

Я. О. Жук<sup>1,2</sup>, О. Х. Остос<sup>2</sup>, О. Б. Курилко<sup>1</sup>

**ВПЛИВ ПОПЕРЕДНІХ НАПРУЖЕНЬ НА РЕЗОНАНСНІ КОЛИВАННЯ  
ТА РОЗІГРІВ ЦИЛІНДРИЧНОЇ В'ЯЗКОПРУЖНОЇ ОБОЛОНКИ**

<sup>1</sup>Київський національний університет ім. Тараса Шевченка,  
просп. Глушкова, 4е, 01033, Київ, Україна; e-mail: y.zhuk@i.ua

<sup>2</sup>Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,  
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: term@inmech.kiev.ua

**Abstract.** A statement of the problem of forced resonant vibrations and steady-state as well as transient dissipative heating of viscoelastic elastomeric cylindrical shell with the account of membrane prestress is formulated. The complex moduli technique is used to describe the viscoelastic properties of the shell material under harmonic loading. The mechanical stationary and thermal behavior of both the steady-state and transient thermal response of the shell is investigated. The distributions of kinematic and force parameters as well as temperature along the axial coordinate are calculated. The dependence of the maximum temperature for different prestress levels is studied. The temperature-time response is used to predict the shell failure due to overheating and to estimate the structure endurance under cyclic loading. The influence of the prestress level on the fatigue life prediction of the shell is investigated in detail.

**Key words:** resonance vibrations, harmonic loading, prestressed viscoelastic shell, dissipative heating, fatigue life.

**Вступ.**

Швидкий розвиток машинобудування, проектування авто- та аерокосмічної техніки, суднобудування та розробка різноманітних елементів енергетичних установок зумовлює потребу в розробці зв'язаної теорії термов'язкопружності. При тривалих багаточислових навантаженнях, інтенсивних режимах роботи може спостерігатися суттєвий розігрів елементів конструкцій внаслідок дисипації механічної енергії в теплову, що, за певних умов, може спричинити втрату робоздатності внаслідок не тільки механічного, але й теплового руйнування [5, 10].

Особливо важливим є вивчення реакції матеріалів на механічне і теплове навантаження, впливу зовнішнього середовища на матеріал конструкції, а також аналіз умов і механізмів руйнування [8]. З цією метою використовуються моделі поведінки матеріалів, які містять аналітичні вирази й рівняння, що характеризують реакцію матеріалу на відповідний вплив [21]. Це зумовлює необхідність розвинення адекватних моделей поведінки матеріалів і конструкцій при інтенсивному, зокрема, циклічному навантаженні [4]. Моделі, розглянуті для дослідження таких процесів, розвиваються в рамках зв'язаної теорії термов'язкопружності, оскільки напружений і тепловий стани, викликані інтенсивними механічними навантаженнями, суттєво впливають на міцність і режими функціонування елементів конструкцій, що працюють в умовах тривалих зовнішніх впливів і підвищених температур [9, 15].

Низка важливих закономірностей циклічного деформування тіл була встановлена експериментально і використана при моделюванні та дослідженнях у цій області [13].

При вивченні термомеханічних процесів питання вибору моделі для описання поведінки матеріалу стало ключовим. Для багатьох практичних застосувань в'язкопружні матеріали виявилися найбільш придатними через їхні механічні та дисипативні властивості [20].

Встановлено, що крім зовнішніх факторів (температури, частоти та амплітуди коливань), значний вплив на поведінку елементів конструкцій може мати попередній механічний стан [2]. Наявність таких попередніх навантажень, як внутрішній або зовнішній тиск, осьова сила, зовнішня сила, прикладена до бічної поверхні, і крутильний момент можуть суттєво впливати на власні частоти коливань. Крім того, попередній напружено-деформований стан (НДС) може впливати на динамічну поведінку елементів конструкцій загалом, зокрема викликати зсув власної частоти в бік вищих (при розтязі) або нижчих (при стиску) частот.

Попередній НДС може змінювати також температурно-частотні характеристики коливань тонкостінних елементів конструкцій, виготовлених з дисипативних матеріалів. Дослідження впливу попереднього НДС на стаціонарний тепловий стан в'язкопружних еластомерних елементів конструкцій проведено в роботах [4, 5]. Проте, низка питань залишилась недослідженою, зокрема: вплив на нестационарну поведінку елементів конструкцій при тривалому циклічному навантаженні, на критичні рівні навантаження і закритичну теплову поведінку, на втомні характеристики теплового руйнування циклічно деформованого елемента конструкції [7, 18].

Було проведено багато теоретичних та чисельних розрахунків для гумоподібних матеріалів, які мають широке інженерне застосування [17]. У роботі [12] одним із найбільш ефективних підходів стало вимірювання підвищення температури зразка при нагріванні внаслідок гістерезисних втрат під час випробовування на втому. Таке зростання температури внаслідок дисипації механічної енергії викликає значне зниження жорсткості й, як результат, міцність матеріалів суттєво зменшується. Підвищення температури при циклічному навантаженні впливає на протікання процесів деформування і руйнування, в тому числі при досягненні перехідних температур, коли відбувається різка зміна деформаційних властивостей еластомерів [11]. Специфіка і важливість практичного значення циклічного і, зокрема, гармонічного деформування вимагає розвитку зв'язаної амплітудної теорії, для якої характеристики матеріалу конкретизуються безпосередньо з експериментів. Систематизоване описання циклічного деформування матеріалів, встановлення зв'язку між різними рівнями їхніх дисипативних і жорсткісних властивостей, використання цих результатів для кількісного аналізу поведінки елементів конструкцій можливе лише в межах адекватної феноменологічної теорії. Побудові спрощених фізичних рівнянь, які можуть трактуватись як амплітудні, присвячено роботи [2, 3, 4, 14, 16] та інші.

При гармонічних коливаннях повна система рівнянь лінійної зв'язаної термов'язкопружності формулюється в термінах комплексних амплітуд основних польових характеристик і комплексних модулів, що характеризують циклічну поведінку матеріалу [21]. При такому підході амплітуди напружень задаються у вигляді тензорних функцій тензорів амплітуд деформацій, що відповідають типу симетрії матеріалу, які не пов'язані з будь-яким загальним визначальним рівнянням. Таким чином, рівень пошкодження матеріалу можна визначати з модуля втрат. У такий спосіб розглядається зв'язана динамічна поведінка для різних елементів конструкцій, зокрема для оболонок [1].

Дана стаття присвячена дослідженню термомеханічної поведінки еластомерних елементів конструкцій при циклічному навантаженні. Із використанням основних положень та методів термопружності, розвинених раніше [6], проводяться дослідження термомеханічної поведінки в елементах конструкцій при наявності попереднього напружено-деформованого стану. Сформульовано критерій руйнування, що враховує специфіку впливу попередніх напружень. Виявлено механічні ефекти впливу попередніх напружень при статичних і динамічних навантаженнях на оболонку.

## 1. Постановка задачі.

**1.1. Механічні рівняння.** Розглянемо кругову циліндричну оболонку довжиною  $L$ , радіусом  $R$  та товщиною  $h$ , яка виготовлена з еластомерного ізотропного матеріалу густини  $\rho$ . Циліндрична оболонка віднесена до системи координат  $Ox\varphi z$  (рис. 1).

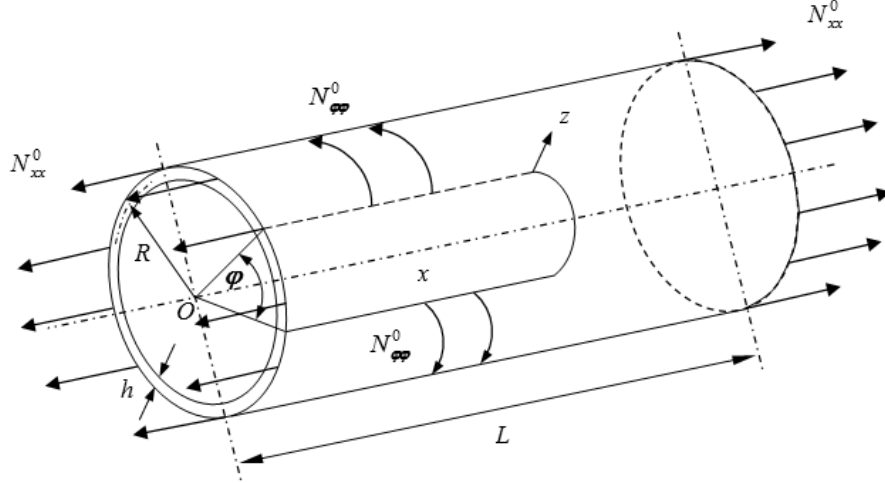


Рис. 1

Позначимо через  $w$  переміщення середньої лінії циліндричної оболонки, а через  $q$  – нормальне навантаження. Рівняння руху оболонки запишемо у вигляді [1, 19]:

$$D\nabla^8 w + Eh\nabla_k^4 w - \nabla^4 \nabla_r^2 w + \rho h \nabla^4 \ddot{w} = \nabla^4 q, \quad (1)$$

де  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu)}$  – згинальна жорсткість;  $E$  – модуль Юнга, а оператори визначаються наступним чином:

$$\nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \varphi^2} + \frac{1}{R^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4};$$

$$\nabla^8 w = \frac{\partial^8 w}{\partial x^8} + \frac{4}{R^2} \frac{\partial^8 w}{\partial x^6 \partial \varphi^2} + \frac{6}{R^4} \frac{\partial^8 w}{\partial x^4 \partial \varphi^4} + \frac{4}{R^6} \frac{\partial^8 w}{\partial x^2 \partial \varphi^6} + \frac{1}{R^8} \frac{\partial^8 w}{\partial \varphi^8};$$

$$\nabla_k^4 w = \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4};$$

$$\begin{aligned} \nabla^4 \nabla_r^2 w = & N_{xx}^0 \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} + \frac{1}{R^2} N_{\varphi\varphi}^0 \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial \varphi^2} + \frac{2}{R} N_{x\varphi}^0 \frac{\partial^6 w}{\partial x^5 \partial \varphi} + \frac{2}{R^2} N_{xx}^0 \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial \varphi^2} + \\ & + \frac{2}{R^4} N_{\varphi\varphi}^0 \frac{\partial^6 w}{\partial x^2 \partial \varphi^4} + \frac{4}{R^3} N_{x\varphi}^0 \frac{\partial^6 w}{\partial x^3 \partial \varphi^3} + \frac{1}{R^4} N_{xx}^0 \frac{\partial^6 w}{\partial x^2 \partial \varphi^4} + \frac{1}{R^6} N_{\varphi\varphi}^0 \frac{\partial^6 w}{\partial \varphi^6} + \frac{2}{R^5} N_{x\varphi}^0 \frac{\partial^6 w}{\partial x \partial \varphi^5}, \end{aligned}$$

де  $N_{xx}^0$ ,  $N_{\varphi\varphi}^0$  та  $N_{x\varphi}^0$  – осьове, колове та зсувне попередні зусилля, відповідно.

Для в'язкопружних матеріалів після перехідного процесу встановлюється режим стаціонарних коливань оболонки з частотою зовнішнього збудження. При цьому всі польові величини змінюються за гармонічним в часі законом. Оскільки матеріал обо-

лонки вважаємо лінійно в'язкопружним, то використання концепції комплексних модулів та амплітуд дозволяє сформулювати постановку задачі в комплексному вигляді. Тоді рівняння (1) можна переписати наступним чином

$$\tilde{D}\nabla^8\tilde{w} + \tilde{E}h\nabla_k^4\tilde{w} - \nabla^4\nabla_r^2\tilde{w} + \rho h\nabla^4\tilde{w} = \nabla^4\tilde{q}. \quad (2)$$

Тут тильдою позначено комплексну величину  $\tilde{(\cdot)} = (\cdot)' + i(\cdot)''$ , де  $(\cdot)'$  – дійсна частина, а  $(\cdot)''$  – уявна частина;  $\tilde{D} = D' + iD''$  – згинальна жорсткість;  $\tilde{E} = E' + iE''$  – модуль Юнга;  $\tilde{w}(x, \varphi) = w'(x, \varphi) + iw''(x, \varphi)$  – прогин та  $\tilde{q}(x, \varphi) = q'(x, \varphi) + iq''(x, \varphi)$  – нормальне навантаження.

Закон зміни переміщень та зовнішнього навантаження в часі визначається формулами

$$w(x, \varphi, t) = w'(x, \varphi) \cos \omega t - w''(x, \varphi) \sin \omega t; \quad (3)$$

$$q(x, \varphi, t) = q'(x, \varphi) \cos \omega t - q''(x, \varphi) \sin \omega t. \quad (4)$$

Тоді з (3) маємо

$$\tilde{w} = \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial t^2} = -\omega^2 [w'(x, \varphi) \cos \omega t - w''(x, \varphi) \sin \omega t] = -\omega^2 \tilde{w},$$

звідки отримаємо рівняння коливань циліндричної оболонки в термінах комплексних амплітуд та комплексних модулів [19]

$$\tilde{D}\nabla^8\tilde{w} + \tilde{E}h\nabla_k^4\tilde{w} - \nabla^4\nabla_r^2\tilde{w} - \rho h\omega^2\nabla^4\tilde{w} = \nabla^4\tilde{q}. \quad (5)$$

Підставляючи відповідні вирази для операторів, отримуємо рівняння (5) в розгорнутому вигляді

$$\begin{aligned} & \tilde{D} \left( \frac{\partial^8 \tilde{w}}{\partial x^8} + \frac{4}{R^2} \frac{\partial^8 \tilde{w}}{\partial x^6 \partial \varphi^2} + \frac{6}{R^4} \frac{\partial^8 \tilde{w}}{\partial x^4 \partial \varphi^4} + \frac{4}{R^6} \frac{\partial^8 \tilde{w}}{\partial x^2 \partial \varphi^6} + \frac{1}{R^8} \frac{\partial^8 \tilde{w}}{\partial \varphi^8} \right) + \\ & + \frac{\tilde{E}h}{R^2} \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial x^4} - \rho h \omega^2 \left( \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial x^4} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial x^2 \partial \varphi^2} + \frac{1}{R^4} \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \varphi^4} \right) = N_{xx}^0 \frac{\partial^6 \tilde{w}}{\partial x^6} + \\ & + \frac{1}{R^2} N_{\varphi\varphi}^0 \frac{\partial^6 \tilde{w}}{\partial x^4 \partial \varphi^2} + \frac{2}{R} N_{x\varphi}^0 \frac{\partial^6 \tilde{w}}{\partial x^5 \partial \varphi} + \frac{2}{R^2} N_{xx}^0 \frac{\partial^6 \tilde{w}}{\partial x^4 \partial \varphi^2} + \frac{2}{R^4} N_{\varphi\varphi}^0 \frac{\partial^6 \tilde{w}}{\partial x^2 \partial \varphi^4} + \\ & + \frac{4}{R^3} N_{x\varphi}^0 \frac{\partial^6 \tilde{w}}{\partial x^3 \partial \varphi^3} + \frac{1}{R^4} N_{xx}^0 \frac{\partial^6 \tilde{w}}{\partial x^2 \partial \varphi^4} + \frac{1}{R^6} N_{\varphi\varphi}^0 \frac{\partial^6 \tilde{w}}{\partial \varphi^6} + \frac{2}{R^5} N_{x\varphi}^0 \frac{\partial^6 \tilde{w}}{\partial x \partial \varphi^5} + \\ & + \frac{\partial^4 \tilde{q}}{\partial x^4} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial^4 \tilde{q}}{\partial x^2 \partial \varphi^2} + \frac{1}{R^4} \frac{\partial^4 \tilde{q}}{\partial \varphi^4}. \end{aligned} \quad (6)$$

Таким чином, рівняння (6) описує коливання циліндричної оболонки при наявності попередніх напружень.

В даній роботі розглядаються осесиметричні коливання циліндричної оболонки під дією нормального зовнішнього навантаження  $\tilde{q}$ , розподіленого вздовж твірної за певним законом та в часі за гармонічним законом, при наявності лише осьового попереднього зусилля  $N_{xx}^0$ . В цьому випадку прогин є функцією однієї просторової координати  $x$ ,  $\tilde{w} = \tilde{w}(x)$ , а рівняння коливань оболонки (6) з врахуванням рівності нулю похідних за коловою координатою, набирає вигляду

$$\tilde{D} \frac{\partial^8 \tilde{w}}{\partial x^8} + \frac{\tilde{E}h}{R^2} \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial x^4} - \rho h \omega^2 \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial x^4} = N_{xx}^0 \frac{\partial^6 \tilde{w}}{\partial x^6} + \frac{\partial^4 \tilde{q}}{\partial x^4}. \quad (7)$$

Рівняння (7) є рівнянням коливань циліндричної оболонки з врахуванням попередніх напружень в осесиметричній постановці.

**1.2. Механічні граничні умови.** Для даної оболонки приймаються умови шарнірного опирання на її торцях:

$$\tilde{w} = 0, \quad \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, L. \quad (8)$$

Рівняння (7) разом з граничними умовами (8) формують постановку механічної задачі про стаціонарні осесиметричні вимушені коливання шарнірно опертої кругової циліндричної оболонки з попередніми напруженнями.

**1.3. Рівняння теплопровідності оболонки.** Оскільки досліджувана задача вібро-розігріву є зв'язаною по дисипативній функції, то повна постановка задачі також повинна містити рівняння теплопровідності для кругової циліндричної оболонки.

Нехай  $\lambda$  і  $\alpha_S$  – коефіцієнти теплопровідності та тепловіддачі з бічних поверхонь оболонки;  $T$  – температура оболонки;  $T_C$  – температура навколишнього середовища;  $c$  – теплоємність.

Дисипативна функція задається наступним виразом [14 – 16]:

$$\langle W_D \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dt, \quad (9)$$

де  $\langle (\cdot) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T (\cdot) dt$ ;  $\sigma_{ij}$  і  $\varepsilon_{ij}$  – тензор напружень та деформацій, відповідно.

Рівняння теплопровідності в осесиметричному випадку з врахуванням (9) набуває вигляду

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \nabla^2 T - \frac{2\alpha_S}{h} (T - T_C) + \langle W_D \rangle, \quad (10)$$

де  $\nabla^2 T = \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ .

Інтегрування цього рівняння за товщиною оболонки дозволяє отримати рівняння теплопровідності для осередненої температури. В припущенні сталості температури за товщиною оболонки маємо:  $T = T(x, \varphi)$ . Тоді рівняння (10) набуває вигляду:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) - \frac{2\alpha_S}{h} (T - T_C) + \langle W_D \rangle. \quad (11)$$

Дисипативна функція, загальний вигляд якої представлено в (9), записується так:

$$h \langle W_D \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T h \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dt = \frac{1}{T} \int_0^T N_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dt = \langle \bar{W}_D \rangle,$$

де  $\langle \bar{W}_D \rangle$  – осереднена за період коливань і за товщиною оболонки дисипативна функція.

Остаточно рівняння нестационарної теплопровідності для осесиметричної кругової циліндричної оболонки набуває вигляду:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) - \frac{2\alpha_S}{h} (T - T_C) + \frac{\langle \bar{W}_D \rangle}{h}. \quad (12)$$

**1.4. Теплові граничні умови.** Для повного замикання постановки задачі крім рівняння коливань (7), теплопровідності (12) і механічних граничних умов (8) необхідно сформулювати теплові граничні умови. Вважаємо, що на внутрішній і зовнішній бічних поверхнях заданий конвективний теплообмін:  $-\lambda(\partial T)/(\partial n) = \alpha_S(T - T_C)$ , а торці циліндричної оболонки є теплоізольованими:  $(\partial T)/(\partial n) = 0$ .

## 2. Власні частоти осесиметричних коливань циліндричної оболонки.

Для визначення власних частот коливань оболонки використовуємо класичний підхід, який полягає в аналізі вільних коливань оболонки при рівному нулю зовнішньому навантаженні  $q(x) = 0$ . Тоді з (7) отримуємо рівняння вільних коливань оболонки у вигляді

$$D_0 \frac{\partial^8 w}{\partial x^8} + \frac{E_0 h}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \rho h \omega^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = N_{xx}^0 \frac{\partial^6 w}{\partial x^6}, \quad (13)$$

де модуль Юнга та згинальна жорсткість оболонки визначаються наступним чином:  $D_0^2 = D'^2 + D''^2$ ;  $E_0^2 = E'^2 + E''^2$ .

Розв'язок рівняння (13) шукаємо у вигляді, який тотожно задовольняє граничним умовам (8)

$$w_m(x) = A_m \sin \frac{m\pi x}{L}, \quad (14)$$

де  $m = 0, 1, 2, 3 \dots$ ;  $A_m$  – константа (амплітуда вільних коливань).

Підставляючи (14) у рівняння (13), після перетворень отримаємо вираз

$$D_0 \left( \frac{m\pi}{L} \right)^4 \sin \frac{m\pi x}{L} + \frac{E_0 h}{R^2} \sin \frac{m\pi x}{L} - \rho h \omega_m^2 \sin \frac{m\pi x}{L} + N_{xx}^0 \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{L} = 0.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при  $\sin m\pi x / L$ , маємо:

$$D_0 \left( \frac{m\pi}{L} \right)^4 + \frac{E_0 h}{R^2} - \rho h \omega_m^2 + N_{xx}^0 \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 = 0,$$

звідки знаходимо власну частоту коливань циліндричної оболонки

$$\omega_m = \sqrt{\frac{1}{\rho h} \left[ D_0 \left( \frac{m\pi}{L} \right)^4 + \frac{E_0 h}{R^2} + N_{xx}^0 \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \right]}. \quad (15)$$

Формула (15) містить попередні напруження  $N_{xx}^0$ , які відомим чином впливають на значення власних частот: при розтязі частота збільшується, а при стиску – зменшується.

## 3. Побудова розв'язку задачі.

**3.1. Розв'язок механічної задачі коливань оболонки.** Задача про вимушені коливання циліндричної оболонки описується рівнянням (7) із граничними умовами (8). Представимо комплексне рівняння (7) у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} (D' + iD'') \left( \frac{d^8 w'}{dx^8} + i \frac{d^8 w''}{dx^8} \right) + \left( \frac{E'h}{R^2} + i \frac{E''h}{R^2} \right) \left( \frac{d^4 w'}{dx^4} + i \frac{d^4 w''}{dx^4} \right) - \\ - \rho h \omega^2 \left( \frac{d^4 w'}{dx^4} + i \frac{d^4 w''}{dx^4} \right) = N_{xx}^0 \left( \frac{d^6 w'}{dx^6} + i \frac{d^6 w''}{dx^6} \right) + \left( \frac{d^4 q'}{dx^4} + i \frac{d^4 q''}{dx^4} \right), \end{aligned}$$

де  $w'$ ,  $w''$  – амплітуди прогинів.

Виділяючи дійсну та уявну частини, отримуємо систему двох дійсних алгебраїчних рівнянь відносно дійсної і уявної частин амплітуди прогину

$$\begin{aligned} D' \frac{d^8 w'}{dx^8} + D'' \frac{d^8 w''}{dx^8} + \frac{E'h}{R^2} \frac{d^4 w'}{dx^4} + \frac{E''h}{R^2} \frac{d^4 w''}{dx^4} - \rho h \omega^2 \frac{d^4 w''}{dx^4} &= N_{xx}^0 \frac{d^6 w''}{dx^6} + \frac{d^4 q''}{dx^4}; \\ D' \frac{d^8 w'}{dx^8} - D'' \frac{d^8 w''}{dx^8} + \frac{E'h}{R^2} \frac{d^4 w'}{dx^4} - \frac{E''h}{R^2} \frac{d^4 w''}{dx^4} - \rho h \omega^2 \frac{d^4 w'}{dx^4} &= N_{xx}^0 \frac{d^6 w'}{dx^6} + \frac{d^4 q'}{dx^4}. \end{aligned} \quad (16)$$

Граничні умови (8) набувають вигляду:

$$w' = w'' = 0, \quad \frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w''}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = 0, L. \quad (17)$$

Отже, рівняння руху оболонки (7) разом з граничними умовами (8) еквівалентно системі рівнянь (16) при граничних умовах (17).

Розв'язок системи (16) шукаємо у вигляді, який задовольняє граничним умовам (17):

$$w'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} w'_m \sin \frac{m\pi x}{L}; \quad w''(x) = \sum_{m=1}^{\infty} w''_m \sin \frac{m\pi x}{L}, \quad (18)$$

де  $w'_m, w''_m$  – амплітуди прогинів (невідомі величини) для  $m$ -тої власної форми коливань, що відповідають власній частоті  $\omega_m$ , яка знаходиться за формулою (15).

Колівання оболонки досліджуємо в білярезонансній області з частотами, близькими відповідній власній частоті для моди коливань з номером  $m$ , тобто в околі  $\omega_m$ . Для описання таких коливань вважаємо, що зовнішнє розподілене навантаження, яке виражається формулою (4), розподілене по поверхні оболонки за відповідним цій моді законом:

$$q(x, t) = q_m^{0'} \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \omega t - q_m^{0''} \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \omega t, \quad (19)$$

де  $q_m^{0'}, q_m^{0''}$  – дійсна і уявна частини амплітуди зовнішнього тиску, причому у випадку зміни зовнішнього навантаження в часі за законом лише синуса чи косинуса цей вираз спрощується відповідним чином. Вводячи у виразі (19) позначення  $q_{mn}' = q'$ ,  $q_{mn}'' = q''$ , отримуємо розподіли зовнішнього навантаження по поверхні оболонки:

$$q'(x) = q' \sin \frac{m\pi x}{L}; \quad q''(x) = q'' \sin \frac{m\pi x}{L}. \quad (20)$$

За зазначених умов реакція оболонки визначається резонуючою модою  $m$ , а внеском інших мод можна знехтувати. Тоді розв'язок (18) набуває вигляду:

$$w'(x) = w'_m \sin \frac{m\pi x}{L}, \quad w''(x) = w''_m \sin \frac{m\pi x}{L}. \quad (21)$$

Підставляючи розв'язок (21) та вирази (20) в систему (19) та прирівнюючи коефіцієнти при  $\sin m\pi x / L$ , отримуємо систему двох лінійних алгебраїчних рівнянь відносно  $w'_m$  та  $w''_m$ :

$$\begin{aligned} w'_m [D'A - \rho h \omega^2 + B] - w''_m [D''A + C] &= q'; \\ w'_m [D''A + C] + w''_m [D'A - \rho h \omega^2 + B] &= q'', \end{aligned} \quad (22)$$

$$\text{де } A = \left( \frac{m\pi}{L} \right)^4; \quad B = \frac{E'h}{R^2} + N_{xx}^0 \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2; \quad C = \frac{E''h}{R^2}.$$

Розв'язуючи систему (22) відносно комплексних амплітуд, отримуємо

$$w'_m = \frac{q' \left[ D' \left( \frac{m\pi}{L} \right)^4 - \rho h \omega^2 + \frac{E'h}{R^2} + N_{xx}^0 \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \right] + q'' \left[ D'' \left( \frac{m\pi}{L} \right)^4 + \frac{E''h}{R^2} \right]}{\left[ D' \left( \frac{m\pi}{L} \right)^4 - \rho h \omega^2 + \frac{E'h}{R^2} + N_{xx}^0 \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \right]^2 + \left[ D'' \left( \frac{m\pi}{L} \right)^4 + \frac{E''h}{R^2} \right]^2},$$

$$w''_m = \frac{q'' \left[ D' \left( \frac{m\pi}{L} \right)^4 - \rho h \omega^2 + \frac{E'h}{R^2} + N_{xx}^0 \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \right] - q' \left[ D'' \left( \frac{m\pi}{L} \right)^4 + \frac{E''h}{R^2} \right]}{\left[ D' \left( \frac{m\pi}{L} \right)^4 - \rho h \omega^2 + \frac{E'h}{R^2} + N_{xx}^0 \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \right]^2 + \left[ D'' \left( \frac{m\pi}{L} \right)^4 + \frac{E''h}{R^2} \right]^2}.$$
(23)

Таким чином, розв'язок в околі власної частоти  $\omega_m$  при резонансних коливаннях записується у наступній формі:

$$w_m(x, t) = w'_m \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \omega t - w''_m \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \omega t. \quad (24)$$

Розподіл амплітуд прогинів вздовж твірної оболонки буде:

$$w_m(x) = \sqrt{(w'_m)^2 + (w''_m)^2} \sin \frac{m\pi x}{L}, \quad (25)$$

де квадрат амплітуди прогину знаходиться за формулою  $|\tilde{w}_m|^2 = (w'_m)^2 + (w''_m)^2$ , а  $w'_m$ ,  $w''_m$  виражаються за формулою (23).

Таким чином, розв'язок механічної задачі про гармонічні коливання оболонки в осесиметричній постановці описується розв'язком (24), а стаціонарний розподіл переміщень по оболонці набуває вигляду (25).

**3.2. Розв'язок задачі стаціонарної теплопровідності циліндричної оболонки.** Рівняння стаціонарної теплопровідності для оболонки записується у вигляді:

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{2\alpha_S}{h} (T - T_C) + \frac{\langle \bar{W}_D \rangle}{h} = 0. \quad (26)$$

Позначимо температуру вібророзігріву через  $\theta$ ,  $\theta = T - T_C$ . Тоді рівняння (26) набуває вигляду:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{2\alpha_S \theta}{\lambda h} + \frac{\langle \bar{W}_D \rangle}{\lambda h} = 0. \quad (27)$$

Рівняння (27) є рівнянням стаціонарної теплопровідності для циліндричної оболонки в осесиметричній постановці.

На торцях оболонки задаються умови теплоізоляції:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0, L. \quad (28)$$

Для їх виконання розв'язок рівняння (27) шукається у вигляді:

$$\theta(x) = \theta_0 + \theta_1 \cos \frac{2m\pi x}{L}, \quad (29)$$

де  $\theta_0$ ,  $\theta_1$  – константи, що підлягають визначенню. Для цього виразимо усі доданки рівняння (27) як функції просторової координати  $x$



$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \theta_1 \left\{ -\frac{2m\pi}{L} \sin \frac{2m\pi x}{L} \right\} \right) = -4 \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \theta_1 \cos \frac{2m\pi x}{L}. \quad (30)$$

Після алгебраїчних перетворень остаточно вираз для дисипативної функції набуває наступного вигляду:

$$\langle \bar{W}_D \rangle = \frac{\omega}{4} |\tilde{w}_m|^2 \left[ D'' \left( \frac{m\pi}{L} \right)^4 + \frac{E''h}{R^2} \right] \left( 1 - \cos \frac{2m\pi x}{L} \right). \quad (31)$$

Підставляючи вирази (29), (30) та (31) в рівняння стаціонарної теплопровідності (28) та прирівнюючи коефіцієнти при відповідних вільних членах та косинусі  $\cos 2m\pi x / L$ , отримуємо вирази для констант:

$$\theta_0 = \frac{\omega}{8} \frac{|\tilde{w}_m|^2}{\alpha_S} \left[ D'' \left( \frac{m\pi}{L} \right)^4 + \frac{E''h}{R^2} \right]; \quad \theta_1 = -\frac{\omega}{8} \frac{|\tilde{w}_m|^2}{\left\{ 2\lambda h \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 + \alpha_S \right\}} \left[ D'' \left( \frac{m\pi}{L} \right)^4 + \frac{E''h}{R^2} \right], \quad (32)$$

де  $|\tilde{w}_m|^2 = (w'_m)^2 + (w''_m)^2$ .

Таким чином, підставляючи коефіцієнти (32) в (29), отримуємо температурне поле в оболонці, що коливається на частоті, близькій до  $m$ -тої резонансної.

**3.3. Розв'язок нестационарної задачі теплопровідності.** Для визначення ресурсу конструкції в режимі вимушених коливань для закритичних значень амплітуди навантаження розв'язується нестационарна задача теплопровідності. Для оцінки витривалості для різних величин попередніх напружень використовуються діаграми Веллера, які зв'язують рівень навантаження з кількістю циклів коливань до руйнування.

Нестационарне температурне поле циліндричної оболонки описується усередненим за період коливань і по товщині оболонки рівнянням нестационарної теплопровідності (15)

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda h \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - 2\alpha_S (T - T_C) + \langle \bar{W}_D \rangle, \quad (33)$$

де температура та дисипативна функція залежать лише від осової координати:  $T = T(x)$ ,  $\langle \bar{W}_D \rangle = \langle \bar{W}_D \rangle(x)$ .

На торцях циліндричної оболонки температура вважається сталою, тому граничні умови мають вигляд:

$$T(0, t) = T_C; \quad T(L, t) = T_C. \quad (34)$$

Початкова умова по температурі записується наступним чином:

$$T(x, 0) = T_C. \quad (35)$$

Задача нестационарної теплопровідності (33) – (35) розв'язується чисельно із використанням явної скінченно-різницевої схеми за просторовою координатою та за часом.

#### 4. Числові результати та їх аналіз.

**4.1. Числові розрахунки для стаціонарної задачі термомеханіки та їх аналіз.** Досліджуються коливання циліндричної оболонки довжиною  $L = 0,09$  м, радіусом  $R = 0,015$  м та товщиною  $h = 0,001$  м. Числові розрахунки проводяться для випадку поліетилену, що характеризується наступними значеннями комплексних модулів накопичення і втрат:  $E' = 8,0 \cdot 10^8$  Н/м<sup>2</sup>,  $E'' = 6,3 \cdot 10^6$  Н/м<sup>2</sup>. Коефіцієнт Пуассона та густина матеріалу дорівнюють  $\nu = 0,46$  та  $\rho = 953$  кг/м<sup>3</sup>, відповідно. В роботі вибрано

варіант теорії циклічної в'язкопружності, в якому коефіцієнт Пуассона вважається дійсним, а об'ємний модуль – комплексною величиною. Коефіцієнти тепловіддачі на зовнішній та внутрішній поверхнях оболонки вважаються однаковими і рівними  $\alpha_S = 4 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C})$ , а коефіцієнт теплопровідності –  $\lambda = 0,36 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot ^\circ\text{C})$ .

Коливання оболонки розраховуються при наявності попереднього навантаження  $N_{xx}^0 = 20 \text{ кН}/\text{м}$ , тоді на основній формі коливань ( $m = 1$ ) власна частота коливань дорівнює  $f_1 = 9754,9 \text{ Гц}$ . Розрахунки проводяться в околі цієї частоти.

На рис. 2 показані розподіли прогину (рис. 2, а) та температури (рис. 2, б) вздовж осьової координати  $x$ . Під дією зовнішнього тиску на оболонку з амплітудою  $q' = 880 \text{ Н}/\text{м}^2$  (при  $q'' = 0$ ) максимальний прогин на першій формі коливань досягається в центрі оболонки та становить  $w_{\max} = 3,14 \cdot 10^{-5} \text{ м}$ , що приблизно дорівнює 0,03 від товщини оболонки. Максимальна температура вібророзігріву також досягається в цій точці і дорівнює  $\theta_{\max} = 96,41 \text{ }^\circ\text{C}$ .

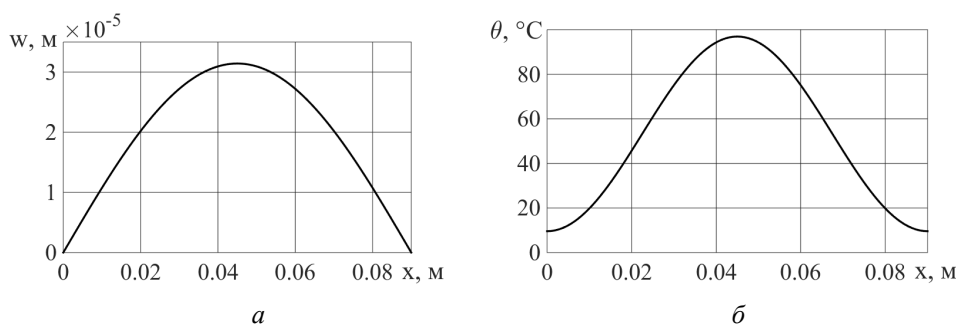


Рис. 2

Для поліетилену, який вибрано як матеріал оболонки, температура плавлення становить  $120^\circ\text{C}$ . Тому в роботі критична величина температури розігріву  $\theta_{cr}$  вибирається рівною  $100^\circ\text{C}$ , при якій спостерігається помітне розм'якшення даного еластомерного матеріалу.

На рис. 3 побудовано амплітудно- і температурно-частотні характеристики коливань оболонки для точки з координатою  $x = L/2$  на першій моді коливань в околі першої резонансної частоти при наявності попереднього зусилля  $N_{xx}^0 = 20 \text{ кН}/\text{м}$  під дією наступних значень амплітуд зовнішнього тиску:  $q' = 500 \text{ Н}/\text{м}^2$  (штрих-пунктирна лінія),  $q' = 700 \text{ Н}/\text{м}^2$  (суцільна лінія) та  $q' = 880 \text{ Н}/\text{м}^2$  (штрихова лінія), відповідно.

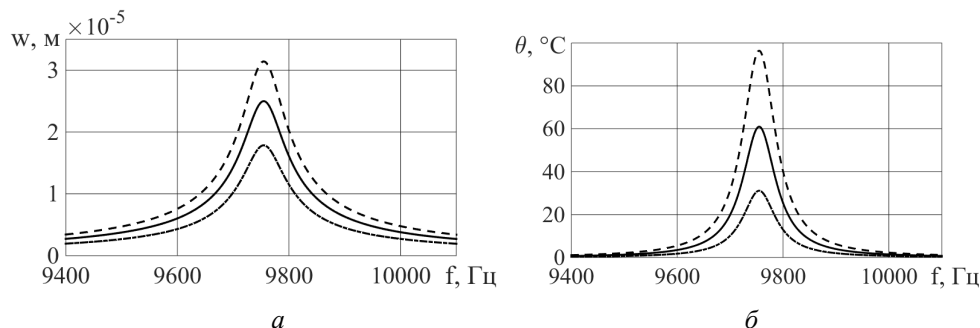


Рис. 3

Рис. 3, *a* ілюструє зростання амплітуди прогину при зростанні амплітуди зовнішнього навантаження при фіксованому значенні попередніх напружень. Поведінка є типовою для конструкцій з в'язкопружних еластомерних матеріалів. З рис. 3, *б* видно, що на резонансі зі збільшенням амплітуди зовнішнього тиску температура різко зростає, а критичне значення зовнішнього навантаження  $q_{cr}$  визначається як навантаження, при якому температура вібророзігріву досягає значення  $\theta_{cr}$ .

На рис. 4 зображено амплітудно- і температурно-частотні характеристики (АЧХ, ТЧХ) коливань оболонки в точці максимальних переміщень та температур, тобто при  $x = L/2$ , в околі першої резонансної частоти при амплітуді зовнішнього навантаження  $q' = 880 \text{ Н/м}^2$  при наступних значеннях попереднього навантаження  $N_{xx}^0$ :  $N_{xx}^0 = 0$  (штрих-пунктирна лінія),  $N_{xx}^0 = 20 \text{ кН/м}$  (суцільна лінія) та  $N_{xx}^0 = 50 \text{ кН/м}$  (штрихова лінія), відповідно.

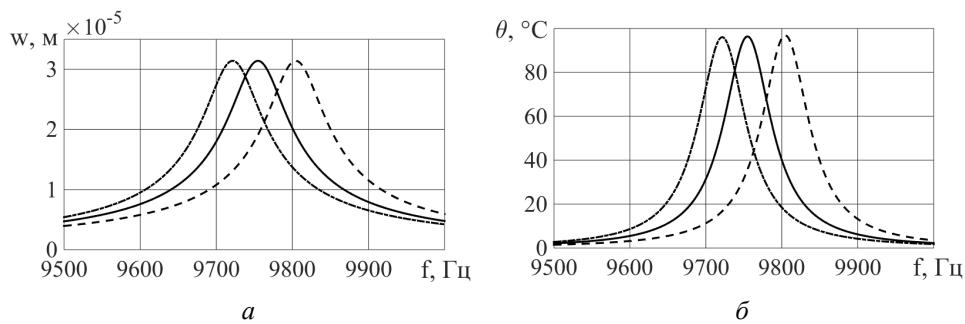


Рис. 4

На рис. 4, *a* спостерігається ефект зсуву резонансної частоти вправо при збільшенні величини попереднього напруження в оболонці, але при цьому амплітуда прогину не змінюється ( $w_{\max} = 3,14 \cdot 10^{-5} \text{ м}$ ), що відповідає відомому теоретичному та експериментальному результату. Аналогічна ситуація спостерігається і для ТЧХ (рис. 4, *б*). Зсув частотної кривої вправо при збільшенні попереднього зусилля не супроводжується значним підвищенням температури. Максимальна температура досягається при  $N_{xx}^0 = 50 \text{ кН/м}$  та становить  $\theta_{\max} = 96,91 \text{ }^\circ\text{C}$ .

На рис. 5 показана залежність максимальної температури розігріву циліндричної оболонки від амплітуди зовнішнього навантаження  $q'$  для коливань в режимі фіксованої частоти при наступних значеннях попередніх зусиль:  $N_{xx}^0 = 0$  (штрих-пунктирна лінія),  $N_{xx}^0 = 20 \text{ кН/м}$  (суцільна лінія) та  $N_{xx}^0 = 50 \text{ кН/м}$  (штрихова лінія), відповідно.

На рис. 5, *a* максимальний вібророзігрів спостерігається на частоті  $f = 9721,7 \text{ Гц}$ , що відповідає основній власній частоті коливань оболонки при  $N_{xx}^0 = 0$ , тобто на зростаючій гілці характеристики. На рис. 5, *б* аналогічні розрахунки проводяться на частоті  $f = 9804,6 \text{ Гц}$ , що відповідає основній власній частоті коливань оболонки при  $N_{xx}^0 = 50 \text{ кН/м}$ , тобто на спадній гілці характеристики. Максимальна температура збільшується при зростанні попереднього зусилля  $N_{xx}^0$ . На зростаючій гілці під дією навантаження  $q' = 900 \text{ Н/м}^2$  максимальний розігрів досягається при  $N_{xx}^0 = 0$  та дорівнює  $\theta_{\max} = 100,5 \text{ }^\circ\text{C}$ . На спадній гілці під дією зовнішнього тиску  $q' = 900 \text{ Н/м}^2$  максимальна температура спостерігається при  $N_{xx}^0 = 50 \text{ кН/м}$  та становить  $\theta_{\max} = 101,4 \text{ }^\circ\text{C}$ .

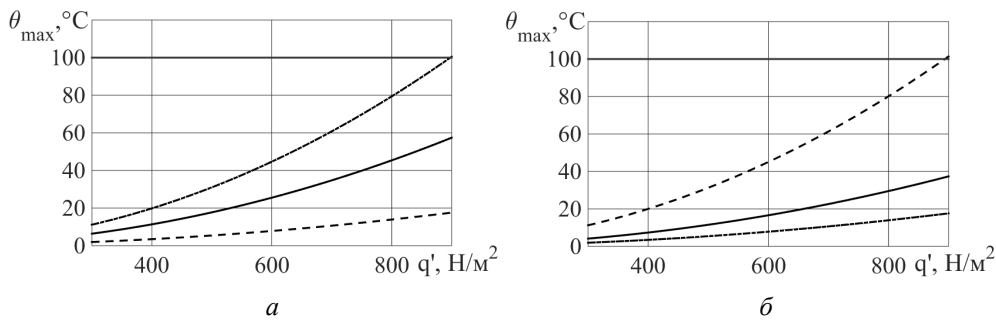


Рис. 5

Дослідження залежності максимальної температури коливань циліндричної еластомерної оболонки від попереднього напруження проілюстровано на рис. 6. На цьому графіку показано результати розрахунків під дією наступних значень амплітуд зовнішнього навантаження:  $q' = 700 \text{ Н/м}^2$  (штрих-пунктирна лінія),  $q' = 880 \text{ Н/м}^2$  (суцільна лінія) та  $q' = 1000 \text{ Н/м}^2$  (штрихова лінія), відповідно.

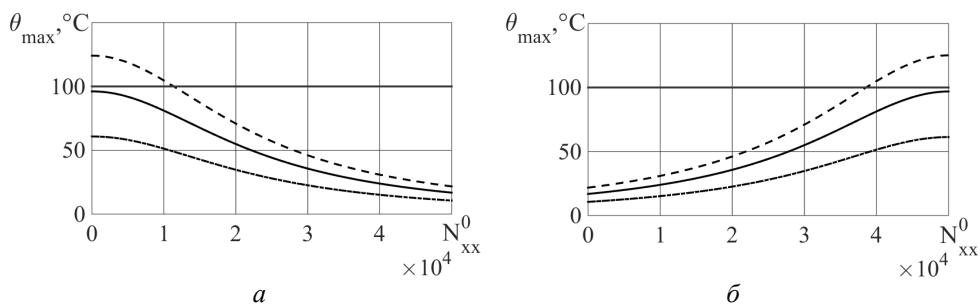


Рис. 6

На рис. 6, *а* показано результати розрахунків коливань оболонки в режимі фіксованої частоти  $f = 9721,7 \text{ Гц}$  на зростаючій гілці. З графіку видно, що при збільшенні попереднього напруження максимальна температура вібророзігріву на заданій частоті коливань зменшується, в той час, як збільшення амплітуди зовнішнього тиску призводить до зростання максимальної температури. Така поведінка пояснюється ефектом динамічності. В такому випадку наявність попереднього напруження позитивно впливає на втомну міцність, що розраховується за тепловим критерієм, оскільки максимальна температура знижується і, відповідно, теплове руйнування не спостерігається.

На рис. 6, *б* наведені аналогічні результати для режиму фіксованої частоти  $f = 9804,6 \text{ Гц}$ , тобто коливанням на спадній гілці АЧХ. На цьому графіку помітно, що збільшення попереднього зусилля призводить до збільшення (для заданої частоти коливань) температури розігріву. При збільшенні амплітуди зовнішнього навантаження максимальна температура зростає.

Дослідження гармонічних коливань циліндричної в'язкопружної оболонки проведено і для вищих форм коливань. Результати для другої форми коливань ( $m = 2$ ) показані на рис. 7 – 11. Максимальні прогини та температури в цьому випадку досягаються при  $x = L/4$  та  $x = 3L/4$ . Розподіли переміщень та температур вздовж осьової координати на цій моді коливань зображені на рис. 7, які розраховані на частоті  $f_2 = 9856,6 \text{ Гц}$ , що є власною частотою на другій формі коливань за наявності попереднього зусилля  $N_{xx}^0 = 20 \text{ кН/м}$ .

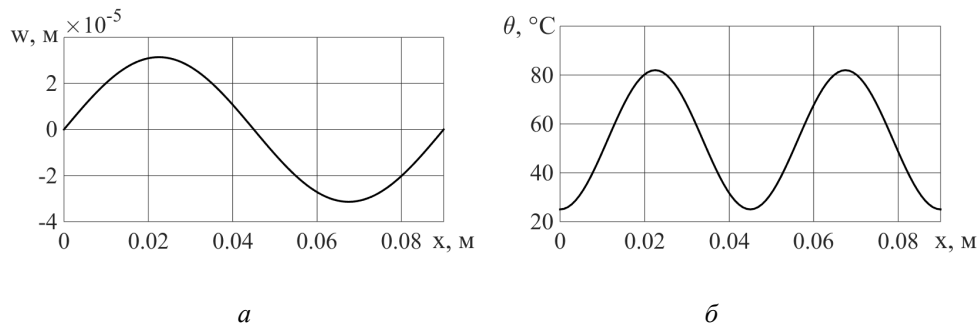


Рис. 7

При дії зовнішнього тиску з тією ж амплітудою  $q' = 880 \text{ Н/м}^2$ , як і для першої форми коливань, максимальний прогин на другій формі коливань відповідає значенням максимального переміщення (на першій моді коливань) і дорівнює  $w_{\max} = 3,14 \cdot 10^{-5} \text{ м}$ , а максимальний розігрів на другій моді коливань становить  $\theta_{\max} = 82 \text{ }^\circ\text{C}$ .

На рис. 8 розраховані АЧХ та ТЧХ на другій формі коливань при наявності попереднього зусилля  $N_{xx}^0 = 20 \text{ кН/м}$  в околі другої резонансної частоти в точках максимальних переміщень під дією навантажень:  $q' = 500 \text{ Н/м}^2$  (штрих-пунктирна лінія),  $q' = 700 \text{ Н/м}^2$  (суцільна лінія) та  $q' = 880 \text{ Н/м}^2$  (штрихова лінія).

Амплітудно- і температурно-частотні характеристики коливань оболонки на другій моді демонструють поведінку, якісно аналогічну поведінці на першій моді коливань.

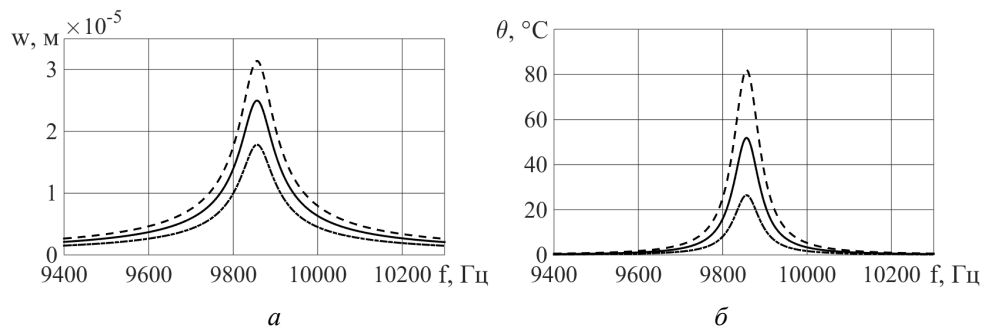


Рис. 8

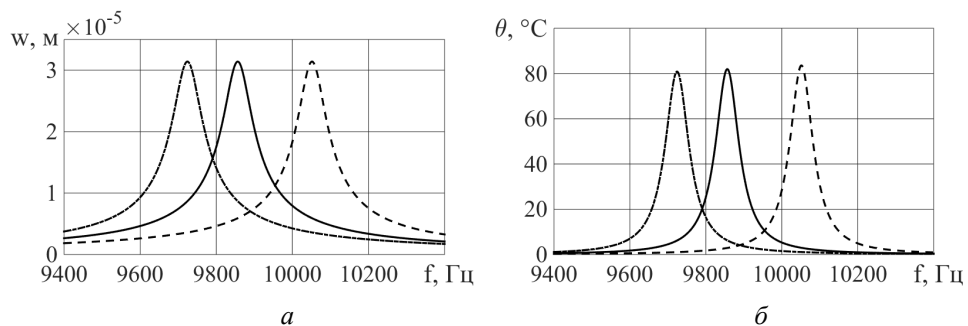


Рис. 9

На рис. 9 побудовано АЧХ та ГЧХ коливань оболонки в точці максимальних прогинів та температур ( $x = L/4$  чи  $x = 3L/4$ ) в околі другої резонансної частоти при амплітуді зовнішнього тиску  $q' = 880 \text{ Н/м}^2$  для таких значень попереднього зусилля:  $N_{xx}^0 = 0$  (штрих-пунктирна лінія),  $N_{xx}^0 = 20 \text{ кН/м}$  (суцільна лінія) та  $N_{xx}^0 = 50 \text{ кН/м}$  (штрихова лінія), відповідно.

Рис. 9, *а* ілюструє ефект зсуву резонансної частоти вправо (в область вищих значень частот) при збільшенні попереднього напруження, що відповідає поведінці оболонки на першій формі коливань. На рис. 9, *б* видно, що зсув області резонансу вправо супроводжується незначним підвищенням температури. Максимальна температура спостерігається при  $N_{xx}^0 = 50 \text{ кН/м}$  та досягає  $\theta_{\max} = 83,61 \text{ }^\circ\text{C}$ .

На рис. 10, *а* зображена залежність максимальної температури розігріву оболонки від амплітуди зовнішнього тиску  $q'$  при різних значеннях попереднього зусилля  $N_{xx}^0$  для коливань в режимі фіксованої частоти  $f = 9724,3 \text{ Гц}$ , що відповідає власній частоті на другій моді коливань оболонки при  $N_{xx}^0 = 0$  (зростаюча гілка). На цьому графіку максимальні значення розігріву показані для  $N_{xx}^0 = 0$  (штрих-пунктирною лінією),  $N_{xx}^0 = 5 \text{ кН/м}$  (суцільною лінією) та  $N_{xx}^0 = 10 \text{ кН/м}$  (штриховою лінією), відповідно. Максимальна температура зменшується при зростанні  $N_{xx}^0$ .

На рис. 10, *б* показана аналогічна залежність, але коливання досліджуються в режимі фіксованої частоти  $f = 10052 \text{ Гц}$ , що відповідає власній частоті коливань оболонки при  $N_{xx}^0 = 50 \text{ кН/м}$  (спадна гілка). Тут штрих-пунктирною, суцільною та штриховою лініями показані розрахунки для  $N_{xx}^0 = 50 \text{ кН/м}$ ,  $N_{xx}^0 = 45 \text{ кН/м}$  та  $N_{xx}^0 = 40 \text{ кН/м}$ , відповідно.

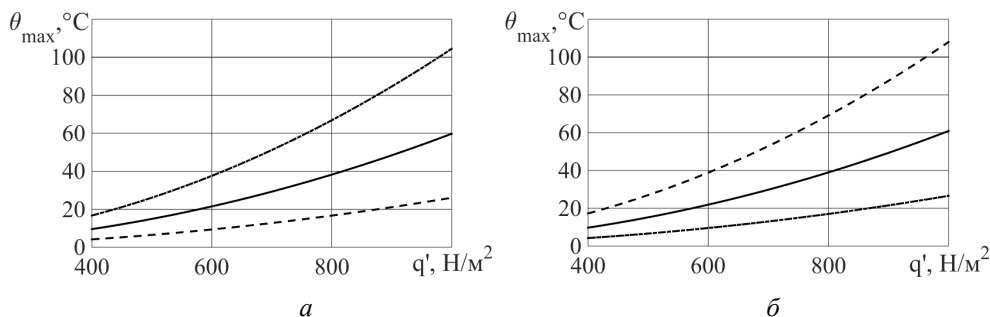


Рис. 10

Результати розрахунків залежності максимальної температури коливань еластомерної оболонки від попереднього напруження на другій моді коливань проілюстровано на рис. 11. Дана залежність розраховується для таких значень амплітуди зовнішнього тиску:  $q' = 700 \text{ Н/м}^2$  (штрих-пунктирна лінія),  $q' = 880 \text{ Н/м}^2$  (суцільна лінія) та  $q' = 1000 \text{ Н/м}^2$  (штрихова лінія).

На рис. 11, *а* досліджуються коливання в режимі фіксованої частоти на зростаючій гілці, тобто на частоті  $f = 9724,3 \text{ Гц}$ . З цього графіку видно, що збільшення попереднього напруження, як і для першої форми коливань, призводить до зменшення (для заданої частоти коливань) температури вібророзігріву, в той час, як збільшення амплітуди зовнішнього тиску призводить до зростання максимальної температури.

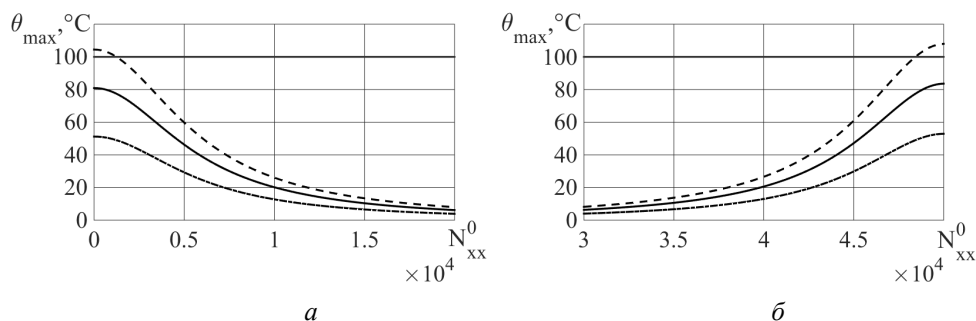


Рис. 11

На рис. 11, б розраховуються коливання на спадній гілці, тобто на частоті  $f = 10052$  Гц. З цього графіку видно, що збільшення попереднього зусилля призводить до збільшення (для заданої частоти коливань) температури розігріву, оскільки збільшення амплітуди зовнішнього навантаження призводить до зростання максимальної температури. В такому випадку присутність попереднього напруження негативно впливає на втомну міцність, що розраховується за тепловим критерієм.

**4.2. Результати розрахунку нестационарної температурної задачі для циліндричної оболонки.** При закритичних рівнях амплітуди навантаження постає питання визначення втомної витривалості досліджуваної циліндричної оболонки. Зв'язана задача теплопровідності розв'язується у два етапи. На першому етапі розв'язується стаціонарна задача механіки, в рамках якої знаходяться розподіли амплітуд основних кінематичних і силових параметрів. Ці результати використовуються для знаходження дисипативної функції. На другому етапі розв'язується нестационарна задача теплопровідності з використанням знайденої на першому етапі дисипативної функції. В результаті знаходяться еволюція температурних розподілів по оболонці, максимальної температури вібророзігріву і кількість циклів коливань до досягнення критичного значення температури  $\theta_{cr}$ .

Отже, другий етап полягає в знаходженні розв'язку рівняння нестационарної теплопровідності (33), доповненого граничними умовами (34) та початковою умовою (35).

Температура навколишнього середовища задається  $T_C = 20$  °C.

Для того, щоб охарактеризувати просторовий розподіл температури вібророзігріву циліндричної оболонки ( $L = 0,09$  м,  $R = 0,015$  м,  $h = 0,001$  м), будується залежність зміни температури вздовж осьової координати на першій ( $f_1 = 9754,9$  Гц) та другій ( $f_2 = 9856,6$  Гц) резонансних частотах при наявності попереднього зусилля  $N_{xx}^0 = 20$  кН/м. Час розігріву оболонки до критичного значення на першій формі коливань становить  $t = 400$  с. Отримані розподіли зображені на рис. 12 для таких значень амплітуд зовнішнього навантаження:  $q' = 500$  Н/м<sup>2</sup> (штрих-пунктирна лінія),  $q' = 700$  Н/м<sup>2</sup> (суцільна лінія),  $q' = 800$  Н/м<sup>2</sup> (пунктирна лінія) та  $q' = 880$  Н/м<sup>2</sup> (штрихова лінія).

На рис. 12, а проілюстровано розподіл температури на першому резонансі ( $m = 1$ ). Максимальний розігрів досягається в точці  $x = L/2$  під дією амплітуди зовнішнього навантаження  $q' = 880$  Н/м<sup>2</sup> та дорівнює  $\theta_{max} = 76,8$  °C. На рис. 12, б побудовано аналогічний розподіл температури на другому резонансі ( $m = 2$ ). Максимальна температура розігріву в цьому випадку досягається в точках  $x = L/4$  і  $x = 4L/4$  і дорівнює  $\theta_{max} = 67,5$  °C для  $q' = 880$  Н/м<sup>2</sup>. З отриманих результатів можна зробити висновок, що зі збільшенням амплітуди зовнішнього навантаження температура розігріву

зростає, а перша мода коливань дає вищі значення температури оболонки, ніж друга форма коливань, тому подальші дослідження проводяться лише на першій формі коливань циліндричної оболонки.

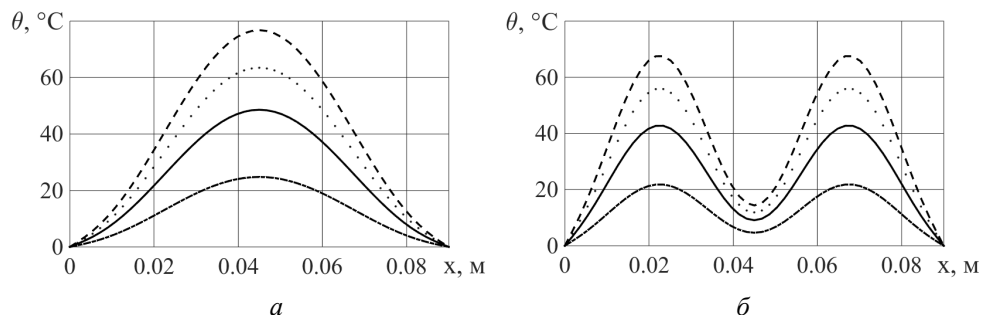


Рис. 12

Для загального аналізу нестационарної задачі на рис. 13 показано залежність температури від часу при наявності попереднього зусилля  $N_{xx}^0 = 20$  кН/м на першій резонансній частоті  $f_1 = 9754,9$  Гц для різних рівнів зовнішнього навантаження:  $q' = 700$  Н/м<sup>2</sup> (штрихована лінія),  $q' = 800$  Н/м<sup>2</sup> (суцільна лінія) та  $q' = 880$  Н/м<sup>2</sup> (штрих-пунктирна лінія). Критичне значення температури оболонки  $T_{cr} = 100$  °С позначено суцільною горизонтальною лінією.

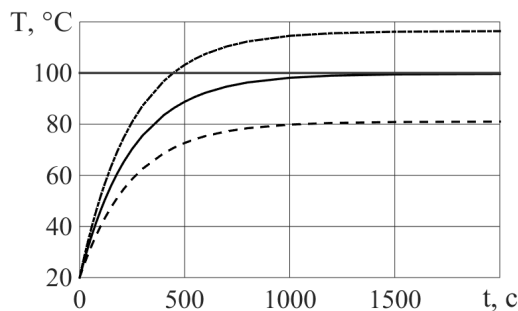


Рис. 13

Вважаємо, що тривалість періоду безпечної роботи конструкції визначається як інтервал часу, протягом якого максимальна температура вібророзігріву досягає свого критичного значення  $T_{cr} = 100$  °С. На графіку ці моменти часу визначаються точкою перетину температурних кривих та лінії критичної температури. Знаючи ці інтервали часу, можна знайти кількість циклів до руйнування за температурним критерієм. Якщо температурна крива не перетинає лінію  $T_{cr} = 100$  °С (як, наприклад, штрихова лінія на рис. 13), то під дією зовнішнього тиску такої амплітуди конструкція може працювати нескінченно довго та може вийти з ладу лише через механічне руйнування.

Таким чином, для оцінювання втомної витривалості в даній роботі використовуються діаграми Веллера або так звані втомні криві.

На рис. 14 побудовано діаграму Веллера при таких величинах попередніх зусиль:  $N_{xx}^0 = 0$  (штрих-пунктирна лінія),  $N_{xx}^0 = 20$  кН/м (суцільна лінія) та  $N_{xx}^0 = 30$  кН/м (штрихова лінія). По осі абсцис відкладено кількість циклів до руйнування.

На рис. 14, а зображено втомні криві на частоті  $f = 9721,7$  Гц, яка є резонансною для оболонки при попередньому зусиллі  $N_{xx}^0 = 0$ , що відповідає зростаючій гілці амплітудно-частотної характеристики.

Аналогічні дослідження проводяться і для спадної гілки АЧХ. На рис. 14, б втомні криві побудовано на частоті  $f = 9771,5$  Гц, що є резонансною при попередніх зусиллях  $N_{xx}^0 = 30$  кН/м.



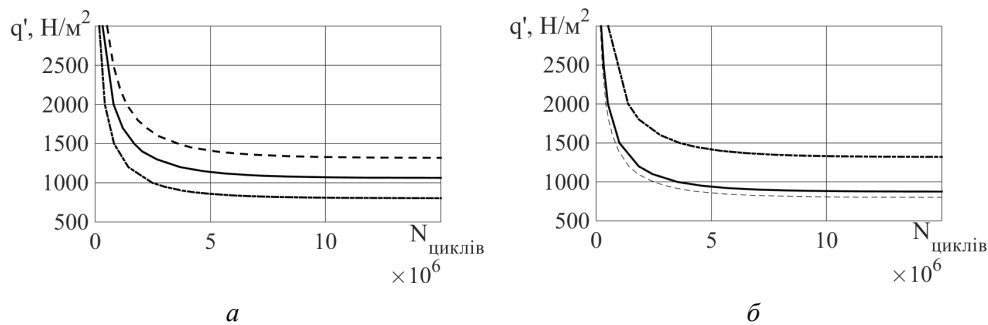


Рис. 14

Аналіз рис. 14 показує, що проілюстровані ефекти пояснюються ефектом динамічності, оскільки при збільшенні амплітуди зовнішнього навантаження і при наближенні до резонансу оболонка швидше нагрівається до критичної температури.

#### Висновки.

В даній роботі використано загальну теорію оболонок для формулювання постановки зв'язаної задачі про гармонічні коливання та дисипативний розігрів циліндричної еластомерної оболонки при наявності попередніх мембранних зусиль. Отримано розв'язок стаціонарної задачі механіки та стаціонарної і нестаціонарної задачі теплопровідності для кругової циліндричної оболонки, шарнірно закріпленої по контуру, що перебуває під дією зовнішнього моногармонічного за часом навантаження.

Для першої (найбільш енергомісткої) та другої моди осесиметричних коливань детально досліджено вплив попередніх напружень, а також рівня зовнішнього тиску на амплітудно- та температурно-частотні характеристики. Дослідження проведені для широких інтервалів значень попередніх зусиль та амплітуд зовнішнього тиску.

Втомні криві або так звані діаграми Веллера (за температурним критерієм) побудовано для різних рівнів попередніх зусиль і зовнішніх навантажень як в режимі фіксованої частоти (на зростаючій і спадній гілках характеристик), так і в режимі автопідстроювання частоти. Встановлено, що в дорезонансній області діаграми Веллера зміщуються в область вищих амплітуд зовнішнього навантаження при зростанні попередніх напружень, покращуючи при цьому міцність конструкції, спричиненою зсувом амплітудно-частотної кривої в область вищих частот. На спадній гілці АЧХ ситуація є протилежною.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано у цій статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

**РЕЗЮМЕ.** Сформульовано постановку задачі про вимушені резонансні коливання і дисипативний розігрів шарнірно опертої в'язкопружної еластомерної циліндричної оболонки, що перебуває під дією попередніх мембранних навантажень. Для опису в'язкопружних властивостей матеріалу оболонки при гармонічному в часі навантаженні використано концепцію комплексних модулів. Досліджено механічну стаціонарну і теплову (як стаціонарну, так і нестаціонарну) поведінку оболонки. Побудовано розподіли кінематичних і силових параметрів, а також температури вздовж осової координати. Досліджено залежність максимальної температури вібророзігріву від величини попереднього зусилля. Температурні криві використано для оцінки витривалості оболонки внаслідок перегріву при циклічному навантаженні. Детально досліджено вплив рівня попереднього напруження на втомну витривалість оболонки.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** резонансні коливання, гармонічне навантаження, попередньо напружена в'язкопружна оболонка, дисипативний розігрів, втомна витривалість.

1. Доннелл Л.Г. Балки, пластины и оболочки. – Москва: Наука, 1982. – 568 с.
2. Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф. Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек. – Киев: Наук. думка, 1986. – 222 с.
3. Карнаухов В.Г., Гуменюк Б.П. Термомеханика предварительно деформированных вязкоупругих тел. – Киев: Наук. думка, 1990. – 304 с.
4. Карнаухов В.Г., Сенченко И.К., Гуменюк Б.П. Термомеханическое поведение вязкоупругих тел при гармоническом нагружении – Киев: Наук. думка, 1985. – 288 с.
5. Карнаухов В.Г., Сенченко И.К., Червинко О.П. Влияние предварительного деформирования на резонансные колебания и диссипативный разогрев вязкоупругого цилиндра конечной длины // Прикл. механика. – 1997. – **33**, № 1. – С. 39 – 42.
6. Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И. Линейная теория тонких оболочек. – Ленинград: Политехника, 1991. – 656 с.
7. Потураев В.Н., Дырда В.И., Карнаухов В.Г. и др. Термомеханика эластомерных элементов конструкций при циклическом нагружении. – Киев: Наук. думка, 1987. – 288 с.
8. Amabili M. Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates. – New York: Cambridge University Press, 2008. – 374 p.
9. Anderson V.W., Lazan B.J. Damping and fatigue properties of magnesium and magnesium-copper alloys proposed as new high damping materials. – Minnesota: Internal rept., Aero Library, 1957. – 243 p.
10. Green A.E. Large Elastic Deformations and Non-linear Continuum Mechanics. – Oxford: Clarendon Press, 1960. – 455 p.
11. Guz A.N., Dekret V.A. Finite-Fiber Model in the Three-Dimensional Theory of Stability of Composites (Review) // Int. App. Mech. – 2016. – **52**, N 1. – P. 1 – 48.
12. Hashemi M., Zhuk Y. The Influence of Strain Amplitude, Temperature and Frequency On Complex Shear Moduli of Polymer Materials under Kinematic Harmonic Loading // Mechanics and Mechanical Engng. – 2017. – **21**, N 1. – P. 157 – 170.
13. Hashemi M., Zhuk Y.A. Thermomechanical Stability and Thermal Fatigue Failure of Nanocomposite Structural Elements under Static and Cyclic Loading. – Lambert Academic Publishing, 2018. – 208 p.
14. Karnaukhov V.G., Kirichok I.F. Forced Harmonic Vibrations and Dissipative Heating-up of Viscoelastic Thin-Walled Elements (Review) // Int. Appl. Mech. – 2000. – **36**, N 2. – P. 174 – 195.
15. Karnaukhov V.G., Kirichok I.F., Kozlov V.I. Electromechanical Vibrations and Dissipative Heating of Viscoelastic thin-walled Piezoelements (Review) // Int. Appl. Mech. – 2001. – **37**, N 2. – P. 182 – 212.
16. Karnaukhov V.G., Kirichok I.F., Kozlov V.I. Thermomechanics of Inelastic Thin-Wall Structural Members with Piezoelectric Sensors and Actuators under Harmonic Loading (Review) // Int. App. Mech. – 2017. – **53**, N 1. – P. 6 – 58.
17. Lazan B. Damping of Materials and Members in Structural Mechanics. – Oxford etc.: Pergamon Press, 1968. – 318 p.
18. Reddy J.N. Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells. – London, New York: CRC Press, 2006. – 568 p.
19. Soedel W. Vibrations of Shells and Plates. – New York: Marcel Dekker, Inc. – 2004. – 561 p.
20. Zhuk Ya.A., Ostos A.Kh. Effect of Preloading on the Resonant Vibrations and Dissipative Heating of a Rectangular Thermoviscoelastic Plate // Int. App. Mech. – 2020. – **56**, N 4. – P. 432 – 444.
21. Zhuk Y., Ostos O., Pyatetskaya O. Prestress effect on the thermomechanical response and fatigue life prediction of viscoelastic plates // Mathematical Modeling and Computing. – 2020. – **7**, N 1. – P. 112 – 124.

Надійшла 31.05.2022

Затверджена до друку 28.03.2023