

О.В.Кендзера¹, Я.Я.Рушицький², В.М.Юрчук²

ДО РЕОЛОГІЧНОЇ МОДЕЛІ ГРУНТОВОГО ШАРУ: ВИЗНАЧЕННЯ
ПАРАМЕТРІВ МОДЕЛІ З ДОСЛІДУ НА ПОВЗУЧИСТЬ ШАРУ

¹ Інститут геофізики ім. С.І.Суботіна НАНУ,
просп. Паладіна, 32, 03142, Київ, Україна; skendzera@igph.kiev.ua

² Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: rushch@inmech.kiev.ua

Abstract. A method of determining the parameters of the standard three-constant rheological model is proposed, which is recommended to be applied to the description of the seismic waves in soil layers. The standard model is briefly described. Also, the essence of the method is outlined. The feature of this method is that it is enough to have one experimental creep curve of the soil layer to determine the three rheological parameters of the wave model. Some peculiarities of the approach are commented. The effectiveness of the proposed method is shown in three examples the layers of sandy clay loam, silt loam, and silty clay. Also, the determined rheological parameters are used in an attempt to construct the scenarios of evolution of the shear exponentially attenuated harmonic seismic wave velocities and wave amplitudes for the three mentioned types of the soil when the wave frequency or propagation time are changed.

Key words: standard rheological model of soil layer, experimental creep curve, determination of model's parameters, seismic wave velocity, seismic wave amplitude attenuation, sandy clay loam, silt loam, silty clay.

Вступ.

Грунти (зокрема, ґрунтові шари) є класом матеріалів з механічними властивостями значно відмінними від властивостей класичних в механіці матеріалів конструкційних матеріалів. З точки зору моделювання деформування матеріалу ґрунти близькі до класів полімерних матеріалів і оснований на полімерах композитних матеріалів. Звичними для цього класу матеріалів є реологічні моделі [3, 10, 11, 13].

Реологія є розділом фізики, що вивчає речовини, які при деформуванні проявляють одночасно такі три базові властивості матеріалів, як пружність, пластичність і в'язкість [10, 14]. Тому реологію часто відносять до механіки матеріалів, які не є в певному розумінні класичними твердими матеріалами (solid materials), а є некласичними м'якими матеріалами (soft materials). Деформуються реологічні матеріали дещо по-іншому. Форма тіла з реологічного матеріалу може змінюватися при деформуванні суттєво зі зміною температури та з часом. Тому у ряді випадків виникає необхідність у застосуванні ускладнених моделей механіки. Типовими прикладами реологічних матеріалів є бітум, смола чи асфальт. До класу реологічних матеріалів зараз відносять традиційно осади, мул, суспензії. Такі матеріали вважають гетерогенними за внутрішньою структурою [2, 5] і для них важливими чинниками є температура і насиченість рідиною. Окремо виділяють полімерні матеріали. Сюди ж відносять біологічні матеріали (наприклад, м'язи) і значну частину речовин, які називають їжею (наприклад, кетчуп, кефір, певні типи сиру). Також до реологічних матеріалів відносять ґрунти, які є різноманітними за структурою і властивостями.

Історично так склалося, що ту область механіки матеріалів, яка враховує властивості пружності та в'язкості і має назву «теорія в'язкопружності», теж відносять до реології. Відповідно, властивості в'язкопружних матеріалів традиційно називають реологічними властивостями і параметри моделей теж називають реологічними параметрами. Далі розглядається так звана стандартна триконстантна реологічна модель, яка є теж стандартною в теорії в'язкопружності. Тут збережемо термін «стандартна модель». Основна увага приділена методу визначення реологічних параметрів моделі з експериментально отриманих кривих повзучості та сценарієм зміни характеристик сейсмічної зсувної плоскої гармонічної хвилі зі зміною частоти хвилі та часу.

1. Стандартна реологічна модель (найпростіша триконстантна реологічна модель).

В реальних матеріалах часто спостерігається непружне деформування і найчастіше його описують моделями пластичного та в'язкопружного деформування. В'язкопружне деформування супроводжується двома основними механічними явищами – релаксацією напруження при постійній деформації і повзучістю деформації при постійному напруженні. При вивченні деформування ґрунтових шарів явище повзучості спостерігається практично постійно і для його опису використовуються різні реологічні моделі і різні експериментальні установки [7 – 10, 14, 18, 20].

Найпростішою моделлю, яка описує явища релаксації напруження і повзучості деформації, є так звана стандартна модель теорії в'язкопружності [3, 13]. В рамках цієї моделі конститутивне рівняння (рівняння зв'язку між напруженням σ і деформацією ε) має вигляд звичайного диференціального рівняння 1-го порядку з постійними коефіцієнтами (як щодо напруження, так і щодо деформації)

$$n\dot{\sigma}(t) + \sigma(t) = E n \dot{\varepsilon}(t) + H \varepsilon(t), \quad (1)$$

де використовуються три реологічні параметри: E – миттєвий модуль пружності; H – тривалий модуль пружності; n – час релаксації. Кожен з цих трьох параметрів має фізичне трактування.

Модуль E називають миттєвим модулем пружності з тих міркувань, що при швидких процесах деформування швидкості $\dot{\sigma}(t)$, $\dot{\varepsilon}(t)$ є великими порівняно з самими і тоді величинами $\sigma(t)$, $H \varepsilon(t)$ в (1) можна знехтувати. Реологічний закон (1) перетворюється в закон Гука $\dot{\sigma}(t) = E \dot{\varepsilon}(t)$ з модулем пружності E .

Модуль H називають тривалим модулем пружності тому, що при повільних процесах деформування величини $\sigma(t)$, $H \varepsilon(t)$ є великими порівняно з їхніми швидкостями і тоді виразами $n\dot{\sigma}(t)$, $nE\dot{\varepsilon}(t)$ в (1) можна знехтувати. У цьому разі з (1) знову отримується закон Гука $\sigma(t) = H \varepsilon(t)$ з модулем пружності H .

Диференціальне рівняння (1) має два еквівалентні представлення у вигляді інтегральних рівнянь з простими експоненціальними ядрами

$$\sigma(t) = E \varepsilon(t) - \frac{E-H}{n} \int_0^t \varepsilon(\tau) e^{-\frac{t-\tau}{n}} d\tau; \quad (2)$$

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \frac{E-H}{E^2 n} \int_0^t \sigma(\tau) e^{-\frac{H}{En}(t-\tau)} d\tau. \quad (3)$$

Релаксацію напруження при заданому постійному значенні деформації ε^o стандартна модель описує за формулою (2) таким чином:

$$\sigma(t) = \varepsilon^o \left[H + (E-H) e^{-\frac{t}{n}} \right]. \quad (4)$$

Тобто, напруження релаксує (зменшується) від початкового значення $E\varepsilon^o$ до значення $H\varepsilon^o$, яке відповідає тривалому періоду спостереження.

Повзучість деформації при сталому значенні напруження σ^o стандартна модель описує за формулою (3) таким виразом:

$$\varepsilon(t) = \sigma^o \left[\frac{1}{H} + \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{H} \right) e^{-\frac{H}{En}t} \right]. \quad (5)$$

Отже, деформація зростає (повзе) від початкового значення σ^o/E до значення σ^o/H , яке відповідає тривалому періоду спостереження.

2. Задача про гармонічну сейсмічну хвилю в рамках стандартної реологічної моделі.

Застосуємо прямий підхід до аналізу поширення зсувної гармонічної хвилі в рамках стандартної моделі. Для цього підставимо лінійне представлення деформації через зміщення $\varepsilon = \partial u / \partial x$ в рівняння (1), у якому змінимо позначення, ввівши модуль зсуву μ ($\mu_0 = E$, $\mu_\infty = H$)

$$n \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sigma = \mu_0 n \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \mu_\infty \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (6)$$

Рівняння руху, записане через зміщення, можна отримати, використавши класичне рівняння руху $\rho(\partial^2 u / \partial t^2) = \partial \sigma / \partial x$ і створивши на його основі рівності

$$n\rho \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = n \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial t} \quad \text{та} \quad \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + n\rho \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} + n \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial t}.$$

Підстановка цих рівностей в рівняння (6) дає нове рівняння руху

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + n\rho \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = \mu_0 n \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + \mu_\infty \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (7)$$

Рівняння (7) містить додатково два доданки з третіми похідними.

Зауважимо, що це не найпростіше хвильове рівняння, яким описується класична пружна зсувна хвиля

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mu_\infty \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

При вивченні гармонічних хвиль, які описує реологічне рівняння (7), можливі три випадки. У випадку 1 амплітуда хвилі затухає за просторовою координатою і має вигляд

$$u(x, t) = A e^{-\gamma x + i(kx - \omega t)}. \quad (8)$$

Зазначимо, що хвиля типу (8) відома в теорії хвиль як експоненціально затухаюча гармонічна хвиля, яка відповідає комплекснозначному хвильовому числу [4].

Випадок 2 стосується затухання за часом і тоді хвиля має інший вигляд

$$u(x, t) = A e^{-\alpha t + i[kx - \omega t]}. \quad (9)$$

Випадок 3 відповідає класичній гармонічній хвилі з невідомим хвильовим числом

$$u(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)}. \quad (10)$$

В усіх випадках слід перевірити, чи має рівняння (7) розв'язок у вигляді хвилі (8) – (10). Слід зазначити, що коли розв'язки рівняння (7) дійсно існують, то вони описують дещо відмінні між собою хвилі.

У випадку 1 при підстановці представлення (8) у рівняння (7) з врахуванням позначення $v_T^0 = \sqrt{\mu_0/\rho}$ отримуємо рівняння зв'язку між невідомими параметрами хвилі – дійсним хвильовим числом k , дійсним коефіцієнтом затухання γ і частотою ω

$$\left[(v_T^0)^{-2} \omega^2 + (\mu_\infty/\mu_0)(\gamma^2 - k^2) - 2n\omega\gamma k \right] + i \left[n(v_T^0)^{-2} \omega^3 + n\omega(\gamma^2 - k^2) + 2(\mu_\infty/\mu_0)\gamma k \right] = 0. \quad (11)$$

Далі необхідно прирівняти дійсну та уявну частини рівняння (11) до нуля. При цьому слід ввести позначення

$$(\mu_0/\mu_\infty) = (v_T^0)^2/(v_T^{\infty 2}) = m. \quad (12)$$

В результаті отримуємо два рівняння дуже подібної структури

$$v_T^{-2} + 2nm\gamma v_T^{-1} - \frac{m}{(v_T^0)^2} - \frac{\gamma^2}{\omega^2} = 0; \quad (13)$$

$$\gamma^2 + 2\gamma \frac{v_T^{-1}}{nm} + \left[(v_T^0)^{-2} - v_T^{-2} \right] \omega^2 = 0. \quad (14)$$

Отримані рівняння не є ідентичними і містять 3 невідомі величини – актуальну швидкість хвилі $v_T = (\omega/k_T)$, коефіцієнт затухання амплітуди хвилі γ та частоту ω . Тому з цих рівнянь можна визначити перші дві величини як функції частоти.

Рівняння (13), (14) можна перетворити до більш зручного вигляду шляхом ділення рівняння (14) на ω^2 і наступного додавання отриманого рівняння і рівняння (13)

$$\gamma = Kv_T, \quad K = \frac{(m-1)}{2(v_T^0)^2 nm \left(1 + \frac{1}{(nm\omega)^2} \right)}; \quad (15)$$

$$v_T^4 - \omega^2 m \left(\frac{2n}{K} - \frac{1}{(v_T^0)^2 K^2} \right) v_T^2 - \frac{\omega^2}{K^2} = 0. \quad (16)$$

Отже, в стандартній моделі актуальна швидкість хвилі і затухання амплітуди хвилі за просторовою координатою залежать нелінійно від частоти і визначаються початковою швидкістю та відношенням миттєвого модуля до тривалого модуля.

Можливо, найбільш важливим висновком з отриманих формул щодо швидкості хвилі і її затухання для подальшого аналізу сейсмічних хвиль є те, що ці характеристики хвилі в окремо взятому шарі ґрунту є різними для різних значень часу. Це не узгоджується з загальноприйнятим в теорії сейсмічних хвиль припущенням про незалежність модуля зсуву від частоти (отже, швидкості зсувної хвилі в окремо взятому шарі ґрунту), а також залежності модуля зсуву від часу. Ця залежність взагалі протирічить концепції континуальної механіки про сталість модулів (параметрів моделі, сталих, констант).

Також нагадаємо, що в теорії хвиль хвилі з залежними від частоти швидкостями називають дисперсивними. Тому стандартна реологічна модель описує теоретично лише дисперсивні хвилі.

У випадку 2 підстановка представлення (10) у рівняння (7) дає інше рівняння зв'язку між невідомими параметрами хвилі – хвильовим числом k , коефіцієнтом затухання γ і частотою ω

$$\rho(\alpha^2 - \omega^2) - 3\alpha\omega^2 n\rho + n\rho\alpha^3 + k^2(\alpha\mu_0 n + \mu_\infty)i\omega(-3\rho\alpha^2 n - 2\rho\alpha + \rho\omega^2 n + \mu_0 n k^2) = 0. \quad (17)$$

Прирівнюючи дійсну та уявну частини рівняння (17) до нуля, отримуємо два рівняння зі структурою, відмінною від структури рівнянь (13), (14)

$$(v_T^o)^{-2} [n\alpha^3 + \alpha^2 - 3\omega^2 n\alpha - \omega^2] - v_T^{-2} \omega^2 (n\alpha + 1/m) = 0; \quad (18)$$

$$(v_T^o)^{-2} [2(\alpha/n\omega^2) + (3\alpha^2/\omega^2 - 1)] - (v_T)^{-2} = 0. \quad (19)$$

Рівняння (19) дає просту формулу зв'язку між актуальною швидкістю хвилі v_T і коефіцієнтом затухання хвилі з часом поширення хвилі α

$$v_T^2 = \frac{v_T^{o2}}{3\alpha^2/\omega^2 + 2\alpha/n\omega^2 - 1}. \quad (20)$$

Підстановка значення швидкості хвилі (20) в рівняння (18) дає кубічне алгебраїчне лінійне рівняння щодо величини α

$$\alpha^3 + \alpha^2(3/4n)(1+1/m) + \alpha(1/2n^2m - \omega^2) - \omega^2(1/4n)(1+1/m) = 0. \quad (21)$$

При відомому дійсному α представлення хвилі у вигляді (10) є можливим і швидкість хвилі визначається за формулою (20). Отже, цей випадок теж описує дисперсійну хвилю.

Випадок 3 досліджується за схемою, використаною для двох попередніх випадків.

Однак при припущенні, що хвильове число є дійсним, рівняння типу (13), (14) та (18), (19) не узгоджуються між собою, з чого випливає, що шуканий розв'язок не існує. Якщо припустити, що хвильове число є комплексним, то випадок 3 співпадає з випадком 1.

Слід зазначити, що в даному дослідженні аналітичний запис розв'язку рівнянь (15), (16) та (20), (21) не потрібен, оскільки вони застосовуються для конкретних випадків ґрунтів з заданими реологічними параметрами і необхідна інформація про швидкість і затухання хвилі отримується за допомогою комп'ютерних обчислень.

Перевагою в застосуванні стандартної реологічної моделі до аналізу сейсмічних хвиль в ґрунтових шарах можна вважати можливість аналітично порахувати характеристики хвилі. Для кожного конкретного шару треба знати три константи моделі (миттєвий модуль, тривалий модуль, час релаксації) і параметри хвилі на вході в шар (амплітуду, кут падіння, частоту, коефіцієнт затухання). Отже, в конкретних задачах про сейсмічні хвилі необхідні конкретні знання значень реологічних параметрів моделі. Вважається, що константи стандартної моделі визначаються зі стандартних (регламентованих) дослідів на повзучість зразків при зсуві.

3. Простий спосіб визначення трьох реологічних параметрів моделі.

Цей спосіб застосовується в механіці полімерних матеріалів і описаний у книзі [11] і, скоріш за все, він невідомий у механіці ґрунтів. Простота методу полягає у тому, що всі три параметри реологічної моделі визначаються з однієї кривої повзучості, отриманої з досліду на одноосний розтяг-стиск чи простий зсув.

Як відомо [1, 6, 10], теоретична крива повзучості у стандартній реологічній моделі визначається формулою (5)

$$\varepsilon(t) = \sigma^o \left[\frac{1}{H} + \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{H} \right) e^{-\frac{H}{En}t} \right].$$

Будь-який спосіб визначення реологічних параметрів за допомогою експериментальної кривої повзучості пов'язаний з умовою, що експериментальна і теоретична криві повзучості повинні бути якомога ближче одна до одної. Тут виникають дві проблеми, пов'язані з аналізом експериментальної кривої. Проблема 1 полягає у тому, що миттєву деформацію ε_0 складно зафіксувати для початкових значень часу кривої повзучості (складно зафіксувати відповідну точку на кривій). Проблема 2 стосується тривалого модуля і відповідного значення деформації на кривій повзучості. Таке значення можна отримати лише при довготривалому експерименті, який часом складно здійснити. Тому в механіці полімерних матеріалів вироблена така методика.

Спочатку фіксуються моменти часу

$$t = t_n \quad (n = 0, 1, 2, 4, 8, 16, \dots) \quad (22)$$

і вводяться позначення

$$\varepsilon(0) = \varepsilon_0, \quad \varepsilon(t_1) = \varepsilon_1, \quad \varepsilon(t_2) = \varepsilon(2t_1) = \varepsilon_2, \quad \dots, \quad H/En = 1/b. \quad (23)$$

Тоді з формули (5) випливають такі рівності

$$\frac{\varepsilon_\infty - \varepsilon_1}{\varepsilon_\infty - \varepsilon_0} = e^{-\frac{t_1}{b}}, \quad \frac{\varepsilon_\infty - \varepsilon_2}{\varepsilon_\infty - \varepsilon_1} = e^{-\frac{t_2}{b}} = e^{-\frac{2t_1}{b}} = \left[e^{-\frac{t_1}{b}} \right]^2, \quad \frac{\varepsilon_\infty - \varepsilon_{2n}}{\varepsilon_\infty - \varepsilon_0} = e^{-\frac{t_{2n}}{b}} = \left[e^{-\frac{t_1}{b}} \right]^{2n}, \dots \quad (24)$$

або

$$\varepsilon_\infty = \frac{(\varepsilon_1)^2 - \varepsilon_0 \varepsilon_2}{2\varepsilon_1 - \varepsilon_0 - \varepsilon_2}, \dots, \varepsilon_\infty = \frac{(\varepsilon_n)^2 - \varepsilon_0 \varepsilon_{2n}}{2\varepsilon_n - \varepsilon_0 - \varepsilon_{2n}}. \quad (25)$$

З формул (25) отримується рівність

$$\frac{(\varepsilon_1)^2 - \varepsilon_0 \varepsilon_2}{2\varepsilon_1 - \varepsilon_0 - \varepsilon_2} = \frac{(\varepsilon_2)^2 - \varepsilon_0 \varepsilon_4}{2\varepsilon_2 - \varepsilon_0 - \varepsilon_4}. \quad (26)$$

Таким чином, для знаходження ε_0 , яке дає значення миттєвого модуля E за однією з відомих формул (для кривої повзучості значення напруження σ відоме)

$$\varepsilon_\infty = \frac{\sigma}{H}; \quad \varepsilon_0 = \frac{\sigma}{E}; \quad b = \frac{En}{H}, \quad (27)$$

треба знати $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_4$ – три величини, які визначаються з кривої повзучості. За очевидної умови $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon_1$ таке значення знаходиться як корінь квадратного рівняння (26) щодо ε_0 .

При відомому ε_0 значення деформації при довготривалій повзучості ε_∞ (а, отже, тривалого модуля H згідно з першою формулою (25)), вираховується за першою формулою (19).

Як впливає з проведеного вище аналізу, два реологічні параметри знаходяться досить просто. Однак, третій параметр – час релаксації n – потребує подальшого коментаря.

Розглянемо далі коротко гіпотетичний приклад з книги [12]. Нагадаємо, що аналізується відповідність експериментальної кривої теоретичній, яка проходить через три точки $\varepsilon(t_1), \varepsilon(t_2), \varepsilon(t_3)$ з експериментальної кривої. Цих трьох значень достатньо для визначення трьох реологічних параметрів стандартної моделі. Оскільки спосіб отримання значень миттєвого і тривалого модулів вже описаний вище, то зосередимось на визначенні часу релаксації.

Звернемося до формули (16), яка описує теоретично повзучість для довільного напруження і у довільний момент часу. Особливістю кривої повзучості є те, що вона будується експериментально при постійному напруженні. Для конкретних точок на кривій t_N при позначенні $b_N = \frac{En}{H} t_N$ значення деформації, яка відповідає цій точці на кривій, визначається за простою формулою

$$\varepsilon(b_N) = \varepsilon_\infty - \sigma \frac{H-E}{HE} e^{-b_N}, \quad (28)$$

або

$$-b_N = \ln \left[\frac{\varepsilon_\infty - \varepsilon(b_N)}{\sigma} \frac{HE}{H-E} \right]. \quad (29)$$

Формула (29) дає значення часу релаксації, на чому процедура знаходження реологічних параметрів закінчується.

Рис. 1 показує гіпотетичну криву повзучості і схематично вибір точок на кривій повзучості [11]. Нехай моменти часу t_1, t_2, t_3 вибрані так, як показано на цьому рисунку. Відповідні значення деформації є такими: $\varepsilon_1 = 3, \varepsilon_2 = 4, \varepsilon_3 = 5$.

Зазначимо, що на рисунку прийняті позначення $\varepsilon_0 = \varepsilon_y, \varepsilon_\infty = \varepsilon_n$.

Тоді

$$\varepsilon_0 = 1,38, \quad \varepsilon_\infty = 5,6. \quad (30)$$

Час релаксації визначається за формулою (29)

$$n = 2,4 \cdot 10^{-3}. \quad (31)$$

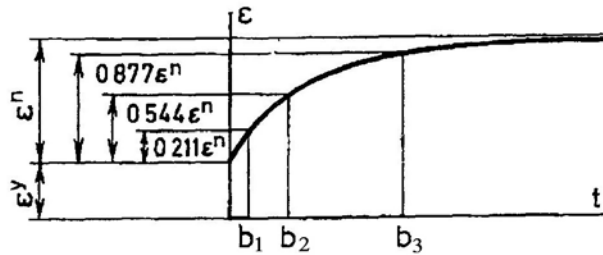


Рис. 1

Отже, розвинена стосовно полімерних матеріалів методика визначення реологічних параметрів стандартної моделі є простою, однозначною і виключає суб'єктивний вибір точок на експериментальній кривій повзучості.

Ще однією перевагою цієї методики є вже згадувана можливість визначати три реологічні параметри з одного експерименту на одновісний розтяг-стиск чи простий зсув.

Розглянемо далі можливість застосування описаного підходу (способу, методики) до аналізу ґрунтових шарів. Для цього використаємо експериментальні криві повзучості трьох типів ґрунтових шарів – бурого суглинку і піщаного жирного суглинку, отримані в роботі [8], та мулистій глини, отримані в роботі [18]. Ці криві показані на рис. 2 та рис. 3.

Рис. 2 відповідає рис. 3 з роботи [8]. На ньому показані залежності деформації зсуву (насправді показані значення відхилення від початкової довжини циліндричного зразка) від часу при різних значеннях прикладеного зсувного напруження. Рис. 3 відповідає рис. 2 з роботи [18]. На ньому показані залежності деформації циліндричного зразка в процентах від часу при різних значеннях прикладеного напруження. Показані

рисунки дають змогу розглянути три приклади обчислення реологічних параметрів та знаходження сценаріїв зміни характеристик сейсмічної хвилі при зміні частоти.

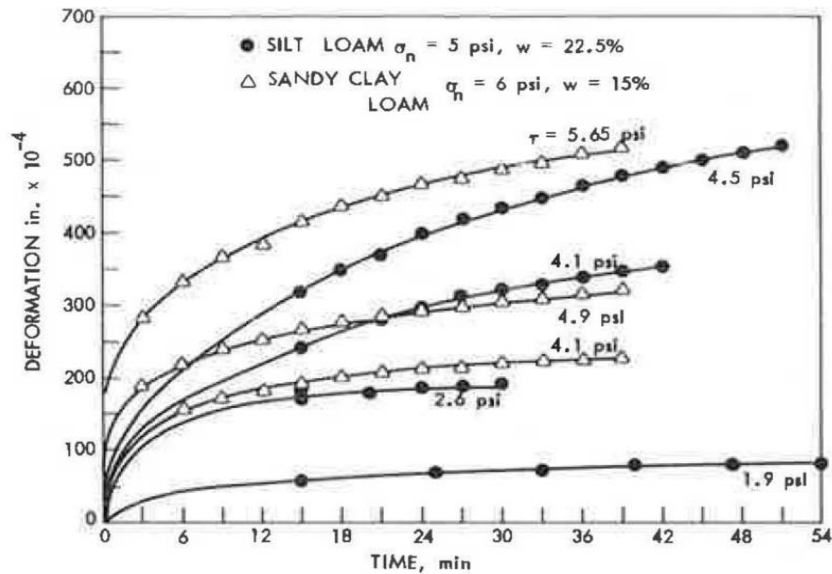


Рис. 2

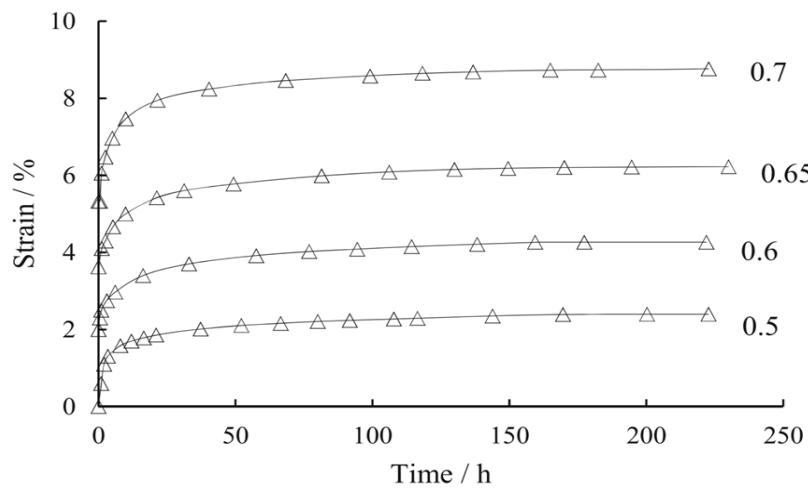


Рис. 3

Приклад 1 (піщаний жирний суглинок).

Виберемо далі криву, яка відповідає піщаному жирному суглинку при значенні напруження $\sigma = 4,1 \text{ psi} = 28,25851 \text{ КПа}$ і густини $\rho = 1,09 \times 10^3$ (третя знизу крива на рис. 2).

Спочатку фіксуємо моменти часу:

$$t_1 = 9, \quad t_2 = 18, \quad t_4 = 36 \quad (\text{у хвилинах})$$

$$\text{або } t_1 = 540, \quad t_2 = 1080, \quad t_4 = 2160 \quad (\text{у секундах}).$$
(32)

З форми вибраної кривої випливає, що відповідні значення деформації є такими:

$$\varepsilon_1 = 5,83 \cdot 10^{-3}; \quad \varepsilon_2 = 6,66 \cdot 10^{-3}; \quad \varepsilon_3 = 7,5 \cdot 10^{-3}.$$
(33)

Тоді, згідно з формулами (25) – (27), деформації ε_0 , ε_∞ приймають значення

$$\varepsilon_0 = 4,4 \cdot 10^{-3}; \quad \varepsilon_\infty = 8,0 \cdot 10^{-3}. \quad (34)$$

Відповідні значення миттєвого і тривалого модулів зсуву, швидкостей хвилі та відношення модулів є такими:

$$E = \mu_0 = 6,28 \cdot 10^6; \quad H = \mu_\infty = 3,51 \cdot 10^6; \quad (35)$$

$$v_T^0 = \sqrt{\mu_0/\rho} = 75,94; \quad v_T^\infty = \sqrt{\mu_\infty/\rho} = 56,77; \quad (36)$$

$$\mu_0/\mu_\infty = m = 1,8.$$

Час релаксації визначається за формулою (26)

$$n = 639,87. \quad (37)$$

Отже, всі три реологічні параметри стандартної моделі для піщаного жирного су-глинку знайдені. Запропонований підхід працює, він є простим і зручним.

Застосуємо отримані значення реологічних параметрів до аналізу залежності від частоти швидкості зсувної хвилі (12) та згасання її амплітуди (11) [15 – 17, 19].

Для цього врахуємо у формулах (11), (12) варіанту 1 отримані значення реологічних параметрів (35), (37) і отримаємо

$$v_T^{-2} + 2290,73\gamma v_T^{-1} - 0,0003 - \frac{\gamma^2}{\omega^2} = 0; \quad (38)$$

$$\gamma^2 + 0,0017\gamma v_T^{-1} + [0,00017 - v_T^{-2}] \omega^2 = 0. \quad (39)$$

Аналогічно представимо формули (20), (21) варіанту 2.

Відповідні графіки залежності швидкості хвилі, згасання амплітуди хвилі з відстанню поширення хвилі та згасання амплітуди хвилі з часом від частоти показані на рис. 4, 5 (варіант 1) та 6, 7 (варіант 2).

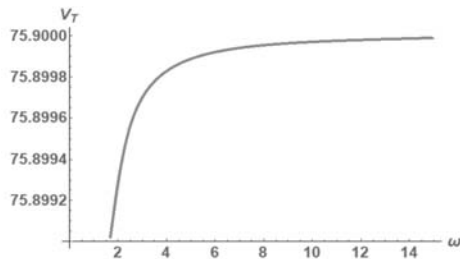


Рис. 4

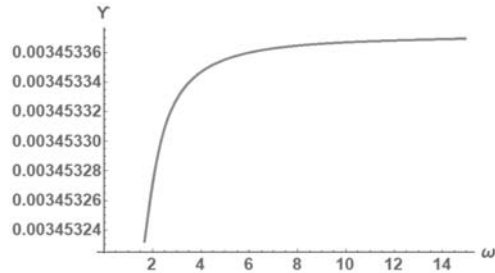


Рис. 5

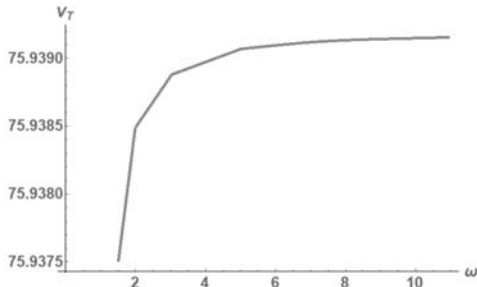


Рис. 6

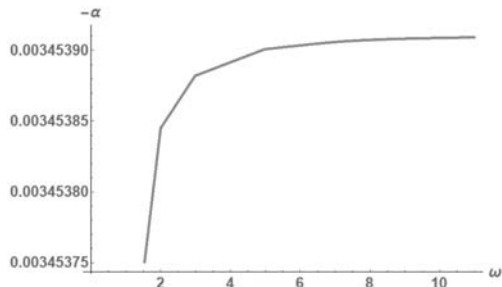


Рис. 7

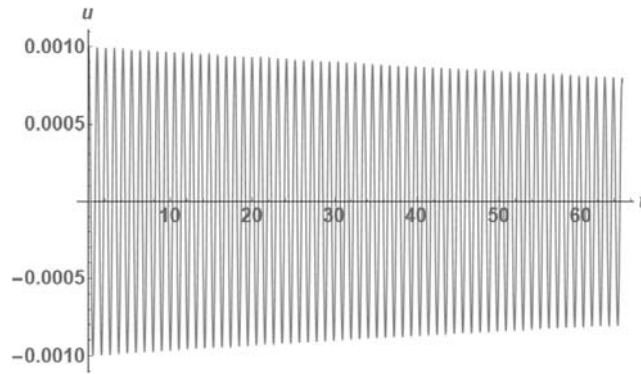


Рис. 8

Приклад 2 (бурій суглинок).

Виберемо далі криву, яка відповідає бурому суглинку при значенні напруження $\sigma = 4,1 \text{ psi} = 28,25851 \text{ КПа}$ і густині $\rho = 1,137 \times 10^3$ (четверта знизу крива на рис. 2).

Спочатку виберемо моменти часу:

$$\begin{aligned} t_1 = 9, \quad t_2 = 18, \quad t_4 = 36 \quad (\text{у хвилинах}) \\ \text{або } t_1 = 540, \quad t_2 = 1080, \quad t_4 = 2160 \quad (\text{у секундах}). \end{aligned} \quad (40)$$

З форми вибраної кривої випливає, що відповідні значення деформації є такими:

$$\varepsilon_1 = 6,66 \cdot 10^{-3}, \quad \varepsilon_2 = 8,83 \cdot 10^{-3}, \quad \varepsilon_3 = 11,33 \cdot 10^{-3}. \quad (41)$$

Тоді, згідно з формулами (20) – (22), деформації $\varepsilon_0, \varepsilon_\infty$ приймають значення

$$\varepsilon_0 = 3,4 \cdot 10^{-3}, \quad \varepsilon_\infty = 13,5 \cdot 10^{-3}. \quad (42)$$

Відповідні значення миттєвого і тривалого модулів зсуву, швидкостей хвилі та відношення модулів є такими:

$$\begin{aligned} E = \mu_0 = 8,1 \cdot 10^6; \quad H = \mu_\infty = 2,08 \cdot 10^6; \\ v_T^0 = \sqrt{\mu_0 / \rho} = 84,404; \quad v_T^\infty = \sqrt{\mu_\infty / \rho} = 42,77; \\ \mu_0 / \mu_\infty = m = 3,89. \end{aligned} \quad (43)$$

Час релаксації визначається за формулою (26) і є таким:

$$n = 366,68. \quad (44)$$

Отже, всі три реологічні параметри стандартної моделі для бурого суглинку знайдені. Як і в попередньому прикладі, запропонований підхід працює, він є простим і зручним.

Застосуємо отримані значення реологічних параметрів до аналізу залежності від частоти швидкості хвилі та згасання амплітуди хвилі з пройденою відстанню (11) [15 – 17, 19].

Для цього врахуємо у формулах (18), (19) варіанту 1 отримані значення реологічних параметрів (43), (44) і отримаємо

$$v_T^{-2} + 2852,77 \gamma v_T^{-1} - 0,00054 - \frac{\gamma^2}{\omega^2} = 0; \quad (45)$$

$$\gamma^2 + 0,0014 \gamma v_T^{-1} + [0,00014 - v_T^{-2}] \omega^2 = 0. \quad (46)$$

Аналогічно представимо формули (20), (21) варіанту 2.

Відповідні графіки залежності швидкості хвилі, згасання з відстанню проходження хвилі амплітуди хвилі і згасання з часом амплітуди хвилі від частоти показані на рис. 9, 10 (варіант 1) та рис. 11, 12 (варіант 2).

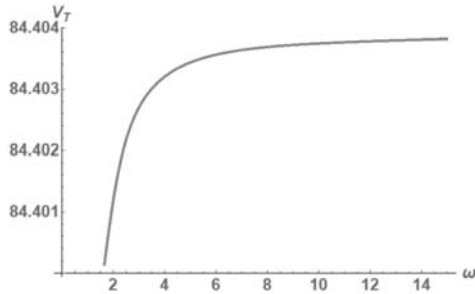


Рис. 9

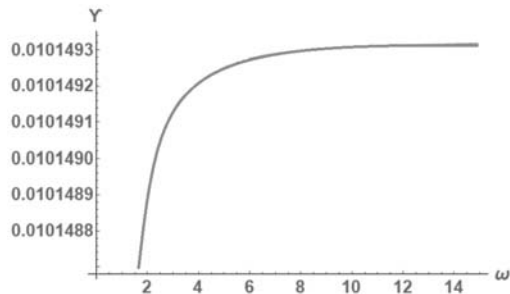


Рис. 10

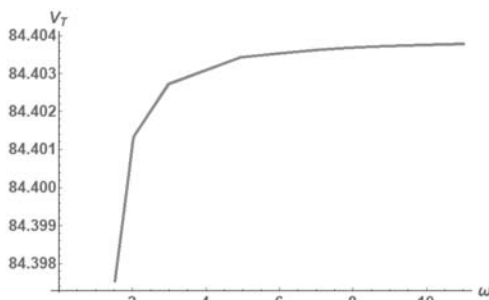


Рис. 11

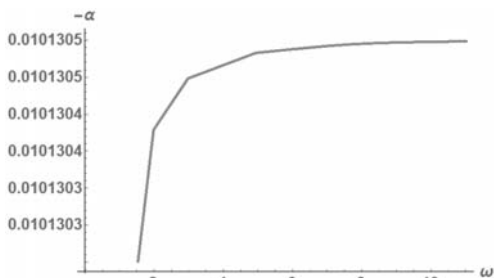


Рис. 12

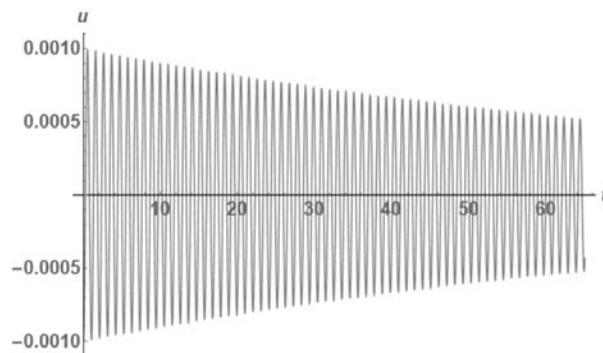


Рис. 13

Приклад 3 (мулиста глина).

Експериментальні дані про повзучість мулистої глини взяті з недавньої публікації [19]. Показані вище рис. 8, 13 з кривими повзучості відповідають рис. 2 з публікації [18]. Деформації тут вираховуються в процентах до початкової форми зразка (з точки зору механіки матеріалів, $1\% = 1,0 \cdot 10^{-2}$). Час вираховується в годинах і потребує у системі СІ перерахування у секунди. Прикладене навантаження складає 100 КПа.

Виберемо криву повзучості, яка відповідає мулистій глині при значенні напруження $\sigma = 100$ КПа і густині $\rho = 1,97 \times 10^3$ (перша знизу крива на рис. 3 з [18, 19]).

Далі виберемо моменти часу

$$t_1 = 50, \quad t_2 = 100, \quad t_4 = 200 \quad (\text{у годинах}) \quad (47)$$

$$\text{або } t_1 = 1,8 \cdot 10^5, \quad t_2 = 3,6 \cdot 10^5, \quad t_4 = 7,2 \cdot 10^5 \quad (\text{у секундах}).$$

З форми вибраної кривої випливає, що відповідні значення деформації є такими:

$$\varepsilon_1 = 2,2 \cdot 10^{-2}; \quad \varepsilon_2 = 2,4 \cdot 10^{-2}; \quad \varepsilon_3 = 2,6 \cdot 10^{-2}. \quad (48)$$

Тоді, згідно з формулами (20) – (22), деформації ε_0 , ε_∞ приймають значення

$$\varepsilon_0 = 1,87 \cdot 10^{-2}, \quad \varepsilon_\infty = 2,72 \cdot 10^{-2}. \quad (49)$$

Відповідні значення миттєвого і тривалого модулів зсуву, швидкостей хвилі та відношення модулів є такими:

$$\begin{aligned} E = \mu_0 &= 5,32 \cdot 10^6; \quad H = \mu_\infty = 3,67 \cdot 10^6; \\ v_T^0 &= \sqrt{\mu_0 / \rho} = 51,96; \quad v_T^\infty = \sqrt{\mu_\infty / \rho} = 43,16; \\ \mu_0 / \mu_\infty &= m = 1,45. \end{aligned} \quad (50)$$

Час релаксації визначається за формулою (26) і є таким:

$$n = 2,57 \cdot 10^5. \quad (51)$$

Отже, всі три реологічні параметри стандартної моделі для мулистій глини знайдені. Як і в попередніх прикладах, запропонований підхід працює, він є простим і зручним.

Застосуємо отримані значення реологічних параметрів до аналізу залежності від частоти затухання амплітуди (11) [15 – 17, 19].

Для цього врахуємо у формулах (18), (19) отримані для варіанту 1 значення реологічних параметрів (50), (51) і отримаємо

$$v_T^{-2} + 74,53 \gamma v_T^{-1} - 0,02790 - \frac{\gamma^2}{\omega^2} = 0; \quad (52)$$

$$\gamma^2 + 0,05366 \gamma v_T^{-1} + \left[0,00037 - v_T^{-2} \right] \omega^2 = 0. \quad (53)$$

Рівняння залежності затухання з часом амплітуди хвилі α від частоти ω є таким:

$$1,32 \cdot 10^{11} \alpha^3 + 788724 \alpha^2 + \alpha (1,3793 + 1,32 \cdot 10^{11} \omega^2) + 79758,6 \omega^2 = 0. \quad (54)$$

Відповідні графіки залежності швидкості хвилі v_T від частоти та затухання амплітуди хвилі γ від частоти показані на рис. 14, 15 (випадок 1) та 16, 17 (випадок 2)

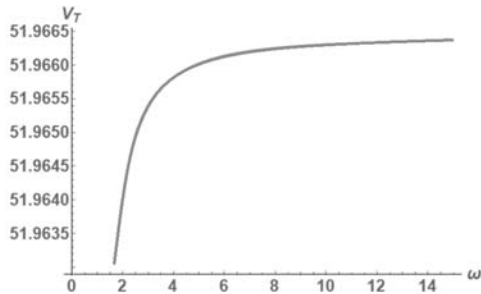


Рис. 14

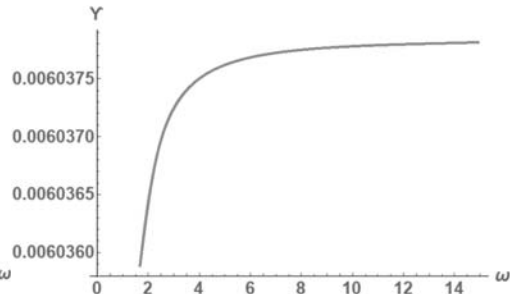


Рис. 15

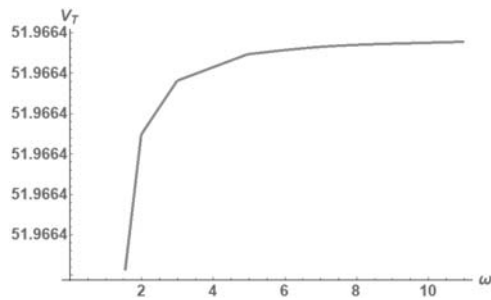


Рис. 16

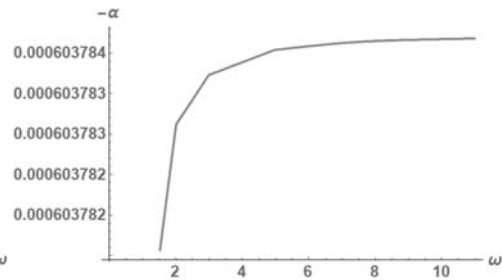


Рис. 17

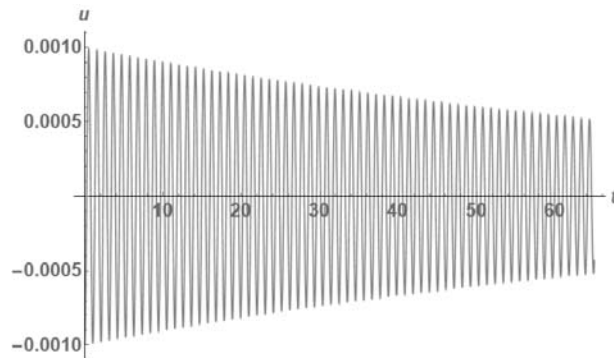


Рис. 18

Коментар до **Прикладів 1 – 3** полягає в короткому описі трьох типів сценаріїв: зміни двох параметрів хвилі при зміні частоти та зміни амплітуди хвилі при зміні часу на основі отриманих 18 графіків.

Група рисунків (4, 6, 9, 11, 14, 16) стосується зміни швидкості хвилі. Формально швидкість суттєво нелінійно змінюється зі зміною частоти. Це означає, що недисперсійна гармонічна хвиля в реологічному середовищі трансформується в дисперсійну хвилю.

Однак, практично у даних прикладах спостережена зміна складає долі відсотка від початкового значення швидкості. Тому можна вважати, що зміна відсутня і хвилю можна вважати недисперсійною.

Слід зазначити, що вибір початкового значення швидкості виявляється несуттєвим. Графіки залежності від частоти отримуються ідентичними для довільного вибору початкового значення швидкості в рамках обмеження швидкості від v_0 до v_∞ .

Друга група рисунків (5, 7, 10, 12, 13, 15) показує нелінійну зміну згасання амплітуди хвилі з пройденою хвилею відстанню при зміні частоти та з часом поширення хвилі. Ситуація аналогічна ситуації, яка показана на першій групі графіків. Зміна згасання амплітуди хвилі з часом чи з відстанню є формально суттєво нелінійною. Практично у даних прикладах спостережена зміна амплітуди зі зміною частоти складає долі відсотка від початкового значення. Тому можна вважати, що зміна відсутня.

Третя група рисунків (8, 13, 18) показує сценарії еволюції хвилі при її поширенні (тобто, в залежності від часу поширення). Показані сценарії підтверджують початкове припущення, що стандартна реологічна модель описує хвилю, експоненціально згасаючу з часом поширення. Це явище можна вважати базовим для стандартної реологічної моделі.

В цілому спостережена для трьох типів ґрунтових шарів в рамках стандартної реологічної моделі двох варіантів сейсмічних плоских зсувних гармонічних хвиль формально нелінійна залежність характеристик хвилі від частоти трансформується прак-

тично у настільки незначну, що нею можна знехтувати. При цьому базову для реологічних моделей властивість експоненціального затухання амплітуди з часом поширення хвилі застосована модель описує.

Іншими словами, якщо залежність параметрів хвилі від частоти стандартна модель практично не враховує, то залежність амплітуди хвилі від часу модель описує як дуже суттєву. При цьому хвиля вже не є просто гармонічною, а трансформується в експоненціально затухаючу гармонічну хвилю.

Висновки.

Запропоновано опис деформування ґрунтових шарів стандартною триконстантною реологічною моделлю. Доцільність застосування цієї моделі обґрунтовується можливістю теоретично аналізувати поширення хвиль в ґрунтових шарах і просто визначати параметри (константи) моделі з експерименту на повзучість конкретного ґрунтового шару. Викладено сутність цього простого способу (методики). Для трьох типів ґрунтових шарів – бурого суглинку, піщаного жирного суглинку, мулистий глини – визначено відповідні реологічні параметри на основі експериментальних даних інших авторів щодо вказаних трьох типів шарів. Отримані висновки є такими: застосований спосіб працює і дійсно є простим.

Визначені реологічні параметри використано для спроби побудувати сценарії еволюції (поступової зміни) швидкості двох допустимих варіантів зсувної гармонічної сейсмічної хвилі та її амплітуди для трьох досліджених типів ґрунту при зміні частоти хвилі. Сценарії виявилися подібними для всіх трьох типів шарів. Вибрані параметри хвилі теоретично є змінними, однак практично ця зміна настільки незначна відносно початкових значень параметрів, що нею слід знехтувати.

Більш важливими в аналізі поширення сейсмічної зсувної хвилі є отримані сценарії трансформації просто гармонічної хвилі в експоненціально затухаючу гармонічну за доволі короткий час поширення при характерних для сейсмічних хвиль дуже низьких частотах.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано у цій статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Запропоновано спосіб визначення параметрів стандартної триконстантної реологічної моделі, яку пропонується застосувати до опису сейсмічних хвиль в ґрунтових шарах. Коротко описана стандартна реологічна модель. Також викладено сутність запропонованого методу. Особливість способу в тому, що для визначення трьох реологічних параметрів хвильової моделі достатньо мати одну експериментальну криву повзучості ґрунтового шару. Ефективність методу показано на трьох прикладах ґрунтових шарів з бурого суглинку, піщаного жирного суглинку і мулистий глини. Також визначені реологічні параметри використано для спроби побудувати сценарії еволюції швидкості зсувної гармонічної сейсмічної хвилі та амплітуди хвилі для трьох досліджених типів ґрунту при зміні частоти хвилі і зміні часу поширення хвилі.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: стандартна реологічна модель ґрунтового шару, експериментальна крива повзучості, визначення параметрів моделі, швидкість сейсмічної хвилі, затухання амплітуди сейсмічної хвилі, піщаний суглинок, мулистий суглинок, мулиста глина.

1. Кендзера О.В., Руцицький Я.Я. Спосіб визначення параметрів реологічної моделі ґрунтового шару за експериментальною кривою повзучості шару // Доп. НАН України. – 2022. – № 10. – С. 66 – 74.
2. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. – Москва: Наука, 1978. – 330 с.
3. Савін Г.М., Руцицький Я.Я. Елементи механіки спадкових середовищ. – Київ: Вища школа, 1976. – 276 с.
4. Crawford F.S., Jr. Waves. Berkley Physics Course. V. 3. – Newton, MA: Education Development Center, Inc., 1968. – 642 p.

5. Kanaun S. Heterogeneous Media. Local Fields, Effective Properties, and Wave Propagation. – Amsterdam: Elsevier, 2020. – 494 p.
6. Kendzera O., Rushchitsky J., Semenova Yu. Simple way of allowance for rheologic properties of layered earth stratum in study of seismic waves. Chapter 5 in the book: Latest Techniques and Advances in Seismic Waves Research. – New York: Nova Science Publishers, Inc., 2021. – 246 p.
7. Lai X.L., Wang S.M., Ye W.M., Cui Y.J. Experimental investigation on the creep behavior of an unsaturated clay // Canadian Geotechnical J. – 2014. – **51**, N 6. – P. 621 – 28.
8. Lohnes R.A., Millan A., Demirel T., Handy R.L. Tests for soil creep. Report of the Engineering Research Institute, Iowa State University. <https://onlinepubs.trb.org/Onlinepubs/hrr>, 1970. – P. 1 – 10.
9. Luo Q., Chen X. Experimental research on creep characteristics of Nansha soft soil // The Scientific World J. – 2014. – **5**. – P. 968728.
10. Malkin A., Isayev A. Rheology. Concepts, Methods, and Applications. 3rd ed. – Toronto: Chemtec Publishing, 2017. – 500 p.
11. Malmeister A.C., Tamuzhs V.P., Teters G.A. Strength of Polymeric and Composite Materials. 3rd. ed. – Riga: Zinatne, 1980. – 534 p.
12. Rushchitsky J.J. Theory of Waves in Materials. – Copenhagen: Ventus Publishing ApS, 2011. – 270 p.
13. Rushchitsky J.J. Foundations of Mechanics of Materials. – Copenhagen: Ventus Publishing ApS, 2021. – 276 p.
14. Rheology. Ed. De Vincente J. – New York: InTechOpen, 2012. – 352 p.
15. Soil types. <https://www.boughton.co.uk/products/topsoils/soil-types/>
16. Soil types. Soil Science Society of America. <https://www.soils.org/about-soils/basics/types/>
17. Soil types. [https://geo.libretexts.org/Bookshelves/Geology/Fundamentals_of_Geology_\(Schulte\)/04%3A_Soil/4.07%3A_Soil_Types](https://geo.libretexts.org/Bookshelves/Geology/Fundamentals_of_Geology_(Schulte)/04%3A_Soil/4.07%3A_Soil_Types)
18. Wang Y.F., Zhou Z.G., Cai Z.Y. Studies about Creep Characteristic of Silty Clay on Triaxial Drained Creep // Advances in Civil and Industrial Engng. IV. – 2014. – **580**. – P. 355 – 358.
19. What is Soil Profile and How is Soil Formed? 2020. <https://www.earthreminder.com/soil-profile-layers-formation/>
20. Zhang Q. Experimental analysis on creep mechanics of unsaturated soil based on empirical model // Open Geosciences. – 2022. – **14**, N 1. – P. 785 – 793.

Надійшла 03.09.2022

Затверджена до друку 28.03.2023