О.Л.Кліменков[1], О.В.Константінов[2], О.С.Лимарченко[1]

КОЛИВАННЯ РІДИНИ З ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ В ЕЛІПСОЇДАЛЬНОМУ РЕЗЕРВУАРІ В ОКОЛІ РЕЗОНАНСУ

*[1]Київський національний університет ім. Тараса Шевченка,
просп. Глушкова, 4е, 01033, Київ, Україна; e-mail: olelim2010@yahoo.com
[2]Інститут математики НАН України,
вул. Терещенківська 3, 01024, Київ, Україна; e-mail: akonst.im@ukr.net*

Abstract. A problem is analyzed on the motion of liquid with a free surface in the reservoir of ellipsoidal shape disturbed by the harmonic force. The nonlinear combined statement of the problem is used. Additional attention is paid to the fulfillment of solvability conditions of the Newman problem for the Laplace equation, which is the auxiliary one for solving the problem by asymptotic methods. A mathematical model is constructed enabling the consideration of the system behavior for considerably durable time intervals. In the case of elongated and compressed in the vertical direction ellipsoid, the development of surface waves is studied. It was ascertained that for all cases the system passing into the steady state mode of oscillations does not take place. The system manifests a high sensibility for alternation of disturbing frequencies and practically for all modes modulation takes place. In addition, it was shown that for lower frequencies of disturbance, the drift of oscillations mean values occurs. It was ascertained the manifestation of nonlinear properties intensifies with the increase of deviations of the lateral wall of the reservoir from the vertical position. For oscillations with frequencies exceeding the resonant one and for the strong manifestation of nonlinearities, a regularity of oscillations is violated, and for certain modes, antiresonance can take place. The findings are in good concordance with known theoretical and experimental data.

Key words: nonlinear dynamics, combined motion, oscillations in the vicinity of the resonance, reservoir of the ellipsoidal shape.

Вступ.

Сучасний стан досліджень динаміки конструкцій з рідиною з вільною поверхнею свідчить про певні нез'ясовані проблеми у вивченні складних режимів поведінки систем у випадку значних проявів сумісності руху конструкції-носія і рідини з вільною поверхнею (особливо у випадку кутового руху тіла-носія) і поведінки рідини у резервуарах нециліндричної форми. Однією з класичних і складних та не до кінця вивчених задач є задача про вихід системи резервуар – рідина на режим усталених коливань при збуреннях вільної поверхні рідини в нелінійному діапазоні зміни амплітуд хвиль. Дослідження останніх років показали, що при вібраційному збудженні руху таких систем спостерігається значний прояв модуляції коливань на вільній поверхні рідини. Це знайшло підтвердження у ряді теоретичних [9 – 11, 13] і експериментальних [2, 3, 14 – 16] робіт. Зокрема з'ясовано, що через модуляцію і трансцендентний характер зростання частот вихід на усталений режим коливань на основній частоті не спостерігається. Проте відзначається, що в певному діапазоні частот відбувається вихід на деякий впорядкований режим коливань, який не є одночастотним і є слабо періодичним. Для таких режимів був використаний новий термін «термалізація» [13], тобто деяке впорядкування. Головною причиною відсутності повного впорядкованого режиму розвитку резонансних процесів є те, що в системі в режимі нелінійних коливань багато форм коливань суттєво залучаються до процесу формування хвиль, а частотний спектр в гравітаційних поверхневих хвилях розподіляється за кореневим (трансцендентним) законом. Тобто, співвідношення між періодами коливань за такими формами буде трансцендентним. Тобто, підсумковий процес завжди буде аперіодичним із суттєвим проявом модуляції. Це твердження добре узгоджується з відомим парадоксом Фермі – Паста – Улама [13]. В той же час дослідження показали, що при суттєвому прояві дисипації (яка за масштабами перевершує дисипацію, викликану в'язкістю рідини в 5–10 разів і може бути обумовлена наявністю конструктивних елементів типу ребер) в системі може виникнути усталений режим в околі головної частоти [2, 4, 5, 11]. Відзначена в експериментальних роботах модуляція і відсутність виходу на режим усталених коливань не можуть проявлятися на кратних частотах, які неодмінно ведуть до усталених режимів розвитку хвиль.

Дослідження, проведені для циліндричних резервуарів, показали також, що при вивченні модуляції коливань в системі слід розглядати окремо випадки дорезонансних, білярезонансних і зарезонансних частот збудження руху резервуарів з рідиною. Було також показано, що на розвиток процесів суттєво впливає співвідношення мас рідини і резервуара [5 – 8, 10, 11]. Через ущільнення розташування частот із зростанням номера форми, зумовленого кореневою залежністю частоти від номера, в системі резервуар – рідина найчастіше спостерігаються багаточастотні процеси із взаємовпливом різних форм коливань і в більшості режимів важко встановити від чого залежить частота модуляції. В теоретико-експериментальній роботі [15] дано пояснення, як формується частота модуляції, що суттєво покращує розуміння формування процесу модуляції.

В багатьох важливих практичних випадках порожнина з рідиною має нециліндричну форму. При розгляді задач такого типу виникають дві проблеми. Через те, що область, яку займає рідина, не є канонічною (переважно через наявність плоскої незбуреної вільної поверхні рідини), треба будувати розв'язки задачі з високою точністю виконання умов неперетікання через стінки резервуара, що є достатньо складною проблемою. Більше того, постановка задачі має таку специфіку, що вона не включає форму бічної поверхні резервуара над незбуреною вільною поверхнею рідини, куди можуть доходити гребені хвиль. В той же час ці вимоги є складовою частиною умов розв'язуваності задачі Неймана для рівняння Лапласа (така задача одержується при описі руху рідини з вільною поверхнею для потенціальних рухів ідеальної нестисливої рідини). Виконання цих умов призводить до прояву нових геометричних нелінійностей в системі. В переважній більшості методів дослідження таких задач цей фактор ігнорується, одержаний за такими моделями рух рідини не відслідковує стінку на гребенях хвиль, і тому через порушення законів збереження маси одержані розв'язки справджуються лише для дуже малих амплітуд збурень і на коротких часових інтервалах.

В переважній більшості практичних задач динаміки конструкцій з рідиною відносна маса рідини є значною і її рухомість суттєво впливає на рух тіла-носія. При розгляді задачі в сумісній постановці і при різних способах обмеження рухомості резервуара це призводить до суттєвих змін у величинах і навіть в черговості розташування частот в залежності від відносної маси рідини [5, 11]. Результати, одержані для випадку заданого руху тіла-носія, є лише частинним випадком можливого розвитку процесів, оскільки врахування фактору сумісності змінює лише частину частот, тому їх розподіл буде відрізнятися від випадку заданого руху резервуара. Через це і прояв нелінійних механізмів у випадках заданого і сумісного руху тіла-носія буде різним і буде залежати від співвідношення мас рідини і конструкції, а також способу обмеження рухомості тіла-носія [11]. Такі зміни в частотному спектрі в підсумку значно вплинуть і на розвиток механізмів розвинення модуляції.

Метою роботи є вивчення формування процесу модуляції, з'ясування основних факторів, які впливають на параметри модуляції, і встановлення відповідності одержаних результатів з даними експериментальних досліджень [2 – 4, 14 – 16]. Дослідження виконано на прикладі резервуара у формі еліпсоїда обертання, що дозволяє виявити деякі закономірності формування динамічних процесів в резервуарах нециліндричної форми.

1. Математична модель системи.

Розглянемо задачу про рух системи «конструкція – рідина з вільною поверхнею». Вважається, що конструкція має порожнину у формі еліпсоїда обертання, частково заповнену рідиною. Конструкція розглядається як абсолютно тверде тіло, що здійснює поступальний рух під дією активних зовнішніх сил, а також за наявності кінематичних збурень. Приймається, що рідина є ідеальною, нестисливою, однорідною, а її початковий рух є безвихровим.

Оскільки для більшості практичних задач число Рейнольдса лежить в межах $10^4 \le \mathrm{Re} \le 10^6$, то при моделюванні властивостей в'язкості можна обмежитися припущенням теорії пригpаничного шару і звести дію сил в'язкості до узагальненої дисипації за методикою [2]. Для числових прикладів у статті розглянуто еліпсоїдальні резервуари обертання. Розв'язок задачі будується за методом [1, 9], який пройшов багатобічну апробацію для задач динаміки рідини з вільною поверхнею в резервуарах у формі тіл обертання (конічний, сферичний, гіперболоїдальний, параболічний, еліпсоїдальний) при силовому збудженні руху і порівняння з якісними результатами теоретичних робіт і експериментів [2 – 4, 14 – 16].

Математична модель системи описується диференціальними рівняннями в частинних похідних, а рух конструкції – системою звичайних диференціальних рівнянь і являє собою об'єкт неоднорідної математичної структури. Постановка задачі динаміки резервуару, частково заповненого ідеальною нестисливою однорідною рідиною, здійснюється на основі варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського

$$\delta I = 0\,, \tag{1}$$

де $I = \int\limits_{t_1}^{t_2} L dt$; $L = T - \Pi$; $L = \frac{1}{2}\rho \int\limits_{\tau} (\vec{\nabla}\varphi)^2 d\tau + \frac{1}{2} M_r (\dot{\vec{\varepsilon}})^2 - \frac{1}{2}\rho g \int\limits_{S_0} \xi^2 dS - (M_r + M_f)\varepsilon_z g.$

Тут T і Π відповідно кінетична і потенціальна енергія системи. В припущенні безвихрового руху ідеальної однорідної нестисливої рідини швидкість її руху $\vec{v}$ визначається через потенціал швидкості φ за формулою $\vec{v} = \vec{\nabla}\varphi$, де $\varphi = \varphi_0 + \dot{\vec{\varepsilon}} \cdot \vec{r}$, причому φ_0 відповідає власне хвильовому руху рідини, а $\dot{\vec{\varepsilon}} \cdot \vec{r}$ – потенціал швидкості руху рідини, обумовлений сумісним рухом рідини і резервуара. Тут $\dot{\vec{\varepsilon}}$ – поступальна швидкість руху резервуара; $\vec{r}$ – радіус-вектор довільної точки рідини; M_r і M_f – маса резервуара і рідини.

Нелінійна крайова задача гідродинаміки обмеженого об'єму рідини з вільною поверхнею в порожнині нециліндричної форми при розв'язанні має деякі складності, пов'язані з тим, що в загальному випадку плоска (горизонтальна) незбурена вільна поверхня не є координатною поверхнею. До того ж у випадку порожнин нециліндричної форми область визначення форми збуреної поверхні змінюється у часі і не співпадає з незбуреною вільною поверхнею. Тому для порожнин нециліндричної форми для опису руху рідини аналогічно роботам [9, 12] вводиться недекартова параметризація області, яку займає рідина

$$\alpha = \frac{r}{f(z)}; \quad \beta = \frac{z}{H}\,. \tag{2}$$

Тут через $r = f(z)$ позначено рівняння твірної порожнини, задане в циліндричній системі координат; H – глибина порожнини, а $z = 0$ співпадає з незбуреною вільною поверхнею рідини S_0. В параметрах $\alpha,\ \theta,\ \beta$, що вводяться замість циліндричної системи координат (θ – кутова координата циліндричної системи), область τ, яку займає рідина, набуває циліндричної форми ($\alpha \in [0, 1]$; $\theta \in [0, 2\pi]$ і в незбуреному стані $\beta \in [-1, 0]$). Тому через циліндричність області τ у новій параметризації в збуреному стані рівняння вільної поверхні рідини можна представити у розв'язаному вигляді відносно координати β

$$\beta = \frac{1}{H}\xi(\alpha,\,\theta,\,t) \quad \text{або} \quad H\beta - \xi(\alpha,\theta,t) = 0\,. \tag{3}$$

В старій системі параметризації області це рівняння мало форму

$$\eta(r,\,\theta,\,z,\,t) = \frac{z}{H} - \frac{1}{H}\xi\left(\frac{r}{f(z)},\,\theta,\,t\right) = 0$$

не розв'язану відносно z; тут $\eta = 0$ – рівняння вільної поверхні рідини. Позначимо також зволожену поверхню резервуара через Σ, а через S – збурену вільну поверхню рідини. Представлення рівняння вільної поверхні у вигляді (3) дозволяє ефективно застосувати метод збурень і метод Канторовича для побудови нелінійної скінченновимірної моделі динаміки резервуару з рідиною. Кінематичну граничну умову на вільній поверхні можна записати у вигляді

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} + \frac{1}{f^2}\frac{\partial\xi}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi_0}{\partial\alpha} + \frac{1}{\alpha^2 f^2}\frac{\partial\xi}{\partial\theta}\frac{\partial\varphi_0}{\partial\theta} - \frac{\alpha f'}{f}\frac{\partial\xi}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi_0}{\partial z} = \frac{\partial\varphi_0}{\partial z} \qquad \text{на } S\,.$$

Згідно з варіаційним принципом Гамільтона – Остроградського (1) варіації змінних мають задовольняти всім кінематичним обмеженням задачі, до яких відносяться:

а) $\Delta\varphi = 0$ в області τ, яку займає рідина у збуреному русі, що є наслідком рівнянь нерозривності для руху рідини;

б) $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$ на границі контакту рідини з твердими стінками Σ, або в новій параметризації $\dfrac{1}{\sqrt{1+f'^2}}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial r} - f'\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = 0$, що є умовою неперетікання через тверді границі;

в) $\dfrac{\partial\xi}{\partial t} + \dfrac{1}{f^2}\dfrac{\partial\xi}{\partial\alpha}\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial\alpha} + \dfrac{1}{\alpha^2 f^2}\dfrac{\partial\xi}{\partial\theta}\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial\theta} - \dfrac{\alpha f'}{f}\dfrac{\partial\xi}{\partial\alpha}\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial z} = \dfrac{\partial\varphi_0}{\partial z}$ на збуреній вільній поверхні рідини S, що є вимогою співпадіння руху в напрямку нормалі частинок рідини і вільної поверхні рідини.

Кінематичні граничні умови задачі про коливання рідини з вільною поверхнею у рухомому резервуарі мають подвійне значення, оскільки вони практично збігаються з умовами розв'язуваності крайової задачі Неймана для рівняння Лапласа. За своїм змістом ці умови відповідають вимогам збереження об'єму рідини в її збуреному русі. Умова розв'язуваності задачі прийме форму

$$\int_{\Sigma}\frac{\partial\varphi}{\partial n}ds + \int_{\Delta\Sigma}\frac{\partial\varphi}{\partial n}ds + \int_{S}\frac{\partial\varphi}{\partial n}ds = 0\,. \tag{4}$$

Тут $\Delta\Sigma$ є продовженням бічної поверхні резервуара над вільною поверхнею, куди можуть досягати гребені хвиль. Наявність доданка на поверхні $\Delta\Sigma$ обумовлена нелінійністю формулювання задачі. Зауважимо також, що шляхом перетворень можна показати, що

$$\int_{S}\frac{\partial\varphi}{\partial n}ds = \int_{S_0}\frac{\partial\xi}{\partial t}ds\,.$$

Згідно з методами аналітичної механіки варіації змінних на різних поверхнях і в об'ємі мають бути незалежними, а тому кожен з доданків (4) має бути нульовим. Тоді перша умова розв'язуваності крайової задачі збігається з умовою неперетікання на змочуваній поверхні, третя умова за змістом є умовою збереження об'єму рідини у її збуреному русі. Друга умова є наслідком нелінійної постановки задачі і врахуванням того, що рідина у збуреному русі буде підніматися вище рівня незбуреної вільної поверхні.

Відомо, що задача про визначення частот і форм коливань рідини має такий вигляд:

$$\Delta\varphi = 0 \ \text{ в } \tau; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\Sigma} = 0; \ \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{S_0} = \lambda\varphi. \tag{5}$$

Проілюструємо постановку цієї задачі на рис. 1. Задача ставиться для області τ з бічною границею Σ і вільною поверхнею S. Якщо рідина має відслідковувати стінку над вільною поверхнею, то вона має задовольняти умові неперетікання над вільною поверхнею на поверхні $\Delta\Sigma$ (на рисунку на відрізку A_0A). Для довільної точки A ця вимога може бути записана у вигляди розкладу у ряд Тейлора

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_A = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{A_0} + \xi\left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial n\partial\tau}\right|_{A_0} + \frac{1}{2}\xi^2\left.\frac{\partial^3\varphi}{\partial n\partial\tau^2}\right|_{A_0} + \cdots = 0\,.$$

Звідси, в силу довільності ξ, має виконуватися вимога

$$\left.\frac{\partial^k\varphi}{\partial n\partial\tau^{k-1}}\right|_{A_0} = 0 \quad \text{для } k = 1, 2, \ldots\,.$$

Проте, нормальні похідні в точці A_0 в загальному випадку взагалі не існують через наявність в точці A_0 сингулярності. З другого боку не можна накладати на розв'язки крайової задачі другого порядку додаткові умови порядку, вищі за порядок основного рівняння, тобто вище одиниці. В підсумку це свідчить про те, що не можна використовувати розв'язки задачі про визначення власних частот та коливань як координатні функції при розв'язанні нелінійної задачі, і не можна накладати якісь додаткові обмеження на задачу про вільні коливання рідини з метою виконання граничної умови неперетікання на продовженні бічної поверхні резервуара, куди можуть досягати гребені хвиль.

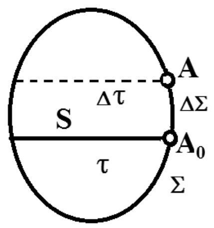

Рис. 1

В роботах Н.Є. Жуковського було показано, що якщо рідина з рівнем заповнення до точки A виконує коливання, то область рідини до рівня A_0 виконує такі ж самі рухи (в кінематичному сенсі), як і рідина в резервуарі з об'ємом заповнення до рівня A_0. На основі цього було запропоновано метод допоміжної області [9] для визначення координатних функцій для нелінійної задачі про коливання рідини з вільною поверхнею, які задовольняють граничній умові неперетікання на стінках резервуара вище рівня незбуреної вільної поверхні, куди можуть досягати гребені хвиль. Ідея методу полягає в тому, що розв'язується задача про вільні коливання рідини для області рідини із заповненням до точки A, далі як координатні функції для області τ беруться знайдені координатні функції, які задовольняють умові неперетікання на поверхні $\Sigma + \Delta\Sigma$, а за координатні функції на вільній поверхні рідини S беруться функції, які одержуються на горизонтальному перерізі, що проходить через точку A_0. За своїм характером метод є наближеним, проте він враховує аналітичну природу розв'язку задач про вільні коливання рідини і їх сингулярні властивості. Успішність подальшого використання методу в основному визначається тим, що контур із сингулярними властивостями фактично переноситься від рівня, який відповідає положенню точки A_0 на рівень точки A, куди рідина вже взагалі не досягає. Таке винесення сингулярних точок за межі області рідини τ є типовим в інших задачах механіки ідеальної рідини. Практичне використання такого підходу до побудови координатних функцій для представлення розв'язків нелінійної задачі динаміки рідини в різних резервуарах нециліндричної форми (конус, сфера, гіперболоїд, еліпсоїд, параболоїд [9, 10]) дозволило досягнути відносної точності виконання граничної умови на Σ близько 10^{-5} і 10^{-3} на поверхні $\Delta\Sigma$, що більше як в 100 разів краще, ніж для функцій, визначених за класичним методом. В підсумку це дозволяє з високою точністю задовольнити умовам розв'язуваності нелінійної задачі про рух рідини з вільною поверхнею (4) і підвищує точність виконання законів збереження енергії і маси, а також стійкість обчислювальних процедур.

За правилами застосування варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського треба побудувати такі представлення розв'язків задачі, які б задовольняли всім кінематичним обмеженням задачі. До таких обмежень слід віднести рівняння нерозривності, умови розв'язуваності задачі (4) та кінематичні граничні умови на стінках і вільній поверхні рідини. Згідно з [9] приймемо такі представлення шуканих змінних

$$\xi = \bar{\xi}(t) + \sum_i a_i \bar{\psi}_i(\alpha) T_i(\theta)\,; \quad \varphi_0 = \sum_i b_i \psi_i(\alpha,\beta) T_i(\theta)\,, \tag{6}$$

де

$$\bar{\psi}_i(\alpha) = \left.\frac{\partial \psi_i}{\partial z}\right|_{\beta=0} = \left.\left(\frac{1}{H}\frac{\partial \psi_i}{\partial \beta} - \frac{\alpha f'}{f}\frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha}\right)\right|_{\beta=0}.$$

Тут $\bar{\xi}(t)$ – функція корекції об'єму рідини, викликана нециліндричністю області τ у збуреному русі системи; $\bar{\psi}_i(\alpha)$ – форма коливань вільної поверхні рідини, визначена на основі методу допоміжної області, в якій, виходячи з того, що резервуар є тілом обертання, відокремлено кутову змінну $T_i(\theta)$; $\psi_i(\alpha,\beta)T_i(\theta)$ – потенціал швидкостей рідини, визначений на основі методу допоміжної області з відокремленою кутовою змінною; $a_i(t)$ – амплітуда збурення i-ї форми коливань; $b_i(t)$ – амплітудний параметр збурення потенціалу швидкостей, що відповідає i-й формі коливань.

Представлення (6) фактично є першим кроком застосування методу Канторовича до задачі про коливання рідини з вільною поверхнею і для задач механіки називається методом модальної декомпозиції. Функції просторових змінних є гармонічними, задовольняють умові неперетікання на поверхні $\Sigma + \Delta\Sigma$ і лінійній частині кінематичної граничної умови на вільній поверхні. Згідно з теоремою, що безвихровий рух ідеальної однорідної нестисливої рідини повністю визначається рухом її границь, змінні $a_i(t)$ є незалежними параметрами, які разом з параметром руху тіла-носія $\dot{\vec{\varepsilon}}$ визначають рух границь області, а змінні $\bar{\xi}(t)$ і $b_i(t)$ є залежними.

Величина $\bar{\xi}(t)$ визначається з вимоги збереження об'єму рідини у її збуреному русі. З використанням розкладу значення інтеграла в ряд по ξ в околі $\xi = 0$ одержимо з точністю до величин третього порядку малості (праворуч всі функції f і їх похідні беруться для $\beta = 0$) наступні залежності:

$$\Delta V = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left[\int_0^{\xi/H} \left[f(H\beta)\right]^2 d\beta\right] \alpha H d\alpha d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left[f^2 \frac{\xi}{H} + ff' \frac{\xi^2}{H^2} + \left(f'^2 + ff''\right)\frac{\xi^3}{3H^3} + \ldots\right] \alpha H d\alpha d\theta = 0.$$

Якщо представити $\bar{\xi}$ у вигляді розкладу за ступенями малості $\bar{\xi} = \bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 + \bar{\xi}_3 + \bar{\xi}_4$ (нижній індекс відповідає порядку малості величини відносно значення ξ), то одержимо

$$\bar{\xi}_1 = 0;\ \ \bar{\xi}_2 = -\frac{e_2}{e_1}\sum_{i,j} a_i a_j \beta^{\nu}{}_{ij};\ \ \bar{\xi}_3 = -\frac{e_3}{e_1}\sum_{i,j,k} a_i a_j a_k \gamma^{\nu}_{ijk};\ \ \bar{\xi}_4 = -\frac{e_4}{e_1}\sum_{i,j,k,l} a_i a_j a_k a_l \delta^{\nu}_{ijkl}. \quad (7)$$

Тут індексні величини визначаються через значення функції f і її похідних для $\beta = 0$ і через квадратури від координатних функцій ψ_i. Отже, знайдено вираз для $\bar{\xi}$, як функції a_i, де $\bar{\xi}$ подано у вигляді розкладу за порядками малості. Після визначення цієї залежності розклади (6) задовольняють вимозі збереження об'єму рідини при довільних рухах системи.

Якщо аналогічно підставити розклади (6) в кінематичну граничну умову на вільній поверхні, розкласти всі члени в ряд Тейлора в околі $\xi = 0$, а також представити коефіцієнти b_j в формі розкладів за ступенями малості $b_j = b_j^{(1)} + b_j^{(2)} + b_j^{(3)} + b_j^{(4)}$, то з кінематичної умови на вільній поверхні можна одержати такі залежності:

$$b_p^{(1)} = \dot{a}_p;\ \ b_p^{(2)} = \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j \gamma^{o}_{ijp};\ \ b_p^{(3)} = \sum_{i,j,k} \dot{a}_i a_j a_k \delta^{o}_{ijkp};\ \ b_p^{(4)} = \sum_{i,j,k,l} \dot{a}_i a_j a_k a_l h^{o}_{ijklp}. \quad (8)$$

У співвідношення (8) входять коефіцієнти, що визначаються через квадратури від функцій ψ_k, $\bar{\psi}_k$ і T_k по незбуреній вільній поверхні. Після визначення залежностей (7) і (8) параметри a_k можна вважати повною незалежною системою змінних, що характеризують рух обмеженого об'єму рідини (у випадку рухомого резервуару треба до цих параметрів ще додати параметри руху тіла-носія). Ці залежності встановлені аналітично (в квадратурах) для довільної кількості форм коливань і до розв'язання варіаційної задачі. Тепер розклади шуканих змінних (6), доповнені співвідношеннями (7) і (8), відповідають вільній механічній системі, рух якої визначається незалежними параметрами a_k, що характеризують рух вільної поверхні рідини, і параметрами ε_j, що характеризують рух тіла-носія. Отже, розклади (6) можна безпосередньо підставляти у функцію Лагранжа і при цьому система параметрів a_k і ε_j відповідає кількості степенів свободи системи в рамках прийнятої моделі і за кількістю змінних є мінімальною.

Схема побудови дискретної моделі складається з двох етапів перетворення функції Лагранжа

$$L(\xi, \varphi, \dot{\varepsilon}) \to L(a_i, b_i, \dot{\varepsilon}) \to L(a_i, \dot{a}_i, \dot{\varepsilon}).$$

Тут a_k і b_k є параметрами розкладу в ряди збурень на вільній поверхні і потенціалу швидкостей в ряди по координатним функціям; $\dot{\varepsilon}$ – швидкість поступального руху резервуара. Така схема ілюструє перехід спочатку від континуальної системи до невільної дискретної системи, а потім, виключаючи кінематичні граничні умови на вільній поверхні, здійснюється перехід до функції Лагранжа для вільної системи з числом параметрів, яке відповідає числу ступенів вільності системи. Згідно з теоремою про те, що безвихровий рух ідеальної, нестисливої рідини визначається рухом її границь, параметри b_k виключаються як незалежні.

Для переходу від континуальної структури моделі тіло – рідина до дискретної моделі можна застосувати метод Канторовича до варіаційного формулювання задачі, отриманого на основі принципу Гамільтона – Остроградського. Просторове і поверхневе інтегрування у функції Лагранжа проводиться в змінних α, θ, β. В підінтегральному виразі відбувається диференціювання по β членів, що містять потенціал швидкостей φ_0, і добутків цих членів на якобіан переходу від декартової геометрії до недекартової параметризації області τ_0, яку займає рідина в незбуреному стані. Для порожнини обертання в цілому відмінності від випадку резервуарів циліндричної форми полягають в тому, що: по-перше, функції, по яким відбувається розклад потенціалу швидкостей, задовольняють умови неперетікання на змочуваних границях наближено; по-друге, додається умова збереження об'єму рідини у її збуреному русі; по-третє, при виконанні знесення на незбурену вільну поверхню рідини за допомогою ряду Тейлора окремих членів функції Лагранжа, кінематичної граничної умови на вільній поверхні і умови збереження об'єму рідини у її збуреному русі у порівнянні з випадком циліндричної області додаються геометричні нелінійності, обумовлені переходом до недекартової параметризації області, яку займає рідина.

В результаті застосування даної методики можна отримати рівняння Лагранжа другого роду – рівняння сумісного руху системи «резервуар – рідина» в амплітудних параметрах руху рідини з вільною поверхнею a_i та параметрах руху тіла-носія $\vec{\varepsilon}$

$$\sum_i \ddot{a}_i \left\{ V_{ir}^1 + \sum_j a_j V_{irj}^2 + \sum_{j,k} a_j a_k V_{irjk}^3 \right\} + \ddot{\vec{\varepsilon}} \cdot \left\{ \vec{U}_r^1 + \sum_i a_i \vec{U}_{ri}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \vec{U}_{rij}^3 + \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k \vec{U}_{rijk}^4 \right\} =$$
$$= \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j V_{ijr}^{2*} + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k V_{ijkr}^{3*} + \dot{\vec{\varepsilon}} \cdot \left\{ \sum_i \dot{a}_i \vec{U}_{ir}^{2*} + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j \vec{U}_{ijr}^{3*} + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i a_j a_k \vec{U}_{ijkr}^{4*} \right\} - \quad (9)$$
$$-g \left\{ \sum_i a_i W_{ir}^2 + \frac{3}{2} \sum_{i,j} a_i a_j W_{ijr}^3 + 2 \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k W_{ijkr}^4 \right\}, \quad r = 1, 2, \ldots N\,;$$

$$\frac{\rho}{(M_r + M_f)} \left\{ \sum_i \ddot{a}_i \left[\vec{U}_i^1 + \sum_j a_j \vec{U}_{ij}^2 + \sum_{j,k} a_j a_k \vec{U}_{ijk}^3 \right] \right\} + \ddot{\vec{\varepsilon}} =$$
$$= \frac{\vec{F}}{(M_r + M_f)} - g\vec{z}_0 - \frac{\rho}{(M_r + M_f)} \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j \left\{ \vec{U}_{ir}^2 + 2 \sum_k a_k \vec{U}_{ijk}^3 \right\}. \quad (10)$$

Приведена система $N+3$ рівнянь – нелінійна дискретна модель динаміки рухомого резервуара з рідиною, що частково заповнює його. Для побудови цієї системи індексні коефіцієнти обчислюються як квадратури від координатних функцій ψ_i та $\bar{\psi}_i$ (їх значення приведені в [1, 9]).

$$\sum_{n=1}^{N} p_{rn}(a_k, t)\ddot{a}_n + \sum_{n=N+1}^{N+3} p_{rn}(a_k, t)\ddot{\varepsilon}_{n-N} = q_r(a_k, \dot{a}_l, \varepsilon_k, \dot{\varepsilon}_k, t), \quad r = \overline{1,\, N+3}\,. \quad (11)$$

Вирази для p_{rn} та q_r, де p_{rn} – квадратна матриця, а q_r – вектор розмірності $N+3$, представляються через алгебраїчні форми від нульового до третього порядків від амплітудних параметрів a_i та узагальнених швидкостей $\dot{a}_j$ (явна залежність матриці p_{rn} від t спостерігається лише при наявності витікання). Конкретна форма виразів цих матриць випливає з рівнянь (9), (10). Система рівнянь (11) є лінійною відносно других похідних невідомих величин, що дає можливість організувати обчислювальний процес, в якому на кожному кроці чисельного інтегрування ця система буде чисельно перетворюватись до нормальної форми Коші, а потім, з використанням звичайного методу Рунге – Кутта, виконуватиметься чисельне інтегрування за часом. На етапі перетворення системи до нормальної форми Коші порядок похідних у рівняннях знижується за рахунок введення разом з узагальненими координатами амплітудних параметрів a_i та узагальнених швидкостей $\dot{a}_j$ як рівноправних змінних. Однією з властивостей системи (11) для випадку коливань рідини з вільною поверхнею в резервуарі є компактне розташування частотних параметрів, які для фіксованих кругових номерів зростають за законом квадратного кореня в залежності від номера. Тому проблем з проявами ефекту жорсткості системи рівнянь (11) при її чисельному інтегруванні не виникає.

2. Вібраційне збудження руху системи резервуар – рідина в режимі сумісного руху.

Розглянемо випадок руху резервуару у формі еліпсоїда обертання, маса якого $M_r = 0,2M_f$. В такому випадку вплив рухомості рідини на рух резервуару буде суттєвим. Розглянуто три випадки еліпсоїдальних резервуарів з півосями a і b : випадок $a = 1,\ b = 2$ відповідає розтягненому по вертикалі еліпсоїду; випадок $a = 1,\ b = 1$ відповідає сферичному резервуару, а випадок $a = 2,\ b = 1$ відповідає стисненому по вертикалі еліпсоїду. Для кожного резервуара розглядається три варіанти заповнення рідиною до глибини $H = 0,5b$; $H = 0,75b$; $H = b$. Резервуар здійснює рух в горизонтальній площині із стану спокою під дією сили $F_x = A\,(M_r + M_f)\cos\omega t$ (A – множник, який для різних режимів підбирався так, щоб система виходила на режим нелінійних коливань, коли збурення на вільній поверхні мають порядок 0,2 від радіусу вільної поверхні рідини). Аналізувалися такі випадки зміни частот: $\omega = 0,5\omega_c$; $\omega = 0,9\omega_c$; $\omega = 0,98\omega_c$; $\omega = \omega_c$; $\omega = 1,02\omega_c$; $\omega = 1,1\omega_c$, де ω_c – частота сумісних коливань системи резервуар – рідина за першою формою. На рис. 2 – 4 представлені результати розрахунків зміни в часі збурень вільної поверхні рідини на бічній поверхні резервуара в площині zOx , в якій відбуваються коливання для випадку еліпсоїда обертання з півосями $a = 1,\ b = 2$ (розтягнений по вертикалі еліпсоїд) для трьох варіантів заповнення. На рисунках зліва вгорі наведено глибину заповнення, згори в центі – значення відносної частоти і амплітудного параметра збудження коливань системи. Звернемо увагу на те, що для частот суттєво менших за резонансну коливання вільної поверхні значно відрізняються від синусоїдального закону і спостерігається дрейф середнього значення.

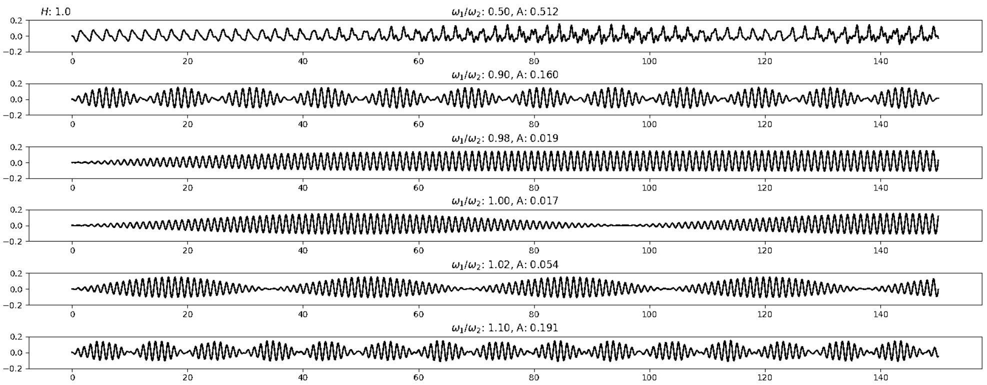

Рис. 2.

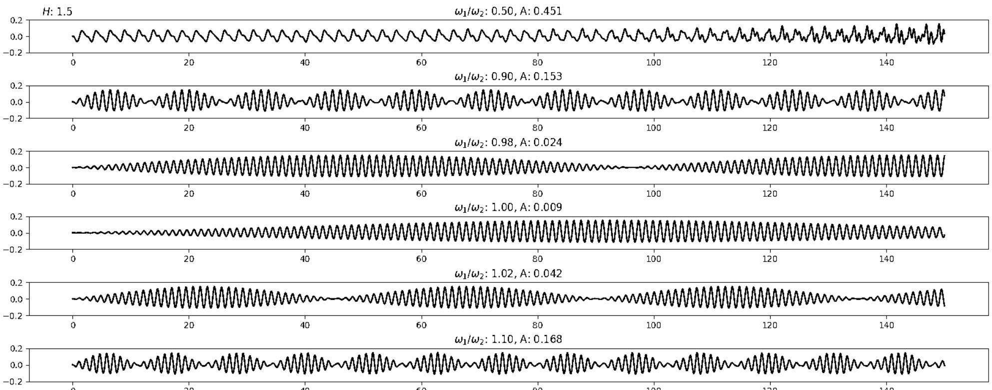

Рис. 3.

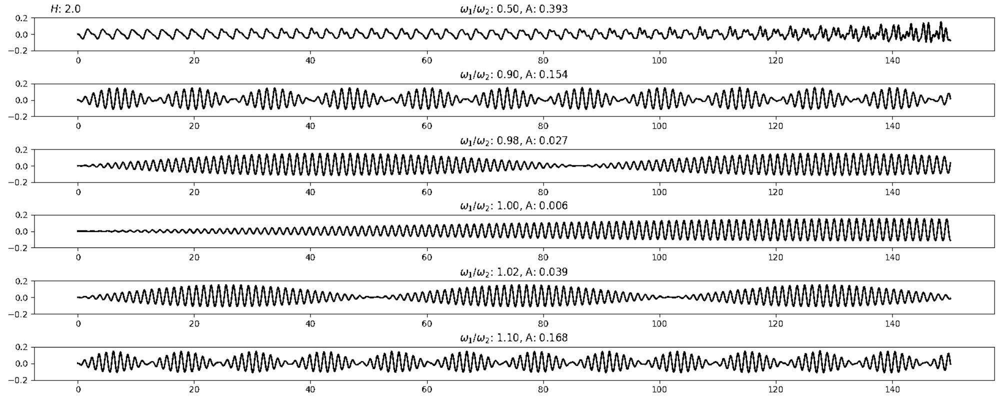

Рис. 4.

При наближенні до резонансної частоти спостерігається висока чутливість системи до амплітуди збудження і навіть до зміни частоти на декілька процентів. В характері розвитку коливань суттєво проявляється модуляція, при цьому частота зміни кривої модуляції спочатку зменшується і є найменшою для відносної частоти 0,98, а потім знову наростає. Це свідчить про те, що нелінійності в такій системі є м'якого типу. Відмітимо також, що для відносних частот 0,9 і 1,1 частота модуляції практично співпадає, що передбачається теоретичними міркуваннями для слабко нелінійних багаточастотних систем.

Для всіх трьох варіантів заповнення вихід системи на режим усталених коливань не спостерігався, проте для відносної частоти 0,98 період модуляційної кривої є достатньо великим і це помилково сприймалося як вихід на усталений режим коливань [3]. Відзначимо також, що для відносної частоти 1 суттєво проявляється відзначений в експериментах режим антирезонансу, коли протягом декількох періодів коливання на вільній поверхні фактично зникають (їх амплітуда коливань є незначною), що помітно в околі часу приблизно 100 с.

Для випадку сферичного резервуару (рис. 5 – 7) одержано аналогічні результати, проте ефект дрейфу коливань підсилився, а зони прояву антирезонансу розширилися. В той же час наближений збіг частот модуляції для значень відносних частот 0,9 і 1,1 вже не спостерігається, що пов'язано із виходом на режим, коли при формуванні модуляції беруть участь не дві форми коливань, а більше. Це відбувається через трансцендентний характер зростання частот від номера форми, відзначеного в [11, 13] і відповідного ущільнення спектру коливань.

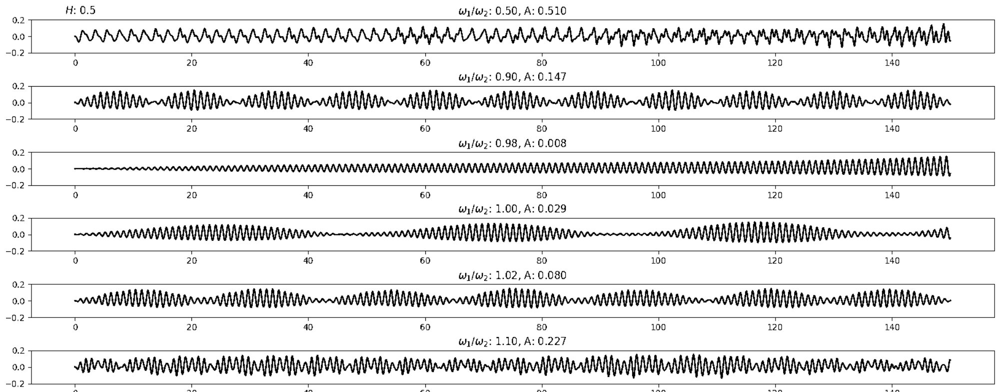

Рис. 5.

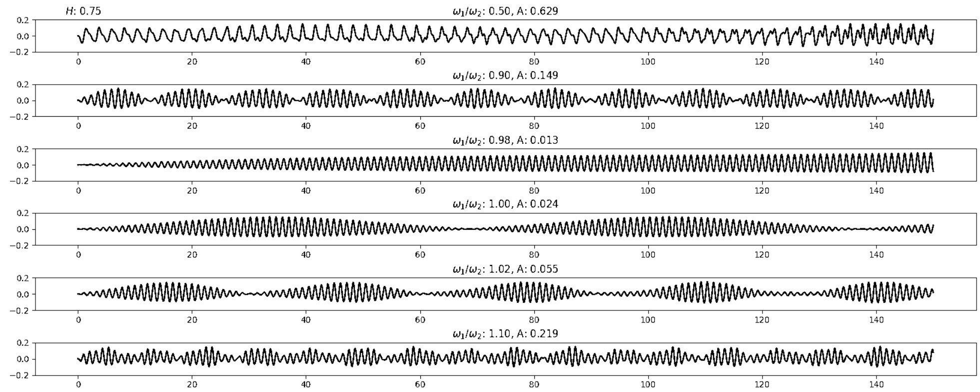

Рис. 6.

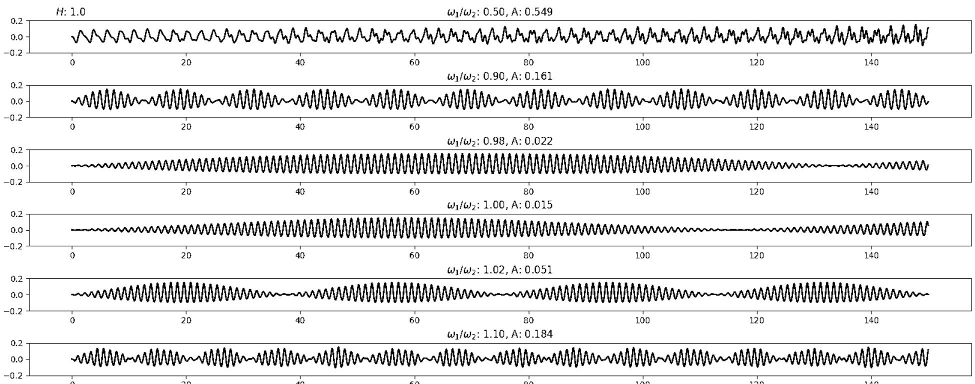

Рис. 7

На рис. 8 – 10 представлені результати розрахунків для випадку стисненого по вертикалі еліпсоїдального резервуару. Помітно прояв нерегулярності коливань для частот більших за резонансну і значно менших за резонансну. Це обумовлено зазначеним характером трансцендентності розподілу і відповідного ущільнення спектру частот. Ефекти, відмічені для сферичного резервуару, підсилилися.

Аналізуючи в комплексі одержані результати, слід зазначити, що: по-перше, система резервуар – рідина демонструє високу чутливість до зміни частот, особливо в безпосередньому околі резонансу. По-друге, в значній мірі при однакових відносних амплітудах збурень вільної поверхні рідини прояв нелінійності визначається нахилом стінок в околі незбуреної вільної поверхні. Так, для малих глибин і для випадків форми стисненого еліпсоїда нахил стінки резервуара в околі вільної поверхні значно відрізняється від вертикальних стінок. Це сприяє підсиленню прояву нелінійного харак-

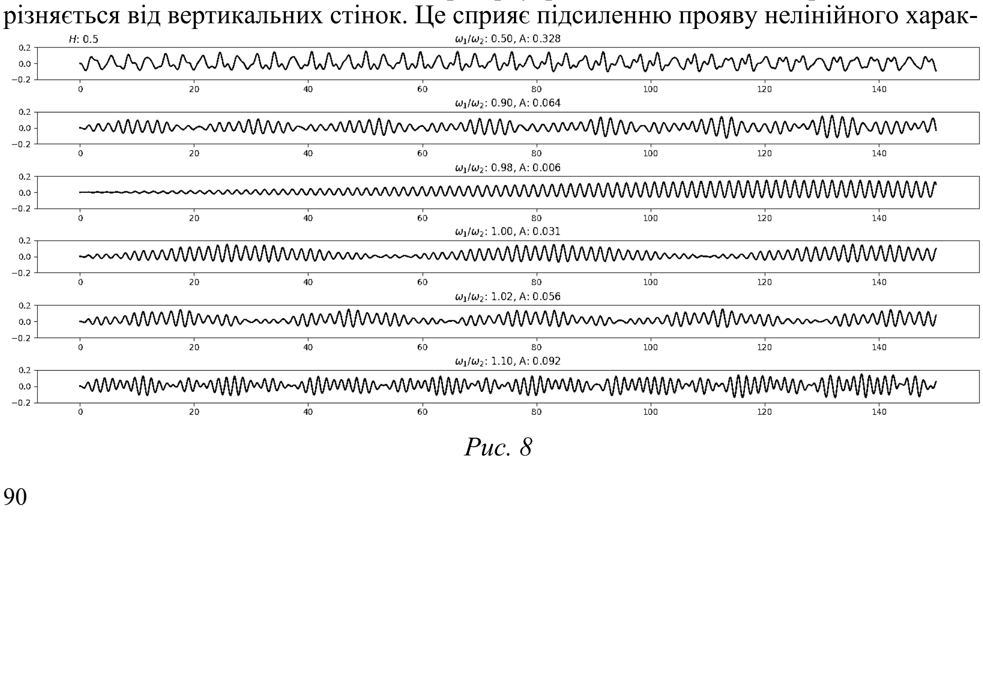

Рис. 8

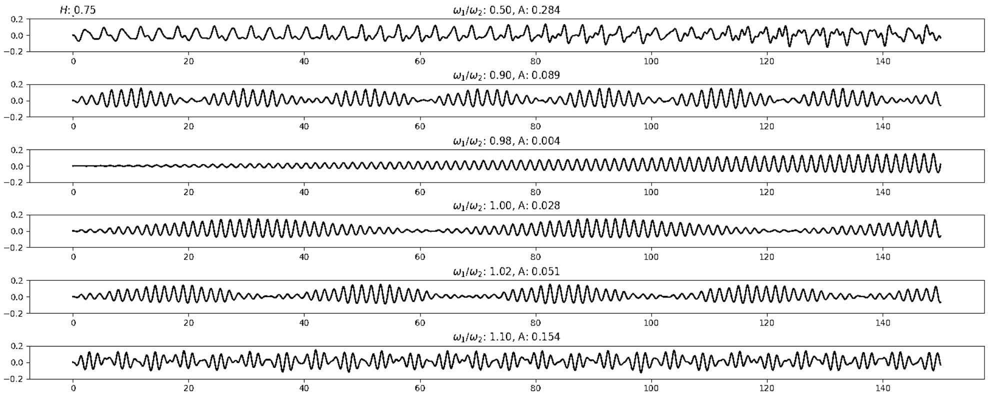

Рис. 9.

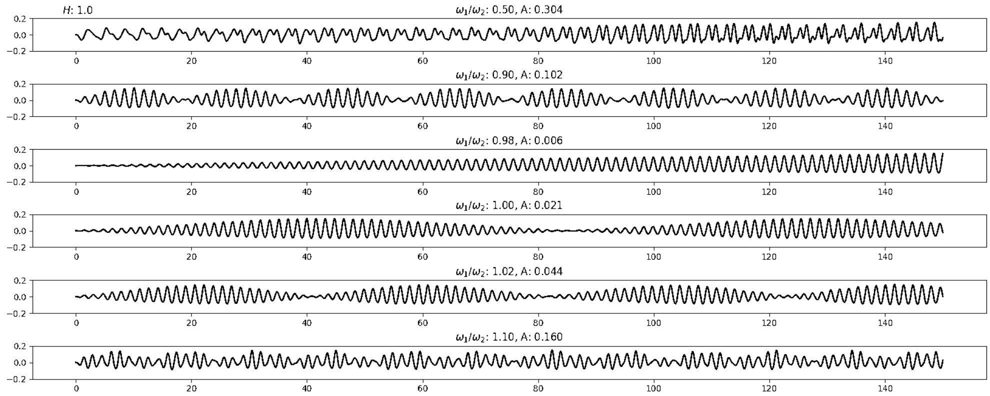

Рис. 10

теру коливань, оскільки наближення нахилу стінок резервуару до вертикального положення призводить до зростання обмежень на рух рідини і, до того ж, до зростання частот і відстаней між ними. Це зменшує взаємовплив форм коливань, а значить спрощує характер розвитку коливань. По-третє, вагомо проявляється комплекс нелінійних ефектів розвитку коливань, а саме: дрейф середнього значення коливань на низьких частотах, модуляція коливань, втрата регулярності коливань на високих частотах, антирезонанс, перевершення висоти горба хвилі над її впадиною. В-четверте, на всіх режимах вихід системи резервуар – рідина на режим усталених коливань не спостерігався.

Висновки.

В нелінійній постановці вивчено задачу про рух рідини з вільною поверхнею в резервуарі еліпсоїдальної форми при збудженні руху гармонічною силою з частотою, наближеною до резонансної. На основі поглибленого аналізу умов розв'язуваності задачі модифіковано алгоритм розв'язання задачі на основі методу Канторовича. Для випадку витягнутого і стисненого по вертикалі еліпсоїдів досліджено розвиток поверхневих хвиль, встановлено, що у всіх випадках вихід на режим усталених коливань не відбувається. Розгляд різних варіантів збудження руху системи показує високу чутливість до змін частот збудження і практично для всіх режимів сильно проявляється модуляція. Відзначено прояв ряду нелінійних ефектів: для низьких частот збудження спостерігається дрейф середнього значення коливань, прояв нелінійних властивостей підсилюється при збільшенні відхилень бічної стінки резервуара в околі незбуреної вільної поверхні від вертикального положення; при коливаннях на частотах, що перевершують резонансну, і при сильному прояві нелінійностей порушується регулярність коливань; в окремих режимах проявляється антирезонанс. Одержані результати узгоджуються з відомими теоретичними і експериментальними даними.

Р Е З Ю М Е . Розглянуто задачу про рух рідини з вільною поверхнею в резервуарі еліпсоїдальної форми при збудженні руху гармонічною силою з частотою, наближеною до резонансної. Задача розглядається в нелінійній сумісній постановці. Додаткову увагу приділено виконанню умови розв'язуваності задачі Неймана для рівняння Лапласа, яка є допоміжною при розв'язанні задачі на основі асимптотичних методів. Створено математичну модель, яка дозволяє розглянути задачу поведінки системи на достатньо тривалому проміжку часу. Для випадку витягнутого і стисненого по вертикалі еліпсоїдів досліджено розвиток поверхневих хвиль. Встановлено, що у всіх випадках вихід на режим усталених коливань не відбувається. Система проявляє високу чутливість до змін частот збудження і практично для всіх режимів сильно проявляється модуляція. Крім того показано, що для низьких частот збудження спостерігається дрейф середнього значення коливань. Встановлено, що прояв нелінійних властивостей підсилюється при збільшенні відхилень бічної стінки резервуара в околі незбуреної вільної поверхні від вертикального положення. При коливаннях на частотах, що перевершують резонансну, і при сильному прояві нелінійностей порушується регулярність коливань, в окремих режимах проявляється антирезонанс. Одержані результати узгоджуються з відомими теоретичними і експериментальними даними.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: нелінійна динаміка, сумісний рух, коливання в околі резонансу, резервуар еліпсоїдальної форми.

1. *Абгарян К.А., Рапопорт И.М.* Динамика ракет. – Москва: Машиностроение, 1969. – 378 с.
2. *Микишев Г.Н.* Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов. – Москва: Машиностроение, 1978. – 247 с.
3. *Faltinsen O.M., Rognebakke O.M., Timokha A.N.* Transient and steady-state amplitudes of resonant three-dimensional sloshing in a square base tank with a finite fluid depth // Physics of Fluids. – 2006. – **1**, N 18. – P. 1 – 14.
4. *Ibrahim R.A.* Liquid sloshing dynamics: theory and applications. – Cambridge: Cambridge University Press, 2005. – 950 p.
5. *Konstantinov A.V., Limarchenko O.S., Lukyanchuk V.V., Nefedov A.A.* Dynamic Methods of Damping the Oscillation in Structure – Free-Surface Fluid System // Int. Appl. Mech. – 2019. – **55,** N 1. – P. 58 – 67.
6. *Konstantinov A.V., Limarchenko V.O., Limarchenko O.S.* Motion control for structure with liquid based on compensation of the liquid hydrodynamic response // Problems of Control and Informatics – 2020. – N 3. – P. 68 – 79.
7. *Kubenko V.D., Koval'chuk P.S.* Modeling the Nonlinear Interaction of Standing and Traveling Bending Waves in Fluid-Filled Cylindrical Shells Subject to Internal Resonances // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 4. – P. 353 – 364.
8. *Kubenko V.D., Koval'chuk P.S.* Stability and Nonlinear Vibrations of Closed Cylindrical Shells Interacting with a Fluid Flow (Review) // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 1. – P. 12 – 63.
9. *Limarchenko O.S.* Specific features of application of perturbation techniques in problems of nonlinear oscillations of a liquid with free surface in cavities of noncylindrical shape // Ukrainian Mathem. J. – 2007. – **59**, N 1. – P. 45 – 69.
10. *Limarchenko O.S., Semenova I.Yu.* Nonlinear Wave Generation on a Fluid in a Moving Parabolic Tank // Int. Appl. Mech. – 2011. – **46**, N 8. – P. 864 – 868.
11. *Lukovsky I.A., Timokha A.N.* Combining Narimanov-Moiseev' and Lukovsky-Miles' schemes for nonlinear liquid sloshing // J. Numerical and Appl. Mathem. – 2011. – **105**, N 2. – P. 69-82.
12. *Lukovsky I.A.* Nonlinear Dynamics. Mathematical Models for Rigid Bodies with a Liquid. – Berlin: De Gruyter, 2015. – 410 p.
13. *Onorato M., Vozella L., Proment D., Lvov V.* Route to thermalization in the α-Fermi – Pasta – Ulam system // PNAS. – 2015. – **112,** N 14. – P. 4208 – 4213.
14. *Pal P.* Sloshing of liquid in partially filled container – an experimental study // Int. J. of Recent Trends in Engng. – 2009. – **1**, N 6. – P. 1 – 5.
15. *Shaoa W., Yanga J., Hu Z, Tao L.* Coupled analysis of nonlinear sloshing and ship motions // Appl. Ocean Research. – 2015. – **47**. – P. 85 – 97.
16. *Zhang C., Li Y., Meng Q.* Fully nonlinear analysis of second-order sloshing resonance in a three-dimensional tank // Computers and Fluids. – 2015. – **116.** – P. 88 – 104.

Надійшла 18.07.2022 Затверджена до друку 28.03.2023