С.Ю.Бабич[1], М.М.Діхтярук[2], О.А.Кравчук[2]

ПЕРЕДАЧА НАВАНТАЖЕННЯ ВІД НЕСКІНЧЕННОГО НЕОДНОРІДНОГО СТРІНГЕРА ДО ДВОХ ЗАЩЕМЛЕНИХ ОДНІЄЮ ГРАННЮ ПРУЖНИХ СМУГ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ

[1]Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
вул. П.Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: desc@inmech.kiev.ua
[2]Хмельницький національний університет,
вул. Інститутська,11, 29016, Хмельницький, Україна;
e-mail: mega-dihtyaruk@ukr.net; kravchukoa2@gmail.com

Abstract. In the framework of the linearized theory of elasticity, the solution is obtained for the plane contact problem on the transfer of a horizontal concentrated load from a non-homogeneous stringer infinite in both directions to two identical strips with initial (residual) stresses clamped at one edge. The studies are carried out in a general form for the theory of large initial deformations and various variants of the theory of small initial deformations with an arbitrary structure of the elastic potential. A solution to the problem in terms of the normal and tangential contact stresses is reduced to a system of recurrent systems of integro-differential equations, which is solved using the integral Fourier transform. As a result, the contact stresses are presented in the form of Fourier integrals. It is shown that the initial stresses in the elastic strips lead to a significant change in the distribution law of contact stresses. In the case of compression, the contact stresses significantly decrease (in the case of stretching - increase). The displacements in the case of compression increase significantly (in the case of stretching – decrease). The initial (residual) stresses have a more significant quantitative influence on the highly elastic materials compared to the stiffer materials. A qualitative influence has a similar character.

Key words: linearized theory of elasticity, initial (residual) stresses, contact problems, integral Fourier transform.

Вступ.

Незважаючи на велику кількість публікацій, в яких розглядаються контактні задачі лінеаризованої теорії пружності [2, 4, 14], дослідження з проблем пружної контактної взаємодії тіл з початковими напруженнями з'явилися порівняно недавно. Лише останнім часом дослідження контактної взаємодії попередньо напружених тіл набуває особливого інтересу в зв'язку з впровадженням у практику нових штучних матеріалів. Інколи доцільно штучно створювати початкові напруження (залишкові і технологічні) для компенсації і регулювання тих напружень, які виникають під час експлуатації, а також для підвищення міцності конструкції. Для спрощення процесу досліджень їх можна врахувати в рамках лінеаризованої теорії пружності [1, 2, 5]. Врахування початкових напружень в рамках лінеаризованої теорії пружності призводить до нових постановок задач взаємодії деформованих тіл, що істотно відрізняються від постановок класичних задач теорії пружності. І хоча при розв'язуванні цих задач системи основних диференціальних рівнянь, вирази для визначення складових тензора напружень і структура граничних умов відрізняються від відповідних систем рівнянь і виразів тензора напружень теорії пружності, вони за своєю природою і структурою відповідають звичайним контактним змішаним задачам [3, 4, 11].

У цій роботі дана постановка і використано загальний метод розв'язування поставленої задачі у випадку пружних потенціалів в загальному вигляді для теорій великих (скінченних) початкових деформацій і різних варіантів теорії малих початкових деформацій.

При постановці задач у всіх наведених роботах приймаються чотири припущення, які є основними в теорії, що розглядає контактну взаємодію тіл з початковими напруженнями і пружних накладок (стрінгерів):

1) контактна взаємодія пружної накладки без початкових напружень з попередньо напруженим пружним тілом здійснюється після виникнення в останньому початкового напруженого стану;

2) діючі на пружну накладку зовнішні навантаження викликають в попередньо напруженому тілі збурення напружено-деформованого стану за величиною значно менші відповідних величин початкового напруженого стану;

3) початковий напружений стан одного з взаємодіючих тіл має таку структуру, що можна (з достатньою степінню точності) вважати початковий напружений стан однорідним;

4) розв'язок лінеаризованих задач теорії пружності про контактну взаємодію попередньо напружених тіл і пружних накладок є єдиним.

У даній роботі з використанням співвідношень лінеаризованої теорії пружності [1, 8, 10] представлено розв'язки задачі про взаємодію нескінченного неоднорідного стрінгера з попередньо напруженими смугами.

Дотримуючись [1, 2, 5, 13], всі дослідження проведемо в координатах початкового деформованого стану y_i, що пов'язані з лагранжевими координатами x_i співвідношеннями $y_i = \lambda_i x_i$ $(i = 1, 2)$, де λ_i – коефіцієнти видовжень, що визначають переміщення початкового стану в напрямках осей координат. При виконанні умов 1 – 4 в області контакту $L_k\{a_k, b_k\}$ для пружних накладок і пружної смуги з початковими (залишковими) напруженнями виконуються граничні умови

$$y_2 = 0\,;\;\; u(y_1) = u_1(y_1);\;\; v(y_1) = u_2(y_1);\;\; \forall(y_1) \in L_k\,;$$

$$\frac{du}{dy_1} = \frac{du_1}{dy_1};\quad \frac{dv}{dy_1} = \frac{du_2}{dy_1};\quad \forall(y_1) \in L_k\,.$$

Ці граничні умови разом з припущеннями 1 – 4 та умовами $p = \int\limits_{a_k}^{y_1} \tau(t)\,dt$ формують разом постановку лінеаризованих задач про контактну взаємодію пружних накладок (скінченних, нескінченних $(a_k = -\infty;\; b_k = +\infty)$), що підсилюють пружну смугу.

§1. Постановка задачі і основні рівняння.

Нехай нескінченні пружні смуги з початковими напруженнями товщиною H защемлені гранями $y_2 = \pm H$, а іншими своїми гранями з'єднані між собою нескінченним неоднорідним пружним стрінгером малої товщини h (рис. 1).

Підсилені таким чином нескінченні попередньо напружені смуги перебувають під дією прикладених до з'єднувального нескінченного неоднорідного стрінгера розподілених горизонтальних сил інтенсивності $q_0(y_1)$, відповідно до (рис. 1). Необхідно встановити закони розподілу нормальних $p(y_1)$ і горизонтальних $q(y_1)$ напружень в області контакту.

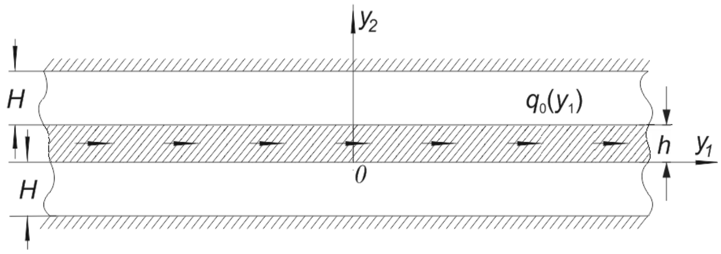

Рис. 1

При дослідженні області контакту стрінгера припускаємо, що він під дією прикладеного навантаження і тільки тангенціальних контактних напружень розтягується або стискається як стержень, що знаходиться в одноосному напруженому стані [8, 10, 11]. Також припускаємо, що вздовж горизонтальної осі вертикальні пружні переміщення сталі. Останнє припущення обумовлене малістю товщини стрінгера, так як її зміни від точки до точки в процесі деформації незначні і ними можна знехтувати.

Позначимо інтенсивності нормальних і тангенціальних контактних напружень, які діють вздовж лінії з'єднання стрінгера з пружними, попередньо напруженими смугами як $p(y_1)$ і $q(y_1)$, а вертикальні і горизонтальні переміщення – $u_1(y_1)$ і $u_2(y_1)$, відповідно.

Перейдемо до отримання основних систем розв'язуючих рівнянь для поставленої задачі. З цією метою спочатку розглянемо рівновагу стрінгера.

Із умови рівноваги частини стрінгера $(-\infty,\ x)$ отримаємо

$$\sigma_{y_1 y_1}(y_1) = \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{y_1}\left[q(t) - q_0(t)\right]dt \quad \left(-\infty < y_1 < \infty\right). \tag{1.1}$$

Тут мається на увазі, що поперечний переріз стрінгера прямокутний, ширина якого дорівнює одиниці, а $\sigma_{y_1 y_1}$ – осьове напруження в напрямку осі Oy_1. Відповідно до закону Гука знаходимо осьове напруження в напрямку осі Oy_1

$$\sigma_{y_1 y_1}(y_1) = E_1 \varepsilon_{y_1, y_1}(y_1), \tag{1.2}$$

де

$$\varepsilon_{y_1 y_1}(y_1) = \frac{du(y_1)}{dy_1}. \tag{1.3}$$

Тут $u(y_1)$ – горизонтальні переміщення точок пружного стрінгера; E_1 – його модуль пружності.

Враховуючи (1.1) – (1.3), знаходимо:

$$\frac{du(y_1)}{dy_1} = \frac{1}{E_1 h}\int_{-\infty}^{y_1}\left[q(t) - q_0(t)\right]dt \quad \left(-\infty < y_1 < \infty\right). \tag{1.4}$$

З припущення, що стрінгер у вертикальному напрямку згинається як звичайна балка, можемо записати

$$D\frac{d^4 v(y_1)}{dy_1^4} = p(y_1) - p_0(y_1) \quad \left(-\infty < y_1 < \infty\right). \tag{1.5}$$

Тут $v(y_1)$ – вертикальні переміщення точок стрінгера; D – жорсткість стрінгера на згин; $p_0(y_1)$, $p(y_1)$ – інтенсивність вертикальних сил.

На лінії контакту стрінгера з пружними смугами мають місце умови

$$u\left(y_1\right)=u_1\left(y_1\right);\;\; v\left(y_1\right)=u_2\left(y_1\right),\;\; \forall y_1\in\left(-\infty<y_1<\infty\right), \tag{1.6}$$

де $u_1\left(y_1\right), u_2\left(y_1\right)$ – переміщення точок в пружних смугах з початковими напруженнями. Потрібно визначити закон розподілу нормальних і тангенціальних контактних напружень вздовж лінії з'єднання стрінгера з попередньо напруженими смугами.

Для визначення невідомих переміщень і напружень по лінії контакту стрінгера з смугами запишемо граничні умови задачі для вільних від защемлення граней пружних смуг з початковими напруженнями від прикладеної під кутом α_0 сили P [1, 11]

$$\tilde{Q}_{22}\left(y_1, 0\right)=-P\delta\left(y_1\right)\sin\alpha_0;\;\; \tilde{Q}_{11}\left(y_1, 0\right)=-P\delta\left(y_1\right)\cos\alpha_0; \tag{1.7}$$

$$u_1\left(y_1-t\right)=0;\;\; u_2\left(y_1-t\right)=0\;\;\left(-\infty<y_1<\infty\right), \tag{1.8}$$

де $\delta(y_1)$ – дельта-функція Дірака.

В результаті розв'язування поставленої задачі функції впливу від дії тангенціальної сили (при $\alpha_0=0$) для рівних коренів характеристичного рівняння [5] ($n_1=n_2$) матимуть вигляд

$$h_{21}\left(y_1\right)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty H_{21}\left(\alpha\right)\sin\alpha\, y_1 d\alpha;\quad h_{22}\left(y_1\right)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty H_{22}\left(\alpha\right)\cos\alpha\, y_1 d\alpha. \tag{1.9}$$

Для нерівних коренів ($n_1\neq n_2$) можемо записати

$$h_{21}\left(y_1\right)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \tilde{H}_{21}\left(\alpha\right)\sin\alpha\, y_1 d\alpha;\quad h_{22}\left(y_1\right)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \tilde{H}_{22}\left(\alpha\right)\cos\alpha\, y_1 d\alpha. \tag{1.10}$$

Ядра $H_{ij}\left(\alpha\right)$ і $\tilde{H}_{ij}\left(\alpha\right)$, відповідно, мають вигляд [4]:

для $n_1=n_2$

$$H_{21}\left(\alpha\right)=m_0\left[-\left(s+1\right)\left(s_1\xi\left(\alpha\right)-\alpha\varphi_1\right)+\mathrm{ch}^2\,\alpha\varphi_1-s_1\,\mathrm{sh}^2\,\alpha\varphi_1-s\right]=$$

$$=m_0\left[-\left(s+1\right)\left(s_1\,\mathrm{sh}\,\alpha\varphi_1\,\mathrm{ch}\,\alpha\varphi_1-\alpha\varphi_1\right)+\mathrm{ch}^2\,\alpha\varphi_1-s_1\,\mathrm{sh}^2\,\alpha\varphi_1-s\right]\cdot\Delta_1^{-1}\left(\alpha\right); \tag{1.11}$$

$$H_{22}(\alpha)=i\frac{m_0m_1}{\sqrt{n_1}}\left[s\cdot s_1\,\mathrm{ch}^2\,\alpha\varphi_1+\left(\alpha\varphi_1\right)^2-\alpha\varphi_1\xi\left(\alpha\right)-s_1^2\,\mathrm{sh}^2\left(\alpha\varphi_1\right)-s\cdot s_1\right]\cdot\Delta_1^{-1}\left(\alpha\right);$$

для $n_1\neq n_2$

$$\tilde{H}_{21}\left(\alpha\right)=m_0\left[-ss_1\left(\alpha\varphi_1\right)\xi_2\left(\alpha\right)-s\xi_3\left(\alpha\right)+s\left(\alpha\varphi_1\right)\xi_2\left(\alpha\right)+\xi_3\left(\alpha\right)\right]\cdot\Delta_2^{-1}\left(\alpha\right);$$

$$\tilde{H}_{22}\left(\alpha\right)=i\frac{m_0m_1}{\sqrt{n_1}}\left[1-s_1\,\mathrm{ch}\left(2\alpha\varphi_2\right)+ss_1\xi_1\left(\alpha\right)+s\alpha\varphi_1\xi_4\left(\alpha\right)+ss_1\left(\alpha\varphi_1\right)^2\mathrm{sh}^2\,\alpha\varphi_1-\right. \tag{1.12}$$

$$\left.-ss_1\,\mathrm{ch}^2\,\alpha\varphi_{21}-s_1^2\left(\alpha\varphi_1\right)\xi_4\left(\alpha\right)+\xi_3\left(\alpha\right)\right]\cdot\Delta_2^{-1}\left(\alpha\right),$$

тут n_1 і n_2 – корені визначального рівняння [1, 6, 12]. Величини, що фігурують в формулах (1.9) – (1.12), виражені через відомі параметри початкового напруженого стану [2 – 4, 7].

§2. Розв'язуюча система рекурентних інтегро-диференціальних рівнянь.

Використовуючи принцип суперпозиції, переміщення точок пружної смуги з початковими напруженнями в напрямку осей $0y_1$ і $0y_2$ від одночасної дії нормальних і тангенціальних напружень для стисливих і нестисливих тіл у випадку потенціалів довільної структури визначаються формулами [2]

$$u_1(y_1)=\int_{-\infty}^{\infty} h_{11}(|y_1-\tau|)\,p(\tau)\,d\tau+\int_{-\infty}^{\infty} h_{12}(|y_1-\tau|)\,q(\tau)\,d\tau\,;$$
$$u_2(y_1)=\int_{-\infty}^{\infty} h_{21}(|y_1-\tau|)\,p(\tau)\,d\tau+\int_{-\infty}^{\infty} h_{22}(|y_1-\tau|)\,q(\tau)\,d\tau. \tag{2.1}$$

Дотримуючись [2, 3], згідно прийнятих припущень і позначень, задачу можна сформулювати у вигляді системи рівнянь

$$\frac{du_2(y_1)}{dy_1}=0 \quad (-\infty<y_1<\infty)\,;\quad E_1(y_1)\frac{du_1(y_1)}{dy_1}=\frac{1}{h}\int_{-\infty}^{y_1}\left[2q(t)-q_0(t)\right]dt. \tag{2.2}$$

Припустимо, що неоднорідність матеріалу стрінгера змінюється за законом

$$E_1(y_1)=E[(1+\delta f(y_1)] \quad (-\infty<y_1<\infty)\,, \tag{2.3}$$

де $f(y_1)$ – деяка відома функція; δ – малий параметр.

Використавши граничні умови контакту (1.6) і представивши невідомі контактні напруження $p_0(y_1)$, $q_0(y_1)$ у вигляді ряду за степенями малого параметра

$$q_0(y_1)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta^k q^{(k)}(y_1) \quad (-\infty<y_1<\infty), \tag{2.4}$$

можемо записати розв'язуючу систему рекурентних інтегро-диференціальних рівнянь

$$\frac{du_2^{(0)}(y_1)}{d(y_1)}=0 \quad (-\infty<y_1<\infty)\,;$$
$$E_0h\frac{d^2u_1^{(0)}(y_1)}{d(y_1)^2}=2q^{(0)}(y_1)-q_0(y_1)\,; \tag{2.5}$$

$$\frac{du_2^{(k)}(y_1)}{d(y_1)}=0 \quad (k=1,2,...) \quad (-\infty<y_1<\infty)\,;$$
$$E_0h\frac{d^2u_1^{(k)}(y_1)}{d(y_1)^2}=2q^{(k)}(y_1)-q_0^{(k-1)}(y_1), \tag{2.6}$$

де

$$q_0^{(k-1)}(y_1)=hE_0\frac{d}{d(y_1)}\left[f(y_1)\frac{du_2^{(k-1)}(y_1)}{d(y_1)}\right] \quad (k=1,\,2,\,...)\,;$$

$$u_1(y_1)=\int_{-\infty}^{\infty} h_{21}(y_1-\tau)\,p^{(k)}(\tau)\,d\tau+\int_{-\infty}^{\infty} h_{22}(|y_1-\tau|)\,q^{(k)}(\tau)\,d\tau;$$

$$u_2(y_1)=\int_{-\infty}^{\infty} h_{11}(|y_1-\tau|)\,p^{(k)}(\tau)\,d\tau+\int_{-\infty}^{\infty} h_{12}(y_1-\tau)\,q^{(k)}(\tau)\,d\tau \quad (-\infty<y_1<\infty,\ k=0,\,1,\,...)\,;$$

$$f_1^{(k-1)}(y_1) = D_0 \frac{d^2}{d(y_1)^2}\left[f(y_1)\frac{d^2 u_2^{(k-1)}(y_1)}{d(y_1)} \right] \quad (k = 1,\ 2,\ ...); \tag{2.7}$$

$$f_2^{(k-1)}(y_1) = E_0 h \frac{d}{d(y_1)}\left[f(y_1)\frac{du_1^{(k-1)}(y_1)}{d(y_1)} \right]; \quad D_0 = E_0 I.$$

Тут D_0 – нульовий член розкладання в ряд величини $D(y_1)$; $D(y_1) = IE_1(y_1)$ – жорсткість стрінгера на згин, I – параметр неоднорідності.

Система (2.5) описує контактну задачу для однорідного нескінченного стрінгера [2, 9, 11], кожна наступна система з (2.6) відрізняється від попередньої тільки зовнішнім навантаженням. Отже, розв'язок контактної задачі для попередньо напруженої смуги, підсиленої неоднорідним нескінченним стрінгером, зводиться до розв'язування ряду однорідних контактних задач, які відрізняються між собою тільки зовнішніми навантаженнями. Нульовий наближений розв'язок, тобто розв'язок системи (2.5) за допомогою перетворення Фур'є, побудований в [1] і має вигляд

$$p(y_1) = \frac{\mu}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\alpha^2 H_{21}^*(\alpha)\tilde{q}_0(\alpha) + H_{22}^*(\alpha)\tilde{p}_0(\alpha)\right] H^{-1}(\alpha) e^{-i\alpha y_1} d\alpha \quad (-\infty < y_1 < \infty); \tag{2.8}$$

$$q(y_1) = \frac{\mu}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[H_{11}^*(\alpha)\tilde{q}_0(\alpha) - iH_{12}^*(\alpha)\tilde{p}_0(\alpha)\right] H^{-1}(\alpha) e^{-i\alpha y_1} d\alpha\ .$$

Тут величини $H^{-1}(\alpha)$, $H_{ij}^*(\alpha)$ $(i,\ j = 1,\ 2)$ виражаються через відомі функції $H_{ij}(\alpha)$ і $\tilde{H}_{ij}(\alpha)$ $(i,\ j = 1,\ 2)$, які визначаються згідно формул для рівних і нерівних коренів визначального рівняння [2, 4, 5, 12] у випадку конкретної структури пружних потенціалів. Решта наближень розв'язків у випадках впливу неоднорідності матеріалу стрінгера будуються аналогічним чином; $\tilde{p}_0(\alpha)$ і $\tilde{q}_0(\alpha)$ – трансформанти Фур'є від функцій контактних напружень по лінії контакту, а μ – коефіцієнт Ляме.

Таким чином, k-те наближення має вигляд

$$p^{(k)}(y_1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P^{(k)}(s)\ e^{-isy_1} ds\ ; \quad q^{(k)}(y_1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Q^{(k)}(s)\ e^{-isy_1} ds \quad (k = 1,\ 2,\ ...),$$

де

$$P^{(k)}(s) = Ds^2\,\frac{\left\{\overline{f}_1^{(k-1)}(s)\left[E_0 h s^2 H_{22}(s) + 1\right] - E_0 h s^3 \overline{f}_2^{(k-1)}(s) H_{12}(s)\right\}}{L(s)}; \tag{2.9}$$

$$Q^{(k)}(s) = \frac{-IE_0 h s\left\{\overline{f}_2^{(k-1)}(s)\left[D_0 h s^4 H_{11}(s) + 1\right] + D_0 h s^3 \overline{f}_1^{(k-1)}(s) H_{12}(s)\right\}}{L(s)} \quad (k = 1,\ 2,\ ...)$$

є трансформантами Фур'є контактних напружень.

В (2.9)

$$L(s) = \left[D_0 s^4 H_{11}(s) - 1\right]\left[E_0 h s^2 H_{22}(s) + 1\right] + D_0 E_0 s^4 h H_{12}^2(s);$$

$$\overline{f}_1^{(k-1)}(s) = F\left[f_1^{(k-1)}(y_1)\right] \quad (j = 1,\ 2),\ (k = 1, 2, ...)\ .$$

Тут F – оператор перетворення Фур'є для вказаної функції (функціонал).

Застосувавши до (2.5) і (2.6) інтегральне перетворення Фур'є відносно трансформант контактних напружень, отримаємо наступні системи:

$$h_{11}(y_1)p^{(0)}(y_1)-Ih_{12}(y_1)Q^{(0)}(y_1)=0;$$

$$E_0hy_1^2h_{21}(y_1)p^{(0)}(y_1)-\left[E_0hy_1^2h_{22}(y_1)+2\right]Q^{(0)}(y_1)=Q_0(y_1); \qquad (2.10)$$

$$h_{11}(y_1)p^{(k)}(y_1)-Ih_{12}(y_1)Q^{(k)}(y_1)=0 \quad (k=1,\,2,\,...);$$

$$E_0hy_1^2h_{21}(y_1)p^{(k)}(y_1)-\left[E_0hy_1^2h_{22}(y_1)+2\right]Q^{(k)}(y_1)=Q_0^{(k-1)}(y_1), \qquad (2.11)$$

де

$$p^{(k)}(y_1)=F\left[p^{(k)}(y_1)\right];\quad Q^{(k)}(y_1)=F\left[q^{(k)}(y_1)\right] \quad (k=0,1,2,...);$$

$$Q_0\ (y_1)=F\left[q_0\ (y_1)\right];\quad Q_0^{(k-1)}(y_1)=F\left[q_0^{(k-1)}(y_1)\right];$$

I – параметр неоднорідності, а $h_{ij}(y_1)$ – функції впливу, вирази яких задаються формулами:

для рівних коренів $n_1=n_2$

$$h_{11}(y_1)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty H_{11}(\alpha)\cos\alpha\, y_1 d\alpha;\ h_{12}(y_1)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty H_{12}(\alpha)\sin\alpha\, y_1 d\alpha; \qquad (2.12)$$

для нерівних коренів $n_1\neq n_2$

$$h_{11}(y_1)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \tilde{H}_{11}(\alpha)\cos\alpha\, y_1 d\alpha;\ h_{12}(y_1)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \tilde{H}_{12}(\alpha)\sin\alpha\, y_1 d\alpha. \qquad (2.13)$$

Тут $h_{ij}(\alpha)$ $(i,\ j=1,\,2)$ функції впливу, які характеризують переміщення граничних точок грані $y_2=0$ нескінченної пружної смуги з початковими (залишковими) напруженнями від одиничної горизонтальної сили; ядра $H_{ij}(\alpha)$ і $\tilde{H}_{ij}(\alpha)$, відповідно, мають вигляд (1.11), (1.12).

Після знаходження трансформант контактних напружень з систем (2.10), (2.11) і застосувавши обернене перетворення Фур'є, отримаємо вирази нульового і k-го наближення нормальних і тангенціальних напружень:

$$p^{(0)}(y_1)=\frac{\mu}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H^*{}_{12}(\alpha)}{H^*(\alpha)}Q_0(\alpha)\operatorname{sign}\alpha e^{-i\alpha y_1}d\alpha \quad (-\infty<y_1<\infty);$$

$$q^{(0)}(y_1)=\frac{\mu}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H^*{}_{11}(\alpha)}{H^*(\alpha)}Q_0(\alpha)e^{-i\alpha y_1}d\alpha; \qquad (2.14)$$

$$p^{(k)}(y_1)=\frac{\mu}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H^*{}_{12}(\alpha)}{H^*(\alpha)}Q_0^{(k-1)}(\alpha)\operatorname{sign}\alpha e^{-i\alpha y_1}d\alpha \ (-\infty<y_1<\infty);$$

$$q^{(k)}(y_1)=\frac{\mu}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H^*{}_{11}(\alpha)}{H^*(\alpha)}Q_0^{(k-1)}(\alpha)e^{-i\alpha y_1}d\alpha. \qquad (2.15)$$

Тут величини $H(\alpha)$, $H_{ij}^{*}(\alpha)$ $\left(i,\ j=1,\ 2\right)$ виражаються через відомі функції $H_{ij}(\alpha)$ і $\tilde{H}_{ij}(\alpha)$ $\left(i,\ j=1,\ 2\right)$, які визначаються згідно формул для рівних і нерівних коренів визначального рівняння [2, 4, 6] у випадку конкретної структури пружних потенціалів.

Вирази контактних напружень (2.14) описують розв'язок контактної задачі для однорідного стрінгера, але вони одночасно є також нульовим наближенням розв'язку задачі для неоднорідного стрінгера. Решта наближень розв'язків, що виражаються формулами (2.15), демонструють вплив неоднорідності стрінгера. Слід відзначити, що цим способом можна розв'язувати контактні задачі для пружного тіла, підсиленого нескінченним стрінгером з слабкою неоднорідністю, яка змінюється за законом

$$E_1(y_1)=E[(1+\delta f(y_1)]\ (-\infty<y_1<\infty),$$

де $f(y_1)$ – деяка відома функція; δ – малий параметр.

§3. Розв'язок систем рівнянь.

Застосувавши до обох частин системи (2.8) інтегральне перетворення Фур'є за змінною y_1 і використавши теорему про згортку, знайдемо вирази для контактних напружень в пружних смугах з початковими напруженнями.

Нульове наближення для випадків рівних і нерівних коренів характеристичного рівняння набере вигляду (2.8), якщо в цих формулах провести заміну:

для рівних коренів $(n_1=n_2)$ $H_{ij}^{*}(\alpha)$ на $H_{ij}(\alpha)$;

для нерівних коренів $(n_1\neq n_2)$ $H_{ij}^{*}(\alpha)$ на $\tilde{H}_{ij}(\alpha)$,

де ядра $H_{ij}\left(\alpha\right)$ і $\tilde{H}_{ij}\left(\alpha\right)$, відповідно, мають вигляд (1.11) і (1.12).

Розглянемо числові приклади для стисливих і нестисливих тіл неогуківського матеріалу (потенціал Трелоара) (рис. 2, 3). Тут $p\left(\xi\right)$, $q\left(\xi\right)$–безрозмірні контактні нормальні і тангенціальні напруження в пружних смугах з початковими напруженнями. Значення $\lambda_1=1$ відповідає класичній теорії пружності і збігається з результатами роботи [7, 8]; $\lambda_1=0;\ 0,8;\ 0,4$ – відповідає початковим напруженням стиску, а $\lambda_1=1,1;1,2;1,3$

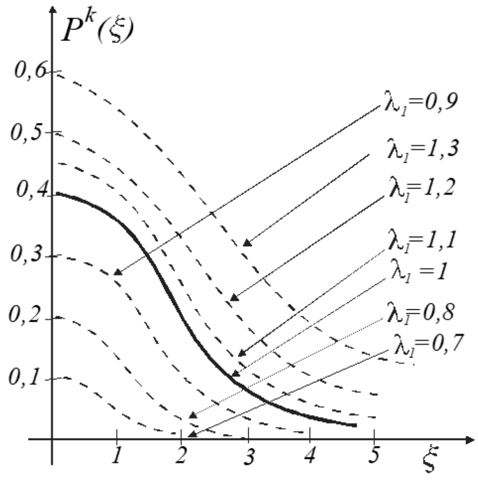

Рис. 2

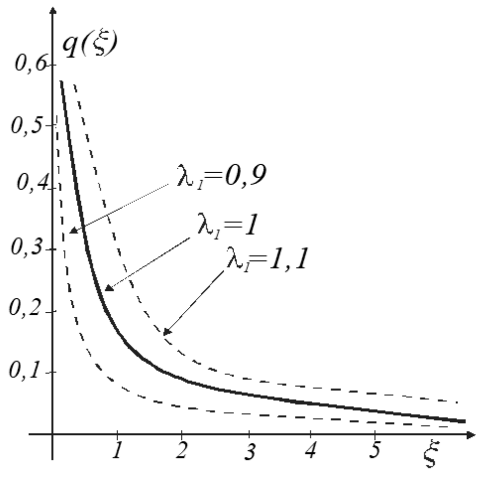

Рис. 3

– початкові напруження розтягу; ξ є безрозмірною координатою початкового напруженого стану в пружній смузі з початковими напруженнями.

Аналіз графіків показує, що у випадку стиску ($\lambda_1 < 1$) наявність початкових напружень у пружній смузі призводить до значного зменшення контактних напружень, у випадку розтягу ($\lambda_1 > 1$) – до їх збільшення.

Висновок.

В роботі в рамках лінеаризованої теорії пружності отримано розв'язок плоскої контактної задачі про передачу зосередженого горизонтального навантаження від слабо неоднорідного нескінченного пружного стрінгера до двох попередньо напружених смуг із защемленими вільними від навантаження гранями. Дослідження були проведені в цілому для теорії великих початкових деформацій та декількох варіантів теорії малих початкових деформацій у випадку довільної структури пружного потенціалу. Розв'язування задачі щодо нормальних і тангенціальних контактних напружень зведено до системи рекурентних інтегро-диференціальних рівнянь, розв'язок яких побудовано за степенями малого параметра. Нульовий наближений розв'язок неоднорідної задачі будується за допомогою інтегрального перетворення Фур'є. Контактні напруження представлено у вигляді інтегралів Фур'є. Дослідження, представлені в статті, дають можливість зробити деякі узагальнені висновки стосовно впливу початкових напружень на закон розподілу контактних зусиль при нескінченній накладці, що взаємодіє з попередньо напруженими смугами.

1. У загальному випадку, при рівних і нерівних коренях визначального рівняння [1, 7, 13], для розглянутого в рамках лінеаризованої теорії пружності класу контактних задач сформульовано загальний метод розв'язування поставлених задач, якщо відомий розв'язок аналогічних лінійних (без початкових напружень) задач.

2. У випадку рівних коренів визначального рівняння [1, 11] для тіл з пружними потенціалами довільної форми напруження і переміщення на кінцях пружних накладок мають особливість, яка повністю збігається з особливістю в аналогічних задачах класичної лінійної теорії пружності. З нерівними коренями для тіл з пружними потенціалами довільної форми не вдається довести співпадіння порядків вказаних особливостей.

3. Контактні напруження на лінії контакту з пружною накладкою значно залежать від початкових напружень. Більш істотний вплив кількісного характеру початкові напруження проявляють у високоеластичних матеріалах. Якісний вплив має ідентичний характер.

РЕЗЮМЕ. В рамках лінеаризованої теорії пружності отримано розв'язок плоскої контактної задачі про передачу горизонтального зосередженого навантаження від неоднорідного нескінченного в обох напрямках стрінгера до двох затиснених по одному краю однакових смуг з початковими (залишковими) напруженнями. Дослідження проведено в загальному вигляді для теорії великих початкових деформацій та різних варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу. Розв'язування задачі щодо нормальних і тангенціальних контактних напружень зведено до системи рекурентних інтегро-диференціальних рівнянь, яка розв'язується за допомогою інтегрального перетворення Фур'є. В кінцевому результаті контактні напруження представлені у вигляді інтегралів Фур'є. Існування початкових напружень в пружних смугах призводить до істотної зміни закону розподілу контактних напружень, при цьому в разі стиску контактні напруження значно зменшуються (в разі розтягу – збільшуються), а переміщення в разі стиску значно зростають (при розтязі – зменшуються). Істотніший вплив (кількісного характеру) початкові (залишкові) напруження мають у високоеластичних матеріалах в порівнянні з жорсткішими матеріалами. Якісний вплив має аналогічний характер.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: лінеаризована теорія пружності, початкові (залишкові) напруження, контактні задачі, інтегральне перетворення Фур'є.

1. *Гузь О.М., Бабич С.Ю., Рудницький В.Б.* Контактна взаємодія пружних тіл з початковими напруженнями. – Київ: Вища шк., 1995. – 305 с.

2. *Саркисян В.С.* Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками. – Ереван: Изд. Ереван. ун-та, 1983. – 260 с.
3. *Akopyan V.N., Mirzoyan S.Å., Mkhitaryan S.M.* The Problem of the Contact Between a Broken Stringerandan Elastic Infinite Strip Containing a Vertical Edge Crack // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 2. – P. 176 – 186.
4. *Aleksandrov V.M.* Optimal control of linear systems with interval constraints // Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. – 2015. – **55**, N 5. – P. 758 – 775.
5. *Babich S.Y., Dikhtyaruk N.N.* Load Transfer from an Infinite Inhomogeneous Stringer to a Prestressed Elastic Strip Clamped at One Edge // Int. Appl. Mech. – 2020. – 56, N 6. – P. 708 – 716.
6. *Babich S.Y., Dikhtyaruk N.N., Degtyar, S.V.* Contact Problem for Two Identical Strips Reinforced by Periodically Arranged Fasteners with Initial Stresses // Int. Appl. Mech. – 2019. – **55**, N 6. – P. 629 – 635.
7. *Bespalova E.I.* Finite Integral Transform Method in Static Problems for Inhomogeneous Plates // Int. Appl. Mech. – 2014. – 50, N 6. –P. 651– 663.
8. *Guz A.N.* Ultrasonic Nondestructive Method for Stress Analysis of Structura l Members and Near-Surface Layers of Materials: Focuson Ukrainian Research (Review) // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 3. – P. 231 – 252.
9. *Guz A.N.* Establishing the Foundations of theMechanics of Fracture of Materials Compressed Along Cracks (Review) // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 1. – P. 1 – 57.
10. *Guz A.N.* Recognition of the Achievementsofthe S.P. Timoshenko Institute of Mechanics by the World’s Scientific Community // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 1. – P. 1 – 11.
11. *Moses O.P., Adewale A.O., Olusegun O.A.* Numerical Analysis of Thermo-Elastic Contact Problem of Disc Brakes for Vehicle on Gradient Surfaces. // World J. Engng. and Technology. – 2016. – **4**, N 1. – P. 51 – 58.
12. *Yaretskaya N.A.* Three-Dimensional Contact Problem for an Elastic Layer and a Cylindrical Punch with Prestresses // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 4. – P. 378 – 388.
13. *Yaretskaya N.A.* The impact of the initial (residual) stresses on the contact in teraction of elastic cylindrical punch and an elastic layer // Bulletin of NAS of Ukraine. – 2014. – N 1. – P. 57 – 62.
14. *Yuan W.K., Long J.M., Ding Y., Wang G.F.* Micro/Nanocontact Between a Rigid Ellipsoid and an Elastic Substrate With Surface Tension // J. App. Mech. – 2017. – **84**, N 1. – P. 011 – 012.

Надійшла 20.12.2021 Затверджена до друку 28.03.2023