І.Ф.Киричок[1], О.А.Чернюшок[2]

ТЕРМОМЕХАНІЧНА ПОВЕДІНКА І ДОВГОВІЧНІСТЬ НЕПРУЖНИХ ГНУЧКИХ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ З П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИМИ ШАРАМИ ПРИ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ РЕЗОНАНСНИХ КОЛИВАННЯХ

[1] Інститут механіки ім .С.П.Тимошенка НАНУ,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: term@inmech.kiev.ua
[2] Національний університет харчових технологій,
вул Володимирська, 68, 01601, Київ, Україна; e-mail:chernyshokolqa@ukr.net

Abstract. The active contains task assignment and relevant solution methodology regarding electro-thermo-mechanical behavior and durability forecast of nonelastic flexible shell rotation under axisymmetric resonance oscillation. Effect of geometrically nonlinear on deflection amplitude versus frequency response characteristic, vibration heating temperature and sensor of electric indictor is investigated with numerical experiment for circular plate. System availability time versus extreme amplitude of mechanical stress and surface heat removal response is investigated based on evaluation criteria of local longevity for acceptable value of heating max temperature.

Key words: resonance vibration, dissipative heating, inelastic material, piezoelectric actuators, sensors, geometric nonlinearity.

Вступ.

Виготовлені із непружних (без п'єзоефекту) і п'єзоактивних матеріалів тонкостінні елементи типу балок, пластинок і оболонок обертання знаходять широке застосування як складові конструкцій сучасної техніки. В багатьох випадках вони в процесі експлуатації перебувають під дією високого рівня нестаціонарних, зокрема, гармонічних за часом навантажень та часто працюють в резонансному режимі, при якому амплітуди прогинів можуть досягати товщини елементів. Через гістерезисні втрати в непружних матеріалах виникає дисипативний розігрів. Коливання з великими амплітудами, як правило, супроводжуються високим рівнем механічних напружень та вібророзігріву, що може призвести до втрати працездатності тонкостінного елемента. Ці обставини при розрахунках напружено-деформованого стану і температури вібророзігріву вимагають розробки методів управління коливальним режимом та прогнозування довговічності об'єкта в процесі експлуатації. Одним із методів контролю вимушених коливань тонкостінних елементів є застосування п'єзоелектричних включень, одні із яких виконують роль збуджувачів або гасителів (актуатори), а другі дають інформацію про термомеханічний стан об'єкта (сенсори) [7, 8, 17 – 19]. При цьому задачі про електротермомеханічну поведінку і прогнозування довговічності таких елементів необхідно розв'язувати на основі теорій оболонок з врахуванням ефектів геометричної нелінійності і дисипативного розігріву [3 ,4].

Розробці математичних моделей електротермомеханічної поведінки шаруватих тонкостінних пластинок і оболонок із в'язкопружних пасивних і п'єзоактивних матеріалів з врахуванням дисипативного розігріву, фізичної і геометричної нелінійностей, а також розв'язанню конкретних задач про коливання і дисипативний розігрів та демпфування п'єзоелектричними актуаторами і сенсорами таких елементів присвячено багато статей [9, 10,12 – 16, 20], значну частину яких представлено в монографіях [3, 4] або обговорюється в оглядах [9, 11].

В даній статті в рамках теорії шаруватих оболонок, яка враховує ефекти геометричної нелінійності, представлено постановку і методику чисельного розв'язку задачі про електротермомеханічну поведінку непружних оболонок обертання з п'єзоелектричними сенсорами і актуаторами при осесиметричних резонансних коливаннях та прогнозування їх довговічності за допустимими значеннями температури дисипативного розігріву. Геометрична нелінійність в кінематичних співвідношеннях враховується в квадратичному наближенні. Нелінійними є і рівняння гармонічних коливань. На прикладі задачі про вимушені коливання в'язкопружної круглої пластинки досліджується вплив геометричної нелінійності на амплітудно- і температурно-частотні характеристики пластинки та електричні показники сенсора. За критерієм максимально допустимої температури дисипативного розігріву дано оцінку довговічності розглянутої пластинки при екстремальних умовах експлуатації.

1. Постановка задачі. Основні рівняння.

Розглянемо тришарову оболонку обертання, яка виготовлена із пасивного (без п'єзоефекту) шару товщиною h_3 і віднесена до ортогональної криволінійної системи координат s, θ, γ з початком нормальної координати $\gamma = 0$ на серединній поверхні пасивного шару (s – довжина дуги меридіана; θ – центральний кут в паралельному колі). Поверхні оболонки $\gamma = \mp h_3 / 2$ жорстко скріплені з п'єзоелектричними шарами товщиною h_1 і h_2, відповідно. Останні можуть виконувати роль актуаторів або сенсорів. Пасивний шар h_3 виготовлено із ізотропного матеріалу, а п'єзоактивні шари h_1 і h_2 – із поляризованої вздовж товщинної координати п'єзокераміки. Зовнішні поверхні $\gamma = \mp H_{1,2}$ $(H_{1,2} = h_3 / 2 + h_{1,2})$ і поверхні $\gamma = \pm h_3 / 2$ п'єзошарів покриті нескінченно тонкими суцільними електродами. Внутрішні електроди підтримуються при нульовому електричному потенціалі $\varphi_{1,2}(\pm h_0 / 2) = 0.$ Електродовані поверхні $\gamma = \mp H_{1,2}$ розділені нескінченно тонкими коловими розрізами на окремі ділянки з координатами s_1, s_2 вздовж твірної меридіана. Матеріали пасивного і п'єзоактивних шарів вважаємо в'язкопружними. В'язкопружні властивості матеріалів описуються інтегральними операторами лінійної в'язкопружності $D * f = \int_0^t D(t-\tau) f(\tau) d\tau$, які у випадку гармонічного процесу деформування $(f = f' \cos \omega t - f'' \sin \omega t)$ в'язкопружних матеріалів зводяться до операції множення комплексних величин

$$D * f = (D'f' + D''f'') \cos \omega t - (D'f'' - D''f') \sin \omega t. \quad (1)$$

Тут і далі одним і двома штрихами позначені дійсна і уявна частини комплексної величини.

Оболонка навантажена осесиметричним поверхневим тиском $q_z = q_z'(s) \cos \omega t$, який гармонічно змінюється за часом t з амплітудою q_z' і близькою до резонансної коловою частотою ω. Якщо п'єзошари виконують роль актуатора, для підсилення або зниження амплітуди механічних коливань з тою ж частотою і фазою або протифазою, відповідно, до зовнішніх електродованих колових ділянок шириною $\Delta_s = s_2 - s_1$ на поверхнях $\gamma = \mp H_{1,2}$ підводяться електричні потенціали $\varphi_{1,2}(\mp H_{1,2}) = \mathrm{Re}(2V_a e^{i\omega t})$ з амплітудою $V_a = V_a' + iV_a''$. Ділянки $s < s_1$, $s > s_2$ не електродовані. При виконанні п'єзошарами ролі сенсорів в результаті гармонічного деформування оболонки на розімкнутих електродах сенсора виникає різниця електричних потенціалів амплітуди V_s, яку необхідно визначити експериментально або на основі розв'язку задачі електромеханіки, використовуючи електричні граничні умови

$$\iint_{F^{\pm}} D_\gamma dF = 0 \ \ (s_1 \le s \le s_2); \quad D_\gamma = 0 \ \ (s < s_1, s > s_2)\,, \tag{2}$$

де D_γ – нормальна складова вектора електричної індукції в п'єзошарі; $F = 2\pi r(s)\Delta_s$ – площа електродованої ділянки; $r(s)$ – радіус паралельного кола оболонки.

При побудові математичної моделі електротермомеханічної поведінки даної оболонки обертання приймаємо, що по всьому пакету шарів відносно механічних змінних справедливі гіпотези Кірхгофа – Лява. Відносно електричних польових величин в п'єзошарах вважаємо, що тангенціальними складовими вектора індукції D_s, D_θ і вектора напруженості E_s, E_θ електричного поля можна знехтувати в порівнянні з нормальними складовими D_γ, E_γ. Тоді з рівнянь електростатики випливає, що нормальна складова $D_\gamma = const$ не залежить від товщинної координати γ [3]. Температуру дисипативного розігріву оболонки вважаємо постійною по товщині пакету шарів, а на поверхнях $\gamma = \mp H_{1,2}$ реалізуються умови конвективного теплообміну. Вважаємо, що деформації малі, але прогини оболонки можуть досягати товщини оболонки. Тому в кінематичних співвідношеннях враховуємо квадрати кутів повороту. При цьому рівняння руху також є нелінійними.

На основі прийнятих гіпотез тривимірні визначальні співвідношення поляризованої вздовж осі γ п'єзокераміки зводяться до наступних виразів [3]:

$$\begin{aligned} {}^m\sigma_s &= {}^m b_{11} * e_s + {}^m b_{12} * e_\theta - {}^m b_{31} * {}^m E_\gamma; \\ {}^m\sigma_\theta &= {}^m b_{12} * e_s + {}^m b_{11} * e_\theta - {}^m b_{31} * {}^m E_\gamma; \end{aligned} \tag{3}$$

$${}^m D_\gamma = {}^m b_{31} * (e_s + e_\theta) + {}^m b_{33} * {}^m E_\gamma; \quad {}^m E_\gamma = -\partial \varphi_m / \partial \gamma \ \ (m = 1, 2, 3)\,. \tag{4}$$

В співвідношеннях (3), (4) позначено:

$${}^m b_{11} = 1/[{}^m s_{11}^E (1 - {}^m \nu_E^2)]; \ {}^m b_{12} = {}^m \nu_E \, {}^m b_{11}; \ {}^m b_{31} = {}^m d_{31} / [{}^m s_{11}^E (1 - {}^m \nu_E)];$$

$${}^m b_{33} = {}^m \varepsilon_{33}^{33} (1 - {}^m k_p^2); \ {}^m k_p^2 = 2\, {}^m d_{31}^2 / [{}^m \varepsilon_{33}^T \, {}^m s_{11}^E (1 - {}^m \nu_E)]; \quad {}^m \nu_E = - {}^m s_{12}^E / {}^m s_{11}^E,$$

де $s_{jk}^E = s'_{jk}(1 - i\delta_{jk}^s)$; $d_{jk} = d'_{jk}(1 - i\delta_{jk}^d)$; $\varepsilon_{kk}^T = \varepsilon'_{kk}(1 - i\delta_{kk}^\varepsilon)$ – відповідно комплексні податливості, п'єзомодулі і діелектричні проникливості п'єзокераміки у випадку гармонічного деформування. Знак $*$ далі опускаємо. Поведінка пасивного шару $(m = 3)$ із ізотропного матеріалу описується співвідношеннями (3), де необхідно покласти ${}^3 b_{11} = E / (1 - \nu^2)$; ${}^3 b_{12} = \nu \, {}^3 b_{11}$; ${}^3 b_{31} = 0$; $E = E' + iE''$ – комплексний модуль Юнга, а $\nu = \mathrm{const}$ – коефіцієнт Пуассона.

Співвідношення Коші для амплітуд деформацій мають вигляд [2]

$$e_s = \varepsilon_s + \gamma \kappa_s; \quad e_\theta = \varepsilon_\theta + \gamma \kappa_\theta; \quad \varepsilon_s = \frac{du}{ds} + k_1 w + \frac{1}{2}\vartheta_s^2; \ \varepsilon_\theta = \frac{1}{r}(u\cos\varphi + w\sin\varphi); \tag{5}$$

$$\kappa_s = \frac{d\psi_s}{ds} - k_1 \varepsilon_s; \ \kappa_s = \frac{\vartheta_s}{r}\cos\varphi - k_2 \varepsilon_\theta; \ \vartheta_s = -\frac{dw}{ds} + k_1 u, \tag{6}$$

де u, w – відповідно комплексні амплітуди меридіонального і поперечного переміщень координатної поверхні; $k_1 = 1/R_s$; $k_2 = 1/R_\theta = \sin\varphi / r$; R_s, R_θ – радіуси головних кривизн в меридіональному і коловому напрямках; φ – кут, який утворений нормаллю до координатної поверхні і осі обертання.

Інтегруючи залежності (4) по γ з врахуванням виразів (5) і електричних граничних умов $\varphi_{1,2}(\mp H_{1,2}) = \mp V_a$; $\varphi_{1,2}(\mp h_3/2) = 0$, одержимо вирази для електричних складових

$$
\begin{gathered}
{}^mD_\gamma = -{}^mb_{33}\,{}^mV_0/h_m + {}^mb_{33}(\varepsilon + \tilde{h}_m\kappa);\ \ \varepsilon = \varepsilon_s + \varepsilon_\theta;\ \ \kappa = \kappa_s + \kappa_\theta; \\
{}^mE_\gamma = -{}^mV_0/h_m + {}^mb_{31}/{}^mb_{33}(\mp\tilde{h}_m - \gamma)\kappa;\ \ \tilde{h}_m = (h_3 + h_m)/2 \quad (m = 1,\, 2).
\end{gathered} \tag{7}
$$

Тут необхідно прийняти для п'єзосенсора ${}^mV_0 = {}^mV_s$, а для актуатора – ${}^mV_0 = {}^mV_a$.

В силу прийнятих гіпотез з врахуванням залежностей (3), (5), (7), співвідношення в'язкопружності для зусиль і моментів записуються у вигляді

$$
\begin{aligned}
N_s &= C_{11}\varepsilon_s + C_{12}\varepsilon_\theta + K_{11}\kappa_s + K_{12}\kappa_\theta + N_E; \\
N_\theta &= C_{12}\varepsilon_s + C_{11}\varepsilon_\theta + K_{12}\kappa_s + K_{11}\kappa_\theta + N_E; \\
M_s &= K_{11}\varepsilon_s + K_{12}\varepsilon_\theta + D_{11}\kappa_s + D_{12}\kappa_\theta + M_E; \\
M_\theta &= K_{12}\varepsilon_s + K_{11}\varepsilon_\theta + D_{12}\kappa_s + D_{11}\kappa_\theta + M_E.
\end{aligned} \tag{8}
$$

В співвідношеннях (8) комплексні параметри C_{1j}, K_{1j}, D_{1j} визначаються формулами

$$
\begin{gathered}
C_{1j} = \sum_{n=1}^{3} {}^nb_{1j}h_n + B_{33}k_c;\ \ K_{1j} = \sum_{n=1}^{3} {}^nb_{1j}h_{n2} + K_{33}k_c;\ \ D_{1j} = \sum_{n=1}^{3} {}^nb_{1j}h_{n3} + D_{33} \ \ (j = 1,\, 2); \\
K_{33} = \sum_{n=1}^{2} {}^n\gamma_{33}h_{n2}p_n;\ \ B_{33} = \sum_{n=1}^{2} {}^n\gamma_{33}h_n p_n;\ \ {}^n\gamma_{33} = {}^nb_{31}^2/{}^nb_{33}; \\
D_{33} = ({}^1\gamma_{33}h_{13}p_3 + {}^2\gamma_{33}h_{23}p_4)k_{D1} + ({}^1\gamma_{33}h_1^3p_5 + {}^2\gamma_{33}h_2^3p_6)k_{D2}/12; \\
N_E = {}^1b_{31}\,{}^1V_ak_{v1} + {}^2b_{31}\,{}^2V_ak_{v2};\ \ M_E = -\tilde{h}_1\,{}^1b_{31}\,{}^1V_ak_{v1} + \tilde{h}_2\,{}^2b_{31}\,{}^2V_ak_{v2}; \\
h_{12} = -h_1(h_1 + h_3);\ \ h_{22} = h_2(h_2 + h_3);\ \ h_{32} = 0; \\
h_{13} = (4h_1^3 + 6h_1^2h_3 + 3h_1h_3^2)/4;\ \ h_{23} = (4h_2^3 + 6h_2^2h_3 + 3h_2h_3^2)/4;\ \ h_{33} = h_3^3/4.
\end{gathered} \tag{9}
$$

Зауважимо, що при побудові визначальних співвідношень (8) при визначенні коефіцієнтів (9) для п'єзосенсора замість умови (2) використано наближену рівність $D_\gamma = 0$ [13]. Крім того, в формулах (9) необхідно прийняти $k_c = 0;\ k_{D1} = 0;\ k_{D2} = 1;$ $p_5 = p_6 = 1$; $k_{v1} = k_{v2} = 1,4$, якщо п'єзошари h_1 і h_2 виконують роль актуатора; $k_c = 1;$ $k_{D1} = 1;\ k_{D2} = 0;$ $p_1 = p_2 = 1$; $p_4 = p_4 = 1$; $k_{v1} = k_{v2} = 0$ – п'єзошари h_1 і h_2 є сенсором.

При врахуванні масових інерційних сил згідно принципу Даламбера рівняння руху осесиметричних оболонок обертання відносно шуканих комплексних невідомих мають вигляд [2]

$$
\begin{gathered}
\frac{d}{ds}(rN_s) - \cos\varphi\, N_\theta + rk_1\tilde{Q}_s = r\rho_\bullet \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\
\frac{d}{ds}(r\tilde{Q}_s) - \sin\varphi\, N_\theta + rk_1N_s + rq_\gamma = r\rho_\bullet \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \\
\frac{d}{ds}(rM_s) - \cos\varphi\, M_\theta - r\tilde{Q}_s - r(N_s + k_1M_s)\vartheta_s = 0,
\end{gathered} \tag{10}
$$

де $\rho_{\bullet} = \sum_{m=1}^{3} (\rho_n h_n)$; $\tilde{Q}_s = Q_s - (N_s + k_1 M_s)$; ρ_1, ρ_2, ρ_3 – відповідно питомі густини п'єзоактивних і пасивного матеріалів.

Механічні граничні умови на контурах таких оболонок, як і в теорії пружних оболонок, можна представити в зусиллях і моментах

$$N_s,\ M_s,\ Q_s \text{ на контурах } s = s_0,\ s = s_N, \tag{11}$$

або в переміщеннях

$$u,\ \ w,\ \ \psi_s \text{ на контурах } s = s_0,\ s = s_N, \tag{12}$$

або у вигляді комбінації зусиль (11) і переміщень (12).

Згідно прийнятому припущенню відносно розподілу температури вібророзігріву усереднене за період коливань і по товщині оболонки рівняння теплопровідності, початкові і граничні умови конвективного теплообміну записуються у вигляді:

$$\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial s^2} + \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial T}{\partial s} - \frac{2\alpha_s}{\lambda H}(T - T_c) + \frac{\omega}{2\lambda H}\langle W \rangle;$$

$$T = T_0\ \ (t = 0);\ \ \lambda\frac{\partial T}{\partial s} = \pm\alpha_{1,2}(T - T_c)\ \ \ (s = s_0,\ s = s_N), \tag{13}$$

де $\langle W \rangle$ – усереднена швидкість дисипації; $\alpha_s = (\alpha_+ + \alpha_-)/2$, α_1, α_2 – коефіцієнти теплообміну на поверхнях і контурах оболонки; λ, a – усереднені коефіцієнти тепло- і температуропровідності; $H = h_1 + h_2 + h_3$; T_0 – початкова температура оболонки.

2. Побудова чисельного алгоритму розв'язку задачі.

Розв'язувальна система нелінійних рівнянь (6), (7), (10) – (13) описує вимушені осесиметричні коливання і дисипативний розігрів в'язкопружних ізотропних оболонок обертання з п'єзоелектричними сенсорами і актуаторами. Для чисельного розв'язку в якості роз'язувальних функцій вибираємо u, w, ϑ_s, N_s, $\tilde{Q}_s$, M_s. При цьому співвідношення (7) з врахуванням (5) запишемо у такому вигляді:

$$\varepsilon_s = \tilde{a}_{11}u + a_{15}w + \tilde{a}_{12}\psi_s + a_{13}N_s + a_{14}M_s - n_E;$$

$$\kappa_s = \tilde{a}_{21}u + a_{25}w + \tilde{a}_{22}\psi_s + a_{23}N_s + a_{24}M_s - m_E;$$

$$N_\theta = \tilde{m}_{11}u + m_{15}w + \tilde{m}_{12}\psi_s + m_{13}N_s + m_{14}M_s + n_{E\theta}; \tag{14}$$

$$M_\theta = \tilde{m}_{21}u + m_{25}w + \tilde{m}_{22}\psi_s + m_{23}N_s + m_{24}M_s + m_{E\theta}.$$

Коефіцієнти в залежностях (14) через жорсткісні характеристики (9) виражаються формулами

$$a_{11} = (K_{11}K_{12} - D_{11}C_{12})/\Delta;\ a_{12} = (K_{11}D_{12} - D_{11}K_{12})/\Delta;\ a_{13} = D_{11}/\Delta;$$

$$a_{21} = (K_{11}C_{12} - K_{11}C_{11})/\Delta;\ a_{22} = (K_{11}K_{12} - C_{11}D_{12})/\Delta;\ a_{23} = a_{14} = -K_{11}/\Delta;$$

$$a_{24} = C_{11}/\Delta;\ n_E = (D_{11}N_E - K_{11}M_E)/\Delta;\ m_E = (K_{11}N_E - C_{11}M_E)/\Delta; \tag{15}$$

$$\tilde{a}_{11} = \hat{a}_{11}A;\ \tilde{a}_{12} = a_{12}A;\ \tilde{a}_{21} = a_{21}A;\ \hat{a}_{11} = a_{11} - k_2 a_{12};\ \hat{a}_{21} = a_{21} - k_2 a_{22};\ A = \cos\varphi/r;$$

$$\tilde{a}_{22} = a_{22}A;\ a_{15} = \hat{a}_{11}B;\ a_{25} = \hat{a}_{21}B;\ B = \sin\varphi/r;$$

$$\tilde{m}_{11}=C_{12}\tilde{a}_{11}+K_{12}\tilde{a}_{21}+\tilde{C}_{11}A;\ \tilde{m}_{12}=C_{12}\tilde{a}_{12}+K_{12}\tilde{a}_{22}+K_{11}A;\ \tilde{C}_{11}=C_{11}-k_2K_{11};$$

$$m_{13}=C_{12}a_{13}+K_{12}a_{23};\ m_{14}=C_{12}a_{14}+K_{12}a_{24};\ m_{15}=C_{12}a_{15}+K_{12}a_{25}+\tilde{C}_{11}B;$$

$$\tilde{m}_{22}=K_{12}\tilde{a}_{12}+D_{12}\tilde{a}_{22}+D_{11}A;\ \tilde{m}_{21}=K_{12}\tilde{a}_{11}+D_{12}\tilde{a}_{21}+\tilde{K}_{11}A;$$

$$m_{23}=K_{12}a_{13}+D_{12}a_{23};\ m_{24}=K_{12}a_{14}+D_{12}a_{24};\ \tilde{K}_{11}=K_{11}-k_2D_{11};$$

$$m_{25}=K_{12}a_{15}+D_{12}a_{25}+\tilde{K}_{11}B;\ n_{E\theta}=N_E-C_{12}n_E-K_{12}m_E;\ m_{E\theta}=M_E-K_{11}n_E-D_{12}m_E.$$

Після деяких перетворень рівнянь (6), (10) з урахуванням (14) приходимо до системи диференціальних рівнянь в формі Коші

$$\frac{\partial w}{\partial s}=k_1u-\vartheta_s;\quad \frac{\partial u}{\partial s}=\tilde{a}_{11}u+\tilde{a}_{15}w+\tilde{a}_{12}\vartheta_s+a_{13}N_s+a_{14}M_s-\frac{1}{2}\vartheta_s^2-n_E;$$

$$\frac{\partial \vartheta_s}{\partial s}=\tilde{a}_{31}u+a_{35}w+\tilde{a}_{32}\vartheta_s+a_{33}N_s+a_{34})M_s-k_1n_E-m_E; \tag{16}$$

$$\frac{\partial N_s}{\partial s}=\tilde{m}_{11}u+Am_{15}w+A\tilde{m}_{12}\vartheta_s+A(m_{13}-1)N_s+Am_{14}M_s-k_1\tilde{Q}_s+An_{E\theta}+\rho_\bullet\frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial \tilde{Q}_s}{\partial s}=k_2\tilde{m}_{11}u+k_2m_{15}w+k_2\tilde{m}_{12}\vartheta_s+(k_2m_{13}+k_1)N_s+k_2m_{14}M_s-A\tilde{Q}_s-q'_\gamma+k_2n_{E\theta}+\rho_\bullet\frac{\partial^2 w}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial M_s}{\partial s}=A\tilde{m}_{21}u+Am_{25}w+A\tilde{m}_{22}\vartheta_s+A(m_{24}-1)M_s+Am_{23}N_s+Q_s+(N_s+k_1M_s)\vartheta_s+Am_{E\theta}.$$

В рівняннях (16) позначено

$$\tilde{a}_{31}=\tilde{a}_{21}+k_1\tilde{a}_{11};\ \tilde{a}_{32}=\tilde{a}_{22}+k_1\tilde{a}_{12};\ a_{33}=a_{23}+k_1a_{13};$$

$$a_{34}=a_{24}+k_1a_{14};\ a_{35}=a_{25}+k_1a_{15};\ \tilde{a}_{15}=a_{15}-k_1.$$

В силу геометричної нелінійності при моногармонічному навантаженні вигляду

$$q_\gamma=q'_\gamma\cos\omega t-q''_\gamma\sin\omega t\ (q''_\gamma=0) \tag{17}$$

в розв'язку рівнянь руху (16) оболонки, що розглядається, наряду з основною частотою (частотою навантаження) будуть присутні і більш високі гармоніки [3]. Тому будемо будувати наближений розв'язок нелінійних рівнянь (16) у вигляді гармонічного ряду за часом t. При цьому обмежимося побудовою розв'язку в одномодовому наближенні для змінних $A=\{w,\ \vartheta_s,\ \tilde{Q}_s,\ M_s,\ M_\theta,\ \kappa_\theta\}$, які характеризують згинальні ефекти оболонки, та при утриманні других гармонік для змінних $B=\{u,\ N_s,\ \varepsilon_s,\ N_\theta\}$ меридіонального деформованого стану оболонки, так що

$$A={}^1A'\cos\omega t-{}^1A''\sin\omega t;\ B={}^0B+\sum_{k=1}^{2}{}^kB'\cos k\omega t-{}^kB''\sin k\omega t. \tag{18}$$

Підстановка (17), (18) в рівняння руху (16) і механічні граничні умови типу (11), (12) при використанні операції (1) та утриманні членів при $\cos k\omega t$ і $\sin k\omega t$ до другої гармоніки включно $(k=0,1,2)$ відносно невідомих змінних призводить до нелінійної системи звичайних диференціальних рівнянь 18 порядку в формі

$$\frac{d\vec{Y}}{ds} = A(s)\vec{Y} + \vec{F}(\vec{Y}) + \vec{q}(s), \tag{19}$$

граничні умови для якої можна записати так:

$$B_1\vec{Y} = \vec{b}_1 \quad (s = s_0); \;\; B_2\vec{Y} = \overline{b}_2 \quad (s = s_N). \tag{20}$$

Тут

$$\vec{Y} = (y_1, y_2, \cdots, y_{18})^T =$$

$$= \{u', u'', {}^2u', {}^2u'', w', w'', \vartheta'_s, \theta''_s, N'_s, N''_s, {}^2N'_s, {}^2N''_s, \tilde{Q}'_s, \tilde{Q}''_s, M''_s, M'', {}^0u, {}^0N_s\}^T$$

– вектор-стовпець шуканих функцій; $A(s)$ – квадратична матриця, виписані на основі (16) ненульові коефіцієнти якої такі:

$$A_{11} = A_{22} = \tilde{a}'_{11};\; A_{12} = -A_{21} = \tilde{a}''_{11};\; A_{15} = A_{26} = \tilde{a}'_{15};\; A_{14} = -A_{25} = \tilde{a}'_{15};\; A_{17} = -A_{28} = \tilde{a}'_{12};$$

$$A_{18} = -A_{27} = \tilde{a}''_{12};\, A_{19} = A_{2,10} = a'_{13};\, A_{1,10} = -A_{2,9} = a''_{13};\, A_{1,15} = A_{2,16} = \tilde{a}'_{14};\; A_{1,16} = -A_{2,15} = a''_{14};$$

$$A_{33} = A_{44} = {}^2\tilde{a}'_{11};\quad A_{34} = -A_{43} = {}^2\tilde{a}''_{11};\quad A_{3,11} = A_{4,12} = {}^2\tilde{a}'_{13};$$

$$A_{3,12} = -A_{4,11} = {}^2\tilde{a}''_{13};\; A_{51} = A_{62} = k_1;\; A_{57} = A_{68} = -1;$$

$$A_{71} = A_{82} = \tilde{a}'_{31};\; A_{72} = -A_{81} = \tilde{a}''_{31};\; A_{75} = A_{86} = a'_{35};\; A_{76} = -A_{87} = a''_{35};\; A_{77} = A_{88} = \tilde{a}'_{32};$$

$$A_{78} = A_{87} = \tilde{a}''_{32};\, A_{79} = A_{8,10} = \tilde{a}'_{33};\, A_{7,10} = -A_{89} = \tilde{a}''_{33};\, A_{7,15} = A_{8,16} = a'_{34};\, A_{7,16} = -A_{8,15} = a''_{34};$$

$$A_{91} = A_{10,2} = (A\tilde{m}'_{11} - \rho_\bullet\omega^2);\; A_{92} = -A_{10,1} = A\tilde{m}''_{11};\; A_{95} = A_{10,6} = Am'_{15};\; A_{96} = -A_{10,5} = Am''_{15};$$

$$A_{9,7} = A_{10,8} = A\tilde{m}'_{12};\; A_{98} = -A_{10,7} = A\tilde{m}''_{12};\; A_{99} = A_{10,10} = A(m'_{13} - 1);\; A_{9,10} = -A_{10,9} = Am''_{13};$$

$$A_{9,13} = A_{10,14} = -k_1;\; A_{9,15} = A_{10,16} = Am_{14};\; A_{9,16} = -A_{10,15} = Am'_{14};\; A_{9,16} = -A_{10,15} = Am''_{14};$$

$$A_{11,13} = A_{12,4} = (A^2m'_{11} - 4\rho_\bullet\omega^2);\; A_{11,4} = -A_{12,3} = A^2m''_{11};\; A_{11,11} = A_{12,12} = A({}^2m'_{13} - 1); \tag{21}$$

$$A_{11,12} = -A_{12,11} = A^2m''_{13};\; A_{13,1} = A_{14,2} = B\tilde{m}'_{11};\; A_{13,2} = -A_{14,1} = B\tilde{m}''_{11};$$

$$A_{13,5} = A_{14,6} = (Bm'_{15} - \rho_\bullet\omega^2);\; A_{13,6} = -A_{14,5} = Bm''_{15};$$

$$A_{13,7} = A_{14,8} = B\tilde{m}'_{12};\; A_{13,8} = -A_{14,7} = B\tilde{m}''_{12};\; A_{13,9} = -A_{14,9=10} = Bm''_{13} + k_1;$$

$$A_{13,10} = -A_{14,9} = Bm''_{13};\; A_{13,13} = A_{14,14} = -A;\; A_{13,15} = A_{14,16} = Bm'_{14};\; A_{13,16} = -A_{14,15} = Bm''_{14};$$

$$A_{15,1} = A_{16,2} = A\tilde{m}'_{21};\; A_{15,2} = -A_{16,1} = A\tilde{m}''_{21};\; A_{15,5} = A_{16,6} = Am'_{25};\; A_{15,6} = -A_{16,5} = Am''_{25};$$

$$A_{15,7} = A_{16,8} = A\tilde{m}'_{22};\; A_{15,8} = -A_{16,7} = A\tilde{m}''_{22};\; A_{15,9} = A_{16,10} = Am'_{23};\; A_{15,10} = -A_{16,8} = Am''_{23};$$

$$A_{15,13} = A_{16,14} = -1;\; A_{15,15} = A_{16,16} = (Am'_{24} - 1);\; A_{15,16} = -A_{16,15} = Am''_{24};$$

$$A_{17,17} = {}^0\tilde{a}_{11};\; A_{17,18} = {}^0a_{13};\; A_{18,17} = A\,{}^0\tilde{m}_{11};\; A_{18,18} = A({}^0m_{13} - 1).$$

Нелінійні компоненти вектора $\vec{F}(\vec{Y}) = (F_1,\, F_2, \cdots,\, \vec{F}_{18})^T$ виражаються через компоненти вектора $\vec{Y}$. Його ненульові елементи мають вигляд

$$F_3 = -\frac{1}{4}(y_7^2 - y_8^2);\; F_4 = -\frac{1}{2}(y_7 y_8);\; F_{17} = -\frac{1}{4}(y_7^2 + y_8^2);$$

$$F_{15} = y_7 y_{18} + \frac{1}{2}(y_7 y_{11} + y_8 y_{12});\; F_{16} = y_8 y_{18} + \frac{1}{2}(y_7 y_{12} - y_8 y_{11}). \qquad (22)$$

Ненульові компоненти вектора $\vec{q} = (q_1, q_2, \cdots, q_{18})^T$ механічного і електричного навантажень такі:

$$q_1 = -\tilde{n}_E';\; q_2 = -\tilde{n}_E'';\; q_7 = -\tilde{m}_E' - k_1\tilde{n}_E';\; q_8 = -\tilde{m}_E'' - k_1\tilde{n}_E'';$$

$$q_9 = An_{E\theta}';\; q_{10} = An_{E\theta}'';\, q_{13} = Bn_{E\theta}' - q_\gamma';\; q_{14} = Bn_{E\theta}'';\; q_{15} = Am_{E\theta}';\; q_{16} = Am_{E\theta}''.$$

Прямокутні матриці $B_1,\, B_2$ і вектори $\vec{b}_1,\, \vec{b}_2$ визначаються граничними умовами (11), (12) на торцях оболонки. Зауважимо, що коефіцієнти в (21) без верхнього зліва індекса 1 є складовими величинами комплексних характеристик (15), які обчислюються на частоті ω, а величини з індексом 2 – на частоті 2ω. Коефіцієнти з індексом 0 відповідають дійсним складовим (15) з незалежними від частоти ізотермічними значеннями модулів.

В термінах вищеприйнятих невідомих величин задачі (19), (20) дисипативна функція $\langle W \rangle$ в рівняннях теплопровідності (13) для гнучких оболонок з п'єзоелектричними актуаторами має вигляд

$$\langle W \rangle = \sum_{k=1}^{2} k({}^k N_s''\, {}^k\varepsilon_s' - {}^k N_s'\, {}^k\varepsilon_s'' + {}^k N_\theta''\, {}^k\varepsilon_\theta' - {}^k N_\theta'\, {}^k\varepsilon_\theta'') + M_s''\kappa_s' -$$
$$- M_s'\kappa_s'' + M_\theta''\kappa_\theta' - M_\theta'\kappa_\theta'' + {}^1D_\gamma''\, {}^1V_a' - {}^1D_\gamma'\, {}^1V_a'' + {}^2D_\gamma''\, {}^2V_a' - {}^2D_\gamma'\, {}^2V_a''. \qquad (23)$$

У випадку п'єзоелектричних сенсорів в (23) необхідно покласти ${}^mD_\gamma' = 0;\;\; {}^mD_\gamma'' = 0$ $(m = 1,\, 2)$.

При незалежних від температури електромеханічних характеристиках матеріалів задача про електротермомеханічну поведінку даних оболонок зводиться до роздільного розв'язку задачі механіки (19), (20) та інтегрування рівняння теплопровідності (13) з нелінійним джерелом тепла (23). Нелінійну систему (19), (20) лінеаризуємо методом квазілінеаризації [3]. В результаті отримуємо послідовність розв'язків лінійної системи звичайних диференціальних рівнянь. Одержані лінеаризовані рівняння на кожній ітерації інтегруємо методом дискретної ортогоналізації [2] з використанням комп'ютерної програми [5]. Потім обчислюємо дисипативну функцію (23) і розв'язуємо задачу теплопровідності (13) методом кінцевих різниць з використанням явної схеми.

На онові отриманого розв'язку крайової задачі (19), (20) у випадку оболонки з п'єзошарами, які виконують роль сенсора, для визначення потенціалів на електродах сенсора після підстановки ${}^mD_\gamma$ із (7) в першу умову (2) одержимо наступний вираз

$$\frac{{}^mV_s}{h_m} = -\int_{s_1}^{s_2} {}^m b_{31}\left[\varepsilon_s + \varepsilon_\theta + \frac{h_m + h_3}{2}(\kappa_s + \kappa_\theta)\right] ds \Big/ \int_{s_1}^{s_2} {}^m b_{33}\, ds.$$

3. Прогнозування довговічності оболонкових систем за допустимими значеннями температури дисипативного розігріву.

При високих амплітудах механічного або електричного гармонічних навантажень, особливо в околі резонансної частоти, і недостатньому тепловідведенню з поверхні непружного об'єкта з п'єзоелектричними включеннями температура дисипативного розігріву може досягати критичного значення T_k (точка деградації). При температурі деградації настає руйнування системи із-за розм'якшення пасивного або деполяризації (точка Кюрі) п'єзоактивного матеріалів. Значення T_k для конкретного матеріалу визначається експериментально.

Процедура прогнозування довговічності непружних гнучких тонкостінних елементів включає розв'язування нелінійної задачі про вимушені коливання з відповідними граничними умовами, рівнянь теплопровідності з нелінійною дисипативною функцією при початкових і граничних умовах та критеріальних рівнянь руйнування. Аналіз відомих енергетичних і односторонніх критеріїв локального руйнування непружних гумо-металічних систем представлено, наприклад, в монографії [1].

В інженерній практиці для оцінки надійності працюючих в циклічному режимі об'єктів широко використовуються односторонні оцінки довговічності за декількома параметрами. Як такі параметри використовують допустимі значення температури дисипативного розігріву, механічних напружень, деформацій або переміщень. Такі односторонні оцінки з достатньо великою точністю дозволяють встановити гарантовану нижню оцінку працездатності непружної оболонкової системи. Практика експлуатації непружних елементів при гармонічних навантаженнях показує, що основний вклад в їх працездатність вносить температура вібророзігріву, яка при екстремальних умовах експлуатації може досягати критичного значення T_k. Критичному значенню T_k відповідають критичні амплітуди механічного q_k або електричного V_k гармонічного навантаження, які визначаються на основі розв'язку вищерозглянутої задачі електротермов'язкопружності. При навантаженнях, які обумовлюють усталену максимальну температуру $T_m \le T_k$ в локальному об'ємі системи, довговічність її прогнозується на основі умови $T_m \le T_\partial < T_k$ (T_∂ – установлена практикою допустима температура експлуатації). В цьому випадку в задачі термов'язкопружності використовується рівняння стаціонарної теплопровідності. У випадку навантажень, при яких температура вібророзігріву перевищує T_k, необхідно визначити критичний час t_k працездатності системи з використанням нестаціонарного рівняння теплопровідності.

В подальшому при чисельному визначенні локальної довговічності конкретної оболонки приймаємо, що допустимою температурою експлуатації такого об'єкта є температура $T_\partial = 120°\mathrm{C}$, яка настає хоча би в одній точці системи.

4. Результати числових розрахунків і їх аналіз для круглої пластинки з п'єзосенсором.

Як приклад розглянемо задачу про електротермомеханічну поведінку і прогнозування довговічності гнучкої круглої пластинки радіуса R з п'єзошарами – сенсорами однакової товщини $(h_1 = h_2)$ при гармонічному навантаженні поверхневим тиском постійної амплітуди q_0. При цьому для суцільної круглої пластинки в рівняннях (5) – (13) необхідно покласти $s_0 = 0;\ s_N = R;\ s = r;\ 0 \le r \le R;\ \varphi = 0;\ k_1 = 0.$ Електродовані ділянки характеризуються радіусом $r_0\ (s_1 = 0,\ s_2 = r_0).$ П'єзошари виготовлені із однієї і тієї ж п'єзокераміки типу ЦТСтБ – 2 з протилежною вздовж товщини поляризацією, так що шари h_1 і h_2 характеризуються п'єзомодулями ${}^1d_{31} = +d_{31}$ і ${}^2d_{31} = -d_{31}$, відповідно. Пасивний шар виготовлено із в'язкопружного полімера. Числові розрахунки проведено для пластинки з наступними фізико-механічними характеристиками:

$${}^kE = {}^kE' + i\,{}^kE'';\ {}^kE' = {}^0E \cdot (k\omega)^p;\ {}^kE'' = {}^kE' \cdot b \cdot (k\omega)^q (k = 1, 2);\ {}^0E = 0{,}308 \cdot 10^{10}\ \text{Н/м}^2;$$

$$b = 0{,}16;\ q = -0{,}145;\ p = 0{,}076;\ \nu = 0{,}35;\ \rho_3 = 2{,}77 \cdot 10^3 \text{кг/м}^3;\ \lambda = 0{,}45\ \text{Вт} / (\text{м} \cdot \text{град})$$

– для пасивного матеріалу [17];

$$ {}^{k}s_{11}^{E} = (12,5 - 0,02i) \cdot 10^{-12}\,\text{м}^2/\text{Н};\ \ {}^{k}d_{31} = (-1,6 + 0,0064i) \cdot 10^{-10}\,\text{Кл/м}; $$

$$ {}^{л}\varepsilon_{33}^{E} = (21 - 0,735i) \cdot 10^{2} \varepsilon_{33}^{0};\ \ \varepsilon_{33}^{0} = 8,854 \cdot 10^{-12}\,\Phi/\text{м};\ \ \nu_E = 0,37; $$

$$ \rho_1 = \rho_2 = 7520\ \text{кг/м}^3;\ \ \lambda = 0,47\ \text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{град});\ \ T_0 = T_c = 20°\text{C} $$

– для п’єзокераміки [6].

Геометричні розміри пластинки такі: $R = 0,2$ м; $h_3 = 0,01$ м; $h_1 = h_2 = 0,1 \cdot 10^{-3}$ м. Коефіцієнти теплообміну $\alpha_s = \alpha_2 = 15$ Вт / (м^2 · град). На зовнішньому контурі пластинки $(r = R)$ виконуються умови шарнірного закріплення $(N_r = 0,\ M_r = 0,\ w = 0)$. Враховуючи, що для круглої суцільної пластинки точка $r = 0$ є особливою, розрахунки проводились для пластинки з отвором в центрі достатньо малого радіуса $(r = \varepsilon = 10^{-4}\,\text{м})$, на контурі якого виконуються умови регулярності і симетрії $(N_r = 0;\ \tilde{Q}_r = 0;\ \vartheta_r = 0;\ \partial T / \partial r = 0)$ [2].

В зв’язку з тим, що в пластинці, яка розглядається, реалізуються переважно згинальні коливання, числові розрахунки проведено в околі першої резонансної частоти найбільш енергоємної моди згинальних коливань оболонки.

На рис. 1 – 3 кривими *1, 2* для механічно навантаженої пластинки з п’єзосенсором відносного радіуса $r_0 / R = 0,8$ показано частотні залежності віднесеної до товщини пасивного шару амплітуд максимального прогину $\tilde{w} = |w(r = \varepsilon)| / h_3$ (рис 1), максимальної усталеної температури дисипативного розігріву $T = T_m$°C (рис 2) і величини електричного показника сенсора $\tilde{V}_s = |V_s| \cdot 10^{-2} B$ (рис 3), відповідно.

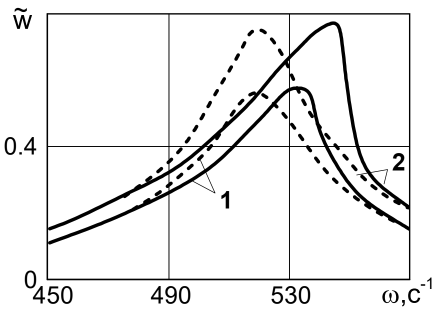

Рис. 1

Криві *1, 2* розраховані для амплітуд $q_0 = (0,15;\, 0,2) \cdot 10^4$ Па. При цьому штрихові лінії відповідають розв’язку лінійної задачі, а суцільні – при врахуванні геометричної нелінійності. Аналіз кривих на рис. 1 – 3 показує, що врахування геометричної нелінійності стає помітним для

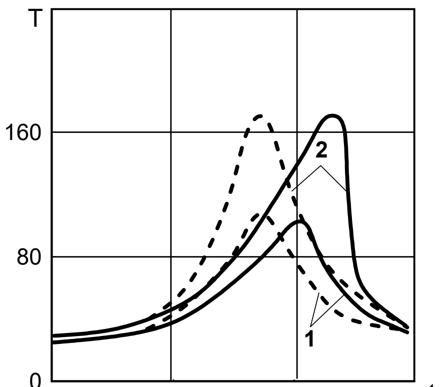

Рис. 2

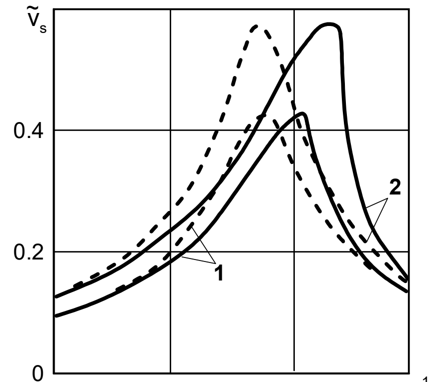

Рис. 3

амплітуд навантаження, при яких максимальні значення відносних прогинів $\tilde{w} \ge 0,2$. Таке врахування супроводжується формуванням частотних характеристик жорсткого типу та зміщенням резонансної частоти в сторону збільшення відносно частоти резонансу лінійної задачі. Крім того, на частотах лінійного (штрихові лінії) і нелінійного (суцільні лінії) значення максимальних температур майже не відрізняються. Це може бути підставою того, що при прогнозуванні довговічності термомеханічної поведінки розглядуваної пластинки за параметром температури вібророзігріву можна обмежитись розв'язком лінійної задачі.

На рис. 4 зображено криві *1 – 3* залежності усталеної максимальної температури вібророзігріву $T = T_m$ °C оболонки від амплітуди поверхневого тиску $\tilde{q}_0 = q_0 \cdot 10^{-5}$ Па, які розраховані для коефіцієнтів теплообміну $\alpha_2 = \alpha_s = (5, 15, 25)$ Вт / (м^2 · град) з частотою резонансу 520 с$^{-1}$. Допустимі значення максимальної температури $T = T_\partial = 120$°C працездатності системи, якій відповідають допустимі амплітуди механічного навантаження $q_0 = q_\partial$, позначені хрестиками на осях ординат і абсцис, відповідно. Аналіз графіків на рис. 4 показує, що в умовах вимушених коливань пластинки інтенсифікація процесу тепловіддачі з її поверхонь супроводжується збільшенням амплітуди допустимого навантаження, при якому досягається допустима стаціонарна температура працездатності системи. Врахування геометричної нелінійності (суцільні криві) призводить до подальшого збільшення амплітуди допустимого навантаження для реалізації максимально допустимої температури експлуатації об'єкта.

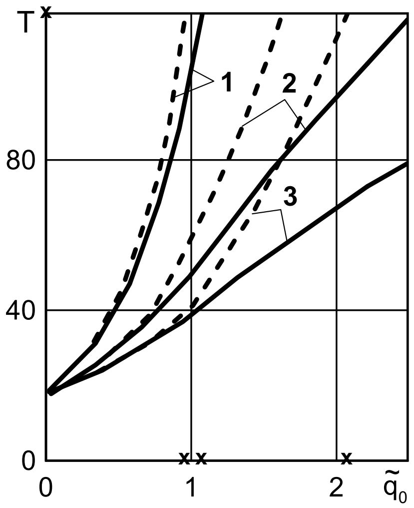

Рис. 4

На рис. 5 кривими *1, 2* показано еволюцію максимальної температури вібророзігріву пластинки за параметром часу $\tau = at / R^2$, які розраховані на основі нестаціонарної задачі теплопровідності для амплітуд механічного навантаження $q_0 = (0,8; 1,0) \cdot 10^3$ Па з частотою $\omega = 520$ с$^{-1}$ і коефіцієнтом теплообміну $\alpha_n = \alpha_2 = 5$ Вт / (м^2 · град). Хрестиками на осях ординат і абсцис позначено значення допустимої температури і допустимого часу τ_∂ (штрихова крива *2*). Видно, що врахування геометричної нелінійності (суцільні криві) призводить до зниження температури вібророзігріву в усьому діапазоні розподілу її за часом. При амплітудах, які перевищують навантаження q_∂, що обумовлює температуру T_∂, працездатність системи обумовлюється допустимим часом τ_∂.

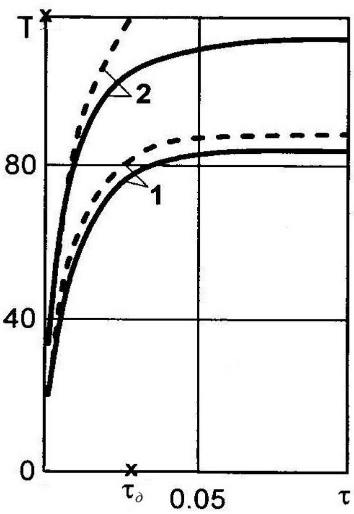

Рис. 5

Графіки залежності амплітуди навантаження $q_0 \ge q_\partial$ від параметра допустимого

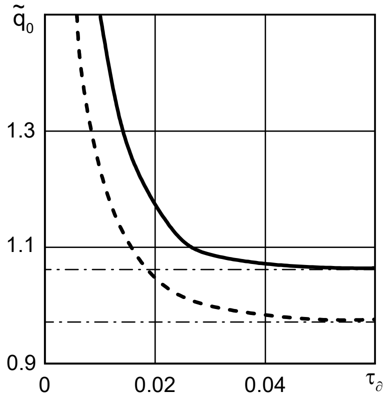

Рис. 6

часу τ_∂ показані кривими на рис. 6, які розраховані з коефіцієнтом теплообміну $\alpha_n = \varepsilon_2 = = 5\,\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{град})$ на частоті $\omega = 520\,\text{с}^{-1}$. Штрих-пунктирними лініями позначено допустимі значення q_∂ . З рис. 6 видно, що врахування геометричної нелінійності (суцільна крива) призводить до збільшення критичних значень амплітуд q_∂ і часу τ_∂ по відношенню до розрахунків на основі лінійної постановки задачі (штрихова крива) термомеханіки пластинки, яка розглядалась.

Висновок.

В рамках геометрично нелінійної теорії шаруватих оболонок в квадратичному наближенні представлено постановку і методологію чисельного розв'язку задачі про електротермомеханічну поведінку і прогнозування довговічності в'язкопружних оболонок обертання з п'єзоелектричними актуаторами і сенсорами при вимушених осесиметричних коливаннях. На прикладі круглої пластинки з п'єзосенсорами для найбільш енергоємної моди згинальних коливань чисельно досліджено вплив геометричної нелінійності та умов теплообміну на частотні залежності амплітуди прогинів згинальної моди осесиметричних коливань і температури дисипативного розігріву. На основі оцінки довговічності непружної коливальної системи по допустимим значенням максимальної температури дисипативного розігріву в лінійній і нелінійній постановках задачі термов'язкопружності досліджено довговічність працездатності системи при механічному навантаженні, що перевищує кричне.

РЕЗЮМЕ. Представлено постановку і методологію розв'язування задачі про електротермомеханічну поведінку і прогнозування довговічності непружних гнучких оболонок обертання з п'єзоелектричними сенсорами і актуаторами при осесиметричних резонансних коливаннях. Числовими експериментами для круглої пластинки з п'єзосенсором досліджено вплив геометричної нелінійності на частотні залежності амплітуд прогинів, температури вібророзігріву і електричного показника сенсора. На основі критерія оцінки локальної довговічності по допустимим значенням максимальної температури розігріву досліджено залежність часу працездатності системи від екстремальних амплітуд механічного навантаження і умов тепловідведення з її поверхні.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: резонансна вібрація, дисипативний розігрів, непружний матеріал, п'єзоелектричні приводи, сенсори, геометрична нелінійність.

1. *Булат А.Ф., Дырда В.И., Звягильский Е.Л., Маркелов А.Е.* Прочность и разрушение резиновых деталей технологических машин. – Киев: Наук. думка. – 2010. – 440 с.
2. *Григоренко Я.М., Влайков А.Т., Григоренко А.Я.* Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. – Киев: Академпериодика. – 2006. – 472 с.
3. *Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф.* Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек. – Киев: Наук. думка. – 1986. – 222 с.
4. *Карнаухов В.Г., Михайленко В.В.* Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. – Житомир: ЖГТУ, 2005. – 428 с.
5. *Шинкар А.И., Китайгородский Ф.Б., Борщевская С.К.* Решение линейных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений: в кн. «Алгоритмы и программы решения задач механики твердого деформируемого тела». – Киев: Наук. думка. – 1976. – С. 157 – 170.

6. *Bolkisev A.M., Karlash V.L., Shul'ga N.A.* Temperature Dependence of the Properties of Piezoelectric Ceramics // Sov. App. Mech. – 1984. – **20**. – № 7. – P. 650 – 653.
7. *Blaguenon A., Lene F., Bernadou M.* Active control a beam a piezoceramic element // Smart Mater. Struct. – 1999. – **8**. – P. 116 – 124.
8. *Gabbert U., Tzou H.S.* Smart Structures and Structronic Systems. – Dordrecht: Kluver Acad., 2001. – 384 p.
9. *Katunin A.* Criticality of the Self-Heating Effect in Polymers and Polymer Matrix Composites during Fatigue and Their Application in Non – Destructive Testing // Polymers. – 2018. – **11**. – P. 1 – 19.
10. *Katunin A., Fidali M*. Fatigue and thermal failure of polumeric composites subjected to cyclic heating // Adv. Compos. Lett. – 2012. – **21**. – P. 64 – 69.
11. *Karnaukhov V.G., Kyrychok I.F., Kozlov V.I.* Thermomechanics of Inelastic Thin-Wall Structural Members with Piezoelectric Sensors and Actuators under Harmonic Loading (Review) // Int. App. Mech. – 2017. – **53**, N 1. – P. 6 – 58.
12. *Karnaukhov V.G., Kozlov V.I., Karnaukhova T.V.* Parametric Vibrations of Hinged Thermoviscoelastic Rectangular Piezoelektric Plate with Shear Strains and Dissipative Heating Taken into Account // Int. Appl. Mech. – 2020. – **56**, N 3. – P. 334 – 339.
13. *Kyrychok I.F.* Resonant Axisymmetric Vibrations and Vibrations Heating of a Viscoelastic Cylindrical Shell with Piezolayers Subject to Electromechanical Excitation // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 5. – P. 567 – 573.
14. *Kyrychok I.F., Cherniuchok O.A.* Termomechanical Behavior and Durability of Shear Compliant Inelastic Shells of Revolution with the Piezo-Electric Pads During Axisymmetric Resonant Vibrations // Int. Appl. Mech. – 2022. – **58,** N 2. – P. 180 – 188.
15. *Kyrychok I.F., Cherniuchok O.A.* Termomechanical Behavior and Life of a Flexible Inelastic Cylindrical Shell with Piezoactuators under Axisymmetric Resonant Vibrations // Int. Appl. Mech. – 2022. – **58,** N 3. – P. 299 – 306.
16. *Snowdon J. C.* Vibration and Shock in Damped Mechanical Systems. – New York: The Pensylvania State University, 1968. – 486 p.
17. *Stevens K.K.* Transverse vibration of a viscoelastic column with initial curvature under periodic axial load // Appl. Mech. – 1969. – N 36. – P. 814 – 818.
18. *Tzou H.S.* Piezoelectric Shells (Distributed Sensing and Control of Continua). – Dordrecht: Kluwer Acad., 1993. – 400 p.
19. *Tzou H.S., Bergman L.A.* Dynamics and Control of Distributed Systems. – Cambridge: Cambridge University Press, 1998. – 374 p.
20. *Zhuk Y.*, *Ostos O.*, *Pyatetskaya O*. Prestress effect on the thermomechanical response and fatigue life prediction of viscoelastic plates // Math. Modeling and Computing. – 2020. – **7**, N 1. – P. 112 – 124.

Надійшла 06.09.2022 Затверджена до друку 28.03.2023