С.В.Дегтяр[1], Ю.В.Шушарін[1], Я.О.Жук[2,3]

КОЛИВАННЯ МАЯТНИКА ПІД ДІЄЮ ВИПАДКОВИХ ІМПУЛЬСІВ

[1]Київський національний економічний університет ім. Вадима Гетьмана, просп. Берестейський, 54/1, 03057, Київ, Україна; e-mail: svdegtyar@gmail.com
[2]Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, просп. Глушкова, 4е, 01033, Київ, Україна;
[3]Інститут механіки ім.С.П.Тимошенка НАНУ, вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: y.zhuk@i.ua

Abstract. With the help of a system of stochastic differential equations, a model of random small oscillations of a mathematical pendulum under the influence of impacts of fast particles with a small mass is constructed. Equations are given for the steady-state values of the initial moments of the first and second order of random oscillations about an adjacent angle.

Key words: probabilistic model, mathematical pendulum, random actions, stochastic differential equations.

Вступ.

Останнім часом все більший інтерес у спеціалістів викликають механічні системи, які перебувають під випадковими впливами, що обумовлено їх очевидною практичною спрямованістю. В [4] розглядалась задача про рух симетричного гіроскопу під дією сили тяжіння і випадкових впливів, які утворюють послідовність дискретних втручань випадку, а саме, в деякі випадкові моменти часу параметри системи «перестрибують» в деякі випадкові значення у фазовому просторі. Для вивчення динамічної системи було побудовано ймовірнісну модель, що описується марківським процесом, який в свою чергу є розв'язком диференціального рівняння з випадковими параметрами. Далі розглядалась асимптотична ситуація, коли дискретне втручання випадку стає більш рідкісним і, зрештою, зникає зовсім на нескінченності. В роботі це забезпечується заміною перехідної функції марківського процесу функцією, яка залежить від малого параметру і вивчається поведінка системи при одночасному узгодженому прямуванні параметра до нуля, а часу – до нескінченності. Такі асимптотичні випадки розглядались, наприклад, в [14, 18].

Із множини випадкових процесів, які лежать в основі моделей таких систем, виділяється клас марківських процесів [19, 21]. Вони являють собою природнє ймовірнісне узагальнення динамічних систем, які зазнають випадкових впливів, незалежних у різні моменти часу. Як фізичні та механічні системи при правильному виборі фазового простору перетворюються в динамічні (це означає, що стан системи в даний момент визначає її еволюцію в майбутньому), так і довільний випадковий процес може при відповідному виборі фазового простору перетворюватися в марківський (подальша еволюція залежить тільки від останнього стану системи).

Прикладні задачі сучасної математики, зокрема проблеми стабілізації систем управління, побудови оптимального управління спонукають до використання систем диференціальних і різницевих рівнянь, що залежать від випадкових процесів.

Динамічні системи, що залежать від скінченнозначного випадкового процесу, дістали назву систем з випадковими станами і вивчались в працях [1, 6, 11] та ін. Загалом розглядався випадок, коли випадковий процес був марківським.

Для дослідження стійкості розв'язків стохастичних систем в роботах [3, 6 – 8, 16, 17] та ін. застосовувався метод функцій Ляпунова, який для детермінованих систем розвивався в роботах [2, 3, 5, 6, 9, 12, 13] та ін.

Досвід показує, що найбільш вдале дослідження динамічної системи можна зробити тоді, коли вона має як прообраз визначену фізичну модель. Таку модель завжди легко подати, наприклад, коли порядок досліджуваної системи дорівнює двом. У нашому випадку це модель коливання маятника під дією випадкових імпульсів, для аналізу якої використовуються моментні рівняння першого і другого роду.

Крім того, одним з ефективніших методів дослідження динамічних систем є метод функцій Ляпунова [20, 22, 23], для побудови яких існують різні прийоми. Для кожної системи диференціальних рівнянь будь-яка додатно визначена функція v може бути функцією Ляпунова. Вдало побудована функція Ляпунова для конкретної нелінійної системи автоматичного керування дає змогу розв'язати цілий комплекс задач, що мають важливе прикладне значення. До таких задач належать: оцінювання зміни регульованої величини, оцінювання часу, за який відбувається перехідний процес (часу регулювання), оцінювання інтегральних критеріїв якості регулювання і т. ін.

Наприклад, енергетичний метод побудови функції Ляпунова використовується з моменту зародження аналітичної механіки [10]. Для консервативної системи відшукується як функція узагальнених координат повна енергія H, що дорівнює сумі кінетичної та потенціальної енергій цієї системи. Потім у систему вводяться елементи, що відповідають поглинанню чи розсіюванню механічної енергії, і для цієї системи знайдена функція H буде, відповідно, функцією Ляпунова v.

Розглянемо диференціальне рівняння

$$\ddot{x} + g(\dot{x}) + f(x) = 0, \quad \text{де } g(0) = f(0) = 0 .$$

Воно еквівалентне системі

$$\dot{x} = y, \; \dot{y} = -f(x) - g(y) .$$

Це рівняння з погляду механіки описує коливання матеріальної точки під дією нелінійної відновлюваної сили $f(x)$ у середовищі з опором, що лінійно залежить від швидкості y.

Приймаючи масу матеріальної точки за одиницю, можемо записати повну енергію у вигляді

$$v = \frac{y^2}{2} + \int_0^x f(x)dx ,$$

де перший доданок відповідає кінетичній енергії, а другий доданок – потенціальній енергії.

Якщо б опір середовища був відсутній ($g(y) = 0$), то система допускала б перший інтеграл $v = \text{const}$, що відповідає закону збереження енергії. Але оскільки через наявність опору механічна енергія в процесі коливання переходить у теплову енергію, то функція v має спадати вздовж траєкторії системи. Отримаємо, що $\dot{v} = -g(y)y$.

Якщо виконується умова $g(y)y > 0$ при $y \neq 0$, то маємо $\dot{v} \leq 0$. Щоб функція v була визначена додатною, необхідно поставити вимогу виконання нерівності $f(x)x > 0$.

Функції Ляпунова широко використовуються й у теорії оптимального керування.

В роботі для моделювання випадкових малих коливань математичного маятника під дією ударів швидких частинок із малою масою використовується система стохастичних диференціальних рівнянь. Знайдено рівняння для усталених значень початкових моментів першого та другого порядку випадкових коливань маятника біля суміжного кута.

1. Моментні рівняння для випадкового розв'язку системи стохастичних лінійних диференціальних рівнянь з коефіцієнтами, які залежать від марківського процесу.

Спочатку розглянемо $X(t)$ – векторний випадковий процес із простору R^m, що є розв'язком рівняння

$$dX(t) = A(t,\xi(t))X(t)dt + \sum_{j=1}^{r} B_j(t,\xi(t))X(t)dW_j(t), \quad X(0) = \zeta, \tag{1}$$

де $\xi(t)$ – неперервний справа марківський процес, що приймає скінченне число значень $\theta_1, ..., \theta_q$; $A(t, \theta_s)$, $B_j(t, \theta_s)$, $s = \overline{1, q}$, неперервні на відрізку $[0, T]$ функції; $W_1(t), ..., W_r(t)$ – незалежні між собою скалярні вінерівські процеси, причому величини $(W_1(t), ..., W_r(t), \xi(t), \zeta)$ незалежні. Позначимо через $P_s(t) = P\{\xi(t) = \theta_s\}$, $P_{kj}(t,s) = P\{\xi(t) = \theta_k \mid \xi(s) = \theta_s\}$. Припустимо, що існують неперервні на відрізку $[0, T]$ функції $\alpha_{kj}(t)$ такі, що

$$P_{kj}(t+h,t) = \delta_{kj} + \alpha_{kj}(t)h + o(h), \tag{2}$$

де δ_{kj} – символ Кронекера, $h > 0$, $\frac{o(h)}{h} \to 0$, $h \to 0$.

Нехай

$$F_k(t,x) = P\{X(t) < x, \xi(t) = \theta_k\};$$

$$m_k(t) = \int_{R^m} x\,dF_k(t, x); \quad D_k(t) = \int_{R^m} xx^* dF_k(t, x),$$

(* позначає транспонування вектора або матриці).

Також припустимо, що в момент t_j стрибка процесу $\xi(t)$ розв'язок рівняння (1) має стрибок, який визначається векторним рівнянням

$$X(t_j + 0) = C_{ks}X(t_j - 0); \quad \det C_{ks} \neq 0 \quad (k, s = 1,...q).$$

Назвемо функції $m_k(t)$, $D_k(t)$ матрицями частинних середніх та частинних моментів другого порядку, відповідно.

Частинні моменти першого порядку $m_k(t)$ $(k = 1, ... q)$ задовольняють рівняння

$$\frac{dm_k(t)}{dt} = A_k(t)m_k(t) + \sum_{s=1}^{q} \alpha_{ks}C_{ks}m_s(t); \; m_k(0) = \langle\zeta\rangle P\{\xi(0) = \theta_k\}, \tag{3}$$

де $A_k(t) = A(t,\theta_k)$; $C_{ks} = C(\theta_k, \theta_s)$ при $k \neq s$, $C_{kk} = E$.

Символом $\langle\zeta\rangle$ позначаємо математичне сподівання випадкової величини ζ, яке визначається формулою

$$\langle\zeta\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx.$$

Одержимо рівняння для частинних других моментних матриць. Зауважимо, що $D_k(n)$ задовольняють рівняння

$$D_k(n+1) = \sum_{s=1}^{q} P_{ks}(n)\overline{A}_{ks} D_s(n)\overline{A}_{ks}^* + \sum_{s=1}^{q} P_{ks}(n) \sum_{j=1}^{q} B_{jks} D_s(n) B_{jks}^* h,$$

де $\overline{A}_{ks} = E + hA(t_n, \theta_k, \theta_s)$; $B_{jks} = B_j(t_n, \theta_k, \theta_s)$.

Далі перепишемо рівняння $D_k(n)$ у вигляді

$$D_k(n+1) = P_{kk}(n)\overline{A}_{kk} D_k(n)\overline{A}_{kk}^* + \sum_{s \neq k} P_{ks}(n)\ C_{ks} D_s(n) C_{ks}^* +$$

$$+P_{kk}(n)\sum_{j=1}^{r} B_{jkk} D_k(n) B_{jkk}^* h + \sum_{s \neq k} P_{ks}(n) \sum_{j=1}^{r} B_{jks} D_s(n) B_{jks}^* h =$$

$$= D_k(n) + hA(t_n, \theta_k) D_k(n) A^*(t_n, \theta_k) + h\varphi \sum_{s \neq k} \alpha_{ks}(n) C_{ks} D_s(n) C_{ks}^* +$$

$$+\alpha_{kk} D_k(n) h + h \sum_{j=1}^{r} B_{jkk} D_s(n) B_{jkk}^* + o(h).$$

При $h \to 0$ одержимо рівняння

$$\frac{dD_k(t)}{dt} = A_k(t) D_k(t) + D_k(t) A_k^*(t) +$$

$$+\sum_{s=1}^{q} \alpha_{ks} C_{ks} D_s(t) C_{ks}^* + \sum_{j=1}^{r} B_j(t, \theta_k) D_k(t) B_j^*(t, \theta_k)\,; \tag{4}$$

$$D_k(0) = \left\langle \zeta\zeta^* \right\rangle P\{\xi(t) = \theta_k\},$$

де $C_{kk} = E$.

Припустимо далі, що стрибки процесу $X(t)$ задовольняють умові

$$X(t_j + 0) = C_{ks} X(t_j - 0) + H_{ks}(t_j + 0).$$

Позначимо через $H_{ks}(t) = H(t,\ \theta_k, \theta_s)$ при $k \neq s$ та $H_{ss}(t) = 0$. Нехай вектор функція $H_{ks}(t)$ є неперервною на відрізку $[0, T]$. Тоді функції $m_k(t)$ та $D_k(t)$ $(k = 1, \ldots q)$ є розв'язками лінійних диференціальних рівнянь [15]

$$\frac{dm_k(t)}{dt} = A_k(t) m_k(t) + \sum_{s=1}^{q} \alpha_{ks} \Big(C_{ks} m_s(t) + H_{ks}(t) P_s(t) \Big),\ m_k(0) = \langle \zeta \rangle P\{\xi(0) = \theta_k\}\,;$$

$$\frac{dD_k(t)}{dt} = A_k(t) D_k(t) + D_k(t) A_k^*(t) + \tag{5}$$

$$+\sum_{s=1}^{q} \alpha_{ks} \left[C_{ks} D_s(t) C_{ks}^* + C_{ks} m_s(t) H_{ks}^*(t) + H_{ks}(t) m_s^*(t) C_{ks}^* \right] + \sum_{s=1}^{q} \alpha_{ks} H_{ks}(t) H_{ks}^* P_s(t)\,;$$

$$D_k(0) = \left\langle \zeta\zeta^* \right\rangle P\{\xi(t) = \theta_k\}.$$

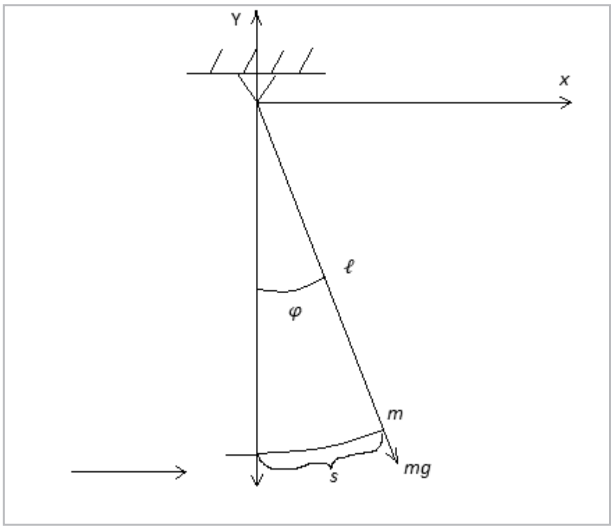
При дослідженні стійкості розв'язків можна використати системи моментних рівнянь (3), (4), (5), а також метод функцій Ляпунова.

2. Постановка задачі. Коливання маятника під дією випадкових імпульсів.

Можемо застосувати ці формули до аналізу випадкових малих коливань математичного маятника під дією ударів швидких частинок із малою масою. При цьому можна знехтувати зміною маси маятника і швидкістю руху маятника. Припустимо, що при кожному ударі частинки маятник одержує постійний за величиною малий імпульс μ. Припускаємо, що моменти ударів частинок збігаються з моментами переходу випадкового процесу $\xi(t)$ зі стану θ_2 в стан θ_1, а сам випадковий процес $\xi(t)$ визначений системою лінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = -\lambda p_1(t) + \nu p_2(t) \;\; (\lambda \geq 0); \;\; \frac{dp_2(t)}{dt} = \lambda p_1(t) - \nu p_2(t) \;\; (\lambda \geq 0). \tag{6}$$

Нехай маятник має масу m, довжину ℓ та коливається під дією сили ваги. Позначимо через φ кут відхилення маятника від вертикалі, через s – шлях, який проходить центр ваги маятника (рисунок).



Знаходимо, що $s = \ell\varphi, \quad \dot{s} = \ell\dot{\varphi}$. Кінетична і потенціальна енергія визначаються виразами

$$T = m\frac{\dot{s}^2}{2} = \frac{\ell^2\dot{\varphi}^2}{2}; \;\; \Pi = -mg\ell\cos\varphi\,.$$

Рівняння Лагранжа має відомий вигляд

$$m\ell^2\varphi'' + mg\ell\sin\varphi = 0.$$

Припускаємо, що коливання маятника досить малі і при цьому покладемо

$$\sin\varphi \approx \varphi; \quad g\ell^{-1} = \omega^2.$$

Припустимо також, що враховується в'язке тертя, яке вважається малим. Остаточно приходимо до рівняння руху математичного маятника

$$\ddot{\varphi} + b\dot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0, \tag{7}$$

яке описує рух при відсутності імпульсів.

У момент t_j удару частинки положення маятника $\varphi(t)$ не змінюється, а швидкість руху змінюється стрибкоподібно за законом

$$m\Delta s = \mu ,$$

або

$$m\ell\left(\dot{\varphi}(t_j+0)-\dot{\varphi}(t_j-0)\right)=\mu,$$

що призводить до умови стрибка координати $\dot{\varphi}(t)$

$$\dot{\varphi}(t_j+0)-\dot{\varphi}(t_j-0)=\frac{\mu}{m\ell}. \tag{8}$$

Запишемо рівняння (7) у вигляді системи рівнянь, припускаючи

$$x_1=\varphi;\ \ x_2=\dot{\varphi}\,.$$

При цьому приходимо до системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_1(t)}{dt}=x_2(t);\ \ \frac{dx_2(t)}{dt}=-\omega^2 x_1(t)-bx_2(t),$$

яку запишемо у векторній формі

$$\frac{dX(t)}{dt}=AX(t),\quad A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \omega^2 & -b\end{pmatrix}. \tag{9}$$

У моменти t_j $(j=0,1,2,...)$ удару частинок згідно рівняння (8) маємо рівності

$$X(t_j+0)=X(t_j-0)+H_{ks}\ \ (k,s=1,\ 2)\,, \tag{10}$$

де вектори H_{ks} визначаються постановкою задачі

$$H_{11}=0;\ \ H_{12}=\begin{pmatrix}0\\ \mu(m\ell)^{-1}\end{pmatrix};\ H_{21}=0;\ H_{22}=0. \tag{11}$$

Складемо систему рівнянь вигляду (5)

$$\frac{dM_1}{dt}=AM_2-\lambda M_1+\nu M_2+\nu H_{12}\cdot p_2(t);\ \ \frac{dM_2}{dt}=AM_2+\lambda M_1-\nu M_2, \tag{12}$$

де $M_1=m_1,\ M_2=m_2$.

Розглянемо усталений рух, коли можна замінити значення $p_k(t)$ $(k=1,2)$ граничними значеннями, обумовленими рівняннями $-\lambda p_1+\nu p_2=0;\ p_1+p_2=1$.

При цьому знаходимо значення

$$p_1=\frac{\nu}{\lambda+\nu};\ \ p_2=\frac{\lambda}{\lambda+\nu}\,. \tag{13}$$

Сталі значення M_1, M_2 визначаються із системи рівнянь

$$AM_1-\lambda M_1+\nu M_2+H_{12}\frac{\lambda\nu}{\lambda+\nu}=0;\ \ AM_2+\lambda M_1-\nu M_2=0. \tag{14}$$

Складаючи системи рівнянь (14), приходимо до більш простої системи рівнянь

$$AM=-H_{12}\frac{\lambda\nu}{\lambda+\nu};\ M=\begin{pmatrix}m_1\\ m_2\end{pmatrix};\ H_{12}=\begin{pmatrix}0\\ \mu(m\ell)^{-1}\end{pmatrix},$$

яка має розв'язок

$$m_1 = \langle \varphi \rangle = \frac{1}{\omega^2} \frac{\lambda \nu}{\lambda + \nu} \frac{\mu}{m\ell}; \;\; m_2 = \langle \dot{\varphi} \rangle = 0. \qquad (15)$$

Надалі потрібно знайти M_1. Із другого рівняння (14) знаходимо рівняння

$$M_2 = (\nu E - A)^{-1} \lambda M_1; \;\; M_1 = -\left((A - \lambda E) + \nu \lambda (\nu E - A)^{-1} \right)^{-1} H_{12} \frac{\lambda \nu}{\lambda + \nu}. \qquad (16)$$

З останнього рівняння знаходимо

$$M_1 = \left(\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ \omega^2 & b + \lambda \end{pmatrix} - \frac{\lambda \nu}{\nu^2 + \nu b + \omega^2} \begin{pmatrix} \nu + b & 1 \\ -\omega^2 & \nu \end{pmatrix} \right)^{-1} H_{12} \frac{\lambda \nu}{\lambda + \nu}.$$

Використовуючи розв'язок виду (15), отримаємо рівносильне рівняння

$$M_1 = \left((\lambda + \nu) E - A \right)^{-1} \left(\nu M + H_{12} \frac{\lambda \nu}{\lambda + \nu} \right). \qquad (17)$$

Складемо систему диференціальних рівнянь виду (5)

$$\frac{dD_1(t)}{dt} = AD_1(t) + D_1(t)A^* - \lambda D_1(t) + \nu D_2(t) + \nu \left(M_1 H_{12}^* + H_{12} M_1^* + H_{12} H_{12}^* p_2(s) \right);$$
$$\frac{dD_2(t)}{dt} = AD_2(t) + D_2(t)A^* + \lambda D_1(t) - \nu D_2(t). \qquad (18)$$

Використовуючи ці системи рівнянь, приходимо до матричного диференціального рівняння для матриці других моментів

$$D(t) = D_1(t) + D_2(t);$$
$$\frac{dD(t)}{dt} = AD(t) + D(t)A^* + \nu \left(M_1 H_{12}^* + H_{12} M_1^* + H_{12} H_{12}^* \frac{\lambda}{\lambda + \nu} \right). \qquad (18)$$

Представимо симетричну матрицю $D(t)$ через елементи $d_k(t)$

$$D(t) = \begin{pmatrix} d_1(t) & d_2(t) \\ d_2(t) & d_3(t) \end{pmatrix}.$$

Із системи рівнянь (19) знаходимо систему лінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{dd_1(t)}{dt} = 2d_2(t);$$
$$\frac{dd_2(t)}{dt} = -\omega^2 d_1(t) - bd_2(t) + d_3(t) + \nu m_{11} \frac{\mu}{m\ell};$$
$$\frac{dd_3(t)}{dt} = -2\omega^2 d_2(t) - 2bd_3(t) + \nu \left(2m_{21} \frac{\mu}{m\ell} + \left(\frac{\mu}{m\ell} \right)^2 \frac{\lambda}{\lambda + \nu} \right). \qquad (20)$$

Позначимо

$$M_1 = \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{21} \end{pmatrix},$$

де

$$m_{11}=\frac{\mu}{m\ell}\cdot\frac{\lambda\nu}{\lambda+\nu}\cdot\frac{(\lambda+\nu+b)\nu+\omega^2}{\omega^2\left[(\lambda+\nu)(\lambda+\nu+b)+\omega^2\right]};\; m_{21}=\frac{\mu}{m\ell}\cdot\frac{\lambda\nu}{\lambda+\nu}\cdot\frac{\lambda}{(\lambda+\nu)(\lambda+\nu+b)+\omega^2}.$$

З рівнянь (20) знаходимо усталені значення других початкових моментів

$$\left\langle\varphi^2(t)\right\rangle=d_1=\left(\frac{\mu}{m\ell}\right)^2\frac{\lambda\nu}{\lambda+\nu}\cdot\frac{2b\nu\left[(\lambda+\nu+b)\nu+\omega^2\right]+\omega^2\left[2\lambda^2+(\lambda+\nu)(\lambda+\nu+b)+\omega^2\right]}{2b\omega^2\left[(\lambda+\nu)(\lambda+\nu+b)+\omega^2\right]};$$

$$\left\langle\varphi(t)\ \dot\varphi(t)\right\rangle=d_2=0;$$

$$\left\langle\dot\varphi^2(t)\right\rangle=d_3=\frac{1}{2b}\left(\frac{\mu}{m\ell}\right)^2\cdot\frac{2\lambda^2+(\lambda+\nu)(\lambda+\nu+b)+\omega^2}{(\lambda+\nu)(\lambda+\nu+b)+\omega^2}. \tag{21}$$

З формул (17), (21) знаходимо дисперсію випадкових коливань маятника біля суміжного кута

$$\sigma_\varphi^2=\left\langle\left(\varphi(t)-\left\langle\varphi(t)\right\rangle\right)^2\right\rangle=\frac{d_3}{\omega^2}+$$
$$+\left(\frac{\mu}{m\ell}\right)^2\frac{\nu}{\omega^4}\cdot\frac{\lambda\nu}{\lambda+\nu}\cdot\frac{(\nu^2-\lambda^2)(\lambda+\nu+b)+\omega^2\nu}{(\lambda+\nu)\left[(\lambda+\nu)^2+b(\lambda+\nu)+\omega^2\right]}. \tag{22}$$

На думку авторів, існуюча література по теорії випадкових процесів достатньо складна для застосування до інженерних та інших прикладних задач. Запропонований підхід дозволив задачу в ймовірнісній постановці привести до детермінованих функціональних рівнянь і дістати явні вирази для моментів першого та другого порядку.

Висновок.

В даній роботі рівняння для моментів першого і другого порядку випадкових розв’язків системи лінійних диференціальних рівнянь, що залежать від скінченнозначного марківського випадкового процесу, за умовою, що одночасно зі стрибками марківського процесу відбуваються випадкові перетворення розв’язків, застосовуються до аналізу випадкових малих коливань математичного маятника під дією ударів швидких частинок із малою масою. Знайдено рівняння для математичного сподівання і дисперсії випадкового кута відхилення маятника від вертикалі.

РЕЗЮМЕ. За допомогою системи стохастичних диференціальних рівнянь побудовано модель випадкових малих коливань математичного маятника під дією ударів швидких частинок із малою масою. Знайдено рівняння для усталених значень початкових моментів першого та другого порядку випадкових коливань маятника біля суміжного кута.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: ймовірнісна модель, математичний маятник, випадкові сили, стохастичні диференціальні рівняння.

1. *Артемьев В.М.* Теория динамических систем со случайными изменениями структуры. – Минск: Высш. шк., 1979. – 160 с.
2. *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. – Москва: Наука, 1970. – 240 с.
3. *Валеев К.Г., Карелова О.Л., Горелов В.И.* Оптимизация линейных систем со случайными коэффициентами. – Москва: Изд-во РУДН, 1996. – 258 с.
4. *Дегтяр С.В., Шушарін Ю.В., Жук Я.О.* Рух симетричного гіроскопа під дією сили тяжіння з дискретною випадковою зміною параметрів системи // Прикл. механіка. – 2022. –**58**, № 6. – Р. 18 – 28.

5. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. – Москва: Наука, 1975. – 496 с.
6. *Кац И.Я., Красовский Н.Н.* Об устойчивости систем со случайными параметрами // Прикл. математика и механика. – 1960. – № 5. – С. 809 – 823.
7. *Кореневский Д.Г.* Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии. – Киев: Наук. думка, 1989. – 208 с.
8. *Кушнер Дж.Г.* Стохастическая устойчивость и управление. – Москва: Мир, 1969. – 200 с.
9. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. – Москва: Наука, 1965. – 432с.
10. *Мартыненко В.С.* Операционное исчисление. – Киев: Высшая школа, 1990. – 350 с.
11. *Мильштейн Г.Н., Репин Ю.М.* О воздействии марковского процесса на систему дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. – 1969. – **5**, № 8. – С. 1371 – 1384.
12. *Румянцев В.В.* Метод функций Ляпунова в теории устойчивости движения. В кн. Механика в СССР за 50 лет. Т.1. – Москва: Наука, 1968. –С. 7 – 66.
13. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. – Москва: Изд-во АН СССР, 1962. – 536 с.
14. *Шуренков В.М., Дегтяр С.В.* Теореми марківського відновлення у схемі серій. Асимптотичний аналіз випадкових еволюцій. – Київ: ІМ НАН України, 1994. – С. 270 – 305.
15. *Шушарін Ю.В.* Система лінійних диференціальних рівнянь з випадковими лінійними стрибками рішень // Вісник Київського нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки. – 2010. – Вип. 1 – С. 162 – 164.
16. *Шушарін Ю.В*. Дослідження стійкості розв'язків системи лінійних стохастичних диференціальних рівнянь з марківськими коефіцієнтами // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2011. – № 3. – С. 183 – 189 с.
17. *Шушарін Ю.В.* Алгебраїчні критерії асимптотичної стійкості розв'язків лінійних різницевих рівнянь з випадковими коефіцієнтами // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2014. – № 1. – С. 167 – 172.
18. *Degtyar S.V.* Markov renewal limit theorems // Theory of Probability and Mathematical Statistics. – 2008. – 76. – P. 33 – 40.
19. *Feller W*. An Introduction to Probability Theory and Its Applications. – New York: Wiley, 1966. – 626p.
20. *Hohn W.* Theorie und Anwendungen der directen Methoden von Jiapunov. — Berlin: Springer, 1959. - 142 p.
21. *Kemeny J.G., Snell J.L.* Finite Markov Chains. – Princeton: N. J., Van Nostrand, 1960. – 210p.
22. *Martynyuk A.A.* Some Results of Developing Classical and Modern Theories of Stability of Motion // Int. Appl. Mech. – 2001. – **37**, N 5. – P. 1142 – 1157.
23. *Martynyuk A.A.* 40 Years of the Direct Matrix-Valued Lyapunov Function Method (Review) // Int. Appl. Mech. – 2020. –**56**, N 3. – P. 253 – 325.

Надійшла 03.12.2021 Затверджена до друку 28.03.2023