О.Я.Григоренко[1], Л.С.Рожок[2], А.М. Онищенко[2],Н.П. Чиженко[2]

МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ НЕТОНКИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК ЗІ ЗБУРЕНОЮ ФОРМОЮ ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ

[1]Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: ayagrigorenko1991@gmail.com
[2]Національний транспортний університет,
вул. Омеляновича-Павленка, 1, 01010, Київ, Україна; e-mail: r.l.s@ua.fm

Abstract. The problem of the stress state of non-thin cylindrical shells with a perturbed cross-sectional shape is studied. This study is based on the linear theory of elasticity for the case of the influence of external normal load under certain boundary conditions at the ends. The numerical analytical approach is based on separating the variables in two coordinate directions using the function approximation by discrete Fourier series and numerical solution in the third coordinate direction by a stable discrete orthogonalization method. The characteristic features of the stress state of the shells under consideration are described depending on their length and thickness for two variants of the shape of the disturbed surface. Pascal's limacon equation in the parametric form is used to describe the cross-section of a reference surface. The results of solving the problem are presented in the form of graphs of stress distribution.

Key words: 3D elasticity theory, discrete Fourier series, perturbed cross-sectional shape, discrete orthogonalization method, stress state, non-thin cylindrical shell.

Вступ.

Розвиток та удосконалення інженерних і комп'ютерних технологій спонукає швидкому розвитку обчислювальних методів, які знаходять своє застосування у різних галузях господарювання. Виходячи з певних характеристик та властивостей досліджуваного об'єкта, застосування обчислювальних методів дозволяє спрогнозувати його поведінку в різноманітних умовах експлуатації та виявити характерні властивості та закономірності поведінки. Обчислювальний експеримент, що базується на використанні математичної моделі та застосуванні відповідного підходу, вдало застосовується в дорожній галузі [14, 17], трубопровідній промисловості [15, 19, 20], машинобудуванні [6, 23], при дослідженні властивостей новостворених матеріалів [7, 16, 18, 21], в медицині, зокрема, стоматології [9] тощо.

На даному етапі розвитку науки і техніки важко уявити собі нафто-, трубо- та газопровідну галузь, будівництво, машинобудування, будівництво літаків, ракет тощо без використання як конструктивних елементів та деталей машин циліндричних оболонок різної товщини. Забезпечення надійності експлуатації таких конструкцій передбачає визначення їх напруженого стану. При цьому важливого значення набуває вибір початкової розрахункової математичної моделі та методу розв'язання поставленої проблеми [1, 8, 13].

Розвиток та удосконалення комп'ютерних технологій стимулював створення численних підходів до розв'язування класів задач теорії пластин та оболонок, що базуються на застосуванні різноманітних аналітичних та чисельних методах. Успішне поєднання останніх дозволяє отримувати розв'язки з достатнім степенем точності в залежності від поставленої мети даної проблеми [5, 22].

При виборі моделі розрахунку при розв'язуванні задач про напружено-деформований стан циліндричних оболонок, необхідно враховувати не тільки геометричні характеристики, а і структуру оболонки та види навантаження. Для тонкостінних оболонок можливе застосування класичної теорії про недеформованість нормалей, у випадку оболонок середньої товщини – різних модифікацій уточненої теорії, для товстостінних – просторової моделі. Але, якщо кривизна поперечного перерізу поверхні відліку оболонки має суттєві відхилення від кругової форми, в цьому випадку для оболонок середньої товщини доцільно також користуватись просторовою моделлю [12].

В даній роботі в просторовій постановці змодельована і розв'язана задача про напружений стан нетонких циліндричних оболонок зі збуреною формою поперечного перерізу поверхні відліку на основі методики, що базується на використанні методів розділення змінних, апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є та чисельного методу дискретної ортогоналізації [10]. Досліджується напружений стан кругових циліндричних оболонок, що мають певні дефекти в околі одного з діаметрів в залежності від виду дефекту, товщини та довжини оболонки. Оболонки перебувають під дією зовнішнього нормального навантаження.

§1. Постановка задачі та метод розв'язування.

Застосуємо рівняння лінійної просторової теорії пружності для ізотропного тіла стосовно оболонок [3]. В ортогональній криволінійній системі координат (s, t, γ) перша квадратична форма має вигляд

$$dS^2 = ds^2 + \left(1 + \gamma / R_t\right)^2 dt^2 + d\gamma^2 , \qquad (1.1)$$

тут s, t – довжини дуг вздовж твірної та напрямної деякої циліндричної поверхні; координата γ відкладається вздовж нормалі до цієї поверхні; $R_t(t)$ – радіус кривизни в поперечному перерізі.

Переміщення точок оболонки при деформації характеризується величинами u_s, u_t, u_γ, що являють собою проекції вектора повного переміщення на напрямки дотичних до обраних осей координат. Відповідні деформації описують величини e_s, e_t, e_γ – відносні лінійні деформації вздовж координатних ліній; $e_{st}, e_{s\gamma}, e_{t\gamma}$ – відповідні відносні зсуви.

В обраній системі відліку напружений стан оболонки визначається: нормальними напруженнями – σ_s, σ_t, σ_γ; дотичними напруженнями – τ_{st}, $\tau_{s\gamma}$, $\tau_{t\gamma}$; $\tau_{st} = \tau_{ts}$, $\tau_{s\gamma} = \tau_{\gamma s}$, $\tau_{t\gamma} = \tau_{\gamma t}$.

Рівняння, які описують клас задач, що розглядаються, мають такий вигляд:

рівняння деформацій через переміщення

$$e_s = \frac{\partial u_s}{\partial s}; \quad e_t = \frac{1}{\left(1 + \gamma / R_t\right)} \frac{\partial u_t}{\partial t} + \frac{1}{\left(1 + \gamma / R_t\right)} \frac{1}{R_t} u_\gamma; \quad e_\gamma = \frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma};$$

$$e_{st} = \frac{1}{\left(1 + \gamma / R_t\right)} \frac{\partial u_s}{\partial t} + \frac{\partial u_t}{\partial s}; \quad e_{s\gamma} = \frac{\partial u_\gamma}{\partial s} + \frac{\partial u_s}{\partial \gamma}; \qquad (1.2)$$

$$e_{t\gamma} = -\frac{1}{\left(1 + \gamma / R_t\right)} \frac{1}{R_t} u_t + \frac{\partial u_t}{\partial \gamma} + \frac{1}{\left(1 + \gamma / R_t\right)} \frac{\partial u_\gamma}{\partial t};$$

рівняння рівноваги

$$\left(1+\gamma/R_t\right)\frac{\partial\sigma_s}{\partial s}+\frac{\partial\tau_{st}}{\partial t}+\frac{1}{R_t}\tau_{s\gamma}+\left(1+\gamma/R_t\right)\frac{\partial\tau_{s\gamma}}{\partial\gamma}=0\,;$$

$$\frac{\partial\sigma_t}{\partial t}+2\frac{1}{R_t}\tau_{t\gamma}+\left(1+\gamma/R_t\right)\frac{\partial\tau_{t\gamma}}{\partial\gamma}+\left(1+\gamma/R_t\right)\frac{\partial\tau_{st}}{\partial s}=0\,; \qquad (1.3)$$

$$\frac{1}{R_t}\sigma_\gamma+\left(1+\gamma/R_t\right)\frac{\partial\sigma_\gamma}{\partial\gamma}+\left(1+\gamma/R_t\right)\frac{\partial\tau_{s\gamma}}{\partial s}+\frac{\partial\tau_{t\gamma}}{\partial t}-\frac{1}{R_t}\sigma_t=0\,;$$

узагальнений закон Гука для ізотропного тіла

$$e_s=\frac{1}{E}\left[\sigma_s-\nu\left(\sigma_t+\sigma_\gamma\right)\right];\quad e_t=\frac{1}{E}\left[\sigma_t-\nu\left(\sigma_s+\sigma_\gamma\right)\right];$$

$$e_\gamma=\frac{1}{E}\left[\sigma_\gamma-\nu\left(\sigma_s+\sigma_t\right)\right];\quad e_{t\gamma}=\frac{1}{G}\tau_{t\gamma}\,;\quad e_{s\gamma}=\frac{1}{G}\tau_{s\gamma}\,;\quad e_{st}=\frac{1}{G}\tau_{st}\,, \qquad (1.4)$$

де E – модуль пружності; $G=E/\left[2\left(1+\nu\right)\right]$ – модуль зсуву; ν – коефіцієнт Пуассона.

Співвідношення (1.2) – (1.4) – основні рівняння лінійної просторової теорії пружності для циліндричних оболонок з некруговим поперечним перерізом.

При визначенні напруженого стану таких оболонок необхідно задовольняти відповідні граничні умови на обмежуючих поверхнях. На зовнішній та внутрішній бічних поверхнях за умови прикладеного зовнішнього нормального навантаження $q=q_\gamma$ граничні умови набувають вигляду

$$\sigma_\gamma=q_\gamma;\ \tau_{s\gamma}=0;\ \tau_{t\gamma}=0 \quad \text{при} \quad \gamma=H/2\,;$$

$$\sigma_\gamma=0;\ \tau_{s\gamma}=0;\ \tau_{t\gamma}=0 \quad \text{при} \quad \gamma=-H/2\,, \qquad (1.5)$$

де $\pm H/2$ – значення товщини на внутрішній та зовнішній бічних поверхнях $\left(-H/2\le\gamma\le H/2\right)$.

Також, граничні умови (1.5) за необхідністю можна сформулювати в переміщеннях, або в змішаному вигляді.

Оболонки, що розглядаються, є замкненими вздовж напрямної, тому замість граничних умов мають місце умови періодичності всіх параметрів напружено-деформованого стану оболонки (T – період)

$$\sigma_\gamma\left(s,t,\gamma\right)=\sigma_\gamma\left(s,t+\mathrm{T},\gamma\right);\ \tau_{s\gamma}\left(s,t,\gamma\right)=\tau_{s\gamma}\left(s,t+\mathrm{T},\gamma\right);$$

$$\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots,\ u_t\left(s,t,\gamma\right)=u_t\left(s,t+\mathrm{T},\gamma\right). \qquad (1.6)$$

Окрім граничних умов на бічних поверхнях (1.5), необхідно задовольнити граничні умови на торцях $s=0$; $s=L$, де L – довжина оболонки.

За розв'язувальні приймемо функції, в яких формулюються граничні умови на бічних поверхнях ($\gamma=\pm H/2$) – три компоненти напруження $\sigma_\gamma, \tau_{s\gamma}, \tau_{t\gamma}$ і додамо до них три компоненти переміщення u_s, u_t, u_γ.

Після деяких перетворень, з врахуванням обраних розв'язувальних функцій, отримуємо розв'язувальну систему диференціальних рівнянь в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами шостого порядку у вигляді

$$\frac{\partial\sigma_\gamma}{\partial\gamma}=-\frac{1}{\left(1+\gamma/R_t\right)}\frac{1}{R_t}\sigma_\gamma-\frac{\partial\tau_{s\gamma}}{\partial s}-\frac{1}{\left(1+\gamma/R_t\right)}\frac{\partial\tau_{t\gamma}}{\partial t}+$$

$$+\frac{1}{\left(1+\gamma/R_t\right)}\frac{1}{R_t}\left[\frac{E\nu}{\left(1-\nu^2\right)}\frac{\partial u_s}{\partial s}+\frac{\nu}{\left(1-\nu\right)}\sigma_\gamma+\frac{E}{\left(1-\nu^2\right)}\frac{1}{\left(1+\gamma/R_t\right)}\left(\frac{\partial u_t}{\partial t}+\frac{1}{R_t}u_\gamma\right)\right];$$

$$\frac{\partial\tau_{s\gamma}}{\partial\gamma}=-\frac{1}{\left(1+\gamma/R_t\right)}\frac{1}{R_t}\tau_{s\gamma}-\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{E\nu}{\left(1-\nu^2\right)}\frac{\partial u_s}{\partial s}+\frac{E\gamma}{\left(1-\nu^2\right)}\frac{1}{\left(1+\gamma/R_t\right)}\left(\frac{\partial u_t}{\partial t}+\frac{1}{R_t}u_\gamma\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\nu}{\left(1-\nu\right)}\sigma_\gamma\right]-\frac{1}{\left(1+\gamma/R_t\right)}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{E}{2\left(1+\nu\right)}\left(\frac{1}{\left(1+\gamma/R_t\right)}\frac{\partial u_s}{\partial t}+\frac{\partial u_t}{\partial s}\right)\right]; \qquad (1.7)$$

$$\frac{\partial\tau_{t\gamma}}{\partial\gamma}=-\frac{2}{\left(1+\gamma/R_t\right)}\frac{1}{R_t}\tau_{t\gamma}-\frac{1}{\left(1+\gamma/R_t\right)}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{E\nu}{\left(1-\nu^2\right)}\frac{\partial u_s}{\partial s}+\frac{E}{\left(1-\nu^2\right)}\frac{1}{\left(1+\gamma/R_t\right)}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{\partial u_t}{\partial t}+\frac{1}{R_t}u_\gamma\right)+\frac{\nu}{\left(1-\nu\right)}\sigma_\gamma\right]-\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{E}{2\left(1+\nu\right)}\left(\frac{1}{\left(1+\gamma/R_t\right)}\frac{\partial u_s}{\partial t}+\frac{\partial u_t}{\partial s}\right)\right];$$

$$\frac{\partial u_\gamma}{\partial\gamma}=-\frac{\nu}{\left(1-\nu\right)}\frac{\partial u_s}{\partial s}-\frac{\nu}{\left(1-\nu\right)}\frac{1}{\left(1+\gamma/R_t\right)}\left(\frac{\partial u_t}{\partial t}+\frac{1}{R_t}u_\gamma\right)+\frac{\left(1-\nu-2\nu^2\right)}{E\left(1-\nu\right)}\sigma_\gamma;$$

$$\frac{\partial u_s}{\partial\gamma}=\frac{2\left(1+\nu\right)}{E}\tau_{s\gamma}-\frac{\partial u_\gamma}{\partial s}\ ;\ \frac{\partial u_t}{\partial\gamma}=\frac{2\left(1+\nu\right)}{E}\tau_{t\gamma}-\frac{1}{\left(1+\gamma/R_t\right)}\frac{\partial u_\gamma}{\partial t}+\frac{1}{\left(1+\gamma/R_t\right)}\frac{1}{R_t}u_t$$

в інтервалі $0\le s\le L;\quad t_0\le t\le t_0+T;\quad -H/2\le\gamma\le H/2$.

Для розділення змінних в напрямку твірної розглянемо оболонки, що мають на торцях діафрагму абсолютно жорстку в своїй площині і гнучку при виході з неї. Тоді граничні умови на торцях будуть мати вигляд

$$\sigma_s=u_t=u_\gamma=0 \quad \text{при} \quad s=0;\ s=L . \qquad (1.8)$$

Наявність зазначених граничних умов (1.8) дозволяє звести тривимірну крайову задачу для системи рівнянь (1.7), шляхом розвинення шуканих функцій та компонентів навантаження в тригонометричні ряди Фур'є вздовж координати s, до двовимірної.

Нехай, відповідно до (1.8),

$$X\left(s,t,\gamma\right)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n\left(t,\gamma\right)\sin\lambda_n s;\quad Y\left(s,t,\gamma\right)=\sum_{n=1}^{\infty}Y_n\left(t,\gamma\right)\cos\lambda_n s, \qquad (1.9)$$

де $X=\left\{\sigma_\gamma,\tau_{t\gamma},u_\gamma,u_t\right\}$, $Y=\left\{\tau_{s\gamma},u_s\right\}$, $\lambda_n=\pi n/L\ \ \left(0\le s\le L\right)$.

Тоді, після підстановки рядів (1.9) до розв'язувальної системи диференціальних рівнянь (1.7) і граничних умов (1.5) та розділення змінних, отримуємо розв'язувальну систему диференціальних рівнянь в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами, що описує двовимірну крайову задачу відносно амплітудних значень розвинень в ряди Фур'є (1.9) (індекс n в позначеннях розв'язувальних функцій та компонентів навантаження опустимо)

$$\frac{\partial\sigma_\gamma}{\partial\gamma}=-\frac{1}{\left(1+\gamma/R_t\right)}\frac{1}{R_t}\sigma_\gamma+\lambda_n\tau_{s\gamma}-\frac{1}{\left(1+\gamma/R_t\right)}\frac{\partial\tau_{t\gamma}}{\partial t}+$$

$$+\frac{1}{\left(1+\gamma/R_t\right)}\frac{1}{R_t}\left[-\frac{E\nu}{\left(1-\nu^2\right)}\lambda_n u_s+\frac{\nu}{\left(1-\nu\right)}\sigma_\gamma+\frac{E}{\left(1-\nu^2\right)}\frac{1}{\left(1+\gamma/R_t\right)}\left(\frac{\partial u_t}{\partial t}+\frac{1}{R_t}u_\gamma\right)\right];$$

$$\frac{\partial\tau_{s\gamma}}{\partial\gamma}=-\frac{1}{\left(1+\gamma/R_t\right)}\frac{1}{R_t}\tau_{s\gamma}+\frac{E}{\left(1-\nu^2\right)}\lambda_n^2 u_s-\frac{E\gamma}{\left(1-\nu^2\right)}\frac{1}{\left(1+\gamma/R_t\right)}\lambda_n\left(\frac{\partial u_t}{\partial t}+\frac{1}{R_t}u_\gamma\right)-$$

$$-\frac{\nu}{\left(1-\nu\right)}\lambda_n\sigma_\gamma-\frac{1}{\left(1+\gamma/R_t\right)}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{E}{2\left(1+\nu\right)}\left(\frac{1}{\left(1+\gamma/R_t\right)}\frac{\partial u_s}{\partial t}+\lambda_n u_t\right)\right];\qquad(1.10)$$

$$\frac{\partial\tau_{t\gamma}}{\partial\gamma}=-\frac{2}{\left(1+\gamma/R_t\right)}\frac{1}{R_t}\tau_{t\gamma}-\frac{1}{\left(1+\gamma/R_t\right)}\frac{\partial}{\partial t}\left[-\frac{E\nu}{\left(1-\nu^2\right)}\lambda_n u_s+\frac{E}{\left(1-\nu^2\right)}\frac{1}{\left(1+\gamma/R_t\right)}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{\partial u_t}{\partial t}+\frac{1}{R_t}u_\gamma\right)+\frac{\nu}{\left(1-\nu\right)}\sigma_\gamma\right]+\frac{E}{2\left(1+\nu\right)}\lambda_n\frac{1}{\left(1+\gamma/R_t\right)}\frac{\partial u_s}{\partial t}+\frac{E}{2\left(1+\nu\right)}\lambda_n^2 u_t;$$

$$\frac{\partial u_\gamma}{\partial\gamma}=\frac{\nu}{\left(1-\nu\right)}\lambda_n u_s-\frac{\nu}{\left(1-\nu\right)}\frac{1}{\left(1+\gamma/R_t\right)}\left(\frac{\partial u_t}{\partial t}+\frac{1}{R_t}u_\gamma\right)+\frac{\left(1-\nu-2\nu^2\right)}{E\left(1-\nu\right)}\sigma_\gamma;$$

$$\frac{\partial u_s}{\partial\gamma}=\frac{2\left(1+\nu\right)}{E}\tau_{s\gamma}-\lambda_n u_\gamma;\quad\frac{\partial u_t}{\partial\gamma}=\frac{2\left(1+\nu\right)}{E}\tau_{t\gamma}-\frac{1}{\left(1+\gamma/R_t\right)}\frac{\partial u_\gamma}{\partial t}+\frac{1}{\left(1+\gamma/R_t\right)}\frac{1}{R_t}u_t$$

з граничними умовами

$$\begin{gathered}\sigma_\gamma=0;\ \tau_{s\gamma}=0;\ \tau_{t\gamma}=0\quad\text{при }\gamma=-H/2,\\ \sigma_\gamma=q_\gamma;\ \tau_{s\gamma}=0;\ \tau_{t\gamma}=0\quad\text{при }\gamma=H/2.\end{gathered}\qquad(1.11)$$

Отримана розв'язувальна система диференціальних рівнянь (1.10) містить в собі доданки, які являють собою добутки розв'язувальних функцій на коефіцієнти, що залежать від двох координат γ, t і не дозволяють відокремити змінні в напрямку напрямної. Для подолання цієї перешкоди застосуємо метод апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є [10]. Для цього, замість зазначених доданків, запишемо нові доповняльні функції у вигляді

$$\varphi_1^j=\frac{1}{\left(1+\gamma/R_t\right)}\frac{1}{R_t}\left\{\sigma_\gamma;\tau_{s\gamma};u_\gamma;u_s\right\}\ \left(j=\overline{1,4}\right);\quad\varphi_1^5=\left(\frac{1}{\left(1+\gamma/R_t\right)}\frac{1}{R_t}\right)^2 u_\gamma;$$

$$\varphi_2^j=\frac{1}{\left(1+\gamma/R_t\right)}\frac{1}{R_t}\left\{\tau_{t\gamma};u_t\right\}\ \left(j=\overline{1,2}\right);\quad\varphi_3^j=\frac{1}{\left(1+\gamma/R_t\right)}\left\{\frac{\partial\sigma_\gamma}{\partial t};\frac{\partial u_\gamma}{\partial t};\frac{\partial u_s}{\partial t}\right\}\left(j=\overline{1,3}\right);$$

$$\varphi_4^j=\frac{1}{\left(1+\gamma/R_t\right)}\left\{\frac{\partial\tau_{t\gamma}}{\partial t};\frac{\partial u_t}{\partial t};\frac{1}{R_t}\frac{\partial u_t}{\partial t}\right\}\ \left(j=\overline{1,3}\right);\qquad(1.12)$$

$$\varphi_5=\frac{1}{\left(1+\gamma/R_t\right)}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\left(1+\gamma/R_t\right)}\frac{1}{R_t}u_\gamma\right)=\frac{1}{\left(1+\gamma/R_t\right)}\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1^3;$$

$$\varphi_6 = \frac{1}{\left(1+\gamma/R_t\right)}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\left(1+\gamma/R_t\right)}\frac{\partial u_s}{\partial t}\right) = \frac{1}{\left(1+\gamma/R_t\right)}\frac{\partial}{\partial t}\varphi_3^3;$$

$$\varphi_7 = \frac{1}{\left(1+\gamma/R_t\right)}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\left(1+\gamma/R_t\right)}\frac{\partial u_t}{\partial t}\right) = \frac{1}{\left(1+\gamma/R_t\right)}\frac{\partial}{\partial t}\varphi_4^2.$$

З врахуванням функцій (1.12), розв'язувальна система рівнянь (1.10) набуває вигляду

$$\frac{\partial\sigma_\gamma}{\partial\gamma} = \lambda_n\tau_{s\gamma} + \left(\frac{\nu}{(1-\nu)} - 1\right)\varphi_1^1 - \varphi_4^1 - \frac{E\nu}{\left(1-\nu^2\right)}\lambda_n\varphi_1^4 + \frac{E}{\left(1-\nu^2\right)}\left(\varphi_4^3 + \varphi_1^5\right);$$

$$\frac{\partial\tau_{s\gamma}}{\partial\gamma} = -\frac{\nu}{(1-\nu)}\lambda_n\sigma_\gamma + \frac{E}{\left(1-\nu^2\right)}\lambda_n^2 u_s - \varphi_1^2 - \left(\frac{E\nu}{\left(1-\nu^2\right)} + \frac{E}{\left(1-\nu^2\right)}\right)\lambda_n\varphi_4^2 -$$

$$-\frac{E\nu}{\left(1-\nu^2\right)}\lambda_n\varphi_1^3 - \frac{E}{2(1+\nu)}\varphi_6; \tag{1.13}$$

$$\frac{\partial\tau_{t\gamma}}{\partial\gamma} = \frac{E}{2(1+\nu)}\lambda_n^2 u_t - 2\varphi_2^1 + \left(\frac{E\nu}{\left(1-\nu^2\right)} + \frac{E}{2(1+\nu)}\right)\lambda_n\varphi_3^3 - \frac{E}{\left(1-\nu^2\right)}\left(\varphi_7 + \varphi_5\right) - \frac{\nu}{(1-\nu)}\varphi_3^1;$$

$$\frac{\partial u_\gamma}{\partial\gamma} = \frac{\left(1-\nu-2\nu^2\right)}{(1-\nu)E}\sigma_\gamma + \frac{\nu}{(1-\nu)}\left(\lambda_n u_s - \varphi_4^2 - \varphi_1^3\right);$$

$$\frac{\partial u_s}{\partial\gamma} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{s\gamma} - \lambda_n u_\gamma; \quad \frac{\partial u_t}{\partial\gamma} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{t\gamma} - \varphi_3^2 + \varphi_2^2.$$

Формально система рівнянь (1.13) отримала вигляд системи диференціальних рівнянь в частинних похідних зі сталими коефіцієнтами, до якої можна застосувати метод розділення змінних, подаючи усі функції, що до неї входять (розв'язувальні та доповняльні), а також компоненти навантаження у вигляді розвинень в ряди Фур'є за координатою напрямної t. Зазначені ряди, в силу періодичності (1.6), мають вигляд

$$\tilde{X}(t,\gamma) = \sum_{k=1}^{\infty}\tilde{X}_k(\gamma)\cos\lambda_k t; \quad \tilde{Y}(t,\gamma) = \sum_{k=1}^{\infty}\tilde{Y}_k(\gamma)\sin\lambda_k t, \tag{1.14}$$

де $\tilde{X} = \left\{\sigma_\gamma, \tau_{s\gamma}, u_\gamma, u_s, \varphi_1^n, \varphi_4^n, \varphi_6\right\}$; $\tilde{Y} = \left\{\tau_{t,\gamma}, u_t, \varphi_2^n, \varphi_3^n, \varphi_5, \varphi_7\right\}$; $\lambda_k = \dfrac{2k\pi}{T}$.

Після підстановки рядів (1.14) до розв'язувальної системи (1.13) та відповідних граничних умов і розділення змінних, приходимо до розв'язувальної системи звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами відносно амплітудних значень рядів (1.14), що описує одномірну крайову задачу у вигляді

$$\frac{d\sigma_{\gamma,k}}{d\gamma} = \lambda_n\tau_{s\gamma,k} + \left(\frac{\nu}{(1-\nu)} - 1\right)\varphi_{1,k}^1 - \varphi_{4,k}^1 - \frac{E\nu}{\left(1-\nu^2\right)}\lambda_n\varphi_{1,k}^4 + \frac{E}{\left(1-\nu^2\right)}\left(\varphi_{4,k}^3 + \varphi_{1,k}^5\right);$$

$$\frac{d\tau_{s\gamma,k}}{d\gamma} = -\frac{\nu}{(1-\nu)}\lambda_n\sigma_{\gamma,k} + \frac{E}{\left(1-\nu^2\right)}\lambda_n^2 u_{s,k} - \varphi_{1,k}^2 - \left(\frac{E\nu}{\left(1-\nu^2\right)} + \frac{E}{\left(1-\nu^2\right)}\right)\lambda_n\varphi_{4,k}^2 -$$

$$-\frac{E\nu}{\left(1-\nu^2\right)}\lambda_n\varphi_{1,k}^3-\frac{E}{2\left(1+\nu\right)}\varphi_{6,k}\,; \qquad (1.15)$$

$$\frac{d\tau_{t\gamma,k}}{d\gamma}=\frac{E}{2\left(1+\nu\right)}\lambda_n^2u_{t,k}-2\varphi_{2,k}^1+\left(\frac{E\nu}{\left(1-\nu^2\right)}+\frac{E}{2\left(1+\nu\right)}\right)\lambda_n\varphi_{3,k}^3-$$

$$-\frac{E}{\left(1-\nu^2\right)}\left(\varphi_{7,k}+\varphi_{5,k}\right)-\frac{\nu}{\left(1-\nu\right)}\varphi_{3,k}^1\,;$$

$$\frac{du_{\gamma,k}}{d\gamma}=\frac{\left(1-\nu-2\nu^2\right)}{\left(1-\nu\right)E}\sigma_{\gamma,k}+\frac{\nu}{\left(1-\nu\right)}\left(\lambda_n u_{s,k}-\varphi_{4,k}^2-\varphi_{1,k}^3\right);$$

$$\frac{du_{s,k}}{d\gamma}=\frac{2\left(1+\nu\right)}{E}\tau_{s\gamma,k}-\lambda_n u_{\gamma,k}\,;\quad \frac{du_{t,k}}{d\gamma}=\frac{2\left(1+\nu\right)}{E}\tau_{t\gamma,k}-\varphi_{3,k}^2+\varphi_{2,k}^2\quad \left(k=\overline{0,\,K}\right)$$

з граничними умовами

$$\gamma=-H/2:\ \sigma_{\gamma,k}=0;\ \tau_{s\gamma,k}=0;\ \tau_{t\gamma,k}=0\,;$$
$$(1.16)$$
$$\gamma=H/2:\ \ \sigma_{\gamma,k}=q_{\gamma,k};\ \tau_{s\gamma,k}=0;\ \tau_{t\gamma,k}=0\,.$$

Отриману крайову задачу (1.15), (1.16) розв’язуємо стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації одночасно для всіх гармонік розвинень (1.14), при цьому на кожному кроці інтегрування амплітудні значення доповняльних функцій обчислюватимемо за допомогою апроксимації їх дискретними рядами Фур’є [4] за поточним значенням амплітуд розв’язувальних функцій. Таким чином, замикаємо систему рівнянь (1.15), яка містить в собі невідомі як розв’язувальні, так і доповняльні функції. На початку інтегрування амплітудні значення доповняльних функцій визначаємо, виходячи з граничних умов (1.16).

§2. Оцінка достовірності та точності отримуваних результатів.

Деякі оцінки достовірності та точності отримуваних результатів на основі розглянутої методики наведені в роботі [11].

Нехай поперечний переріз поверхні відліку оболонок описано рівнянням равлика Паскаля в полярній системі координат [2]

$$\rho=a\cos\psi+l\,, \qquad (2.1)$$

тут ρ – полярний радіус; ψ – полярний кут в поперечному перерізі $0\le\psi\le 2\pi$; a – радіус вихідного кола; l – відстань, на яку зміщується точка вздовж радіус-вектора.

Оскільки вихідна інформація про форму поперечного перерізу напрямної оболонки задається за допомогою параметра ψ, відмінного від t, рівність (1.1) при переході від координати t до координати ψ набуває вигляду

$$dS^2=ds^2+H_2^2(\psi,\gamma)\,\omega(\psi)\,d\psi^2+d\gamma^2\,,$$

де коефіцієнт переходу $\omega(\psi)=[\rho^2+(\rho')^2]^{\,1/2}$ і радіус кривизни серединної поверхні в поперечному перерізі $R_\psi=R(\psi)=\dfrac{[\rho^2+(\rho')^2]^{\,3/2}}{\rho^2+2(\rho')^2-\rho\rho''}$.

У формулах (1.14) також необхідно перейти від розвинень в ряди Фур’є за координатою t до координати ψ, враховуючи залежність

$$\frac{dt}{d\psi} = [\rho^2 + (\rho')^2]^{1/2} = \omega(\psi).$$

Тоді, при визначенні доповняльних функцій отримаємо для кожної функції $V = V(\gamma, t(\psi))$ таку залежність:

$$\frac{\partial V}{\partial \psi} = \frac{\partial V}{\partial t}\frac{dt}{d\psi}; \quad \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial \psi}\frac{1}{\omega(\psi)}.$$

З метою оцінки достовірності отримуваних результатів при описі поверхні відліку рівнянням равлика Паскаля (2.1) проведемо дослідження напруженого стану оболонок зі збуреною формою поперечного перерізу за умови, коли параметр a обрано таким чином, що радіус кривизни в зоні максимального збурення $(\psi = \pi)$ наближається до радіуса ідеальної кругової оболонки. При $a = 0$ маємо кругову оболонку, радіус серединної поверхні якої $r = l$.

Задачу розв’язано за таких умов: довжина оболонки $L = 20, 60$; товщина $h = 2, 4, 6$; параметри равлика Паскаля – $a = 0,5; 1$; $l = 40$; механічні характеристики для ізотропного матеріалу: модуль Юнга $E = E_0$; коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,3$. Для обраних значень параметра a радіус кривизни в перерізі $\psi = \pi$ буде: при $a = 0,5$ – $R_\psi = 40,01$, при $a = 1$ – $R_\psi = 40,02$.

Результати розв’язку наведено в середньому перерізі довжини в табл. 1 $(s = 10)$ і в табл. 2 $(s = 30)$ для значень нормальних переміщень u_γ поверхні відліку ($\gamma = 0$) та максимальних значень напружень σ_ψ на зовнішній поверхні $(\gamma = h/2)$, σ_s – на внутрішній $(\gamma = -h/2)$, в трьох перерізах напрямної $(\psi = 0; \pi/2; \pi)$. Як видно з табл. 1 при незначному відхиленні форми поперечного перерізу від кругової, показники напружено-деформованого стану розглядуваних оболонок не перевищують 3% від відповідних показників кругової оболонки.

Таблиця 1

a	$u_\gamma E/q_0$			σ_ψ/q_0			σ_s/q_0		
	ψ								
	0	$\pi/2$	π	0	$\pi/2$	π	0	$\pi/2$	π
$h = 2$									
0	605,852			19,683			16,253		
0,5	605,986	605,784	605,993	19,685	19,681	19,685	16,257	16,251	16,257
1	606,377	605,580	606,430	19,692	19,678	19,692	16,276	16,246	16,269
$h = 4$									
0	181,469			7,179			9,253		
0,5	181,490	181,459	181,491	7,180	7,179	7,180	9,255	9,253	9,255
1	181,551	181,430	181,558	7,180	7,179	7,181	9,258	9,251	9,258
$h = 6$									
0	78,073			3,628			5,496		
0,5	78,078	78,071	78,078	3,628	3,628	3,628	5,496	5,495	5,496
1	78,093	78,064	78,095	3,628	3,628	3,628	5,497	5,495	5,497

При застосуванні розглянутої методики, похибка розв’язку може виникати за рахунок апроксимації доповняльних функцій дискретними рядами Фур’є. Для оцінки контролю точності отримуваних результатів розглянемо задачу про напружений стан нетонких циліндричних оболонок з вм’ятинами під дією зовнішнього навантаження в залежності від кількості точок R, в яких обчислюються табличні значення доповняльних функцій, та кількості членів відповідних дискретних рядів Фур’є M.

Таблиця 2

a	$u_\gamma E/q_0$			σ_ψ/q_0			σ_s/q_0		
	ψ								
	0	$\pi/2$	π	0	$\pi/2$	π	0	$\pi/2$	π
$h=2$									
0	810,444			20,649			2,462		
0,5	810,899	810,090	810,947	20,654	20,647	20,654	2,462	2,463	2,464
1	812,177	809,029	812,565	20,665	20,639	20,669	2,451	2,465	2,461
$h=4$									
0	406,922			10,573			2,481		
0,5	407,128	406,770	407,142	10,575	10,571	10,575	2,481	2,480	2,481
1	407,719	406,316	407,831	10,582	10,566	10,583	2,483	2,479	2,484
$h=6$									
0	286,360			7,390			2,612		
0,5	286,475	286,284	286,480	286,475	286,284	286,480	286,475	286,284	286,480
1	286,807	286,053	286,849	286,807	286,053	286,849	286,807	286,053	286,849

Задачу розв'язано за таких умов: довжина оболонки $L=60$; товщина $h=6$; параметри равлика Паскаля – $a=20; 25$; $l=40$; механічні характеристики для ізотропного матеріалу: модуль Юнга $E=E_0$; коефіцієнт Пуассона $\nu=0,3$.

Результати розв'язку наведено у табл. 3 в середньому перерізі довжини ($s=30$) для значень нормальних переміщень u_γ поверхні відліку ($\gamma=0$) та максимальних значень напружень: σ_ψ – на зовнішній поверхні ($\gamma=h/2$); σ_s – на внутрішній ($\gamma=-h/2$); в трьох перерізах напрямної ($\psi=0;\ \pi/2;\ \pi$).

Таблиця 3

M	R	$u_\gamma E/q_0$			σ_ψ/q_0			σ_s/q_0		
		ψ								
		0	$\pi/2$	π	0	$\pi/2$	π	0	$\pi/2$	π
$a=20$										
10	3	417,522	177,317	538,081	10,261	4,326	3,364	3,288	1,963	8,109
	6	348,956	143,980	734,667	7,895	5,472	15,329	3,068	1,467	9,043
20	3	417,857	176,955	539,081	10,268	4,317	3,360	3,289	1,962	8,123
	6	348,680	143,908	735,201	7,888	5,472	15,348	3,065	1,466	9,059
	9	349,710	144,275	746,267	8,110	5,329	16,580	2,999	1,568	8,873
	12	349,583	144,190	746,604	8,076	5,296	16,729	3,006	1,579	8,834
30	9	349,711	144,275	746,267	8,110	5,329	16,580	2,999	1,568	8,873
	12	349,583	144,190	746,604	8,076	5,296	16,729	3,006	1,579	8,834
60	9	349,710	144,275	746,266	8,110	5,329	16,580	2,999	1,568	8,873
	12	349,582	144,189	746,605	8,076	5,296	16,729	3,006	1,579	8,834
100	17	349,582	144,189	746,605	8,076	5,296	16,729	3,006	1,579	8,834
$a=25$										
10	3	389,818	244,521	259,021	9,593	5,321	-3,651	3,456	2,104	7,164
	6	376,288	126,474	931,350	7,763	5,197	10,614	3,519	0,702	15,570
20	3	389,818	244,521	259,021	9,593	5,321	-3,651	3,456	2,104	7,164
	6	376,231	126,475	931,349	7,763	5,197	10,614	3,519	0,702	15,570
	9	377,328	108,774	1133,37	8,675	4,534	22,568	3,145	0,805	17,228
	12	376,473	106,305	1153,02	8,332	4,124	25,610	3,260	0,943	17,004
30	9	377,320	108,764	1133,34	8,675	4,533	22,566	3,145	0,805	17,227
	12	376,480	106,309	1152,99	8,332	4,124	25,610	3,261	0,943	17,003
60	12	328,576	64,564	1303,90	8,086	3,973	27,847	2,959	0,575	18,395
	15	376,734	106,281	1154,78	8,427	4,178	26,303	3,226	0,921	16,882
	17	376,709	106,326	1154,94	8,415	4,210	26,436	3,233	0,909	16,853
100	12	376,823	106,475	1154,07	8,456	4,257	25,957	3,219	0,891	16,948
	15	376,712	106,327	1154,98	8,417	4,212	26,437	3,228	0,908	16,882
	17	376,711	106,326	1154,95	8,416	4,210	26,436	3,227	0,909	16,882
120	17	376,711	106,326	1154,95	8,416	4,210	26,436	3,234	0,909	16,852

Як видно з табл. 3 збіжність розв'язку має місце для $R = 12$ членів дискретного ряду Фур'є та $M = 60$ точок табличних значень доповняльних функцій у випадку $a = 20$ і у випадку $a = 25$, відповідно $R = 15$, $M = 100$. Таку розбіжність значень можна пояснити тим, що при $a = 20$ маємо менш виражене збурення поверхні відліку в поперечному перерізі.

Також можна контролювати точність розв'язку при порівнянні результатів розв'язання крайових задач зліва – направо та справа – наліво за рахунок різних обчислювальних схем, де збіг результатів свідчить про точність розв'язку. Задачу було розв'язано в двох напрямках, починаючи з внутрішньої, ненавантаженої бічної поверхні, та в зворотному напрямку – із зовнішньої, навантаженої. При цьому результати розв'язку для розподілу полів нормальних переміщень та напружень в різних перерізах товщини та напрямної оболонки співпадали до п'яти – шести знаків.

§3. Числові результати та їх аналіз.

На основі розглянутої методики розв'язано задачу про напружений стан нетонких циліндричних оболонок зі збуреною формою поперечного перерізу, що перебувають під дією зовнішнього нормального навантаження $q_\gamma = q_0 \sin(\pi s / L)$ $(q_0 = \text{const})$.

Задачу розв'язано за таких вихідних даних. Геометричні параметри оболонки: довжина $L = 20; 60$; товщина $h = 2; 4; 6$; параметри равлика Паскаля для рівняння (17) – $a = 20; 25$; $l = 40$; механічні характеристики матеріалу: модуль Юнга $E = E_0$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,3$.

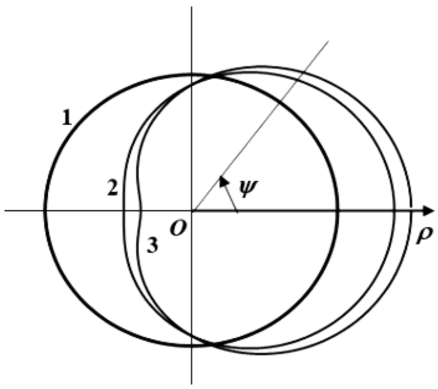


Рис. 1

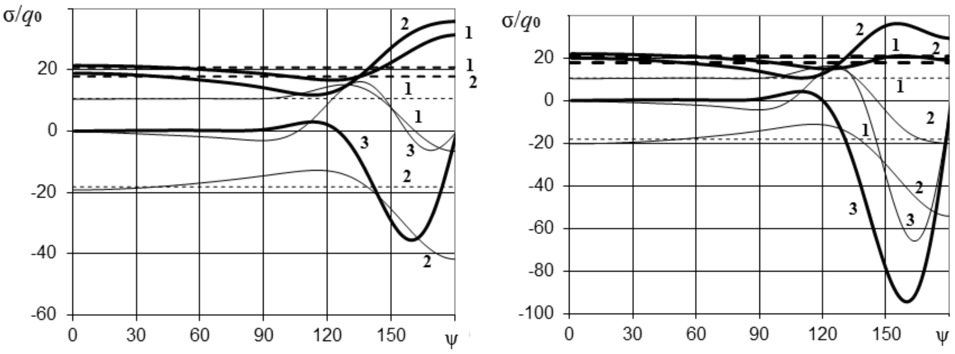
На рис. 1 наведено поперечні перерізи поверхні відліку для різних значень параметру a. Цифрою *1* позначено поперечний переріз поверхні відліку кругової оболонки, радіус якої ($R = 43,25$) обрано таким чином, щоб периметр поперечного перерізу поверхні відліку кругової оболонки мало відрізнявся від периметру оболонки зі збуренням. Цифрою *2* позначено поперечний переріз збуреної поверхні оболонки для $a = 20$, цифрою *3* – для $a = 25$. При цьому периметр оболонок зі збуреною поверхнею поперечного перерізу відрізняється від периметру ідеальної кругової оболонки приблизно на 2%.

Результати розв'язання змодельованої задачі наведено на рис. 2 – 8 в середньому перерізі довжини для значень нормальних σ_ψ, σ_s та дотичного $\tau_{s\psi}$ напружень. В силу симетрії результати наведені в інтервалі $0 \le \psi \le \pi$. При $\psi = \pi$ має місце максимальна величина збурення поперечного перерізу поверхні оболонки.

Тонкі криві розподілу полів напружень на усіх графіках відповідають їх значенням на внутрішній ненавантаженій бічній поверхні, товсті – на зовнішній навантаженій. Пунктирні лінії відповідають значенням напружень для ідеальної кругової оболонки. Символ (- +) на графіках рис. 5 – 7 відповідає випадку близьких значень напружень на зовнішній та внутрішній поверхнях оболонки. На рис. 2 – 7 цифрами позначені криві для напружень σ_ψ – *1*; σ_s – *2*; $\tau_{s\psi}$ – *3*. Графіки розподілу напружень на рис. 2 *а* – 7 *а* відповідають оболонкам з параметром $a = 20$, на рис. 2 *б* – 7 *б* – з параметром $a = 25$. Графіки на рис. 2 – 4 відповідають оболонкам, довжина яких $L = 20$; на рис. 5 – 8 – для довжини $L = 60$. На рис. 8 наведено криві розподілу дотичних напружень для оболонок, товщина яких $H = 2$ (рис. 8 *а*), $H = 4$ (рис. 8 *б*), $H = 6$ (рис. 8 *в*). Цифрою I позначені криві в оболонках з параметром $a = 20$, цифрою II – з параметром $a = 25$.

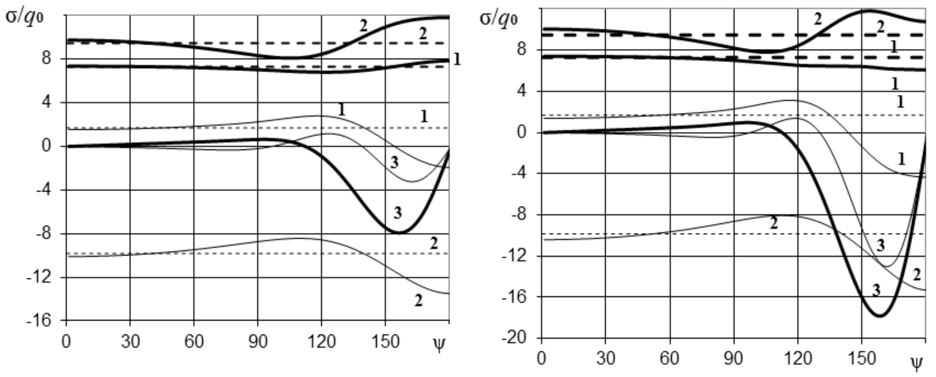
З графіків, наведених на рис. 2 – 4 видно, що в коротких оболонках $(L = 20)$ переважними серед нормальних напружень будуть поздовжні напруження σ_s. Напруження σ_ψ своїх максимальних значень досягають на зовнішній навантаженій поверхні в зоні максимального збурення поверхні відліку ($\psi = \pi$). При цьому, при збільшенні товщини їх значення зменшуються в 4 – 3 рази для $H = 4$ і $a = 20$; 25, відповідно; в 9 – 6 разів для $H = 6$ і $a = 20$; 25, відповідно, порівняно з оболонками, товщина яких $H = 2$. Крім того, для другої форми збуреної поверхні оболонки $(a = 25)$ максимальні значення напружень змінюються не суттєво для товщини $H = 4$, $H = 6$ і для $H = 2$ збільшуються приблизно в 1,3 рази.

Максимальні амплітудні значення напружень σ_s мають місце на внутрішній, ненавантаженій поверхні в зоні максимального збурення поверхні відліку ($\psi = \pi$). При цьому, при збільшенні товщини їх значення зменшуються в 3 – 3,5 рази для $H = 4$ і $a = 20$; 25, відповідно; в 6 – 7,7 разів для $H = 6$ і $a = 20$; 25, відповідно, порівняно з оболонками, товщина яких $H = 2$. Крім того, для другої форми збуреної поверхні оболонки $(a = 25)$ максимальні значення напружень σ_ψ, σ_s порівняно з відповідними напруженнями для $a = 20$ змінюються не суттєво.



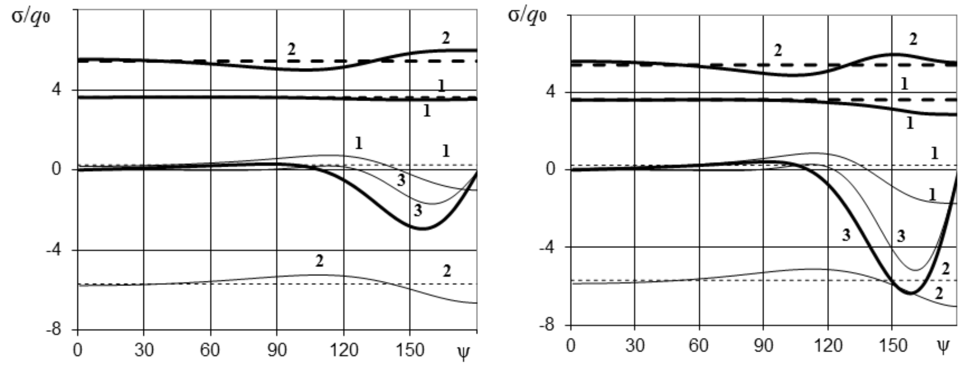
а *б*

Рис. 2



а *б*

Рис. 3



а *б*

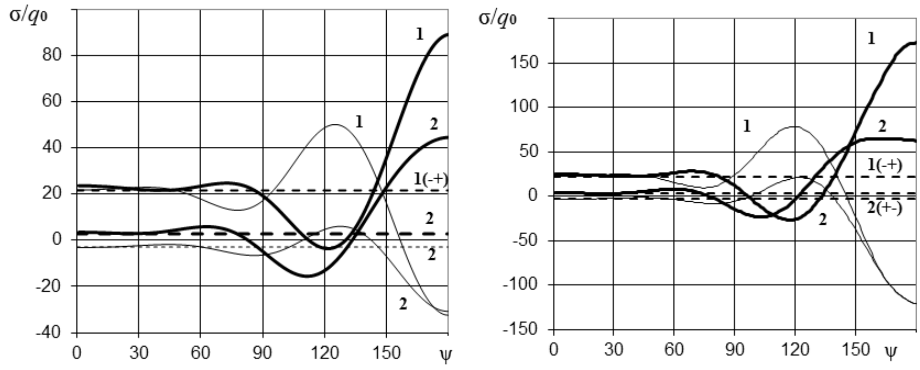
Рис. 4

Характерною особливістю напруженого стану оболонок зі збуреною формою поперечного перерізу є наявність дотичних напружень порівняно з оболонками, що мають ідеальну кругову форму, для яких останні близькі до нуля.

Максимальних амплітудних значень дотичні напруження $\tau_{s\psi}$ досягають на зовнішній навантаженій поверхні в інтервалі $5\pi/6 \le \psi \le \pi$ і для $a = 25$ їх величина збільшується приблизно в 3 рази для $H = 2$ та приблизно в 2 рази для $H = 4$ і $H = 6$. При цьому для обох форм поперечного перерізу збільшення товщини призводить до зменшення максимальних значень дотичних напружень приблизно в 5 разів для $H = 4$ і в 11,5 рази для $H = 6$ порівняно з оболонками, товщина яких $H = 2$.

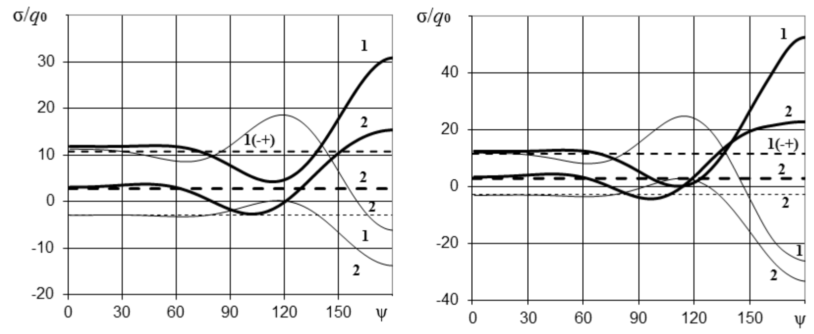
В інтервалі $0 \le \psi \le 2\pi/3$ характеристики напруженого стану близькі до значень в ідеальній круговій оболонці.

Характеристики напруженого стану для оболонок довжиною $L = 60$, як видно з графіків, наведених на рис. 5 – 7, мають такі закономірності. Переважними з нормальних напружень є колові напруження σ_ψ, які набувають своїх максимальних значень на зовнішній навантаженій поверхні в зоні максимального збурення поверхні відліку. При цьому, зі збільшенням товщини їх величина зменшується приблизно в 3 рази для $a = 20$ і $a = 25$ при $H = 4$; в 5,5 разів для $a = 20$ і в 6,6 рази для $a = 25$ при $H = 6$. Крім того, форма збурення впливає на значення напружень таким чином: для $H = 4; 6$ напруження збільшуються приблизно в 1,7 рази для другої форми ($a = 25$) порівняно з першою ($a = 20$) і в 2 рази для товщини $H = 2$.



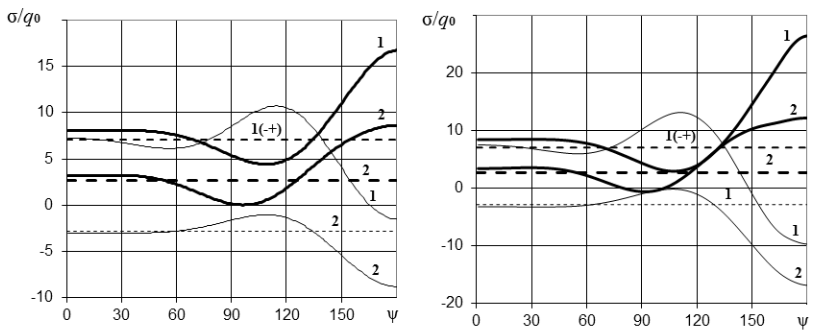
а *б*

Рис. 5



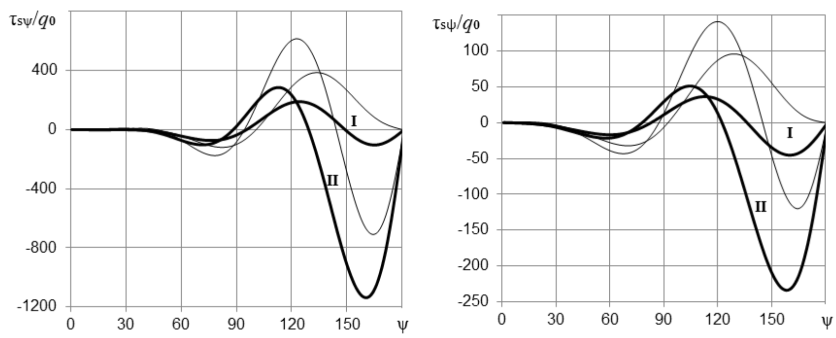
а *б*

Рис. 6

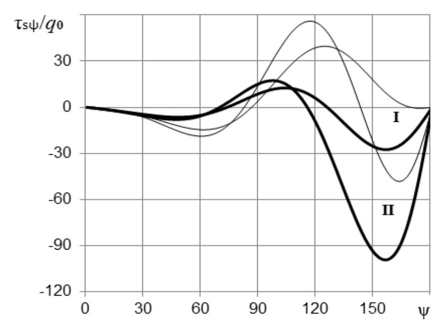


а *б*

Рис. 7



а *б*



в

Рис. 8

Поздовжні напруження досягають свого максимального амплітудного значення в перерізі $\psi = \pi$ на зовнішній навантаженій поверхні для першої збуреної форми ($a = 20$) для всіх значень товщини і на внутрішній ненавантаженій поверхні для другої збуреної форми ($a = 25$). При цьому, зі збільшенням товщини їх величина зменшується приблизно в 3 рази для $a = 20$ і в 3,7 рази для $a = 25$ при $H = 4$; в 5,2 разів для $a = 20$ і в 7 разів для $a = 25$ при $H = 6$ порівняно з оболонками, товщина яких $H = 2$. Крім того, форма збурення впливає на значення напружень таким чином: для $H = 2; 6$ напруження збільшуються приблизно в 1,7 рази для другої форми ($a = 25$) порівняно з першою ($a = 20$) і в 2,5 рази для товщини $H = 4$.

Максимальних амплітудних значень дотичні напруження набувають на зовнішній навантаженій поверхні і зі збільшенням товщини зменшуються приблизно в 5 разів для $H = 4$ і в 12 разів для товщини $H = 6$ порівняно з оболонками товщиною $H = 2$ для обох форм збуреної поверхні відліку.

Якщо для коротких оболонок $L = 20$ значення характеристик напруженого стану були близькі до значень в ідеальній круговій оболонці в інтервалі $0 \le \psi \le 2\pi/3$, то для більш довгих оболонок ($L = 60$) відповідний інтервал скорочується для нормальних напружень $0 \le \psi \le \pi/2$ і для дотичних – $0 \le \psi \le \pi/3$.

Висновки.

Таким чином, при вивченні напруженого стану циліндричних нетонких оболонок зі збуреною формою поперечного перерізу на основі просторової моделі лінійної теорії пружності з використанням методики, що базується на застосуванні методу розділення змінних, апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є і стійкого чисельного методу дискретної ортогоналізації, були встановлені характерні закономірності розподілу полів нормальних колових σ_ψ і поздовжніх напружень σ_s та дотичних напружень $\tau_{s\psi}$.

Величини наведених напружень стрімко зменшуються при віддаленні від середини ділянки, що містить недосконалість. При цьому при збільшенні довжини оболонки довжина ділянки, на якій значення напружень близькі до значень в ідеальній круговій оболонці, зменшується. Характерною особливістю напруженого стану є наявність дотичних напружень, які в більш тонких оболонках є переважними. Отримані в роботі результати можуть бути використані при розрахунках на міцність циліндричних оболонок, що мають аналогічно збурену поверхню поперечного перерізу.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетних програм «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230) та «Розвиток мережі та утримання автомобільних доріг загального користування державного значення (КПКВК 3111020).

РЕЗЮМЕ. В просторовій постановці на основі методики, що базується на використанні аналітичних методів розділення змінних в двох координатних напрямках, із застосуванням апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є, та чисельному розв'язанні в третьому координатному напрямку за допомогою стійкого методу дискретної ортогоналізації, розв'язано задачу про напружений стан нетонких циліндричних оболонок зі збуреною формою поперечного перерізу, що перебувають під дією зовнішнього нормального навантаження за певних граничних умов на торцях. Виявлено характерні закономірності напруженого стану розглядуваних оболонок в залежності від їх довжини, товщини для двох варіантів форми збуреної поверхні. Для опису поперечного перерізу поверхні відліку використано рівняння равлика Паскаля в параметричній формі. Результати розв'язання задачі наведено у вигляді графіків розподілу параметрів напруженого стану оболонок даного класу.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: дискретні ряди Фур'є, збурена форма поперечного перерізу, метод дискретної ортогоналізації, напружений стан, нетонкі циліндричні оболонки, лінійна просторова теорія пружності.

1. *Процюк Б.В.* Статичні задачі термопружності для шаруватого функціонально-градієнтного термочутливого циліндра // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2021. – 64, № 2. – С. 70–81.
2. *Савелов А.А.* Плоские кривые. Систематика, свойства, применение. (Справочное руководство). – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 1960. – 292 с.
3. *Тимошенко С.П.* Курс теории упругости. – Киев: Наук. думка, 1972. – 501 с.
4. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3т. Т.III. / Пред. и прим. А.А Флоринского. – 8-е изд. – Москва: Физматлит, 2003. – 728 с.
5. *Bespalova O.I., Boreiko N.P.* Stability of Shells of Revolution with Different Gaussian Curvature in the Field of Combined Static Loads // Int. Appl. Mech. – 2021. – **57**, N 4. – P. 405 – 413.
6. *Dong Y., Yan W., Wu Z. et al*. Modeling of shrinkage characteristics during investment casting for typical structures of hollow turbine blades // Int. J. Adv. Manuf. Technol. – 2020. – **110**. – P. 1249–1260.
7. *Dzyuba A.P., Sirenko V.N.* Algorithmization of the Evaluation of Physicomechanical Characteristics of the Material of Multilayer Composite Shells of Revolution Varying Along the Meridian // J. Math. Sci. – 2022. – **263**, N 1. – P. 93 – 103.
8. *Ecsedi I., Baksa A.* Torsion of functionally graded anisotropic linearly elastic circular cylinder // Eng. Trans. – 2018. – **66**, N 4. – P. 413–426.
9. *Grigorenko A.Y., Malanchuk V.A., Sorochenko G.V. et al*. Application of the Inhomogeneous Elasticity Theory to the Description of the Mechanical State of a Single-Rooted Tooth // Int Appl. Mech. – 2021. – **57**, N 3. – P. 249 – 262.
10. *Grigorenko Y.M., Rozhok L.S.* Applying Discrete Fourier Series to Solve Problems of the Stress State of Hollow Noncircular Cylinders // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 2. – P. 105 – 127.
11. *Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S.* On the Equilibrium of Nonthin Cylindrical Shells with a Dent // J. Math. Sci. – 2023. – **272**, N 1. – P. 80–92.
12. *Grigorenko Y.M., Urusova G.P., Rozhok L.S.* Stress Analysis of Nonthin Elliptic Cylindrical Shells in Refined and Spatial Formulations // Int. Appl. Mech. – 2006. – **42**, N 8. – P. 886 – 894.
13. *Grigorenko A.Y., Yaremchenko S.N.* Three-Dimensional Analysis of the Stress–Strain State of Inhomogeneous Hollow Cylinders Using Various Approaches // Int. Appl. Mech. – 2019. – **55**, N 5. – P. 487 – 494.
14. *Huliaiev V.I., Haidaichuk V.V., Hustieliev O.O. et al.* Thermal Stress State of Layered and Inhomogeneous Pavement // Int. Appl. Mech. – 2021. – **57**, N 1. – P. 86 – 96.
15. *Jin G., Wang Z., Liang D. et al.* Modeling and dynamics characteristics analysis of six-bar rocking feeding mechanism with lubricated clearance joint // Arch. Appl. Mech. – 2023. https://doi.org/10.1007/s00419-023-02410-7.
16. *Jin T., Lin J., Xu X. et al.* Measurement of internal residual stress field in multi-layer fillet welded joint of ultra-thick circular plate and tube // Int. J. Adv. Manuf. Technol. – 2019. – **105**. – P. 2329 – 2341.
17. *Kovalchuk V., Onyshchenko A., Fedorenko O., Habrel M., Parneta B., Voznyak O., Markul R., Parneta M., Rybak R.* A comprehensive procedure for estimating the stressed-strained state of a reinforced concrete bridge under the action of variable environmental temperatures // Eastern-European J. of Enterprise Technol. – 2021. – **2** (7), N 110. – P. 23 – 30.
18. *Kushnir R.M., Zhydyk U.V., Flyachok V.M.* Thermoelastic Analysis of Functionally Graded Cylindrical Shells // J. Math. Sci. – 2021. – **254**, N 9. – P. 46–58.
19. *Limarchenko V.O., Limarchenko O.S., Sapon N.N.* Dynamics of a Pipeline with a Liquid on a Rotating Base // Int. Appl. Mech. – 2020. – **56**, N 3. – P. 351 – 357.
20. *Lugovoi P.Z., Skosarenko Y.V., Orlenko S.P. et al.* Application of the Spline-Collocation Method to Solve Problems of Statics and Dynamics for Multilayer Cylindrical Shells with Design and Manufacturing Features // Int. Appl. Mech. – 2019. – **55,** N 5. – P. 524 – 533.
21. *Rushchitsky J.J.* Nonlinearity of Elastic Deformations and Moderateness of Strains as a Factor Explaining the Auxeticity of Materials // Int. Appl. Mech. – 2019. – **55**, N 6. – P. 681 – 699.
22. *Storozhuk E.A.* Stress-Strain State and Stability of a Flexible Circular Cylindrical Shell with Transverse Shear Strains // Int. Appl. Mech. – 2021. – **57**, N 5. – P. 554 – 567.
23. *Yu D.Y., Ding Z.* Geometric characteristics analysis and parametric modeling for screw rotor precision machining // Int. J. Adv. Manuf. Technol. – 2020. – **107**. – P. 3615 – 3623.

Надійшла 01.08.2022 Затверджена до друку 28.03.2023