are used. The calculations are reduced to an infinite system of algebraic equations, which is solved by truncation. The obtained numerical results describe the scattered field of pressure and velocity in the vicinity of the bubble as a function of frequency, characteristics of liquids, and geometric parameters of the mechanical system. The strength of acoustic radiation on the bubble is calculated and its features at some frequencies of the operating wave are shown.

Key words: infinite cylindrical cavity, ideal compressible liquid, plane standing wave, spherical bubble, hydrodynamic interaction, acoustic radiation force.

Вступ.

Дослідження гідроакустичних сил, що діють на занурену в рідину частинку (пухирець), продовжуються впродовж майже століття. Актуальність таких досліджень пов'язана з дуже цікавими і широкими можливостями впровадження в різноманітних сферах людської діяльності. Суть явища, що викликає значний інтерес, полягає в тому, що занурена частинка в полі дії усталених акустичних хвиль перебуває під дією сталих осереднених за часом сил, що стимулюють її до переміщення, взаємодії з іншими частинками, концентрації в певних місцях та інше. Такі сили називають акустичними радіаційними силами. Радіаційна сила визначається інтегруванням діючого тиску по збуреній поверхні частинки. Вираз для тиску з точністю до величин другого порядку визначається через потенціал відповідної лінійної акустичної задачі [10, 19].

Переважає більшість досліджень радіаційних сил пов'язана з вивченням подинної частинки (рідше – кластера частинок) в безмежному акустичному просторі. Роботи [5, 6, 8, 9, 15, 16] присвячені вивченню поведінки частинки в півпросторі. В публікаціях [11, 12] розвивається підхід до розв'язання гідроакустичної задачі для твердої частинки в обмеженому об'ємі – в заповненій рідиною нескінченній циліндричній порожнині. Така задача є першим етапом розгляду задачі про радіаційну силу. В статті [18] вивчається поведінка твердої пружної частинки. У вказаних роботах, а також в публікаціях [13, 14] на прикладі задачі для напівнескінченної циліндричної порожнини з рідиною, що містить тверде сферичне тіло, показано, що при певних частотах збудження амплітуда тиску й швидкості збурених хвиль може значно перевершити

амплітуду зовнішнього збудження. Можна очікувати, що ця особливість може істотно вплинути на значення радіаційної сили.

У цитованих вище роботах як об'єкт дослідження фігурувала тверда або пружна частинка. Очевидно, вказані особливості акустичного процесу можуть бути суттєво модифіковані або доповнені новими у випадку, коли об'єктом дослідження є пухирець іншої рідини або газу. Для пухирця в безмежній рідині відомі класичні дослідження [19, 20], присвячені визначенню акустичної радіаційної сили, що діє на пухирець в полі плоскої гармонічної хвилі. Радіаційна сила для податливої частинки визначається в публікації [23]. В роботах [15, 16] розглядається рідкий пухирець або додатково вкритий пружною оболонкою в півпросторі рідини. Мета даної роботи – дослідження особливостей акустичної взаємодії плоскої гармонічної або стоячої хвилі з пухирцем рідини, які зумовлені обмеженістю несучої рідини стінками нескінченної циліндричної порожнини. Визначаються гідродинамічні параметри процесу і акустична радіаційна сила, що діє на пухирець.

Розв'язанню такої задачі присвячена публікація [22]. У вказаній роботі мали місце неточності при отриманні виразу для радіаційної сили і числові результати приведені для випадку твердого частинки. Крім того, вибрана форма потенціалу діючого навантаження була такою, що ускладнює фізичний аналіз результатів. В даній публікації уточнено постановку задачі, виправлені неточності і стисло викладено підхід до її розв'язання, що базується на публікаціях [13, 14, 21]. Одержано аналітичний розв'язок задачі у вигляді узагальненого ряду Фур'є, коефіцієнти якого знаходяться з нескінченної лінійної системи алгебраїчних рівнянь. Конкретні обчислення виконано для випадку стоячої хвилі, що утворюється двома падаючими хвилями, які рухаються вздовж осі порожнини в протилежних напрямках. Представлені результати обчислень гідродинамічних параметрів процесу, що розглядається, в залежності від його фізико-механічних і геометричних параметрів. Обчислено радіаційну силу, що діє на пухирець в порожнині.

§1. Постановка задачі.

Будемо вважати, що нескінченна порожнина має кругову циліндричну поверхню радіусом ρ_0 , а розташований в ній пухирець – сферичну з радіусом R . Віднесемо

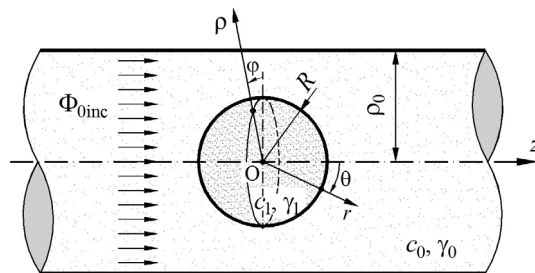


Рис. 1

порожнину до циліндричних координат (ρ, z, φ) так, що вісь порожнини збігається з віссю z . Порожнина з твердими стінками заповнена ідеальною стисливою рідиною густини γ_0 , звук в якій поширюється зі швидкістю c_0 . Всередині перебуває пухирець іншої рідини з акустичними характеристиками γ_1 і c_1 . Введемо пов'язану з пухирцем сферичну систему координат (r, θ, φ) з початком координат

у точці О (рис. 1). Для простоти розв'язання розглянемо випадок, коли центр пухирця розташований на осі порожнини. Тоді має місце осьова симетрія задачі і розв'язок не залежить від координати φ .

В рідині, що заповнює порожнину, у додатному напрямку осі z поширюється плоска акустична хвиля з потенціалом

$$\Phi_{0inc} = F e^{i(kz - \omega t)}, \quad (1.1)$$

де ω – кругова частота; $F = F(\omega)$ – амплітуда, що в загальному випадку є функцією частоти; $k = \omega / c_0$ – хвильове число; t – час.

Падаюча плоска хвиля (1.1) відбивається від поверхні пухирця і, крім того, випромінюється у його внутрішній об'єм. Відбита хвиля вступає у взаємодію з поверхнею порожнини. В свою чергу випромінена хвиля обумовлює акустичний тиск всередині пухирця, що викликає вторинне випромінення хвиль в порожнину. Вказане в сукупності створює процес багатократного розсіювання в механічній системі, що розглядається. Задача полягає у визначенні сумарного хвильового поля і встановленні його особливостей в залежності від частоти діючої хвилі, фізико-механічних та геометричних параметрів системи. Обчислення гідродинамічного тиску дає змогу визначити акустичну радіаційну силу [10], яка обумовлює рух пухирця.

Доцільно ввести в розгляд безрозмірні позначання, прийнявши як основні величини радіус циліндричної порожнини ρ_0 і характеристики рідини, що заповнює порожнину, а саме – швидкість звуку c_0 і густину γ_0 :

$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}; \quad \bar{r} = \frac{r}{\rho_0}; \quad \bar{z} = \frac{z}{\rho_0}; \quad \bar{t} = \frac{t c_0}{\rho_0}; \quad \bar{R} = \frac{R}{\rho_0}; \quad \bar{\omega} = \frac{\omega \rho_0}{c_0}; \quad \bar{V} = \frac{V}{c_0}; \quad \bar{p} = \frac{p}{\gamma_0 c_0^2}. \quad (1.2)$$

Тут V – швидкість; p – гідродинамічний тиск.

Надалі використовуються тільки безрозмірні величини, тому риска над позначаннями буде опущена.

Потенціали розсіяних хвиль у рідині, що заповнює порожнину Φ_0 , і хвиль у рідині всередині пухирця Φ_1 задовольняють рівнянням Гельмгольца

$$\Delta \Phi_j + \eta_j^2 \omega^2 \Phi_j = 0 \quad (j = 0, 1), \quad (1.3)$$

де Δ – диференціальний оператор Лапласа; $\eta_0 = 1$; $\eta_1 = \eta = c_0/c_1$.

Множник $e^{-i\omega t}$ тут і в подальшому входить в розв'язок задачі.

У лінійному наближенні гідродинамічні швидкість та тиск визначаються через потенціали з наступних співвідношень:

$$V_j = \text{grad } \Phi_j; \quad p_j = i\omega \zeta_j \Phi_j \quad (j = 0, 1). \quad (1.4)$$

Тут позначено $\zeta_0 = 1$; $\zeta_1 = \zeta = \gamma_1/\gamma_0$.

Хвильові потенціали мають задовольняти певним граничним умовам. На твердій поверхні циліндричної порожнини нормальна складова швидкості рідини відсутня, тобто

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} = 0. \quad (1.5)$$

Тут $\Phi = \Phi_{0\text{inc}} + \Phi_0$ – сумарний хвильовий потенціал в рідині, що заповнює циліндричну порожнину.

За умови, що на поверхні пухирця має місце безвідривна взаємодія між зовнішньою й внутрішньою рідинами і, крім того, обидві рідини вважаються ідеальними, граничні умови полягають у рівності нормальних складових швидкості зовнішньої і внутрішньої рідин

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r=R} = \left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right|_{r=R} \quad (1.6)$$

і рівності тиску зовні і зсередини пухирця –

$$\Phi|_{r=R} = \zeta \Phi_1|_{r=R}. \quad (1.7)$$

Потенціал поля розсіяних пухирцем хвиль у циліндричній порожнині має задовольняти умовам випромінювання Зоммерфельда [17] на нескінченності

$$\left(\frac{d\Phi_0}{d\rho} - i\omega\Phi_0 \right) \rightarrow 0, \quad \Phi_0 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \sqrt{\rho^2 + z^2} \rightarrow \infty. \quad (1.8)$$

Через те, що рідини перебувають всередині порожнини і всередині пухирця, їхні хвильові збурення повинні бути також обмежені, відповідно, на осі z і в початку координат (точці O)

$$\Phi_0 \rightarrow \text{const} \quad \text{при} \quad \rho \rightarrow 0; \quad \Phi_1 \rightarrow \text{const} \quad \text{при} \quad r \rightarrow 0. \quad (1.9)$$

Співвідношення (1.1) – (1.9) складають формулювання граничної задачі, розв’язок якої потрібно знайти.

Якщо до плоскої хвилі з потенціалом (1.1), що рухається в додатному напрямку осі z , додати хвилю з потенціалом

$$\Phi_{0\text{inc}}^{(-)} = F e^{-ikz}, \quad (1.10)$$

що рухається в протилежному напрямку, матимемо стоячу хвилю в циліндричній порожнині. Її потенціал $\Phi_{0\text{inc}}^{(+)}$ є суперпозицією хвиль з потенціалами (1.1) і (1.10).

§2. Побудова загального розв’язку задачі.

Визначення потенціалів рідини в порожнині Φ_0 і в пухирці Φ_1 полягає в розв’язанні рівнянь (1.3) із граничними умовами багатозв’язної задачі (1.5) – (1.9). Застосуємо метод розділення змінних у відповідних системах координат. Виходячи з виду граничних поверхонь задачі та використовуючи принцип суперпозиції, хвильовий потенціал Φ_0 акустичного поля в циліндричній порожнині представимо у вигляді суми циліндричного $\Phi_{0\text{cyl}}(\rho, z)$ і сферичного $\Phi_{0\text{sph}}(r, \theta)$ потенціалів

$$\Phi_0 = \Phi_{0\text{cyl}}(\rho, z) + \Phi_{0\text{sph}}(r, \theta). \quad (2.1)$$

Циліндричний і сферичний розв’язок рівнянь Гельмгольца (1.3) мають вигляд [17]

$$\Phi_{0\text{cyl}}(\rho, z) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\xi) J_0(\sqrt{\omega^2 - \xi^2} \rho) e^{i\xi z} d\xi; \quad (2.2)$$

$$\Phi_{0\text{sph}}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n h_n(\omega r) P_n(\cos \theta). \quad (2.3)$$

Потенціал Φ_1 рідини пухирця вибираємо у формі

$$\Phi_1(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n j_n(\eta \omega r) P_n(\cos \theta). \quad (2.4)$$

В наведених формулах $j_n(x)$, $h_n(x)$ – сферичні функції Бесселя і Ганкеля першого роду порядку n , відповідно; $J_0(x)$ – циліндрична функція Бесселя нульового порядку [2]; $P_n(x)$ – поліном Лежандра [3]; X_n , Z_n – невідомі константи; $B(\xi)$ – невідома густина; ξ – параметр поділу.

Гідродинамічний тиск в циліндричній порожнині p_0 і всередині пухирця p_1 в сферичних координатах матимуть вигляд

$$p_0(r, \theta) = i\omega \left[F e^{ikz} + \sum_{n=0}^{\infty} X_n h_n(\omega r) P_n(\cos \theta) \right];$$

$$p_1(r, \theta) = i\omega \zeta \sum_{n=0}^{\infty} Z_n j_n(\eta \omega r) P_n(\cos \theta). \quad (2.5)$$

Вибір необхідного розв'язку з множини (2.2) – (2.4) реалізується шляхом задоволення граничним умовам. Відзначимо, що умови (1.8) і (1.9) вже виконуються на основі вибору розв'язків (2.2) – (2.4). Складові $\Phi_{0\text{cyl}}$ і $\Phi_{0\text{sph}}$ потенціалу Φ_0 у формулі (2.1), згідно з (2.2) і (2.3), записані в системах координат, координатна поверхня яких співпадає з відповідною граничною поверхнею механічної системи. Для виконання граничних умов на кожній такій поверхні необхідно потенціал Φ_0 представити в системі координат, пов'язаній з цією поверхнею. Для цього скористаємося співвідношеннями [21], що дозволяють циліндричні хвильові функції виразити через сферичні хвильові функції, і навпаки:

$$h_n(\omega r) P_n(\cos \theta) = \frac{i^{-n}}{2\omega} \int_{-\infty}^{\infty} P_n\left(\frac{\xi}{\omega}\right) H_0\left(\sqrt{\omega^2 - \xi^2} \rho\right) e^{i\xi z} d\xi; \quad (2.6)$$

$$e^{i\xi z} J_0\left(\sqrt{\omega^2 - \xi^2} \rho\right) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) P_n\left(\frac{\xi}{\omega}\right) j_n(\omega r) P_n(\cos \theta). \quad (2.7)$$

В (2.6) $H_0(x)$ – циліндрична функція Ганкеля нульового порядку.

Співвідношення (2.6) дає змогу записаний у сферичній системі координат (r, θ) потенціал $\Phi_{0\text{sph}}$ представити у пов'язаній із циліндром системі координат (ρ, z) :

$$\Phi_{0\text{sph}}(\rho, z) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\xi) H_0\left(\sqrt{\omega^2 - \xi^2} \rho\right) e^{i\xi z} d\xi; \quad A(\xi) = \frac{1}{2\omega} \sum_{n=0}^{\infty} X_n i^{-n} P_n\left(\frac{\xi}{\omega}\right). \quad (2.8)$$

Використовуючи формули (1.1), (2.1), (2.2) і (2.8), потенціал Φ сумарного акустичного поля в циліндричній порожнині запишеться в циліндричній системі координат (ρ, z) у наступному виді:

$$\Phi(\rho, z) = F e^{i\omega z} + \int_{-\infty}^{\infty} A(\xi) H_0\left(\sqrt{\omega^2 - \xi^2} \rho\right) e^{i\xi z} d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} B(\xi) J_0\left(\sqrt{\omega^2 - \xi^2} \rho\right) e^{i\xi z} d\xi. \quad (2.9)$$

В свою чергу, співвідношення (2.7) дозволяє потенціал $\Phi_{0\text{cyl}}$, поданий в циліндричних координатах (ρ, z) у вигляді (2.2), представити у сферичній системі координат (r, θ)

$$\Phi_{0\text{cyl}}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n j_n(\omega r) P_n(\cos \theta); \quad Y_n = i^n (2n+1) \int_{-\infty}^{\infty} B(\xi) P_n\left(\frac{\xi}{\omega}\right) d\xi. \quad (2.10)$$

Потенціал $\Phi_{0\text{inc}}$ первинної плоскої хвилі (1.1), що поширюється уздовж осі циліндричної порожнини, також розвинемо в ряд по сферичним хвильовим функціям [17]

$$\Phi_{0\text{inc}}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} F i^n (2n+1) j_n(\omega r) P_n(\cos \theta). \quad (2.11)$$

Виходячи із формул (2.1), (2.3), (2.10) і (2.11), потенціал Φ сумарного хвильового поля в циліндричній порожнині можна представити у сферичній системі координат (r, θ) в такому виді:

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[F i^n (2n+1) j_n(\omega r) + X_n h_n(\omega r) + Y_n j_n(\omega r) \right] P_n(\cos \theta). \quad (2.12)$$

У випадку стоячої хвилі слід ввести до розгляду відстань від центра пухирця до найближчої вузлової точки – величину h . Тоді потенціал стоячої хвилі в координатах (r, θ) матиме наступний вигляд

$$\Phi_{\text{stand}}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} F i^n (2n+1) \left[e^{i\omega h} + (-1)^n e^{-i\omega h} \right] \Leftrightarrow j_n(\omega r) P_n(\cos \theta). \quad (2.13)$$

§3. Розв'язання граничної задачі.

Одержані співвідношення (2.2) – (2.4), (2.8) – (2.12) дозволяють перейти до задоволення граничним умовам. Умова (1.5) на поверхні циліндричної порожнини $\rho = 1$ дає

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[A(\xi) H_1(\sqrt{\omega^2 - \xi^2}) + B(\xi) J_1(\sqrt{\omega^2 - \xi^2}) \right] \sqrt{\omega^2 - \xi^2} e^{i\xi z} d\xi = 0. \quad (3.1)$$

Враховуючи, що перетворення Фур'є єдине, використовуючи вираз (2.8) для $A(\xi)$, одержимо представлення шуканої густини $B(\xi)$ через константи X_n :

$$B(\xi) = -\frac{1}{2\omega} \frac{H_1(\sqrt{\omega^2 - \xi^2})}{J_1(\sqrt{\omega^2 - \xi^2})} \sum_{n=0}^{\infty} X_n i^{-n} P_n\left(\frac{\xi}{\omega}\right). \quad (3.2)$$

Для задоволення умовам (1.6), (1.7) на поверхні пухирця $r = R$ використовуємо подання потенціалів (2.4) і (2.12). Внаслідок ортогональності поліномів Лежандра одержимо

$$F i^n (2n+1) j'_n(\omega R) + X_n h'_n(\omega R) + Y_n j'_n(\omega R) = Z_n j'_n(\eta \omega R); \quad (3.3)$$

$$F i^n (2n+1) j_n(\omega R) + X_n h_n(\omega R) + Y_n j_n(\omega R) = \zeta Z_n j_n(\eta \omega R). \quad (3.4)$$

Штрих в позначеннях визначає похідну спеціальної функції за радіальною координатою в точці $z = R$, наприклад $j'_n(\omega R) = \left. \frac{d}{dr} [j_n(\omega r)] \right|_{r=R}$.

З (3.3) – (3.4), з огляду на вирази (2.10) для Y_n та (3.2) для $B(\xi)$, одержуємо нескінченну систему алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів X_n і Z_n :

$$\begin{aligned} X_n h'_n(\omega R) - Z_n j'_n(\eta \omega R) - j'_n(\omega R) \frac{2n+1}{2\omega} \sum_{m=0}^{\infty} i^{n-m} X_m q_{mn} &= -F i^n (2n+1) j'_n(\omega R); \\ X_n h_n(\omega R) - Z_n \zeta j_n(\eta \omega R) - j_n(\omega R) \frac{2n+1}{2\omega} \sum_{m=0}^{\infty} i^{n-m} X_m q_{mn} &= \\ &= -F i^n (2n+1) j_n(\omega R) \quad (n = 0, 1, \dots). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Тут позначено

$$q_{mn} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_1(\sqrt{\omega^2 - \xi^2})}{J_1(\sqrt{\omega^2 - \xi^2})} P_m\left(\frac{\xi}{\omega}\right) P_n\left(\frac{\xi}{\omega}\right) d\xi. \quad (3.6)$$

Для непарних сум індексів $n + m$ маємо $q_{mn} = 0$ і, крім того, $q_{nm} = q_{mn}$.

Виразивши з другого рівняння (3.5) коефіцієнти Z_n через X_n

$$Z_n = Fi^n(2n+1) \frac{j_n(\omega R)}{\zeta j_n(\eta \omega R)} + X_n \frac{h_n(\omega R)}{\zeta j_n(\eta \omega R)} - \frac{2n+1}{2\omega} \frac{j_n(\omega R)}{\zeta j_n(\eta \omega R)} \sum_{m=0}^{\infty} i^{n-m} X_m q_{mn}, \quad (3.7)$$

одержимо з першого рівняння нескінченну систему рівнянь відносно коефіцієнтів X_n

$$X_n - \frac{2n+1}{2\omega} d_n \sum_{m=0}^{\infty} i^{n-m} X_m q_{mn} = -FS_n d_n, \quad (3.8)$$

де

$$a_n = \frac{h_n(\omega R)}{\zeta}; \quad b_n = \frac{j_n(\omega R)}{\zeta}; \quad c_n = \frac{j_n(\eta \omega R)}{j'_n(\eta \omega R)}; \quad d_n = \frac{j'_n(\omega R) - b_n/c_n}{h'_n(\omega R) - a_n/c_n} \quad (n=0,1,\dots).$$

Визначивши коефіцієнти X_n з системи (3.8), можна знайти коефіцієнти Z_n з використанням формули (3.7). На наступному етапі обчислюються гідродинамічний тиск і швидкість точок акустичних середовищ за співвідношеннями (1.4), у яких потенціали Φ_j визначаються виразами (2.4) і (2.12).

Повний потенціал в циліндричній порожнині $\Phi(r, \theta)$ (2.12), який містить потенціали падаючої хвилі і потенціал збурень в порожнині, з врахуванням виразу для Y_n (2.10), (3.2) записується наступним чином

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\begin{aligned} & Fi^n(2n+1) j_n(\omega r) + X_n h_n(\omega r) - \\ & - j_n(\omega r) \frac{2n+1}{2\omega} \sum_{m=0}^{\infty} i^{n-m} X_m q_{mn} \end{aligned} \right] P_n(\cos \theta). \quad (3.9)$$

З нескінченної системи (3.7) маємо

$$-\frac{2n+1}{2\omega} \sum_{m=0}^{\infty} i^{n-m} X_m q_{mn} = \frac{1}{d_n} X_n - Fi^n(2n+1).$$

Тоді з врахуванням цього виразу потенціал (3.9) прийме більш зручний для подальшого обчислення вид

$$\Phi(r, \theta) = e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} i \cdot X_n [y_n(\omega r) - \tilde{d}_n j_n(\omega r)] P_n(\cos \theta), \quad (3.10)$$

$$\text{де } \tilde{a}_n = \text{Im}(a_n) = \frac{y_n(\omega R)}{\zeta}; \quad \tilde{d}_n = \text{Im}\left(\frac{1}{d_n}\right) = \frac{y'_n(\omega R) - \tilde{a}_n/c_n}{j'_n(\omega R) - b_n/c_n}.$$

У формулі (3.10) показано множник $e^{-i\omega t}$, який до цього мався на увазі у всіх попередніх виразах.

§4. Обчислення акустичної радіаційної сили.

За означенням радіаційна сила $\langle F \rangle$, як міра взаємодії акустичної хвилі з перешкодою (в досліджуваному випадку зі сферичним пухирцем), є осередненням по періоду падаючої звукової хвилі гідродинамічної сили F , що діє на цю перешкоду

$$\langle F \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T F dt, \quad (4.1)$$

де $T = 2\pi/\omega$ – період падаючої хвилі, а дужки $\langle \rangle$ позначають осереднення по періоду.

Нижче приведемо основні співвідношення, що стосуються обчислення акустичної радіаційної сили, користуючись джерелами [4, 7, 15, 21]. Для обчислення акустичного тиску з метою визначення радіаційної сили лінійне наближення (1.4) виявляється не-

достатнім, оскільки в цьому випадку тиск є періодичною функцією часу і його осереднене за період коливань хвильового поля значення дорівнює нулеві. Тому для обчислення тиску, що фігурує у формулі (4.1), враховуються доданки другого наближення. У безрозмірному вигляді тиск збурення записується наступним чином через потенціал швидкості:

$$p = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)^2. \quad (4.2)$$

В свою чергу, сила F визначається через потенціал акустичного поля за допомогою формули

$$\mathbf{F} = \iint_S \frac{\partial\Phi}{\partial t} \mathbf{n} dS - \frac{1}{2} \iint_S \left(\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} \right)^2 - |\nabla\Phi|^2 \right) \mathbf{n} dS - \iint_S (v_n \mathbf{n} + v_t \mathbf{t}) v_n dS, \quad (4.3)$$

де v_n , v_t – нормальна та тангенціальна компоненти швидкості; $\mathbf{n}$ і $\mathbf{t}$ – відповідні орти; Φ – дійсна частина сумарного потенціалу швидкості рідини в порожнині.

Оскільки поле швидкостей рідини в порожнині симетричне відносно осі Oz , то гідродинамічна сила спрямована вздовж цієї осі та у сферичній системі координат визначається інтегралом

$$F_z = -2\pi R^2 \int_0^\pi p \sin\theta \cos\theta d\theta. \quad (4.4)$$

Сила (4.4) представляється у вигляді суми

$$F_z = F_r + F_\theta + F_{r\theta} + F_t, \quad (4.5)$$

складові якої мають вид

$$F_r = -\pi R^2 \int_0^\pi \left(\frac{\partial\Phi}{\partial r} \Big|_{r=R} \right)^2 \sin\theta \cos\theta d\theta; \quad F_\theta = \pi \int_0^\pi \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \Big|_{r=R} \right)^2 \sin\theta \cos\theta d\theta;$$

$$F_{r\theta} = 2\pi R \int_0^\pi \left(\frac{\partial\Phi}{\partial r} \Big|_{r=R} \right) \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \Big|_{r=R} \right) \sin^2\theta d\theta; \quad F_t = -\pi R^2 \int_0^\pi \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} \Big|_{r=R} \right)^2 \sin\theta \cos\theta d\theta.$$

Дійсна частина потенціалу (3.10) записується як

$$\Phi = \sum_{m=0}^{\infty} \left[\bar{\Re}_m(r) \sin\omega t + \bar{\Im}_m(r) \cos\omega t \right] P_m(\cos\theta), \quad (4.6)$$

де функції $\bar{\Re}_m(r)$ і $\bar{\Im}_m(r)$ мають вигляд

$$\bar{\Re}_m(r) = \operatorname{Re}(X_m)(y_m(\omega r) - \tilde{d}_m j_m(\omega r)); \quad \bar{\Im}_m(r) = -\operatorname{Im}(X_m)(y_m(\omega r) - \tilde{d}_m j_m(\omega r));$$

$$\tilde{d}_m = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{d_m}\right) = \frac{j'_m(\eta\omega R) y_m(\omega R) - \zeta j_m(\eta\omega R) y'_m(\omega R)}{j'_m(\eta\omega R) j_m(\omega R) - \zeta j_m(\eta\omega R) j'_m(\omega R)}.$$

Використовуючи вирази потенціалів (4.5) і (4.6) і враховуючи наступні тотожності [1]

$$\int_{-1}^1 \mu(1-\mu^2) \frac{dP_m(\mu)}{d\mu} \frac{dP_n(\mu)}{d\mu} d\mu = \begin{cases} \frac{2n(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)}, & m=n; \\ 0, & m>n; \end{cases}$$

$$\int_{-1}^1 \mu P_n(\mu) P_m(\mu) d\mu = \begin{cases} \frac{2(n+1)}{(2n+1)(2n+3)}, & m = n+1; \\ 0, & m \neq n+1; \end{cases}$$

$$\mu = \cos \theta,$$

після осереднення одержимо радіаційну силу

$$\langle F_z \rangle = \langle F_r \rangle + \langle F_\theta \rangle + \langle F_{r\theta} \rangle + \langle F_t \rangle, \quad (4.7)$$

де

$$\begin{aligned} \langle F_r \rangle &= -2\pi R^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m+1}{(2m+1)(2m+3)} [\Re'_m \Re'_{m+1} + \Im'_m \Im'_{m+1}]; \\ \langle F_\theta \rangle &= 2\pi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m(m+1)(m+2)}{(2m+1)(2m+3)} [\Re_m \Re_{m+1} + \Im_m \Im_{m+1}]; \\ \langle F_{r\theta} \rangle &= 2\pi R \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+1)}{(2m+1)(2m+3)} \left[\begin{aligned} &m(\Re_m \Re'_{m+1} + \Im_m^{(j)} \Im'_{m+1}) - \\ &-(m+2)(\Re_{m+1} \Re'_m + \Im_{m+1} \Im'_m) \end{aligned} \right]; \\ \langle F_t \rangle &= -2\pi R^2 \omega^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+1)}{(2m+1)(2m+3)} [\Re_m \Re_{m+1} + \Im_m \Im_{m+1}]; \\ \Re_m &= \bar{\Re}_m(R); \quad \Im_m = \bar{\Im}_m(R); \quad \Re'_m = \bar{\Re}'_m(R); \quad \Im'_m = \bar{\Im}'_m(R). \end{aligned}$$

Остаточно матимемо наступний вираз для обчислення радіаційної сили, що діє на сферичний пухирець в циліндричній порожнині зі стислою рідиною під дією плоскої хвилі:

$$\langle F_z \rangle = 2\pi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+1)}{(2m+1)(2m+3)} \left\{ \begin{aligned} &[m(m+2) - \omega^2 R^2] (\Re_m \Re_{m+1} + \Im_m \Im_{m+1}) - \\ &- R^2 (\Re'_m \Re'_{m+1} + \Im'_m \Im'_{m+1}) + \\ &+ R \left[\begin{aligned} &m(\Re_m \Re'_{m+1} + \Im_m \Im'_{m+1}) - \\ &-(m+2)(\Re_{m+1} \Re'_m + \Im_{m+1} \Im'_m) \end{aligned} \right] \end{aligned} \right\}. \quad (4.8)$$

§5. Числові результати.

При проведенні обчислень у формулі (1.1) множник F обраний у вигляді

$$F(\omega) = -1/i\omega. \quad (5.1)$$

Такий вибір обумовлює одиничну амплітуду тиску у падаючій хвилі за будь-якої частоти $p_{0inc} = e^{i\omega(z-t)}$, що зручно при порівнянні результатів.

Вважалося, що безмежна циліндрична порожнина заповнена водою (W), густина і швидкість поширення звуку в якій дорівнюють $\gamma_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$ і $c_0 = 1500 \text{ м/с}$, відповідно. Для рідини сферичного пухирця обиралися гліцерин (G) з фізичними характеристиками $\gamma_1 = 1250 \text{ кг/м}^3$; $c_1 = 1950 \text{ м/с}$ або гас (K) з $\gamma_1 = 850 \text{ кг/м}^3$; $c_1 = 1330 \text{ м/с}$, вибір яких обумовлений особливостями потенціального застосування результатів ро-

боти у біомедичних, машинобудівних, нафтовидобувних технологіях. Очевидно, що в парі «W – G» густина рідини пухирця більша за густину оточуючого його середовища ($\zeta = \gamma_1/\gamma_0 > 1$), а в парі «W – K» – навпаки ($\zeta < 1$).

Обчислення проводилися для частот $0 < \omega \leq 10$ з дискретним кроком 0,05. При уточнених розрахунках крок сканування був зменшений до 0,001.

Радіаційна сила віднесена до величини $S_c E = \frac{1}{2} \pi R^2 |F|^2 \omega^2$, де E – густина енергії падаючої хвилі; S_c – площа поперечного перерізу.

В даній публікації автори обмежили обчислення розглядом випадку стоячої хвилі, що є суперпозицією двох падаючих хвиль однієї й тієї ж амплітуди і частоти, які рухаються в протилежних напрямках вздовж осі порожнини. Їх потенціали задані формулами (1.1) і (1.10). Права частина системи алгебраїчних рівнянь (3.8) в цьому випадку визначається за формулою

$$-i^n (2n+1) d_n F(e^{-i\omega h} + (-1)^n e^{i\omega h}),$$

де h – відстань від центру пухирця до найближчої вузлової точки вздовж додатної напівосі z циліндричної системи координат (рис. 1). Система (3.8) розв'язувалася методом усікання. Порядок усікання N обирався за критерієм збіжності отриманих результатів і прийнятий рівним 12.

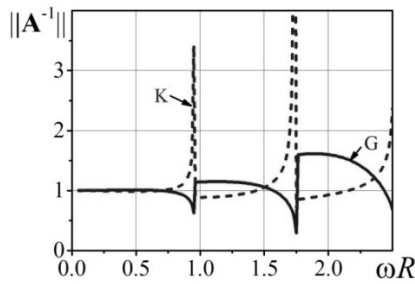


Рис. 2

На рис. 2 представлено модуль оберненої матриці розрахункової системи рівнянь (3.8) як функції частоти для пар рідин «W – G» (суцільна крива «G») і «W – K» (штрихова крива «K»). Приведений графік дозволяє виявити так звані аномальні (умовно резонансні) частоти, які нижче позначені через ω_i ($i = 1, 2, \dots$). Чітко виражені піки значень $\|A^{-1}\|$ для кривої «K» при $\omega_1 R \approx 0,95$ і $\omega_2 R \approx 1,738$ свідчать про очікуване суттєве зростання значень гідродинамічних параметрів на цих частотах. Наступні розрахунки

тиску в контрольних точках L з координатами $(-R; 0)$ і D $(+R; 0)$ циліндричної системи координат підтверджують це (суцільні криві на рис. 3, а). Представлені на рис. 2 і 3 числові результати отримано для пухирця радіусом $R = 0,25$ і відстані до вузлової точки $h = +1,0$. Символ p на рисунках позначає дійсну частину гідродинамічного тиску ($p = \text{Re}(p)$); для обраного виду функції $F(\omega)$ (5.1) обчислена на підставі (1.4)

уявна частина тиску близька до нуля ($\text{Im}(p) \approx 0$). Для пари «W – G», коли рідина пухирця має більшу густину від густини рідини у циліндричній порожнині ($\zeta = 1,25$), зазначені скачки значень як оберненого детермінанта (крива «G» на рис. 2), так і тиску у контрольних точках L і D (суцільні криві на рис. 3, б) є істотно меншими. З порівняння відображених на рис. 3, а і 3, б суцільних кривих можна зробити висновок, що при зменшенні густини рідини пухирця тиск в його околі збільшується, стрибки значень тиску на близьких до умовно резонансних частотах стають більш вираженими.

Слід зазначити, що на рис. 3 штриховими лініями відображені відповідні тиски у точках L (штрих-пунктирна крива) і D (штрихова крива) у випадку, коли сферичний пухирець знаходиться у безмежному рідкому середовищі. Ці дані можна обчислити з використанням системи рівнянь (3.8), у якій коефіцієнти q_{mn} слід покласти рівними нулевим ($q_{mn} = 0$). Відмінність суцільної кривої від відповідної штрихової обумовлена наявністю циліндричної границі порожнини в першому випадку і, відповідно, склад-

ним дифракційним процесом при взаємодії хвиль з граничними поверхнями пухирця і порожнини. При цьому зазначені відмінності спостерігаються саме в околі аномальних частот системи «пухирець – циліндрична порожнина».

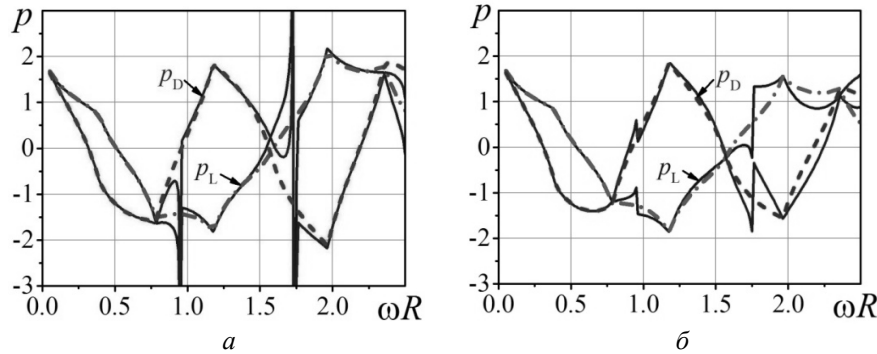


Рис. 3

Рис. 4 ілюструє обчислений на основі співвідношень (1.4) і (2.12) розподіл гідродинамічного тиску в околі пухирця радіусом $R = 0,25$ для пари рідин «W – G» на частоті стоячої хвилі $\omega_1 = 3,832$ ($\omega_1 R = 0,958$), яка є її першою аномальною частотою у випадку $h = +1,0$ (рис. 2).

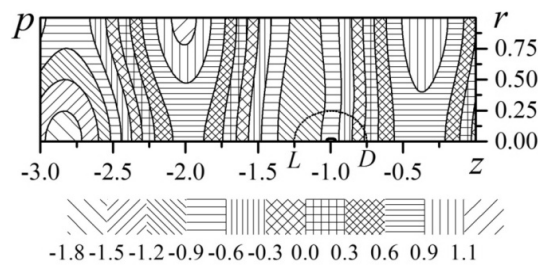


Рис. 4

На рис. 4 простежується періодичний характер зміни тиску уздовж осьової координати z з періодом, який дорівнює довжині стоячої хвилі λ ($\lambda = 2\pi/\omega = 1,64$), а також на ньому можна побачити, що виконуються граничні умови (1.6) на поверхні пухирця (про рівність гідродинамічного тиску).

Нижче приведено результати обчислення акустичної радіаційної сили. Вплив положення вузлової точки на значення діючої на пухирець радіаційної сили ілюструє рис. 5. На цьому рисунку відображені залежності сили $\langle F_z(\omega R) \rangle$ для пухирця радіусом $R = 0,25$ при різних значеннях відстані h від центру пухирця до вузлової точки. Рис. 5, а, б ілюструють випадок пухирця в безмежній рідині, рис. 5, в, г – в циліндричній порожнині з рідиною.

На рис. 5, а представлено графіки радіаційної сили, що діє на пухирець з гасу, на рис. 5, б – з гліцерину. Розрахунки виконано для радіуса пухирця $R = 0,25$. З цих рисунків видно, що сила $\langle F_z \rangle$ при будь-якому довільному значенні h не перевищує силу, обчислену у випадку виконання співвідношення $|\sin(2h\omega)| = 1$ ($h = +\lambda/8$ і $h = -\lambda/8$). При $\sin(2h\omega) = 0$ радіаційна сила дорівнює нулеві (на рис. 5, а і 5, б точкою А показано одне з таких значень ω). Як випливає з аналізу зображених на рис. 5, а і 5, б кривих $h = +\lambda/8$ і $h = -\lambda/8$ радіаційна сила досить плавно змінюється на усьому обраному діапазоні сканування частоти і має один екстремум.

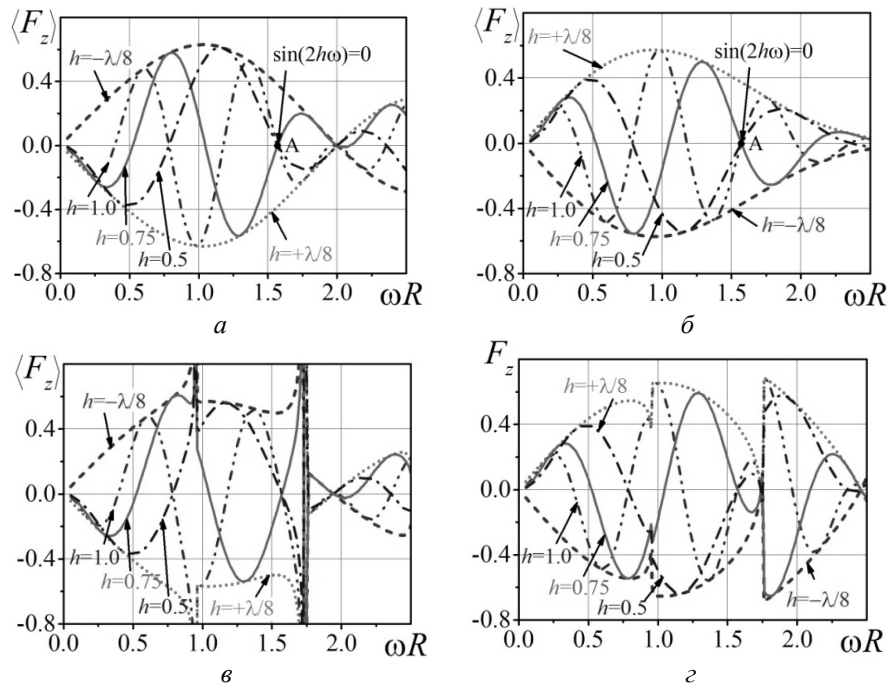


Рис. 5

Максимальне значення сили для пухирця з гасу має місце в околі $\omega R \approx 1,35$, а для гліцеринового пухирця – $\omega R \approx 1,0$. Для гліцеринового пухирця сила $\langle F_z \rangle$ ($\zeta = 1,25$) дещо більша за силу, що діє на пухирець з гасу ($\zeta = 0,85$) при однакових вхідних даних. Як показують розрахунки в діапазоні частот $0 < \omega \leq 10$, напрям дії радіаційної сили, обчислений для пухирця радіуса $R = 0,25$, залежить від співвідношення густин рідин ζ механічної системи і положення вузлової точки та може бути визначений із співвідношення

$$\text{sign}(\langle F_z \rangle) = \text{sign}[(\zeta - 1)\sin(2h\omega)]. \quad (5.2)$$

Рівність нулевій радіаційної сили $\langle F_z \rangle$ при геометричному збігу вузлової точки стоячої хвилі або точки її пучності з центром пухирця ($\sin(2h\omega) = 0$) може свідчити про симетрію поля тиску відносно площини $z = 0$, яка проходить через центр пухирця, за період падаючої хвилі, оскільки зазначена сила обчислюється саме як осереднення тиску за цей період. При рівності густин рідин ($\zeta = \gamma_1/\gamma_0 = 1$) радіаційна сила не виникає на будь-якій частоті і при будь-якому h . Необхідно вказати, що радіаційна сила для рідкого пухирця в безмежній рідині була вперше досліджена в роботі [19]. На жаль, автори знайомі з цією роботою лише з огляду [4], тому відсутня можливість для порівняння.

У випадку, коли пухирець знаходиться в циліндричній порожнині, характер сили $\langle F_z(\omega R) \rangle$ (рис. 5, в і 5, г) змінюється. Основна відмінність між результатами для безмежного і обмеженого зовнішнього середовища полягає в суттєвому (для пари «W – K» на два порядки – рис. 5, в) зростанні значення радіаційної сили в околі аномальних частот, значення яких легко відстежуються за допомогою графіку оберненого детермінанта розрахункової системи рівнянь (рис. 2). Наперед передбачити поведінку сили $\langle F_z(\omega R) \rangle$ в околі таких частот складно, отримати правильну відповідь можна, користуючись формулою (4.15).

Зі зменшенням відносного радіусу пухирця вплив дифракційних процесів в порожнині на значення радіаційної сили суттєво зменшується. На рис. 6, *a* радіаційна сила як функція ωR показана для пар «W – K» і «W – G» при $R = 0,1$ і $h = +\lambda/8$. Штрихова лінія використана для графіка сили $\langle F_z \rangle$ у випадку безмежного середовища, суцільна – для пухирця в порожнині з рідиною. З порівняння представлених на рис. 6, *a* кривих випливає, що для пухирця, радіус якого значно менший радіуса порожнини, гідродинамічні параметри з достатньою точністю можна обчислювати на підставі моделі механічної системи з безмежним зовнішнім середовищем, що суттєво спрощує постановку задачі і час на її розв’язання.

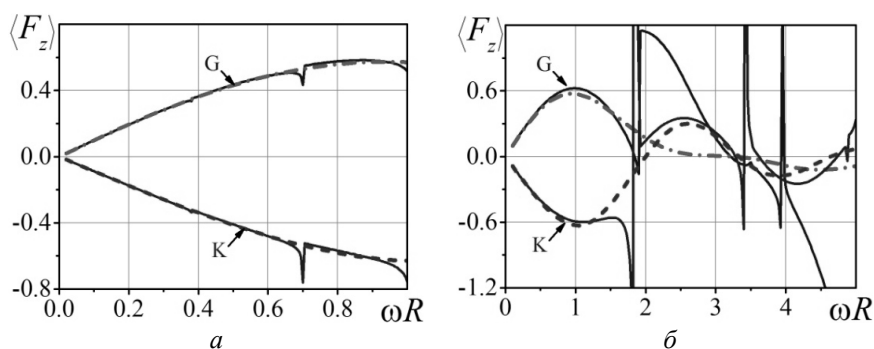


Рис. 6

Рис. 6, *б* показує радіаційну силу як функцію ωR у випадку пухирця з радіусом $R = 0,5$ і $h = +\lambda/8$ в циліндричній порожнині (суцільні лінії) і в безмежній рідині (штрихові). Тут доцільно спочатку пояснити несхожість штрихових кривих (рис. 6, *a*, *б*), які побудовано для пухирця в безмежній рідині. Ця несхожість обумовлена тією обставиною, що для пухирців різних розмірів при одній і тій самій частоті має місце різна відстань від центра пухирця до вузлової точки.

При немалих значеннях радіусу пухирця в порожнині (в нашому випадку $R = 0,5$ – рис. 6, *б*), як показує рисунок, скористатись моделлю пухирця в безмежній рідині можна лише при малих значеннях ω , нижчих за першу аномальну частоту ω_1 . При більших значеннях частоти радіаційна сила, що діє на пухирець у безмежному середовищі, незначна (переривчасті лінії на рис. 6, *б*). Однак для немалого пухирця в циліндричній порожнині при певних відносно великих значеннях частоти (при $\omega > \omega_2 = 7,90$ для пари «W – G» і $\omega > \omega_2 = 6,85$ для пари «W – K») досягається таке значення радіаційної сили, яке суттєво перевищує її значення в безмежному просторі (рис. 6, *б*). Слід вказати, однак, що цей ефект має місце в досить вузькому діапазоні частот в околі аномальної частоти.

Висновки.

У роботі представлено результати дослідження дифракційних полів і радіаційної сили у заповненій ідеальною стисливою рідиною нескінченній циліндричній порожнині, яка містить на осі об’єкт у вигляді сферичного пухирця іншої рідини. Вважається, що в порожнині вздовж осі рухається плоска гармонічна хвиля. Виконано постановку відповідної граничної задачі в лінійному акустичному наближенні та запропоновано підхід до її розв’язання. Сутність підходу полягає в побудові загального розв’язку акустичної задачі у вигляді розвинення по нормальним модам у сферичних і циліндричних координатах і наступному перерозвиненні циліндричних хвильових функцій по сферичним функціям і навпаки. Це дало можливість задовольнити граничним умовам та звести задачу до розв’язання нескінченної системи алгебраїчних рівнянь відносно шуканих коефіцієнтів загального розв’язку. Розв’язок зазначеної алгебраїчної системи одержано методом усикання.

При конкретних обчисленнях припускалося, що в порожнині реалізована стояча акустична хвиля, що є суперпозицією двох плоских хвиль, які рухаються назустріч одна одній. При цьому вузлова точка такої хвилі віддалена від центру пухирця на певну відстань.

В результаті проведених обчислень встановлено особливості полів гідродинамічних параметрів рідини в околі пухирця і діючої на неї радіаційної сили залежно від частоти стоячої хвилі, фізичних властивостей рідин і геометричних параметрів механічної системи. Зокрема встановлено, що сферичний пухирець в циліндричній порожнині з рідиною обумовлює виникнення так званих аномальних («умовно резонансних») частот первинної хвилі, при яких значення гідродинамічних параметрів суттєво зростають. Ці частоти можуть бути ідентифіковані вже на першому етапі розв'язання задачі за піковими значеннями модуля детермінанта оберненої матриці розрахункової системи алгебраїчних рівнянь. При малих значеннях радіуса пухирця дослідження акустичних полів з прийнятною для прикладних вимог точністю можна виконувати в рамках моделі пухирця у безмежному середовищі. Зі збільшенням відносного радіусу пухирця таке спрощення допустиме лише для малих значень частоти, значно менших першої аномальної частоти. У випадку, коли рідина пухирця ідентична рідині порожнини, радіаційна сила не виникає. Вона не виникає також при геометричному співпадінні вузлової точки стоячої хвилі, або точки її пучності, з центром пухирця ($\sin(2h\omega) = 0$). Максимальне за модулем значення радіаційної сили при малих R може бути досягнуто при $h = \pm \lambda/8$, де $\lambda = 2\pi/\omega$ – довжина стоячої хвилі ($|\sin(2h\omega)| = 1$), а напрям сили може бути визначений на підставі рівності $\text{sign}(\langle F_z \rangle) = \text{sign}[(\zeta - 1)\sin(2h\omega)]$. Зі збільшенням радіусу пухирця ця формула справедлива для малих значень частоти. В околі аномальних частот залежність акустичної радіаційної сили від частоти значно ускладнюється і спостерігається суттєво зростання її значень. На таких частотах визначити напрям сили і обчислити її величину можна на підставі запропонованого у роботі підходу.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за підтримки Національного фонду досліджень України (конкурс «Підтримка досліджень провідних та молодих учених», проєкт 2020.02/0112 «Дифракційні процеси і радіаційні сили в обмежених гідропружних системах»).

РЕЗЮМЕ. Отримано точний розв'язок осесиметричної акустичної задачі про взаємодію плоскої хвилі з рідиною сферичного пухирця, який занурений в циліндричну порожнину з іншою рідиною. Для задоволення усіх граничних умов загальний розв'язок представлено у вигляді розв'язання за нормальними модами у зв'язаних зі сферичним пухирцем і циліндричною порожниною системах координат та використано представлення циліндричних хвильових функцій через сферичні і навпаки. Обчислення зведено до нескінченної системи алгебраїчних рівнянь, яка розв'язується методом редукції. Отримані числові результати описують розсіяне поле тиску та швидкості в околі пухирця як функції частоти первинної хвилі, характеристик рідин, геометричних параметрів механічної системи. Розраховано силу акустичного випромінювання на пухирець та показано її особливості на деяких частотах діючої хвилі.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: нескінченна циліндрична порожнина, ідеальна стислива рідина, плоска стояча хвиля, сферичний пухирець, гідродинамічна взаємодія, радіаційна акустична сила.

1. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. – Москва: Наука, 1979. – 832с.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – Москва: Наука, 1965. – 296 с.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: гипергеометрическая функция, функция Лежандра. – Москва: Наука, 1965. – 294 с.

4. Doinikov A. Bjerknes forces and translational bubble dynamics. In: Bubble and Particle Dynamics in Acoustic Fields: Modern Trends and Applications. – Trivandrum: Research Signpost, 2005. – p. 95 – 143. ISBN: 81-7736-284-4.
5. Guz A.N., Zhuk A.P. Motion of Solid Particles in a Liquid under the Action of an Acoustic Field: The Mechanism of Radiation Pressure // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, N 3. – P. 246 – 265.
6. Guz A.N., Zhuk A.P. Dynamics of a rigid cylinder near a plain boundary in the radiation field of an acoustic wave // J. of Fluids and Struct. – 2009. – **25**, N 7. – P. 1206 – 1211.
7. Hasegawa T., Yosioka K. Acoustic radiation force on a solid elastic sphere // J. Acoust. Soc. Am. – 1969. – **46**. – P. 1139–1143.
8. Huang H., Gaunaurd G.C. Acoustic scattering of a plane wave by two elastic shells above the coincidence frequency // J. Acoust. Soc. Am. – 1997. – **101**, N 5. – P. 2659 – 2668.
9. Huang H., Gaunaurd G.C. Scattering of a plane acoustic wave by a spherical elastic shell near a free surface // Int. J. Solids and Struct. – 1997. – **34**, N 5. – P. 591 – 602.
10. King L.V. On the acoustic radiation pressure on spheres // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1934. – **147**, N 861. – P. 246 – 265.
11. Kubenko V.D., Dzyuba V.V. Diffraction of a Plane Acoustic Wave by a Rigid Sphere in a Cylindrical Cavity: an Axisymmetric Problem // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 4. – P. 424 – 432.
12. Kubenko V.D., Dzyuba V.V. Interaction of Infinite Thin Elastic Cylindrical Shell and a Pulsating Spherical Inclusion in Potential Flow of Ideal Compressible Liquid: Internal Axisymmetric Problem // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 3. – P. 297 – 312.
13. Kubenko V.D., Yanchevskiy I.V. “Resonance” phenomenon of kinematic excitation by a spherical body in a semi-infinite cylindrical vessel filled with liquid // Acta Mechanica. – 2019. – **230**, N 3. – P. 1009 – 1025.
14. Kubenko V.D., Yanchevskiy I.V. Abnormal Frequencies in a Semi-Infinite Cylindrical Vessel Filled with a Fluid and Dynamically Excited by a Spherical Oscillator // Int. Appl. Mech. – 2020. – **56**, N 2. – P. 141 – 155.
15. Miri A.K., Mitri F.G. Acoustic radiation force on a spherical contrast agent shell near a vessel porous wall – theory // Ultrasound in Med. and Biol. – 2011. – **37**, N 2. – P. 301 – 311.
16. Mitri F.G. Generalized theory of resonance excitation by sound scattering from an elastic spherical shell in a nonviscous fluid // IEEE “Trans. on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control”. – 2012. – **59**, N 8. – P. 1781 – 1790.
17. Morse Ph.M., Feshbach H. Methods of Theoretical Physics. Vol. I. – New York: McGraw-Hill Book Comp. Inc., 1953. – 1061 p.
18. Shi J., Zhang X., Chen R., Zhang G. Acoustic radiation force of a solid elastic sphere immersed in a cylindrical cavity filled with ideal fluid // Wave Motion. – 2018. – **80**. – P. 37 – 46.
19. Yosioka K., Kawasima Y. Acoustic radiation pressure on a compressible sphere // Acta Acustica united with Acustica. – 1955. – **5**, N 3. – P. 167 – 173.
20. Yosioka K., Kawasima Y., Hirano H. Acoustic radiation pressure on bubbles and their logarithmic decrement // Acta Acustica united with Acustica. – 1955. – **5**. – P. 173 – 178.
21. Zhuk A.P., Kubenko V.D., Zhuk Y.A. Acoustic radiation force on a spherical particle in a fluid-filled cavity // J. Acoust. Soc. Am. – 2012. – **132**, N 4. – P. 2189 – 2197.
22. Zhuk A.P., Kubenko V.D., Zhuk Y.A. Acoustic Radiation Acting on a Liquid Sphere in a Circular Cylinder Filled With A Fluid. // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 5. – P. 501 – 511.
23. Zhuk A.P., Zhuk Ya.A. Effect of Radiation Force on a Flexible Spherical Particle at the Free Liquid Surface // Int. Appl. Mech. – 2020. – **56**, N 6. – P. 690 – 699.

Надійшла 06.12.2021

Затверджена до друку 28.03.2023