

**В. Ф. Мейш¹, Ю. А. Мейш², Н. В. Майбородіна³,
Є. А. Сторожук¹**

**ДЕФОРМУВАННЯ ПІДКРІПЛЕНИХ ПОЗДОВЖНИМИ
РЕБРАМИ ТРИШАРОВИХ ЕЛІПСОЇДАЛЬНИХ ОБОЛОНОК
ПІД ДІЄЮ НЕСТАЦІОНАРНОГО НАВАНТАЖЕННЯ**

¹ Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: stevan@ukr.net;

² Національний транспортний університет,
вул. Омеляновича-Павленка, 1, 01010, Київ, Україна; e-mail: juliameish@gmail.com

³ Відокремлений підрозділ Національного університету біоресурсів і
природокористування України «Ніжинський агротехнічний інститут»,
вул. Шевченка 10, 16600, Чернігівська обл., Ніжин, Україна;
e-mail: natashamai2311@gmail.com

Abstract. The statement of dynamic problems on the forced oscillations of three-layer ellipsoidal shells stiffened by the longitudinal ribs under the action of a non-stationary surface load is given. The main relations for a reinforced three-layer ellipsoidal shell are written based on the Timoshenko model, taking into account the geometric nonlinearity. The equations of oscillations of this type of shell are derived from the Hamilton – Ostrogradsky variational principle. A numerical technique for solving the given problems is developed. It is based on the use of the integro-interpolation method of constructing the difference schemes for spatial coordinates and an explicit finite difference scheme for time. The regularities of dynamic processes in reinforced and smooth open three-layer ellipsoidal shells with rigidly clamped edges, loaded with pulsed uniformly distributed pressure, are investigated.

Key words: three-layer ellipsoidal shell, reinforcing rib, Timoshenko model, forced oscillations, impulse load, numerical solution.

Вступ.

Дослідження динамічних процесів у підкріплених багатошарових оболонкових конструкціях під дією нестационарних навантажень виникають в багатьох галузях сучасної техніки. Багатошарові дискретно підкріплені оболонки являють собою складні неоднорідні за товщиною пружні структури. Неоднорідність структури зумовлена як багатошаровістю оболонки, так і наявністю підкріплюючих ребер. Найбільшу кількість досліджень з даної проблеми виконано в напрямку, пов'язаному із розрахунком багатошарових оболонок канонічної форми (кругові циліндр і конус, сфера, тощо) [1, 2, 4, 5, 7, 17 – 23]. Оболонкові структури більш складної форми (циліндр некругового перерізу, еліпсоїд, оболонки з серединною поверхнею складної геометрії, тощо) досліджено в роботах [3, 8 – 13, 24, 25]. Зазначимо, що автори праць [14 – 16] за допомогою розробленої ними чисельної методики виявили закономірності поширення пружних хвиль в одношарових еліпсоїдальних оболонках, підкріплених поздовжніми та поперечними ребрами жорсткості.

Нижче на основі геометрично нелінійної теорії оболонок і стержнів типу Тимошенка дано постановку динамічних задач про вимушені коливання підкріплених поздовжніми ребрами тришарових еліпсоїдальних оболонок під дією нестационарного розподі-

леного навантаження. Розроблено чисельний алгоритм розв'язання задач даного класу та досліджено динамічну поведінку відкритої тришарової еліпсоїдальної оболонки з жорстко затисненими краями, яка підкріплена розміщеними вздовж меридіанів пружними елементами і навантажена імпульсним рівномірно розподіленим тиском.

§1. Постановка задачі та основні рівняння.

Розглянемо еліпсоїдальну оболонку, яка складається з трьох ортотропних шарів постійної товщини h_m ($m = 1, 2, 3$; $h = h_1 + h_2 + h_3$). Віднесемо оболонку до криволінійної ортогональної системи координат (α_1, α_2, z) , де координатні лінії α_1, α_2, z напрямлені уздовж меридіану, паралелі та нормалі до серединної поверхні. Вважаємо, що оболонка підкріплена поздовжніми ребрами жорсткості, розміщеними вздовж ліній α_1 , та знаходиться під дією нестационарного поверхневого навантаження.

Геометрію серединної поверхні оболонки задамо в прямокутній декартовій системі координат X, Y, Z співвідношеннями:

$$X = a \sin \alpha_1 \cos \alpha_2; \quad Y = a \sin \alpha_1 \sin \alpha_2; \quad Z = b \cos \alpha_1, \quad (1.1)$$

де a, b – півосі еліпса.

Вирази для параметрів Ламе і кривизн серединної поверхні еліпсоїдальної оболонки мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} A_1 &= a(\cos^2 \alpha_1 + k^2 \sin^2 \alpha_1)^{1/2}; \quad A_2 = a \sin \alpha_1; \quad k = b/a; \\ k_1 &= \frac{b}{a^2}(\cos^2 \alpha_1 + k^2 \sin^2 \alpha_1)^{-3/2}; \quad k_2 = \frac{b}{a^2}(\cos^2 \alpha_1 + k^2 \sin^2 \alpha_1)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Основні співвідношення для підкріпленої поздовжніми ребрами тришарової еліпсоїдальної оболонки запишемо на основі варіанту геометрично нелінійної теорії оболонок і стержнів типу Тимошенка в квадратичному наближенні, в якому кінематичні та статистичні гіпотези застосовуються до всього пакету шарів оболонки [2].

Приймається такий закон зміни переміщень за товщиною еліпсоїдальної оболонки:

$$\begin{aligned} u_1^z(s_1, s_2, z) &= u_1(s_1, s_2) + z\varphi_1(s_1, s_2); \\ u_2^z(s_1, s_2, z) &= u_2(s_1, s_2) + z\varphi_2(s_1, s_2); \\ u_3^z(s_1, s_2, z) &= u_3(s_1, s_2), \end{aligned} \quad (1.3)$$

де $u_1, u_2, u_3, \varphi_1, \varphi_2$ – компоненти узагальненого вектора переміщень оболонки $\bar{U}$; s_1, s_2 – довжини дуг у меридіональному і коловому напрямках.

Деформований стан i -го підкріплюючого елемента, напрямленого вздовж лінії α_1 , визначається через компоненти узагальненого вектора переміщень центрів ваги поперечних перерізів ребра $\bar{U}_i = (u_{1i}, u_{2i}, u_{3i}, \varphi_{1i}, \varphi_{2i})^T$ наступним чином:

$$\begin{aligned} u_{1i}^{yz}(s_1, y, z) &= u_{1i}(s_1) + z\varphi_{1i}(s_1); \\ u_{2i}^{yz}(s_1, y, z) &= u_{2i}(s_1) + z\varphi_{2i}(s_1); \\ u_{3i}^{yz}(s_1, y, z) &= u_{3i}(s_1). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Вважаємо, що оболонка та підкріплюючі ребра жорстко з'єднані між собою.

Умови контакту між компонентами узагальненого вектора переміщень центрів ваги поперечних перерізів i -го ребра та компонентами узагальненого вектора переміщень серединної поверхні гладкої еліпсоїдальної оболонки мають вигляд:

$$u_{1i}(s_1) = u_1(s_1, s_{2i}) \pm h_{ci} \varphi_1(s_1, s_{2i});$$

$$u_{2i}(s_1) = u_2(s_1, s_{2i}) \pm h_{ci} \varphi_2(s_1, s_{2i}); \quad (1.5)$$

$$u_{3i}(s_1) = u_3(s_1, s_{2i});$$

$$\varphi_{1i}(s_1) = \varphi_1(s_1, s_{2i}); \quad \varphi_{2i}(s_1) = \varphi_2(s_1, s_{2i}),$$

де $h_{ci} = 0,5(h + h_i^r)$ – відстань від серединної поверхні гладкої еліпсоїдальної оболонки до лінії центрів ваги поперечних перерізів i -го ребра; h_i^r – висота i -го підкріплюючого ребра; s_{2i} – координата лінії проектування центрів ваги поперечних перерізів i -го ребра на серединну поверхню обшивки.

Знак «+» відповідає випадку зовнішнього підкріплення оболонки, а знак «-» вибирається у випадку внутрішнього підкріплення.

Геометричні співвідношення для гладкої тришарової оболонки приймаються у вигляді:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial s_1} + k_1 u_3 + \frac{1}{2} \theta_1^2; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial s_2} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial s_1} u_1 + k_2 u_3 + \frac{1}{2} \theta_2^2;$$

$$\varepsilon_{12} = \omega + \theta_1 \theta_2; \quad \varepsilon_{13} = \varphi_1 + \theta_1; \quad \varepsilon_{23} = \varphi_2 + \theta_2; \quad \theta_1 = \frac{\partial u_3}{\partial s_1} - k_1 u_1; \quad \theta_2 = \frac{\partial u_3}{\partial s_2} - k_2 u_2;$$

$$\omega = \omega_1 + \omega_2; \quad \omega_1 = \frac{\partial u_2}{\partial s_1}; \quad \omega_2 = \frac{\partial u_1}{\partial s_2} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial s_1} u_2; \quad (1.6)$$

$$\chi_{11} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1}; \quad \chi_{22} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_2} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial s_1} \varphi_1;$$

$$\chi_{12} = \tau_1 + \tau_2 + k_1 \omega_1 + k_2 \omega_2; \quad \tau_1 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_1}; \quad \tau_2 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_2} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial s_1} \varphi_2.$$

Величини зусиль і моментів оболонки виражаються через компоненти її деформації так:

$$T_{11} = B_{11} \varepsilon_{11} + B_{12} \varepsilon_{22} + B_{13} \chi_{11} + B_{14} \chi_{22}; \quad T_{12} = S + k_2 H;$$

$$T_{22} = B_{21} \varepsilon_{11} + B_{22} \varepsilon_{22} + B_{23} \chi_{11} + B_{24} \chi_{22}; \quad T_{21} = S + k_1 H;$$

$$T_{13} = \tilde{B}_{13} \varepsilon_{13}; \quad T_{23} = \tilde{B}_{23} \varepsilon_{23}; \quad S = B_s \varepsilon_{12} + K_s \chi_{12};$$

$$\bar{T}_{13} = T_{13} + T_{11} \theta_1 + S \theta_2; \quad \bar{T}_{23} = T_{23} + T_{22} \theta_2 + S \theta_1; \quad (1.7)$$

$$M_{11} = D_{11} \chi_{11} + D_{12} \chi_{22} + D_{13} \varepsilon_{11} + D_{14} \varepsilon_{22};$$

$$M_{22} = D_{21} \chi_{11} + D_{22} \chi_{22} + D_{23} \varepsilon_{11} + D_{24} \varepsilon_{22};$$

$$M_{12} = M_{21} = H; \quad H = D_s \chi_{12} + K_s \varepsilon_{12},$$

де

$$B_{11} = \sum_{m=1}^3 \frac{E_1^m h_m}{1 - \nu_{12}^m \nu_{21}^m}; \quad B_{12} = \sum_{m=1}^3 \frac{E_1^m \nu_{21}^m h_m}{1 - \nu_{12}^m \nu_{21}^m}; \quad B_{21} = \sum_{m=1}^3 \frac{E_2^m \nu_{12}^m h_m}{1 - \nu_{12}^m \nu_{21}^m}; \quad B_{22} = \sum_{m=1}^3 \frac{E_2^m h_m}{1 - \nu_{12}^m \nu_{21}^m};$$

$$B_s = \sum_{m=1}^3 G_{12}^m h_m; \quad K_s = \sum_{m=1}^3 \frac{G_{12}^m (z_{m+1}^2 - z_m^2)}{2}; \quad \tilde{B}_{13} = \sum_{m=1}^3 G_{13}^m h_m; \quad \tilde{B}_{23} = \sum_{m=1}^3 G_{23}^m h_m;$$

$$\begin{aligned}
B_{13} &= \sum_{m=1}^3 \frac{E_1^m (z_{m+1}^2 - z_m^2)}{2(1 - \nu_{12}^m \nu_{21}^m)}; \quad B_{14} = \sum_{m=1}^3 \frac{E_1^m \nu_{21}^m (z_{m+1}^2 - z_m^2)}{2(1 - \nu_{12}^m \nu_{21}^m)}; \\
B_{23} &= \sum_{m=1}^3 \frac{E_2^m \nu_{12}^m (z_{m+1}^2 - z_m^2)}{2(1 - \nu_{12}^m \nu_{21}^m)}; \quad B_{24} = \sum_{m=1}^3 \frac{E_2^m (z_{m+1}^2 - z_m^2)}{2(1 - \nu_{12}^m \nu_{21}^m)}; \\
D_{11} &= \sum_{m=1}^3 \frac{E_1^m (z_{m+1}^3 - z_m^3)}{3(1 - \nu_{12}^m \nu_{21}^m)}; \quad D_{22} = \sum_{m=1}^3 \frac{E_2^m (z_{m+1}^3 - z_m^3)}{3(1 - \nu_{12}^m \nu_{21}^m)}; \\
D_{13} &= B_{13}; \quad D_{23} = B_{23}; \quad D_{14} = B_{14}; \quad D_{24} = B_{24}; \\
D_s &= \sum_{m=1}^3 \frac{G_{12}^m (z_{m+1}^3 - z_m^3)}{3}; \quad D_{12} = \sum_{m=1}^3 \frac{E_1^m \nu_{21}^m (z_{m+1}^3 - z_m^3)}{3(1 - \nu_{12}^m \nu_{21}^m)}; \quad D_{21} = \sum_{m=1}^3 \frac{E_2^m \nu_{12}^m (z_{m+1}^3 - z_m^3)}{3(1 - \nu_{12}^m \nu_{21}^m)}.
\end{aligned}$$

Тут E_1^m , E_2^m , G_{12}^m , G_{13}^m , G_{23}^m , ν_{12}^m , ν_{21}^m – фізико-механічні характеристики матеріалу m -го шару оболонки; $z_m, z_{m+1} \in [-h/2; h/2]$ – координати поверхонь m -го шару.

Враховуючи умови контакту ребра і оболонки (1.5), отримаємо такі деформаційні співвідношення для i -го ребра:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11i} &= \frac{\partial u_1}{\partial s_1} \pm h_{ci} \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1} + k_{1i} u_3 + \frac{1}{2} \theta_{1i}^2 + \frac{1}{2} \theta_{2i}^2; \quad \varepsilon_{12i} = \theta_{2i}; \quad \varepsilon_{13i} = \varphi_1 + \theta_{1i}; \\
\theta_{1i} &= \frac{\partial u_3}{\partial s_1} - k_{1i} (u_1 \pm h_{ci} \varphi_1); \quad \theta_{2i} = \frac{\partial u_2}{\partial s_1} \pm h_{ci} \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_1}; \\
\chi_{11i} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1}; \quad \chi_{12i} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_1}.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Вирази зусиль-моментів для i -го ребра мають вигляд:

$$\begin{aligned}
T_{11i} &= E_i F_i \varepsilon_{11i}; \quad T_{12i} = G_i F_i \varepsilon_{12i}; \quad T_{13i} = k_i^2 G_i F_i \varepsilon_{13i}; \\
M_{11i} &= E_i I_{1i} \chi_{11i}; \quad M_{12i} = G_i I_{cri} \chi_{12i},
\end{aligned} \tag{1.9}$$

де $F_i, I_{1i}, I_{cri}, E_i, G_i$, – геометричні та фізико-механічні характеристики i -го ребра.

Використовуючи варіаційний принцип Гамільтона – Остроградського [2], отримаємо рівняння коливань підкріпленої еліпсоїдальної оболонки.

Варіаційне рівняння для оболонки з поздовжніми дискретно розміщеними підкріплюючими ребрами представимо у вигляді

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta(\Pi - K) + \delta A] dt = 0, \tag{1.10}$$

де

$$\Pi = \Pi_0 + \sum_{i=1}^{N_r} \Pi_i; \tag{1.11}$$

$$K = K_0 + \sum_{i=1}^{N_r} K_i; \tag{1.12}$$

Π_0 , K_0 – потенціальна і кінетична енергії обшивки; Π_i , K_i – потенціальна і кінетична енергії i -го підкріплюючого ребра; A – робота зовнішніх сил; N_r – кількість підкріплюючих ребер.

Вирази для величин $\delta\Pi$ і δK із врахуванням формул (1.11), (1.12) мають вигляд

$$\delta\Pi = \delta\Pi_0 + \sum_{i=1}^{N_r} \delta\Pi_i; \quad (1.13)$$

$$\delta K = \delta K_0 + \sum_{i=1}^{N_r} \delta K_i; \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} \delta\Pi_0 = & \iint_S [T_{11}\delta\varepsilon_{11} + T_{22}\delta\varepsilon_{22} + S\delta\varepsilon_{12} + T_{13}\delta\varepsilon_{13} + T_{23}\delta\varepsilon_{23} + \\ & + M_{11}\delta\chi_{11} + M_{22}\delta\chi_{22} + H\delta(\tau_1 + \tau_2)] dS; \\ \delta\Pi_i = & \int_l [T_{11i}\delta\varepsilon_{11i} + T_{12i}\delta\varepsilon_{12i} + T_{13i}\delta\varepsilon_{13i} + M_{11i}\delta\chi_{11i} + M_{12i}\delta\chi_{12i}] dl; \\ \delta K_0 = & \iint_S \left[I_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \delta \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial t} \delta \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial u_3}{\partial t} \delta \frac{\partial u_3}{\partial t} \right) + I_2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \delta \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial t} \delta \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \delta \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \delta \frac{\partial u_2}{\partial t} \right) + I_3 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \delta \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \delta \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \right) \right] dS; \\ \delta K_i = & \rho_i^r h_i^r \int_l \left[\frac{\partial u_{1i}}{\partial t} \delta \frac{\partial u_{1i}}{\partial t} + \frac{\partial u_{2i}}{\partial t} \delta \frac{\partial u_{2i}}{\partial t} + \frac{\partial u_{3i}}{\partial t} \delta \frac{\partial u_{3i}}{\partial t} + \right. \\ & \left. + \frac{I_{1i}}{F_i} \frac{\partial \varphi_{1i}}{\partial t} \delta \frac{\partial \varphi_{1i}}{\partial t} + \frac{I_{2i}}{F_i} \frac{\partial \varphi_{2i}}{\partial t} \delta \frac{\partial \varphi_{2i}}{\partial t} \right] dl; \\ I_1 = & \sum_{m=1}^3 \rho_m h_m; \quad I_2 = \sum_{m=1}^3 \rho_m \frac{z_{m+1}^2 - z_m^2}{2}; \quad I_3 = \sum_{m=1}^3 \rho_m \frac{z_{m+1}^3 - z_m^3}{3}. \end{aligned}$$

Тут ρ_m, ρ_i^r – густина матеріалу m -го шару оболонки та i -го підкріплюючого ребра.

Рівняння коливань неоднорідної за товщиною тришарової еліпсоїдальної оболонки в диференціальній формі мають вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_2} \left[\frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 T_{11}) - \frac{\partial A_2}{\partial s_1} T_{22} \right] + k_1 \bar{T}_{13} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial s_2} (A_1 T_{21}) &= I_1 \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + I_2 \cdot \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}; \\ \frac{1}{A_2} \left[\frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 T_{12}) - \frac{\partial A_2}{\partial s_1} T_{21} \right] + k_2 \bar{T}_{23} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial s_2} (A_1 T_{22}) &= I_1 \cdot \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + I_2 \cdot \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2}; \\ \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 \bar{T}_{13}) - k_1 T_{11} - k_2 T_{22} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial s_2} (A_1 \bar{T}_{23}) + P_3 &= I_1 \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}; \\ \frac{1}{A_2} \left[\frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 M_{11}) - \frac{\partial A_2}{\partial s_1} M_{22} \right] - T_{13} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial s_2} (A_1 M_{21}) &= I_2 \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + I_3 \cdot \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}; \\ \frac{1}{A_2} \left[\frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 M_{12}) + \frac{\partial A_2}{\partial s_1} M_{21} \right] + \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial s_2} (A_1 M_{22}) - T_{23} &= I_2 \cdot \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + I_3 \cdot \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

де P_3 – нормальна компонента поверхневого навантаження.

Рівняння коливань i -го підкріплюючого ребра представимо так:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_{11i}}{\partial s_1} + k_{1i} T_{13i} + [S]_i &= \rho_i^r F_i \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \pm h_{ci} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right); \\
\frac{\partial T_{12i}}{\partial s_1} + [T_{22}]_i &= \rho_i^r F_i \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \pm h_{ci} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right); \\
\frac{\partial T_{13i}}{\partial s_1} - k_{1i} T_{11i} + [T_{23}]_i &= \rho_i^r F_i \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}; \\
\frac{\partial M_{11i}}{\partial s_1} - T_{13i} \pm h_{ci} \left(\frac{\partial T_{11i}}{\partial s_1} + k_{1i} T_{13i} \right) + [H]_i &= \rho_i^r F_i \left(\pm h_{ci} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \left(h_{ci}^2 + \frac{I_{1i}}{F_i} \right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right); \\
\frac{\partial M_{12i}}{\partial s_1} \pm h_{ci} \frac{\partial T_{12i}}{\partial s_1} + [M_{22}]_i &= \rho_i^r F_i \left(\pm h_{ci} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \left(h_{ci}^2 + \frac{I_{cri}}{F_i} \right) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right).
\end{aligned} \tag{1.16}$$

У виразах для рівнянь коливань дискретно підкріплюючих ребер (1.16) позначення типу $[S]_i$ відповідають сумарній дії величин зусиль – моментів гладкої оболонки на i -те підкріплююче ребро.

Рівняння коливань (1.15) і (1.16) доповнюються відповідними граничними і нульовими початковими умовами.

§2. Чисельний алгоритм.

Рівняння неосесиметричних коливань дискретно підкріпленої поздовжніми ребрами тришарової еліпсоїдальної оболонки являють собою систему диференціальних рівнянь в частинних похідних за змінними s_1, s_2, t при наявності просторових розривів на координатних лініях s_1 в перерізах $s_2 = s_{2i}$ ($i = 1, 2, \dots, N_r$). Виходячи з цього, алгоритм розв'язання поставленої задачі буде наступним чином: шукається розв'язок в гладкій області тришарової еліпсоїдальної оболонки і окремо на лініях просторових розривів. Чисельний алгоритм розв'язання сформульованої задачі заснований на використанні інтегро-інтерполяційного методу побудови різницьових схем за просторовими координатами s_1, s_2 та явної скінченно-різницевої схеми інтегрування за часовою координатою t [6].

Перехід від неперервної задачі до її скінченно-різницевого аналогу виконується в два етапи:

- 1-ий етап полягає в скінченно-різницевій апроксимації рівнянь коливань в зусиллях-моментах;
- 2-ий етап апроксимації рівнянь полягає в скінченно-різницевій апроксимації зусиль-моментів і відповідних деформацій.

В області D зміни координат s_1, s_2 будуються основна з цілими індексами (s_{1l}, s_{2m}) та допоміжні з дробовими індексами $(s_{1l \pm 1/2}, s_{2m}), (s_{1l}, s_{2m \pm 1/2}), (s_{1l \pm 1/2}, s_{2m \pm 1/2})$ різницевої сітки. Зазначимо, що різницевої сітки в області D будуються таким чином, щоб точки розривів попадали у вузли з цілими індексами. З використанням побудованих різницьових сіток вводяться наступні області:

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \{ s_{1l-1/2} \leq s_1 \leq s_{1l+1/2}, s_{2m-1/2} \leq s_2 \leq s_{2m+1/2} \}; \\
\Omega_2 &= \{ s_{1l-1} \leq s_1 \leq s_{1l}, s_{2m-1/2} \leq s_2 \leq s_{2m+1/2} \};
\end{aligned}$$

$$\Omega_3 = \left\{ s_{1l} \leq s_1 \leq s_{1l+1}, \quad s_{2m-1/2} \leq s_2 \leq s_{2m+1/2} \right\}; \quad (2.1)$$

$$\Omega_4 = \left\{ s_{1l-1/2} \leq s_1 \leq s_{1l+1/2}, \quad s_{2m-1} \leq s_2 \leq s_{2m} \right\};$$

$$\Omega_5 = \left\{ s_{1l-1/2} \leq s_1 \leq s_{1l+1/2}, \quad s_{2m} \leq s_2 \leq s_{2m+1} \right\}$$

при $t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}$.

Виконуючи операцію інтегрування рівнянь (1.15) в області Ω_1 , отримаємо наступні різниці рівняння коливань гладкої оболонки:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{A_{2l}} \left(\frac{A_{2l+1/2} T_{11l+1/2,m}^n - A_{2l-1/2} T_{11l-1/2,m}^n}{\Delta s_1} \right) - \frac{1}{A_{2l}} \frac{A_{2l+1/2} - A_{2l-1/2}}{\Delta s_1} T_{22l,m}^n + \\ & + \frac{1}{A_{1l}} \frac{A_{1l} T_{21l,m+1/2}^n - A_{1l} T_{21l,m-1/2}^n}{\Delta s_2} + k_{1l} \bar{T}_{13l,m}^n = I_1 \cdot (u_{1l,m}^n)_{\bar{u}} + I_2 \cdot (\varphi_{1l,m}^n)_{\bar{u}}; \\ & \frac{1}{A_{2l}} \left(\frac{A_{2l+1/2} T_{12l+1/2,m}^n - A_{2l-1/2} T_{12l-1/2,m}^n}{\Delta s_1} \right) - \frac{1}{A_{2l}} \frac{A_{2l+1/2} - A_{2l-1/2}}{\Delta s_1} T_{21l,m}^n + \\ & + \frac{1}{A_{1l}} \left(\frac{A_{1l} T_{22l,m+1/2}^n - A_{1l} T_{22l,m-1/2}^n}{\Delta s_2} \right) + k_{2l} \bar{T}_{23l,m}^n = I_1 \cdot (u_{2l,m}^n)_{\bar{u}} + I_2 \cdot (\varphi_{2l,m}^n)_{\bar{u}}; \\ & \frac{1}{A_{2l}} \left(\frac{A_{2l+1/2} \bar{T}_{13l+1/2,m}^n - A_{2l-1/2} \bar{T}_{13l-1/2,m}^n}{\Delta s_1} \right) - k_{1l} T_{11l,m}^n + \\ & + \frac{1}{A_{1l}} \left(\frac{A_{1l} \bar{T}_{23l,m+1/2}^n - A_{1l} \bar{T}_{23l,m-1/2}^n}{\Delta s_2} \right) - k_{2l} T_{22l,m}^n + P_{3l,m}^n = I_1 \cdot (u_{3l,m}^n)_{\bar{u}}; \\ & \frac{1}{A_{2l}} \left(\frac{A_{2l+1/2} M_{11l+1/2,m}^n - A_{2l-1/2} M_{11l-1/2,m}^n}{\Delta s_1} \right) - \frac{1}{A_{2l}} \frac{A_{2l+1/2} - A_{2l-1/2}}{\Delta s_1} M_{22l,m}^n + \\ & + \frac{1}{A_{1l}} \left(\frac{A_{1l} M_{21l,m+1/2}^n - A_{1l} M_{21l,m-1/2}^n}{\Delta s_2} \right) - T_{13l,m}^n = I_2 \cdot (u_{1l,m}^n)_{\bar{u}} + I_3 \cdot (\varphi_{1l,m}^n)_{\bar{u}}; \\ & \frac{1}{A_{2l}} \left(\frac{A_{2l+1/2} M_{12l+1/2,m}^n - A_{2l-1/2} M_{12l-1/2,m}^n}{\Delta s_1} \right) - \frac{1}{A_{2l}} \frac{A_{2l+1/2} - A_{2l-1/2}}{\Delta s_1} M_{21l,m}^n + \\ & + \frac{1}{A_{1l}} \left(\frac{A_{1l} M_{22l,m+1/2}^n - A_{1l} M_{22l,m-1/2}^n}{\Delta s_2} \right) - T_{23l,m}^n = I_2 \cdot (u_{2l,m}^n)_{\bar{u}} + I_3 \cdot (\varphi_{2l,m}^n)_{\bar{u}}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

В отриманих різницевих рівняннях коливань (2.2) компоненти узагальненого вектора переміщень гладкої оболонки $\bar{U} = (u_1, u_2, u_3, \varphi_1, \varphi_2)^T$ віднесені до вузлів основ-

ної різницевої сітки (з цілими індексами) за просторовими координатами, а зусилля-моменти – до вузлів допоміжних різницевих сіток (з дробовими індексами).

Для отримання узгоджених різницевих величин зусиль-моментів в (2.2) співвідношення (1.7) інтегруються в областях $\Omega_2, \Omega_3, \Omega_4, \Omega_5$ при $t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}$.

Наприклад, виконуючи операцію інтегрування рівнянь (1.7) в області Ω_2 , отримуємо

$$\begin{aligned} T_{11\,l-1/2,m}^n &= B_{11} \varepsilon_{11\,l-1/2,m}^n + B_{12} \varepsilon_{22\,l-1/2,m}^n + B_{13} \chi_{11\,l-1/2,m}^n + B_{14} \chi_{22\,l-1/2,m}^n; \\ T_{12\,l-1/2,m}^n &= S_{l-1/2,m}^n + k_{1\,l-1/2} H_{l-1/2,m}^n; \quad T_{13\,l-1/2,m}^n = \tilde{B}_{13} \varepsilon_{13\,l-1/2,m}^n; \\ \bar{T}_{13\,l-1/2,m}^n &= T_{13\,l-1/2,m}^n + T_{11\,l-1/2,m}^n \theta_{l-1/2,m}^n + S_{l-1/2,m}^n \theta_{2\,l-1/2,m}^n; \\ M_{11\,l-1/2,m}^n &= D_{11} \chi_{11\,l-1/2,m}^n + D_{12} \chi_{22\,l-1/2,m}^n + D_{13} \varepsilon_{11\,l-1/2,m}^n + D_{14} \varepsilon_{22\,l-1/2,m}^n; \\ S_{l-1/2,m}^n &= B_s \varepsilon_{12\,l-1/2,m}^n + K_s \chi_{12\,l-1/2,m}^n; \quad M_{12\,l-1/2,m}^n = H_{l-1/2,m}^n = D_s \chi_{12\,l-1/2,m}^n + K_s \varepsilon_{12\,l-1/2,m}^n. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Для того, щоб отримати узгоджені величини деформацій в різницевих співвідношеннях виду (2.3), інтегруємо вирази для компонентів деформації (1.6) в областях $\Omega_2, \Omega_3, \Omega_4, \Omega_5$, відповідно, при $t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}$.

В результаті для компонентів деформації оболонки в області Ω_2 отримуємо такі різницеві співвідношення:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11\,l-1/2,m}^n &= \frac{u_{1\,l,m}^n - u_{1\,l-1,m}^n}{\Delta s_1} + k_{1\,l-1/2} u_{3\,l-1/2,m}^n + \frac{1}{2} [\theta_{1\,l-1/2,m}]^2; \\ \varepsilon_{22\,l-1/2,m}^n &= \frac{u_{2\,l-1/2,m+1/2}^n - u_{2\,l-1/2,m-1/2}^n}{\Delta s_2} + \psi_{2\,l-1/2} u_{1\,l-1/2,m}^n + \\ &\quad + k_{2\,l-1/2} u_{3\,l-1/2,m}^n + \frac{1}{2} [\theta_{2\,l-1/2,m}]^2; \\ \theta_{1\,l-1/2,m}^n &= \frac{u_{3\,l,m}^n - u_{3\,l-1,m}^n}{\Delta s_1} - k_{1\,l-1/2} u_{1\,l-1/2,m}^n; \\ \theta_{2\,l-1/2,m}^n &= \frac{u_{3\,l-1/2,m+1/2}^n - u_{3\,l-1/2,m-1/2}^n}{\Delta s_2} - k_{2\,l-1/2} u_{2\,l-1/2,m}^n; \\ \omega_{1\,l-1/2,m}^n &= \frac{u_{2\,l,m}^n - u_{2\,l-1,m}^n}{\Delta s_1}; \quad \omega_{2\,l-1/2,m}^n = \frac{u_{1\,l-1/2,m+1/2}^n - u_{1\,l-1/2,m-1/2}^n}{\Delta s_2} - \psi_{2\,l-1/2} u_{2\,l-1/2,m}^n; \\ \omega_{l-1/2,m}^n &= \omega_{1\,l-1/2,m}^n + \omega_{2\,l-1/2,m}^n; \quad \varepsilon_{13\,l-1/2,m}^n = \varphi_{1\,l-1/2,m}^n + \theta_{1\,l-1/2,m}^n; \\ \chi_{11\,l-1/2,m}^n &= \frac{\varphi_{1\,l,m}^n - \varphi_{1\,l-1,m}^n}{\Delta s_1}; \quad \chi_{22\,l-1/2,m}^n = \frac{\varphi_{2\,l-1/2,m+1/2}^n - \varphi_{2\,l-1/2,m-1/2}^n}{\Delta s_2} - \psi_{2\,l-1/2} \varphi_{1\,l-1/2,m}^n; \\ \chi_{12\,l-1/2,m}^n &= \frac{\varphi_{2\,l,m}^n - \varphi_{2\,l-1,m}^n}{\Delta s_1} + \frac{\varphi_{1\,l-1/2,m+1/2}^n - \varphi_{1\,l-1/2,m-1/2}^n}{\Delta s_2} - \\ &\quad - \psi_{2\,l-1/2} \varphi_{2\,l-1/2,m}^n + k_{1\,l-1/2} \omega_{1\,l-1/2,m}^n + k_{2\,l-1/2} \omega_{2\,l-1/2,m}^n. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Аналогічним чином записуються різниці аналогів геометричних та фізичних співвідношень і для інших областей.

Після виконання операції інтегрування рівнянь (1.16) з використанням явної апроксимації за часовою координатою, отримаємо наступні різниці рівняння коливань i -го підкріплюючого ребра:

$$\begin{aligned}
& \frac{T_{11il+1/2}^n - T_{11il-1/2}^n}{\Delta s_1} + k_{1il} T_{13il}^n + [S]_i^n = \rho_i^r F_i \left[(u_{1l}^n)_{\bar{t}t} \pm h_{ci} (\phi_{1l}^n)_{\bar{t}t} \right]; \\
& \frac{T_{12il+1/2}^n - T_{12il-1/2}^n}{\Delta s_1} + [T_{22}]_i^n = \rho_i^r F_i \left[(u_{2l}^n)_{\bar{t}t} \pm h_{ci} (\phi_{2l}^n)_{\bar{t}t} \right]; \\
& \frac{T_{13il+1/2}^n - T_{13il-1/2}^n}{\Delta s_1} - k_{1il} T_{11il}^n + [T_{23}]_i^n = \rho_i^r F_i (u_{3l}^n)_{\bar{t}t}; \\
& \frac{M_{11il+1/2}^n - M_{21il-1/2}^n}{\Delta s_1} - T_{13il}^n \pm h_{ci} \left(\frac{T_{11il+1/2}^n - T_{11il-1/2}^n}{\Delta s_1} + k_{1il} T_{13il}^n \right) + [H]_i^n = \\
& = \rho_i^r F_i \left[\pm h_{ci} (u_{1l}^n)_{\bar{t}t} + \left(h_{ci}^2 + \frac{I_{1i}}{F_i} \right) (\phi_{1l}^n)_{\bar{t}t} \right]; \\
& \frac{M_{12il+1/2}^n - M_{12il-1/2}^n}{\Delta s_1} \pm h_{ci} \frac{T_{12ik+1/2}^n - T_{12ik-1/2}^n}{\Delta s_1} + [M_{22}]_i^n = \\
& = \rho_i^r F_i \left[\pm h_{ci} (u_{2l}^n)_{\bar{t}t} + \left(h_{ci}^2 + \frac{I_{2i}}{F_i} \right) (\phi_{2l}^n)_{\bar{t}t} \right].
\end{aligned} \tag{2.5}$$

В різницевих рівняннях (2.5) компоненти узагальненого вектора переміщень центрів ваги поперечних перерізів i -го ребра $\bar{U}_i = (u_{1i}, u_{2i}, u_{3i}, \phi_{1i}, \phi_{2i})^T$ віднесені до вузлів з цілими індексами за просторовими координатами, а зусилля-моменти – до вузлів з дробовими індексами.

Процедура отримання узгоджених різницевих величин зусиль-моментів і деформацій підкріплюючих елементів аналогічна описаній вище схемі побудови узгоджених різницевих геометричних і фізичних співвідношень для гладкої еліпсоїдальної оболонки.

Зазначимо, що в різницевих рівняннях (2.2) – (2.5) позначення різницевих функцій і різницевих похідних введені згідно [6].

§3. Числові результати.

Досліджено динамічне деформування підкріпленої поздовжніми ребрами тришарової еліпсоїдальної оболонки з жорстко закріпленими краями в області $D = \{\alpha_{10} \leq \alpha_1 \leq \alpha_{1N}, \alpha_{20} \leq \alpha_2 \leq \alpha_{2N}\}$ під дією імпульсного розподіленого нормального навантаження виду:

$$P_3(\alpha_1, \alpha_2, t) = A \cdot \sin \frac{\pi t}{T} [\eta(t) - \eta(t - T)],$$

де A – амплітуда навантаження; T – тривалість навантаження; $\eta(t)$ – функція Хевісайда.

В розрахунках приймалося, що $A = 10^6$ Па; $T = 50 \cdot 10^{-6}$ с.

Крайові умови мають наступний вигляд:

$$\bar{U}(\alpha_{10}, \alpha_2) = \bar{U}(\alpha_{1N}, \alpha_2) = 0; \quad \bar{U}(\alpha_1, \alpha_{20}) = \bar{U}(\alpha_1, \alpha_{2N}) = 0.$$

Прийнято нульові початкові умови для всіх компонентів узагальненого вектора переміщень при $t = 0$, тобто

$$u_1(\alpha_1, \alpha_2) = u_2(\alpha_1, \alpha_2) = u_3(\alpha_1, \alpha_2) = \varphi_1(\alpha_1, \alpha_2) = \varphi_2(\alpha_1, \alpha_2) = 0;$$

$$\frac{\partial u_1(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial t} = \frac{\partial u_2(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial t} = \frac{\partial u_3(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_2(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial t} = 0.$$

Розрахунки виконані для наступних геометричних та фізико-механічних параметрів тришарової оболонки:

$$\alpha_{10} = \frac{\pi}{12}; \quad \alpha_{1N} = \pi - \frac{\pi}{12}; \quad \alpha_{20} = -\frac{\pi}{2}; \quad \alpha_{2N} = \frac{\pi}{2}; \quad \frac{a}{h} = 30;$$

$$k = a/b = 1,5; \quad h = h_1 + h_2 + h_3; \quad h_1 = h_3; \quad h_2 = 3h_1;$$

$$E_1^1 = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па}; \quad E_2^1 = E_1^1; \quad E_1^2 = 10^{-3} E_1^1; \quad E_2^2 = E_1^2;$$

$$\nu_{12}^1 = \nu_{21}^1 = \nu_{12}^2 = \nu_{21}^2 = \nu_{12}^3 = \nu_{21}^3 = 0,33; \quad \rho_1 = \rho_3 = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; \quad \rho_2 = 3 \cdot 10^2 \text{ кг/м}^3.$$

Поздовжньо підкріплюючі елементи розміщені вздовж ліній α_1 в перерізах

$$\alpha_{2i} = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}(i-1); \quad i = 1, 2, 3.$$

Геометричні і фізико-механічні параметри підкріплюючих ребер такі:

$$h_i^r = 4h; \quad F_i = 4h^2; \quad E_i = E_1^1; \quad G_i = G_{12}^1; \quad \rho_i^r = \rho_1.$$

Нижче на рис. 1 – 6 наведено результати розрахунків на часовому проміжку $t \in [0; 80T]$.

На рис. 1 представлена залежність прогину u_3 від часу в точці $(\alpha_1 = \pi/2; \alpha_2 = \pi/8)$, в якій величина u_3 досягає свого максимального значення на часовому проміжку $t \in [0; 80T]$. Крива з індексом 1 відповідає випадку гладкої тришарової оболонки, а крива з індексом 2 відповідає випадку підкріпленої тришарової оболонки.

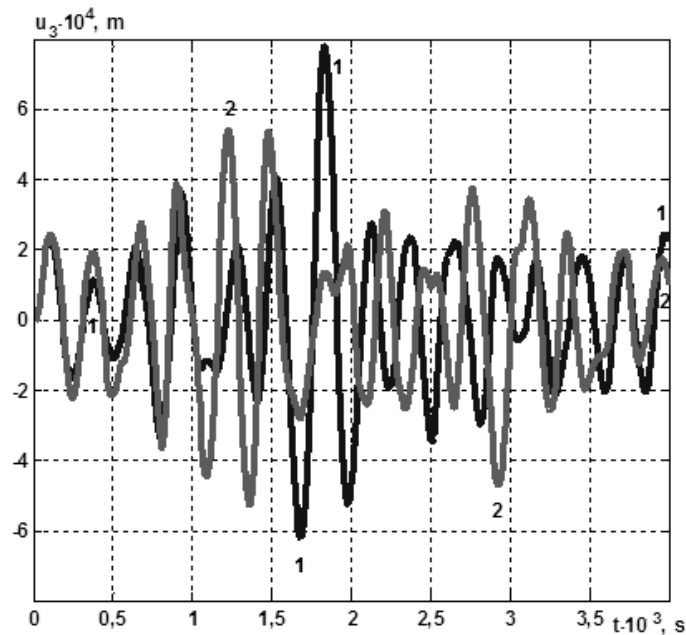


Рис. 1

Як видно з наведеного на рис. 1 графічного матеріалу, максимальне значення абсолютної величини прогину u_3 для випадку гладкої тришарової еліпсоїдальної оболонки спостерігається в момент часу $t = 37T$ і дорівнює $u_3 = 7,788 \cdot 10^{-4}$ м, а для випадку підкріпленої тришарової еліпсоїдальної оболонки в цей самий момент часу значення прогину становить $u_3 = 1,354 \cdot 10^{-4}$ м. Для випадку підкріпленої тришарової еліпсоїдальної оболонки максимальне значення величини прогину u_3 досягається в момент часу $t = 24T$ і дорівнює $u_3 = 5,421 \cdot 10^{-4}$ м.

На рис. 2 зображено залежність прогину u_3 від просторової координати α_2 в перерізі $\alpha_1 = \pi/2$ для випадку гладкої еліпсоїдальної оболонки в різні моменти часу t : $t_1 = 1T$; $t_2 = 37T$; $t_3 = 80T$. Графіки на цьому рисунку демонструють поведінку прогину з плином часу. Найбільше значення величини прогину в момент часу $t = 80T$ дорівнює $u_3 = 5,247 \cdot 10^{-4}$ м, що майже в 1,5 рази менше за найбільше значення величини прогину в момент часу $t = 37T$ ($u_3 = 7,788 \cdot 10^{-4}$ м), яке є найбільшим на всьому досліджуваному часовому проміжку.

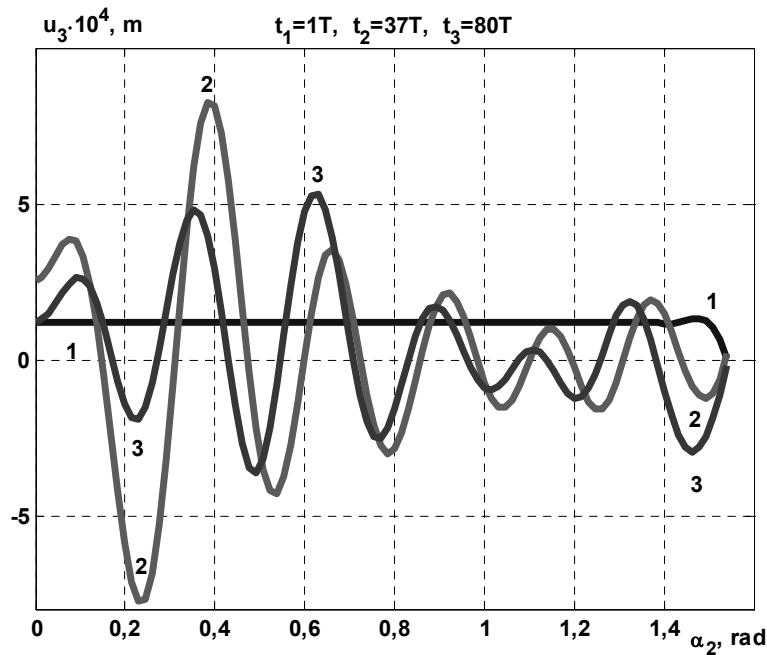


Рис. 2

На рис. 3 наведено залежність величини прогину u_3 від просторової координати α_2 в перерізі $\alpha_1 = \pi/2$ для випадку підкріпленої еліпсоїдальної оболонки в різні моменти часу t : $t_1 = 1T$; $t_2 = 24T$; $t_3 = 80T$. На графіку видно, як величина прогину поводить себе з плином часу, як місце розміщення підкріплюючих ребер впливає на величину прогину.

Найбільше значення абсолютної величини прогину для підкріпленої еліпсоїдальної оболонки в момент часу $t = 80T$ дорівнює $u_3 = 3,133 \cdot 10^{-4}$ м, що майже в 1,7 рази менше за найбільше значення прогину $u_3 = 5,421 \cdot 10^{-4}$ м на всьому досліджуваному часовому проміжку, яке досягається в момент часу $t = 24T$.

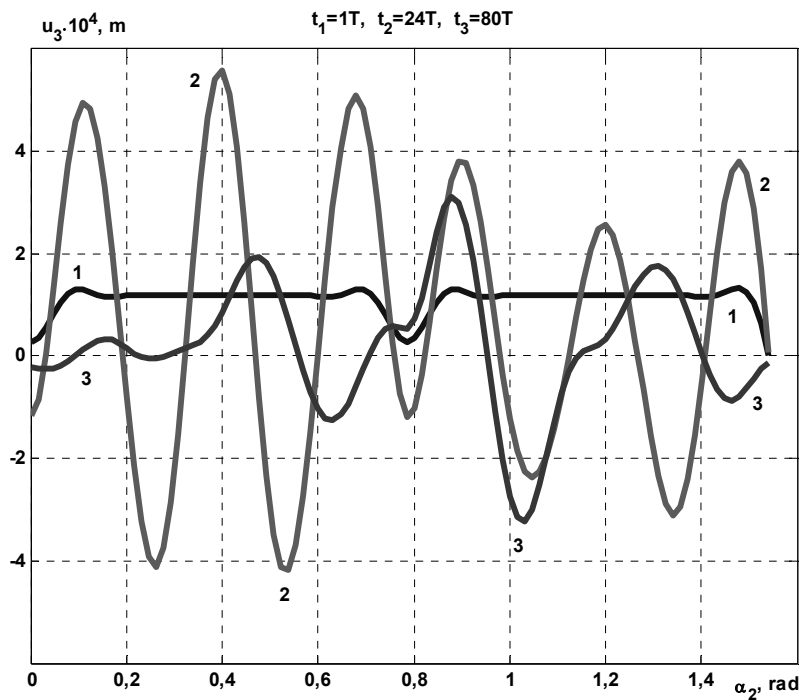


Рис. 3

Для наочності, зобразимо залежності величини прогину для випадків гладкої і підкріпленої еліпсоїдальної оболонки на одному графіку в момент часу $t = 24T$ (рис. 4), в момент часу $t = 37T$ (рис. 5) і в момент часу $t = 80T$ (рис. 6). На рис. 4 – 6 криві з індексом 1 відповідають випадку гладкої тришарової еліпсоїдальної оболонки, а криві з індексом 2 – випадку підкріпленої тришарової еліпсоїдальної оболонки.

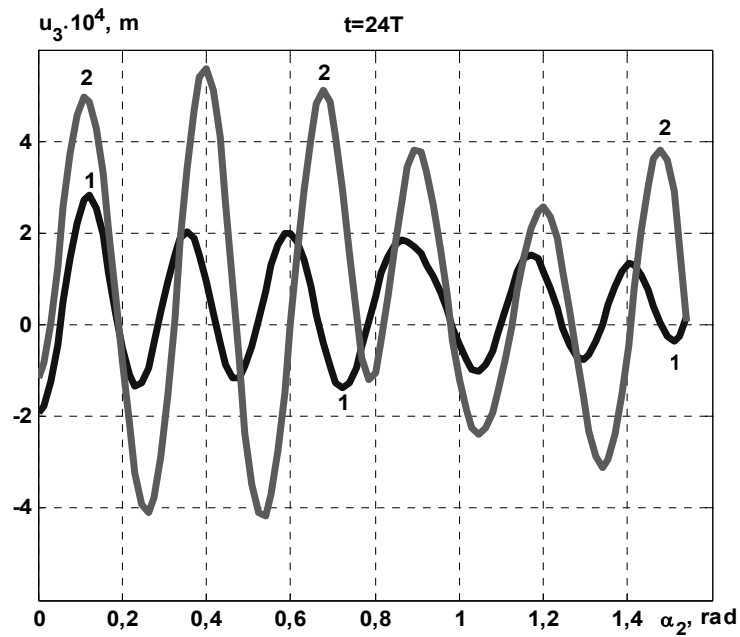


Рис. 4

Як видно з наведеного на рис. 4 графічного матеріалу, максимальне значення величини прогину в момент часу $t = 24T$ для випадку гладкої тришарової еліпсоїдальної оболонки дорівнює $u_3 = 2,814 \cdot 10^{-4}$ м, а для випадку підкріпленої тришарової еліпсоїдальної оболонки максимальне значення прогину складає $u_3 = 5,421 \cdot 10^{-4}$ м. Отже, в момент часу $t = 24T$ максимальний прогин для гладкої еліпсоїдальної оболонки майже в 2 рази менший за максимальний прогин підкріпленої еліпсоїдальної оболонки.

За залежностями, які відображено на рис. 5, можна провести порівняльний аналіз величини прогину u_3 для випадку гладкої та підкріпленої тришарової еліпсоїдальної оболонки в момент часу $t = 37T$.

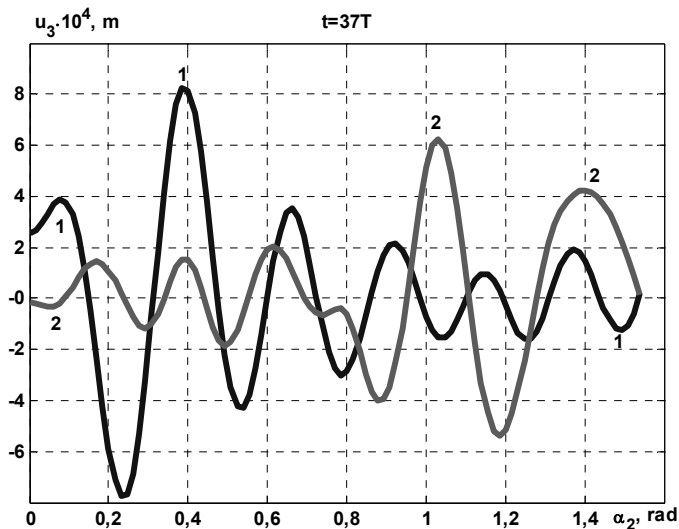


Рис. 5

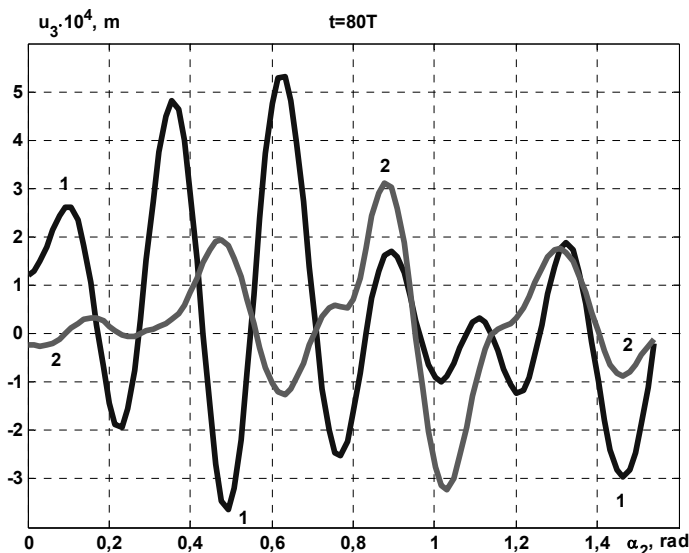


Рис. 6

Для випадку гладкої тришарової еліпсоїдальної оболонки максимальний прогин в момент часу $t = 37T$ дорівнює $u_3 = 8,267 \cdot 10^{-4}$ м, а для випадку підкріпленої тришарової еліпсоїдальної оболонки максимальне значення прогину в той самий момент

часу становить $u_3 = 6,311 \cdot 10^{-4}$ м. Отже, в момент часу $t = 37T$ максимальний прогин для гладкої еліпсоїдальної оболонки майже в 1,3 рази більший за максимальний прогин підкріпленої еліпсоїдальної оболонки.

З рис. 6 видно, що максимальне значення величини прогину u_3 в момент часу $t = 80T$ дорівнює $u_3 = 5,314 \cdot 10^{-4}$ м для гладкої тришарової оболонки та $u_3 = 3,245 \cdot 10^{-4}$ м для випадку підкріпленої тришарової оболонки.

Отже, в момент часу $t = 80T$ максимальний прогин для гладкої еліпсоїдальної оболонки майже в 1,6 рази перевищує максимальне значення прогину підкріпленої еліпсоїдальної оболонки.

Висновок.

Таким чином, в даній роботі чисельно розв'язано динамічну задачу про поширення пружних хвиль в підкріпленій поздовжніми ребрами тришаровій еліпсоїдальній оболонці під дією нестационарного розподіленого навантаження. Використано геометрично нелінійний варіант теорії оболонок і стержнів типу Тимошенка в квадратичному наближенні. Математична модель тришарової оболонки побудована на основі застосування кінематичних та статистичних гіпотез моделі Тимошенка до всього пакету шарів еліпсоїдальної оболонки. Дослідження напружено-деформованого стану підкріпленої оболонки виконувалося з врахуванням дискретного розміщення ребер. Для розв'язання поставленої задачі було використано метод скінченних різниць за просторовими і часовою координатами. Наведено конкретні результати чисельного розв'язання початково-крайових задач для підкріпленої поздовжніми ребрами незамкненої тришарової еліпсоїдальної оболонки з жорстко затисненими краями під дією імпульсного поверхневого навантаження. В подальшому представляє інтерес дослідження динамічної поведінки багатошарових еліпсоїдальних оболонок, підкріплених поздовжніми і поперечними ребрами жорсткості, з врахуванням геометричної нелінійності та деформацій поперечного зсуву.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Наукова і науково-технічна діяльність наукових установ Національної академії наук України» (КПКВК 6541030).

РЕЗЮМЕ. Дано постановку динамічних задач про вимушені коливання підкріплених поздовжніми ребрами тришарових еліпсоїдальних оболонок під дією нестационарного поверхневого навантаження. Основні співвідношення для підкріпленої тришарової еліпсоїдальної оболонки записані на основі моделі Тимошенка з врахуванням геометричної нелінійності. Рівняння коливань даного виду оболонок отримані з варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського. Розроблено чисельну методику розв'язання поставлених задач, яка базується на використанні інтегро-інтерполяційного методу побудови різницевої схем за просторовими координатами і явної скінченно-різницевої схеми за часовою координатою. Досліджено закономірності динамічних процесів у підкріплених і гладких відкритих тришарових еліпсоїдальних оболонках з жорстко затисненими краями, навантажених імпульсним рівномірно розподіленим тиском.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: тришарові еліпсоїдальні оболонки, підкріплюючі ребра, модель Тимошенка, вимушені коливання, імпульсне навантаження, чисельний розв'язок.

1. Василенко А.Т., Голуб Г.П., Григоренко Я.М. Определение напряженного состояния многослойных ортотропных оболочек переменной жесткости в уточненной постановке // Прикл. механика. – 1976. – 12, № 2. – С. 40 – 47.
2. Головки К.Г., Луговой П.З., Мейш В.Ф. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках (под ред. акад. НАН Украины А.Н. Гузя). – Киев: Изд. – полиграф. центр «Киевский ун-т», 2012. – 541 с.
3. Курпа Л.В., Будников М.А. Нелинейные свободные колебания многослойных пологих оболочек симметричного строения со сложной формой плана // Мат. методи та фізико-механ. поля. – 2008. – 51, № 2. – С. 75 – 85.

4. Мейш В.Ф., Кравченко Н.В. До розрахунку напружено – деформованого стану багатошарових оболонок з дискретними неоднорідностями при нестационарних навантаженнях // Вісник Київського ун-ту. Серія: фіз. – мат. науки. – 2002. – Вип. № 3. – С. 210 – 216.
5. Савченко О.В. Оптимізація динамічних характеристик композитних багатошарових оболонок // Вібрації в техніці та технологіях. – 2014. – № 4. – С. 34 – 43.
6. Самарский А.А. Теория разностных схем. – Москва: Наука, 1977. – 656 с.
7. Трубочев С., Морозова І. Дослідження напружено-деформованого стану багатошарових композитних оболонок під дією згинального навантаження // Theoretical and empirical scientific research: concept and trends. Collection of scientific papers «ΛΟΓΟΣ» with Proc. of the II International Scientific and Practical Conference (Vol. 1). – Oxford, May 28, 2021. – Oxford–Vinnytsia: P.C. Publishing House & European Scientific Platform, 2021. – P. 182 – 183.
8. Guadong C. The uniformly valid asymptotic solution of ellipsoidal shell heads in pressure vessels // ASME J. Pressure Vessel Technol. – 1985. – **107**, N 1. – P. 92 – 95.
9. Kang J.H. Vibrations of hemi – ellipsoidal shells of revolution with eccentricity from a three – dimensional theory // J. of Vibration and Control. – 2015. – **2**, N 12. – P. 285 – 299.
10. Kang J.H., Leissa A.W. Vibration analysis of solid ellipsoids and hollow ellipsoidal shells of revolution with variable thickness from a three – dimensional theory // Acta Mechanica. – 2008. – **197**. – P. 97 – 117.
11. Khalifa M. Effects of non – uniform Winkler foundation and non – homogeneity of the free vibration of an orthotropic elliptical cylindrical shell // European J. of Mechanics – A/Solids. – 2015. – **49**. – P. 570 – 581.
12. Krivoshapko S.N. Research of general and ellipsoidal shells used as domes, pressure vessels and tanks // Appl. Mech. Rev. – 2007. – **60**, N 6. – P. 336 – 355.
13. Logan D.L., Hourani M. Membrane theory for layered ellipsoidal shells // ASME J. Pressure Vessel Technol. – 1983. – **105**, N 4. – P. 356 – 362.
14. Maiborodina N.V., Meish V.F. Forced Vibrations of Ellipsoidal Shells Reinforced with Transverse Ribs under a Nonstationary Distributed Load // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 6. – P. 693 – 701.
15. Meish V.F., Maiborodina N.V. Nonaxisymmetric Vibrations of Ellipsoidal Shells under Nonstationary Distributed Loads // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 9. – P. 1015 – 1024.
16. Meish V.F., Maiborodina N.V. Stress State of Discretely Stiffened Ellipsoidal Shells under a Nonstationary Normal Load // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 6. – P. 675 – 686.
17. Meish V.F., Meish Yu.A., Arnauta N.V. Numerical Analysis of Unsteady Oscillations of Discretely Reinforced Multilayer Shells of Variable Geometries // Int. Appl. Mech. – 2019. – **55**, N 4. – P. 426 – 433.
18. Noor A.K., Burton W.S. Assessment of computational models for multilayered composite shells // Appl. Mech. Rev. – 1990. – **43**, N 4. – P. 67 – 97.
19. Pagano N.J. Free edge stress fields in composite laminates // Int. J. Solids Struct. – 1978. – **14**. – P. 401 – 406.
20. Qatu M.S. Recent research advances in the dynamic behavior of shells: 1989 – 2000, Part 1: Laminated composite shells // Appl. Mech. Rev. – 2002. – **55**, N 4. – P. 325 – 350.
21. Qatu M.S., Sullivan R.W., Wang W. Recent research advances in the dynamic behavior of composite shells: 2000 – 2009 // Composite Struct. – 2010. – **93**, N 1. – P. 14 – 31.
22. Reddy J.N., Liu C.F. A higher – order shear deformation theory of laminated elastic shells // Int. J. Engng. Sci. – 1985. – **23**. – P. 669 – 683.
23. Reddy J.N. On refined computational models of composite laminates // Int. J. for Numerical Methods in Engng. – 1989. – **27**. – P. 361 – 382.
24. Tornabene E., Fantuzzi N., Baccocchi M., Dimitri R. Free vibrations of composite oval and elliptic cylinders by the generalized differential quadrature method // Thin – Walled Struct. – 2015. – **97**. – P. 114 – 129.
25. Yamada G., Irie T., Notoya S. Natural frequencies of elliptical cylindrical shells // J. of Sound and Vibration. – 1985. – **101**, N 1. – P. 133 – 139.

Надійшла 21.09.2021

Затверджена до друку 28.03.2023