

І.В.Луцька, В.А.Максимюк, І.С.Чернишенко

**ФІЗИЧНО НЕЛІНІЙНЕ ДЕФОРМУВАННЯ ОРТОТРОПНОЇ
НАПІВЕЛІПТИЧНОЇ ТОРОЇДАЛЬНОЇ ОБОЛОНКИ**

*Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: desc@inmech.kiev.ua*

Abstract. Calculations of the nonlinear stress-strain state of an open elliptical semi-toroidal thin shell are performed by the variational-difference method using mixed functionals. This approach made it possible to easily algorithmically implement the geometric part of the Kirchhof – Love hypotheses and avoid the membrane locking. The stress-strain state of the shell under uniformly distributed internal pressure is calculated for three cases of fixing the edges: immovable hinged, rigidly clamped, and movable hinged. Hinging the edges of the open shell significantly reduces the circular stresses near them. The rigidly clamped edges cause compression on the outer surfaces due to significant meridional moments at the edges.

Key words: semi-toroidal thin shell, elliptical cross-section, nonlinearly elastic composite, stress-strain state, membrane locking, variational-difference method.

Вступ.

Замкнуті тороїдальні оболонки широко використовуються в техніці, починаючи від автомобільних шин [4] та завершуючи надлегкими елементами космічних конструкцій [14]. Тороїдальні оболонки неколового поперечного перерізу мають ряд переваг над оболонками колового перерізу. Наприклад, резервуари високого тиску чи паливні баки [22] виходять компактнішими. Незамкнуті в коловому напрямку еліпсоїдальні тороїдальні оболонки здавна використовуються як датчики тиску, відомі як трубка Бурдона [15]; незамкнуті в меридіональному напрямку оболонки знайшли застосування як підводні конструкції [9]. Серед них перспективними виявилися напівеліптичні тороїдальні оболонки [10, 17, 21].

Часто для проектування тороїдальних оболонок різного призначення використовують анізотропні композитні матеріали (КМ) [2, 6, 20]. Композитні тороїдальні оболонки мають перспективу для проекту підводної ракетної установки [13]. Деяким полімерним композитним матеріалам характерні пластичні або нелінійно-пружні властивості [1, 2, 3, 7, 18, 19].

Для розрахунку тороїдальних оболонок використовуються різні підходи, методи й інструменти. Серед них аналітичний підхід із використанням мембранної теорії [16], моделі вищого порядку [5], чисельний підхід з використанням інструмента ABAQUS [8].

Розрахунки напружено-деформованого стану (НДС) оболонок неколового поперечного перерізу чисельними сітковими методами ускладнюються через явище мембранного замикавання (locking) [3, 11, 12]. Застосування нелінійно-пружних КМ вимагає адекватної теорії для описання нелінійних властивостей анізотропних матеріалів [1, 2].

1. Постановка задачі.

Серединна поверхня тонкої ортотропної напівеліптичної незамкнутої тороїдальної оболонки утворена обертанням навколо осі Oz півеліпса

$$F(x, z) = \left(\frac{x-c}{a} \right)^2 + \left(\frac{z}{b} \right)^2 - 1 = 0, \quad z \geq 0, \quad (1)$$

де a і b – його півосі; c – відстань від центру поперечного перерізу до осі обертання. Ця поверхня (рис. 1) віднесена [11] до криволінійної системи координат (s, θ, γ) , в якій дуга еліпса s довжиною s_k відраховується від найвіддаленішої від осі обертання точки A ($x = c + a, z = 0$) до найближчої до неї точки C ($x = c - a, z = 0$). В точках A і C оболонка певним чином закріплена. Осі ортотропії нелінійно-пружного КМ збігаються з координатними лініями прийнятої системи координат.

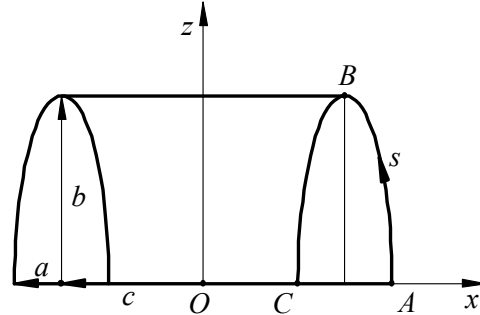


Рис. 1

Під дією рівномірно розподіленого внутрішнього тиску p НДС оболонки буде осесиметричним. За підвищених рівнів навантаження діаграми деформування ортотропного КМ стають нелінійними.

Вважаємо, що НДС розглянутих тонких оболонок описується лінійними геометричними рівняннями теорії тонких оболонок і фізичними рівняннями теорії пружності анізотропних середовищ [2]. Розв'язувальну систему рівнянь отримано на основі варіаційно-різницевого методу (ВРМ). Геометричну частину гіпотез Кірхгофа – Лява реалізовано методом множників Лагранжа. Для зменшення впливу мембранного замикання та покращення збіжності у змішаному функціоналі додатково варіюється меридіональна деформація [11]. Дискретизацію еліпса виконано за алгоритмом типу дотичної [6].

2. Основні рівняння.

Геометричні співвідношення між компонентами деформацій серединної поверхні і переміщеннями та кутом повороту визначаються формулами [2]

$$\varepsilon_s = u' + k_s w; \quad \varepsilon_\theta = r^* u + k_\theta w; \quad \kappa_s = \varphi'; \quad \kappa_\theta = r^* \varphi, \quad (2)$$

де u і w – компоненти вектора переміщень вздовж осей (s, γ) , відповідно; k_s і k_θ – головні кривизни серединної поверхні; r – радіус паралельного кола; $r^* = r'/r$. Для гіпотез Кірхгофа – Лява кут φ в (2) задається за допомогою методу множників Лагранжа з умов рівності нулеві деформації поперечного зсуву

$$\varepsilon_{s\gamma} = \varphi + w' - k_s u = 0. \quad (3)$$

Мембранна деформація довільної точки вздовж товщини ($\gamma = \text{const}$) перерізу оболонки виражається формулами

$$e_s = \varepsilon_s + \gamma \kappa_s; \quad e_\theta = \varepsilon_\theta + \gamma \kappa_\theta. \quad (4)$$

Нелінійні фізичні співвідношення за плоского напруженого стану для простих навантажень наведемо згідно з теорією пластичності анізотропних середовищ Ломакіна [1]

$$\left(\frac{1}{E_s} + \Psi q_s \right) \sigma_s + \left(-\frac{\nu_{s\theta}}{E_\theta} + \Psi q_{s\theta} \right) \sigma_\theta = e_s; \quad \left(-\frac{\nu_{\theta s}}{E_\theta} + \Psi q_{\theta s} \right) \sigma_s + \left(\frac{1}{E_\theta} + \Psi q_\theta \right) \sigma_\theta = e_\theta. \quad (5)$$

де σ_s і σ_θ – компоненти колових і поздовжніх напружень; E_s , E_θ та $\nu_{s\theta}$, $\nu_{\theta s}$ – модулі пружності та коефіцієнти поперечної деформації ортотропного матеріалу.

Нелінійні властивості матеріалу в (5) описуються функцією [2]

$$\Psi = \frac{1}{2\sqrt{f}} \int_{f_s}^f \frac{W'_p}{\sqrt{f}} df ,$$

де $W_p(f)$ – функція зміцнення, яка має сенс роботи на нелінійних складових деформацій;

$$f = \frac{1}{2} (q_s \sigma_s^2 + q_\theta \sigma_\theta^2 + 2q_{s\theta} \sigma_s \sigma_\theta) \quad (6)$$

– квадратична функція напружень; f_s – значення, вище якого проявляється нелінійність; $q_s, q_\theta, q_{s\theta}$ – компоненти тензора, що враховує анізотропію нелінійних властивостей.

Система рівнянь (5) є суттєво нелінійною, розв'язати її відносно напружень можна чисельно за допомогою, наприклад, методу Ньютона. Тоді після чисельного обернення (5) можна подати у вигляді [2]

$$\sigma_s = \sigma_s(e_s); \quad \sigma_\theta = \sigma_\theta(e_\theta). \quad (7)$$

З огляду на застосування в подальшому методу послідовних наближень (МПН) в напруженнях (7) виділяються, як доданки, нелінійні та лінійні члени

$$\sigma_s^N = \sigma_s - \sigma_s^L; \quad \sigma_\theta^N = \sigma_\theta - \sigma_\theta^L; \quad \sigma_s^L = \frac{E_s}{1 - \nu_{s\theta} \nu_{\theta s}} e_s; \quad \sigma_\theta^L = \frac{E_\theta}{1 - \nu_{s\theta} \nu_{\theta s}} e_\theta. \quad (8)$$

Відповідно до (8) середні вздовж товщини оболонки внутрішні зусилля T_s, T_θ та моменти M_s, M_θ подаються у вигляді суми лінійних та нелінійних доданків

$$T_s = T_s^L + T_s^N; \quad T_\theta = T_\theta^L + T_\theta^N; \quad M_s = M_s^L + M_s^N; \quad M_\theta = M_\theta^L + M_\theta^N. \quad (9)$$

3. Чисельний метод розв'язування задачі.

Метод будується на основі варіаційних принципів з використанням змішаного функціонала [2]. Виходячи з принципу віртуальної роботи, вважаючи, що згідно з методом послідовних наближень у формі додаткових напружень величини нелінійних складових (9) відомі з попереднього наближення і не варіюються, варіаційне рівняння можна подати у вигляді

$$\delta \Pi = \delta (\Pi^L + \Pi^N) = 0 ,$$

де позначено

$$\Pi^L = \pi \int_0^{s_k} (T_s^L \varepsilon_s + T_\theta^L \varepsilon_\theta + M_s^L \kappa_s + M_\theta^L \kappa_\theta) r ds - 2\pi \int_0^{s_k} p w r ds + \quad (10)$$

$$+ 2\pi \int_0^{s_k} T_{s\gamma}^f \varepsilon_{s\gamma} r ds - \pi \int_0^{s_k} C_s (\varepsilon_s - \varepsilon_s^f)^2 r ds;$$

$$\Pi^N = 2\pi \int_0^{s_k} (T_s^N \varepsilon_s + T_\theta^N \varepsilon_\theta + M_s^N \kappa_s + M_\theta^N \kappa_\theta) r ds. \quad (11)$$

Функціонал $\Pi(u, w, \varphi, T_{s\gamma}^f, \varepsilon_s^f)$ залежить від чотирьох варіюваних функцій: двох переміщень, кута повороту, зусилля $T_{s\gamma}^f$, яке має фізичний зміст перерізуючої сили, та поперечної деформації-функції ε_s^f . Переваги такої побудови функціонала викладено

в [2, 3]. В лінійній частині функціонала (10) перший доданок є енергією пружних деформацій, другий – роботою поверхневої сили, третій реалізує геометричну частину гіпотез Кірхгофа – Лява методом множників $(T_{s\gamma}^f)$ Лагранжа, четвертий сприяє змен-

шенню мембранного замикання. Коефіцієнт $C_s = \frac{E_s}{1 - \nu_{s\theta}\nu_{\theta s}}$; Ω – область серединної

поверхні оболонки. В нелінійній частині функціонала (11) нелінійні складові зусиль, на відміну від (9), залежать від деформації-функції ε_s^f , а не деформації-формули (2).

Слід відзначити використання у (10 – 11) позначень верхнім індексом (f) для зусиль і деформації, що підкреслює відмінність між величиною – формулою й величиною – функцією і має певне методологічне значення [2, 3].

У такий спосіб лінеаризована задача зводиться до знаходження в кожному наближенні стаціонарних значень функціонала

$$\Pi^{LN} = \Pi^L + \Pi^N. \quad (12)$$

З умови стаціонарності функціонала $\delta\Pi = 0$ впливають природні статичні крайові умови. Головні геометричні умови у випадках жорсткого, шарнірного і шарнірно рухливого закріплення відповідно мають вигляд:

$$u = 0, \quad w = 0, \quad \varphi = 0; \quad (13)$$

$$u = 0, \quad w = 0; \quad (14)$$

$$u = 0. \quad (15)$$

Зазначимо, що для задання умов симетрії у випадку замкнутої оболонки, коли гіпотези Кірхгофа – Лява реалізуються множниками Лагранжа [11], геометричні умови необхідно доповнити умовою для перерізуючої сили $T_{s\gamma}^f$, оскільки вона входить до незалежних варіюваних функцій, тобто

$$u = 0, \quad \varphi = 0, \quad T_{s\gamma}^f = 0. \quad (16)$$

Для знаходження стаціонарних значень функціонала (12) використовується ВРМ, який дає систему лінійних алгебраїчних розв'язувальних рівнянь з симетричною матрицею [2].

4. Числові результати.

Розраховано НДС тонкої напівеліптичної тороїдальної оболонки за трьох варіантів закріплення країв в точках A і C ($z = 0$): жорстке – (варіант 1), шарнірне – (варіант 2), шарнірно рухливе вздовж осі Ox – (варіант 3).

Геометричні параметри оболонки такі [6, 11]: $\tilde{a} = a/h = 100$; $\tilde{b} = b/h = 1000$; $\tilde{c} = c/h = 200$; $\tilde{s} = s/s_k = 2032$ – половина дуги еліпса; h – товщина оболонки. Тобто, поперечний переріз сильно витягнутий вздовж осі симетрії. Матеріал оболонки – шаруватий склопластик (композит) з характеристиками [1, 2]: $E_s = 15$ ГПа; $E_\theta = 12$ ГПа; $\nu_{s\theta} = 0,12$. Діаграми деформування, функція $\Psi(f)$ та інші величини в (5) наведені в [1, 2]. Навантаження – рівномірно розподілений внутрішній тиск $q = 0,5$ МПа.

В табл. 1 для характерних точок тора $\tilde{s} = s/s_k$ наведено розраховані в лінійній постановці ($\Psi = 0$) меридіональні (σ_s) та колові (σ_θ) напруження в трьох точках вздовж товщини оболонки ($\tilde{\gamma} = \gamma/h = 0, \pm 0,5$) для трьох варіантів закріплення країв. Останній варіант для даної сильно витягнутої оболонки практично відповідає умовам симетрії (16) для замкнутої оболонки, який було розглянуто раніше [6, 11].

Таблиця 1

$\tilde{s}$	$\tilde{\gamma}$	Варіант 1 (13)		Варіант 2 (14)		Варіант 3 (15)	
		σ_s , МПа	σ_θ , МПа	σ_s , МПа	σ_θ , МПа	σ_s , МПа	σ_θ , МПа
0	0,5	-238,5	-22,9	43,0	4,1	43,0	148,5
	0	43,0	4,1	43,0	4,1	43,0	149,0
	-0,5	324,6	31,2	43,0	4,1	43,0	148,7
0,5	0,5	-91,2	53,3	-91,4	53,5	-91,4	53,7
	0	9,1	58,1	9,1	58,2	9,1	58,4
	-0,5	109,4	62,8	109,6	63,9	109,6	63,1
1,0	0,5	-38,4	-3,7	70,9	6,8	70,9	-49,6
	0	70,9	6,8	70,9	6,8	70,9	-49,3
	-0,5	180,2	17,3	70,9	6,8	70,9	-49,0

Як зазначалось, геометрично розглянута тороїдальна оболонка є сильно витягнутою вздовж осі Oz ($b/a=10$) і у випадку шарнірно рухливого закріплення (варіант 3) нагадує дві з'єднані на торцях коаксіальні циліндричні оболонки. Одна з них радіусом $c+a$ знаходиться під дією внутрішнього тиску q , а друга (радіусом $c-a$) – під дією такого ж зовнішнього тиску. Характерні величини колових напружень в них будуть: $\sigma_\theta = q(c+a)/h = 150$ МПа в точці A і $\sigma_\theta = -q(c-a)/h = -50$ МПа в точці C . До цих значень наближаються колові напруження $\sigma_\theta = 149,0$ МПа в точці A і $\sigma_\theta = -49,3$ МПа в точці C (остання колонка в табл. 1).

Розподіл розрахованих в лінійній постановці прогинів ($\tilde{w} = w/h$) вздовж меридіана на $\tilde{s}$ для двох випадків шарнірного закріплення (варіанти 2 і 3) показано на рис. 2. У випадку варіанта 1 (жорстке закріплення) графік мало відрізняється від варіанта 2, тому його не показано. А графіки варіантів 2 і 3 видимо відрізняються біля країв закріплення ($\tilde{s}=0$ і $\tilde{s}=1$).

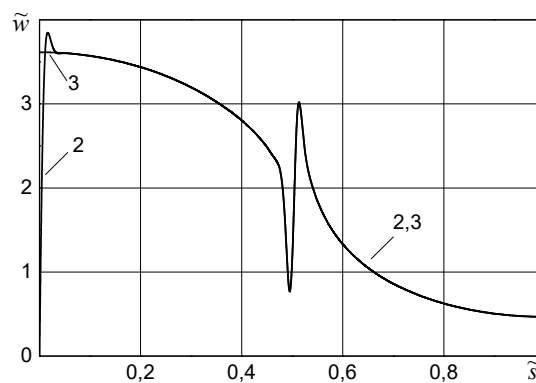


Рис. 2

Поблизу великої півосі еліпса (точка B , $\tilde{s}=0,5$), де меридіональні моменти набувають локального максимуму, спостерігається локальний мінімум прогинів з подальшим різким зростанням, причому у всіх трьох варіантах закріплення.

Вплив нелінійних властивостей КМ на напружений стан оболонки показано в табл. 2, яка має таку ж структуру, як табл. 1. У двох випадках шарнірного закріплення (варіанти 2 і 3) напружений стан змінюється незначно. Наприклад, зменшення меридіональних напружень σ_s на внутрішній поверхні в точці B ($\tilde{s}=0,5$; $\tilde{\gamma}=-0,5$), не перевищує 5%. А у випадку жорсткого закріплення (варіант 1) меридіональні напруження значно зменшуються саме в точках закріплення. Так, це зменшення на внутрішній поверхні в точці A ($\tilde{s}=0$; $\tilde{\gamma}=-0,5$) досягає 16%.

Таблиця 2

$\tilde{s}$	$\tilde{\gamma}$	Варіант 1 (13)		Варіант 2 (14)		Варіант 3 (15)	
		σ_s , МПа	σ_θ , МПа	σ_s , МПа	σ_θ , МПа	σ_s , МПа	σ_θ , МПа
0	0,5	-222,0	-19,6	43,0	4,1	42,8	147,6
	0	67,9	6,5	43,0	4,1	42,8	147,7
	-0,5	270,5	23,4	43,0	4,1	42,8	147,9
0,5	0,5	-88,5	48,4	-88,5	48,5	-88,5	48,7
	0	9,8	58,2	9,8	58,3	9,8	58,5
	-0,5	104,4	56,2	104,4	56,3	104,4	56,4
1,0	0,5	-44,0	-4,2	70,9	6,7	70,9	-49,5
	0	77,8	7,4	70,9	6,7	70,9	-49,3
	-0,5	162,7	14,8	70,9	6,7	70,9	-49,0

На деформований стан оболонки нелінійність КМ впливає у значно більшій мірі, особливо у випадку шарнірно рухливого закріплення (варіант 3). Для цього випадку в табл. 3 наведено прогини $\tilde{w}$ в характерних точках меридіана $\tilde{s}$, розрахованих в лінійній (ЛЗ) та нелінійній (НЗ) постановках. Врахування нелінійності призводить до зростання прогину в точці A ($\tilde{s} = 0$) на 46%.

Таблиця 3

$\tilde{s}$	ЛЗ	НЗ
0	3,61	5,29
0,5	1,15	1,26
1,0	0,47	0,53

Висновок.

Шарнірно нерухливе закріплення зовнішніх країв оболонки значно зменшує коло-ві напруження поблизу них порівняно з іншими видами закріплення. Жорстке закріплення викликає стиски на зовнішніх поверхнях біля країв. Вплив нелінійних властивостей композиту на деформований стан оболонки проявляється більшою мірою, ніж на напружений. Особливо зростають прогини у випадку шарнірно рухливого закріплення країв.

РЕЗЮМЕ. Варіаційно-різницевим методом з використанням змішаних функціоналів виконано розрахунки нелінійного напружено-деформованого стану відкритої еліптичної напівтороїдальної тонкої оболонки. Такий підхід дозволив алгоритмічно реалізувати геометричну частину гіпотези Кірхгофа – Лява та уникнути мембранного замикання. Напружено-деформований стан оболонки за рівномірно розподіленого внутрішнього тиску розраховано для трьох випадків закріплення країв: шарнірно нерухомого, жорстко закріпленого та шарнірно рухливого. Шарнірне з'єднання країв відкритої оболонки значно знижує кругові напруження біля них. Жорстко закріплені краї через значні меридіональні моменти на краях викликають стиск на зовнішніх поверхнях.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: напівтороїдальна тонка оболонка, еліптичний переріз, нелінійно-пружний композит, напружено-деформований стан, мембранне замикання, варіаційно-різницевий метод.

1. Ломакин В.А., Юмашева М.А. О зависимостях между напряжениями и деформациями при нелинейном деформировании ортотропных стеклопластиков // Механика полимеров. – 1965. – № 4. – С. 28 – 34.
2. Механика композитов (под общей ред. Гузя А.Н.): в 12-и томах. Т. 7. Гузь А.Н., Космодаманский А.С., Шевченко В.П. и др. – Концентрация напряжений. – Киев: «А.С.К.», 1998. – 387 с.
3. Abrosov Yu.Yu., Maksymuk V.A., Chernyshenko I.S. Physically Nonlinear Deformation of a Long Orthotropic Cylindrical Shell with Elliptic Cross-Section // Int. Appl. Mech. – 2021. – 57, N 3. – P. 282 – 289.
4. Bari P., Kanchwala H. An analytical tire model using thin shell theory // Int. J. of Mech. Sci. – 2023. – 248. – P. 108227.
5. Carrera E., Zozulya V.V. Carrera unified formulation (CUF) for shells of revolution. I. Higher-order theory // Acta Mechanica. – 2023. – 234. – N 1. – P. 109 – 136.
6. Chernyshenko I.S., Maksymuk V.A. On the Stress-Strain State of Toroidal Shells of Elliptical Cross Section Formed from Nonlinear Elastic Orthotropic Materials // Int. Appl. Mech. – 2000. – 36, N 1. – P. 90 – 97.

7. Danil'Chuk E.L., Kucher N.K., Kushnarev A.P., Potapov A.M., Rudnitskii N.P., Samusenko A.A., Filatov V.E. Deformation and strength of unidirectional carbon-fiber-reinforced plastics at elevated temperatures // *Strength of Materials*. – 2015. – **47**. – P. 573 – 578.
8. Enoma N., Madu J. Effect of Imperfections on the Buckling Behaviour of a Pressurized Circular-Elliptical Toroid // *J. of Sci. and Technology Research*. – 2022. – **4**, N 2. – P. 270 – 277.
9. Jiammeepreecha W., Chaidachatorn K., Chucheeepsakul S. Nonlinear static response of an underwater elastic toroidal storage container // *Int. J. of Solids and Struct.* – 2021. – **228**. – P. 111134.
10. Jiammeepreecha W., Chucheeepsakul S. Nonlinear static analysis of an underwater elastic semi-toroidal shell // *Thin-Walled Struct.* – 2017. – **116**. – P. 12 – 18.
11. Lutsкая I.V., Maksimuk V.A., Chernyshenko I.S. Modeling the Deformation of Orthotropic Toroidal Shells with Elliptical Cross-Section Based on Mixed Functionals // *Int. Appl. Mech.* – 2018. – **54**, N 6. – P. 660 – 665.
12. Maksimuk V.A., Chernyshenko I.S. Nonlinear Elastic State of Thin-Walled Toroidal Shells Made of Orthotropic Composites // *Int. Appl. Mech.* – 1999. – **35**, N 12. – P. 1238 – 1245.
13. Ross C.T.F. A conceptual design of an underwater missile launcher // *Ocean Engng.* – 2005. – **32**. – N 1. – P. 85 – 99.
14. Ruggiero E.J., Jha A., Park G., Inman D.J. A literature review of ultra-light and inflated toroidal satellite components // *The Shock and Vibration Digest*. – 2003. – **35**, N 3. – P. 171 – 181.
15. Sunatani C. The Theory of a Bourdon Tube Pressure Gauge and an Improvement in Its Mechanism // *J. of the Society of Mechanical Engineers*. – 1924. – **27**, N 87. – P. 553 – 582.
16. Tangbanjongkij C., Chucheeepsakul S., Pulngern T., Jiammeepreecha W. Analytical and numerical approaches for stress and displacement components of pressurized elliptic toroidal vessels // *Int. J. of Pressure Vessels and Piping*. – 2022. – **199**. – P. 104675.
17. Tangbanjongkij C., Chucheeepsakul S., Pulngern T., Jiammeepreecha W. Axisymmetric buckling analysis of submerged hemi-elliptic toroidal shells // *Thin-Walled Struct.* – 2023. – **183**. – P. 110383.
18. Tarnopol'skii Y.M., Zhigun I.G., Polyakov V.A. Spatially Reinforced Composites. – Lancaster: Technomic, 1992. – 341 p.
19. Vasiliev V.V., Morozov E.V. Advanced mechanics of composite materials and structural elements. – 3rd edition. – Oxford: Elsevier, 2013. – 832 p.
20. Vick M.J., Gramoll K. Finite Element Study on the Optimization of an Orthotropic Composite Toroidal Shell // *J. of Pressure Vessel Technology*. – 2012. – **134**, N 5. – e051201.
21. Zingoni A., Enoma N. On the strength and stability of elliptic toroidal domes // *Eng. Struct.* – 2020. – **207**. – P. 110241.
22. Zingoni A. Liquid-containment shells of revolution: A review of recent studies on strength, stability and dynamics // *Thin-Walled Struct.* – 2015. – **87**. – P. 102 – 114.

Надійшла 11.07.2022

Затверджена до друку 28.03.2023