

О. М. Багно

**ВПЛИВ ПОЧАТКОВИХ НАПРУЖЕНЬ НА УЗАГАЛЬНЕНІ
ХВИЛІ ЛЕМБА В ПРУЖНОМУ СТИСЛИВОМУ ШАРІ,
ЩО ВЗАЄМОДІЄ З ШАРОМ В'ЯЗКОЇ РІДИНИ**

*Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: desc@inmech.kiev.ua*

Abstract. The problem of acoustic wave propagation in a pre-deformed compressible elastic layer interacting with a layer of viscous compressible fluid is considered. The study is carried out based on the three-dimensional linearized equations of the theory of elasticity of finite strains for the elastic layer and three-dimensional linearized Navier–Stokes equations for the viscous compressible fluid. The problem statement and approach are applied using the representations of general solutions of the linearized equations of the elastic body and fluid. A dispersion equation is obtained which describes the propagation of harmonic waves in the hydro-elastic system over a wide range of frequencies for the thick layer of fluid. The effect of initial stresses as well as the thicknesses of layers of body and fluid on the phase velocities and attenuation coefficients of the generalized Lamb modes is analyzed. An approach developed and the results obtained make it possible to establish the limits of applicability of the wave process models based on the different versions of the theory of small initial strains, the classical theory of elasticity, and the model of an ideal fluid. The numerical results are presented in the form of graphs, and their analysis is given.

Key words: generalized Lamb modes, elastic compressible layer, layer of viscous compressible fluid, initial stresses, harmonic waves.

Вступ.

В реальних пружних тілах, як відомо, практично завжди існують початкові (залишкові) напруження. Створені цілеспрямовано або такі, що виникли в результаті технологічних операцій при виготовленні, спряженні окремих вузлів елементів конструкцій, впливу полів різної фізичної природи, вони, взаємодіючи з динамічними напруженнями, суттєвим чином впливають на стійкість, міцність, ресурс і безпеку конструкцій. У зв'язку з цим актуальним і важливим для практики є створення методів, які дозволяють вимірювати та контролювати ці напруження. Серед різноманіття існуючих методів, які успішно розробляються останнім часом, виділимо ультразвукові неруйнівні методи. Вони є перспективними та ефективними, тому що дозволяють проводити вимірювання напружень, а також виявляти дефекти без порушення цілісності конструкцій. Дослідженням, які відносяться до цього напрямку, присвячена велика бібліографія. Зазначимо лише роботи, які опубліковані порівняно недавно [2, 3, 15, 16]. Теоретичною основою більшості ультразвукових неруйнівних методів, які дозволяють визначати одно-, дво- та тривісні напруження в матеріалах, а також двовісні напруження в приповерхневих шарах елементів конструкцій, є закономірності поширення акустичних хвиль в реальних пружно-рідинних системах. Модель, яка запропонована в роботах [1 – 4, 12 – 16] і оснований на лінеаризованій теорії гідропружності, дозволяє при розгляді хвильових процесів врахувати початкові напруження в пружних тілах, а також в'язкість рідини, що є одними з головних факторів, властивих реальному твердим і рідким середовищам. Окремі результати розгляду впливу початкових напружень та в'язкої рідини на закономірності поширення хвиль наведено в публікаціях [6 – 14, 17 – 20].

Дана робота присвячена дослідженню в рамках моделей попередньо напруженого тіла і в'язкої стисливої ньютонівської рідини поширення узагальнених хвиль Лемба в гідропружній системі, яка складається з шару рідини та пружного шару. При цьому використовуються тривимірні лінеаризовані рівняння теорії пружності скінченних деформацій для твердого тіла і тривимірні лінеаризовані рівняння Нав'є – Стокса для рідини. Вважається, що рідина перебуває у стані спокою, а теплові ефекти не враховуються. Постановки задачі і використаний метод оснований на застосуванні представлень загальних розв'язків лінеаризованих рівнянь руху в'язкої стисливої рідини і попередньо напруженого пружного тіла, які запропоновані в роботах [1 – 4, 10 – 14].

§1. Постановка задачі та основні співвідношення.

Розглянемо задачу про поширення акустичних хвиль у гідропружній системі, що складається з шару в'язкої стисливої рідини і стисливого пружного шару. Задача розв'язується із залученням тривимірних лінеаризованих рівнянь теорії пружності скінченних деформацій для твердого тіла та лінеаризованих рівнянь Нав'є – Стокса для рідини, яка перебуває у стані спокою [1 – 4, 10 – 14].

Далі розглядаються такі динамічні процеси в гідропружній системі, при яких виникають додаткові значно менші початкових збурення деформацій. Досліджуються гармонічні хвильові процеси малої амплітуди. При цьому вважається, що пружне тіло перебуває у початковому стані. Зауважимо, що на відміну від твердих тіл, співвідношення яких записані в лагранжових координатах, рівняння для рідкого середовища записуються в ейлерових координатах, введених у природному стані рідини. Слід підкреслити, що початковий стан пружного тіла при розгляді гідропружної задачі є природним станом по відношенню до рідини та системи в цілому. Оскільки надалі досліджується поширення малих збурень, то, як відомо, у цьому випадку підходить Ейлера та Лагранжа в описі поведінки середовищ співпадають. Тому надалі немає різниці між лагранжевими та ейлеровими координатами і характерні для нелінійних задач труднощі при записі граничних умов при зазначених двох підходах не виникають.

У рамках прийнятих моделей основні рівняння для системи «попередньо напружене стисливе пружне тіло – в'язка стислива рідина» мають вигляд:

1) стисливе пружне тіло –

$$\left(\tilde{\omega}_{ij\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_\beta} - \delta_{j\alpha} \tilde{\rho} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_\alpha = 0; \quad z_k \in V_1; \quad (1.1)$$

$$\tilde{Q}_j \equiv N_i^0 \tilde{\omega}_{ij\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial z_\beta}; \quad \tilde{\omega}_{ij\alpha\beta} = \frac{\lambda_i \lambda_\beta}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \omega_{ij\alpha\beta}; \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3};$$

2) в'язка стислива рідина –

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v}^* \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p - \frac{1}{3} \mathbf{v}^* \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0; \quad \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0; \quad z_k \in V_2; \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \rho^*} = a_0^2; \quad a_0 = \text{const}; \quad \lambda^* = -\frac{2}{3} \mu^*; \quad z_k \in V_2;$$

$$p_{ij} = -p \delta_{ij} + \lambda^* \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{v} + \mu^* \left(\frac{\partial v_i}{\partial z_j} + \frac{\partial v_j}{\partial z_i} \right); \quad \tilde{P}_j = p_{ij} N_i^0; \quad z_k \in V_2. \quad (1.3)$$

При цьому специфіку взаємодії пружних і рідких середовищ відображають динамічні $\tilde{Q}_j = \tilde{P}_j$, $z_k \in S$ та кінематичні $\partial \mathbf{u} / \partial t = \mathbf{v}$, $z_k \in S$ граничні умови, які задаються на поверхні контакту пружних тіл та рідини S .

Введений вище тензор $\tilde{\omega}_{ij\alpha\beta}$ залежить від виду початкового стану та типу пружного потенціалу матеріалу твердого тіла [2].

Вище прийняті такі позначення: u_i – компоненти вектора зміщень пружного тіла $\mathbf{u}$; ρ – густина матеріалу пружного шару; v_i – компоненти вектора збурень швидкості рідини $\mathbf{v}$ відносно стану спокою; ρ^* і p – збурення густини і тиску в рідині; v^* і μ^* – кінематичний та динамічний коефіцієнти в'язкості рідини; ρ_0 і a_0 – густина рідини і швидкість звуку в рідині в стані спокою; λ_i – видовження (при $\lambda_i > 1$) і укорочення (при $\lambda_i < 1$) пружного шару в напрямках координатних осей; $\tilde{Q}_i$ і $\tilde{P}_i$ – компоненти напружень, відповідно, в пружному тілі і рідині; V_1 і V_2 – об'єми, які займають, відповідно, пружне тіло і рідина; S – площина контакту пружного і рідкого середовищ.

Рівності (1.1) описують поведінку пружного тіла. Малі коливання в'язкої стисливої рідини відносно стану спокою і без урахування теплових ефектів описують співвідношення (1.2) – (1.3).

Далі припустимо, що ізотропне нелінійно-пружне тверде тіло, пружний потенціал якого є довільною двічі неперервно диференційованою функцією компонент тензора деформацій Гріна, займає об'єм $(-\infty < z_1 < \infty, -h_2 \leq z_2 \leq 0, -\infty < z_3 < \infty)$ і контактує з шаром в'язкої стисливої рідини: $(-\infty < z_1 < \infty, 0 \leq z_2 \leq h_1, -\infty < z_3 < \infty)$. Приймемо, що зовнішні сили, які діють на зазначені середовища, розподілені рівномірно вздовж осі Oz_3 . У цьому випадку задача є плоскою і можна обмежитися вивченням процесу поширення хвиль у площині Oz_1z_2 . Отже, зазначена задача зводиться до розв'язання системи рівнянь (1.1) – (1.3) при наступних граничних умовах:

$$\tilde{P}_1|_{z_2=0} = \tilde{Q}_1|_{z_2=0}; \quad \tilde{P}_2|_{z_2=0} = \tilde{Q}_2|_{z_2=0}; \quad \tilde{Q}_1|_{z_2=-h_2} = 0; \quad \tilde{Q}_2|_{z_2=-h_2} = 0; \quad (1.4)$$

$$\tilde{P}_1|_{z_2=h_1} = 0; \quad \tilde{P}_2|_{z_2=h_1} = 0; \quad v_1|_{z_2=0} = \frac{\partial u_1}{\partial t}|_{z_2=0}; \quad v_2|_{z_2=0} = \frac{\partial u_2}{\partial t}|_{z_2=0}. \quad (1.5)$$

§2. Методика розв'язування задачі.

Застосуємо постановки задач гідропружності для тіл з початковими напруженнями та в'язкої рідини, а також представлення загальних розв'язків, запропоновані в роботах [1 – 4, 10 – 14]. Надалі досліджуються хвильові процеси в попередньо деформованих стисливих пружних тілах, що взаємодіють з в'язкою стисливою рідиною, початковий стан яких є однорідним. У разі однорідного напружено-деформованого стану для плоского випадку загальні розв'язки мають вигляд [1 – 4, 10 – 14]

$$u_1 = -\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial z_1 \partial z_2}; \quad u_2 = \frac{(\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)}{\lambda_2^2 (a_{12} + \mu_{12})} \left[\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda_2^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0)}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \chi_1;$$

$$v_1 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_1 \partial t} + \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial z_2 \partial t}; \quad v_2 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_2 \partial t} - \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial z_1 \partial t},$$

де введені функції χ_i є розв'язками наступних рівнянь:

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda_2^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0)}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda_2^2 (\lambda_2^2 a_{22} + s_{22}^0)}{\lambda_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \right] \chi_i = 0$$

$$-\frac{\rho}{\lambda_1^2(\lambda_1^2\mu_{12}+s_{11}^0)}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Bigg)-\frac{\lambda_2^4(a_{12}+\mu_{12})^2}{(\lambda_1^2a_{11}+s_{11}^0)(\lambda_2^2\mu_{12}+s_{11}^0)}\frac{\partial^4}{\partial z_1^2\partial z_2^2}\Bigg]\chi_1=0;$$

$$\left[\left(1+\frac{4\nu^*}{3a_0^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial z_2^2}\right)-\frac{1}{a_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\chi_2=0; \quad \left[\frac{\partial}{\partial t}-\nu^*\left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial z_2^2}\right)\right]\chi_3=0.$$

Тут введено такі позначення: a_{ij} та μ_{ij} – величини, що визначаються з рівнянь стану і залежать від виду пружного потенціалу [2]; $\bar{\sigma}_{ii}^0$ – початкові напруження ($s_{ii}^0 = (\lambda_1\lambda_2\lambda_3\bar{\sigma}_{ii}^0)/\lambda_i^2$).

Зауважимо, що хоча для пружних тіл наведені співвідношення щодо збурень є лінійними, в той же час величини початкового стану, які входять до них, визначаються із загальних нелінійних рівнянь. Дійсно, загальна постановка задач гідропружності для тіл з початковими напруженнями в координатах z_i формою аналогічна формулюванню лінійних задач класичної теорії гідропружності. Однак при цьому є і суттєві відмінності, які відносяться до структури рівнянь та граничних умов, що входять до неї.

Для аналізу поширення збурень, гармонічно змінних в часі, розв'язки системи рівнянь визначаємо в класі біжучих хвиль $\chi_j = X_j(z_2) \exp[i(kz_1 - \omega t)]$ ($j = \overline{1,3}$), де k ($k = \beta + i\gamma$) – хвильове число; γ – коефіцієнт згасання хвилі; ω – кругова частота; i – уявна одиниця ($i^2 = -1$).

Зауважимо, що обраний у даній роботі клас гармонічних хвиль, який є найбільш простим і зручним в теоретичних дослідженнях, не обмежує загальності отриманих результатів, оскільки лінійна хвиля довільної форми, як відомо, може бути представлена набором гармонічних складових. Далі розв'язуємо задачі про власні значення для рівнянь руху пружного тіла і рідини, а також визначаємо відповідні власні функції. Після підстановки загальних розв'язків в граничні умови (1.4), (1.5) отримуємо однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо довільних сталих. Виходячи з умови існування нетривіального розв'язку цієї системи, отримуємо дисперсійне рівняння

$$\det \left\| \theta_{lm} \left(c, \gamma, a_{ij}, \mu_{ij}, \sigma_{ii}^0, \rho_0, a_0, \mu^*, \omega h_1/c_s, \omega h_2/c_s \right) \right\| = 0 \quad (l, m = \overline{1,8}), \quad (2.1)$$

де c – фазова швидкість хвиль в гідропружній системі; h_1 – товщина шару рідини; h_2 – товщина пружного шару; c_s – швидкість хвилі зсуву в матеріалі пружного тіла ($c_s^2 = \mu/\rho$); μ – модуль зсуву матеріалу пружного тіла.

Як відомо, в необмеженому стисливому пружному тілі існують поздовжня і зсувна хвилі. В ідеальному стисливому рідкому середовищі поширюється лише поздовжня хвиля. У в'язкій стисливій рідині існують як поздовжня хвиля, так і хвиля зсуву. Саме ці хвилі, взаємодіючи між собою на вільних граничних поверхнях, а також на поверхні контакту середовищ, породжують складне хвильове поле в гідропружній системі.

Відзначимо, що отримане дисперсійне рівняння (2.1) не залежить від форми пружного потенціалу. Воно є найбільш загальним і з нього можна отримати співвідношення для ряду окремих випадків, розглянутих в роботах [1, 5 – 7, 19, 20]. Зокрема, якщо a_0 спрямувати до нескінченності, то (2.1) переходить в рівняння для визначення параметрів хвиль у разі взаємодії пружного шару з нестисливою в'язкою рідиною. Якщо $\bar{\mu}^*$ покласти рівним нулю, а також зробивши ряд спрощень, то з (2.1) отримаємо результати для гідропружної системи з ідеальною рідиною. При $\rho_0 = 0$ рівність (2.1)

перейде до рівняння визначення швидкостей хвиль Лемба [5]. Якщо додатково спрямувати h_2 до нескінченності, отримаємо співвідношення для визначення швидкостей поверхневих хвиль Релея [5, 7, 15, 19]. При $\rho_0 \neq 0$ і $h_1 \rightarrow \infty$ рівність перейде до рівняння Стоунлі [1, 6, 19].

Зазначені окремі випадки враховують наявність початкових деформацій в пружному шарі. Крім того, моделі, основані на різних варіантах теорії малих початкових деформацій, на рівняннях наближених прикладних двовимірних теорій як для поперечно напружених, так і для тіл без початкових деформацій, на лінійних співвідношеннях класичної теорії пружності, є окремими випадками, що розглядаються в роботі і впливають з нього при введенні додаткових припущень. Задачі, які були розглянуті в рамках моделі, що враховує початкові напруження, наведені у [1 – 3, 5 – 7, 9, 13, 17, 19, 20]. Якщо прийняти $\bar{\sigma}_{ii}^0 = 0$ і $\bar{\mu}^* = 0$, то отримаємо рівності для ґрунтовно досліджених у рамках класичної теорії пружності хвиль Релея, Стоунлі – Шольте та Лемба.

§3. Числові результати та їх аналіз.

Розрахунки проводимо для гідропружної системи, що складається зі сталі марки 09Г2С та води, яка характеризується такими параметрами: пружний шар – $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$, $\lambda = 9,26 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, $\mu = 7,75 \cdot 10^{10} \text{ Па}$; рідина – $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$, $a_0 = 1459,5 \text{ м/с}$, $\bar{\mu}^* = 0,001$, $\bar{a}_0 = a_0/c_s = 0,463021$. Цей хвилевід відрізняється тим, що матеріал пружного тіла відноситься до розряду жорстких.

Зауважимо, що рівняння (2.1) виведено без будь-яких додаткових вимог до виду функції пружного потенціалу, тому воно має місце для пружних потенціалів довільної форми. При чисельній реалізації задачі питання про вибір конкретної форми пружного потенціалу має самостійне, а також важливе значення і істотно може вплинути на кінцевий результат. Як показано в роботах [1 – 3], для поперечно напружених стисливих жорстких матеріалів (сталь, оргскло) закономірності, що спостерігаються експериментально, можуть бути правильно описані теоретично тільки в рамках пружних потенціалів, які залежать від трьох інваріантів. У зв'язку з цим, у даній роботі для сталі використаний найпростіший потенціал у формі Мурнагана, який залежить від трьох алгебраїчних інваріантів тензора деформацій Гріна [1 – 3]. З огляду на це постійні Мурнагана для сталі, за допомогою яких визначаються величини рівнянь стану a_{ij} і μ_{ij} , прийняті такими [1 – 3, 5]: $a = -319 \cdot 10^9 \text{ Па}$; $b = -303 \cdot 10^9 \text{ Па}$; $c = -78,4 \cdot 10^9 \text{ Па}$.

Крім того, як відомо, сталь відноситься до розряду твердих матеріалів. Вони не руйнуючись не допускають великих деформацій. Тому, хоча дисперсійне рівняння (2.1) є найбільш загальним і отримано для тіл, які піддані скінченним деформаціям, при розгляді конкретного прикладу і чисельного розв'язання рівняння (2.1) коефіцієнти рівнянь стану a_{ij} і μ_{ij} визначалися у межах лінійного акустичного наближення [1 – 3, 5].

Далі дисперсійне рівняння (2.1) розв'язуємо чисельно. Результати обчислень у вигляді графіків наведені на рис. 1 – 21.

На рис. 1 для пружного шару, невзаємодіючого з рідиною, наведені залежності безрозмірних величин фазових швидкостей нормальних хвиль Лемба $\bar{c}$ ($\bar{c} = c/c_s$) від безрозмірної величини товщини пружного шару (частоти) $\bar{h}_2$ ($\bar{h}_2 = \omega h_2/c_s$) за відсутності початкових напружень [5]. Номерами n_a позначено антисиметричні моди, а n_s – відповідно, симетричні моди. На цьому рисунку для наочності штриховою лінією відзначена асимптота, до якої прямують фазові швидкості нульових антисиметричної та симетричної мод при зростанні товщини пружного шару.

З графіків, поданих на рис. 1, випливає, що швидкість нульової антисиметричної моди Лемба при зростанні товщини пружного шару (частоти) $\bar{h}_2$ прямує до швидкості

хвилі Релея $\bar{c}_R$ ($\bar{c}_R = 0,923008$) знизу, а швидкість нульової симетричної моди – до швидкості хвилі Релея $\bar{c}_R$ ($\bar{c}_R = 0,923008$) зверху. Швидкості всіх мод Лемба високого порядку зі збільшенням товщини пружного шару (частоти) $\bar{h}_2$ прямують до швидкості хвилі зсуву в матеріалі пружного тіла $\bar{c}_s$ [5].

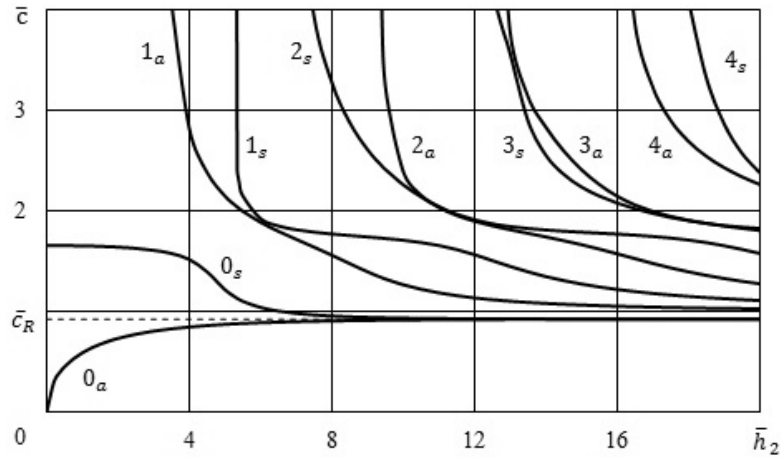


Рис. 1

На рис. 2 – 4 приведені дисперсійні криві для гідропружного хвильоводу, які відображають залежності безрозмірних величин фазових швидкостей $\bar{c}$ мод від безрозмірної величини товщини пружного шару $\bar{h}_2$ для товстого рідкого шару з товщиною $\bar{h}_1 = 20$ ($\bar{h}_1 = \omega h_1 / c_s$) і $\bar{\mu}^* = 0,001$. При цьому на рис. 2 наведено дисперсійні криві для перших 10-и мод. Дисперсійні криві для мод з 11 до 14 зображені на рис. 3. На рис. 4 представлені графіки для мод 15 – 24. На рис. 2 для наочності штриховою лінією відзначена асимптота, до якої прямує фазова швидкість моди 1 при зростанні товщини пружного шару $\bar{h}_2$. На рис. 3 штриховою прямою лінією позначена асимптота, до якої прямують фазові швидкості мод 13 і 14. Зазначимо також, що на рис. 4 товстою штриховою лінією відзначена дисперсійна крива моди 16_l , яка існує при взаємодії пружного шару з шаром ідеальної стисливої рідини. У випадку гідропружного хвильоводу з рідким в'язким шаром ця мода відсутня.

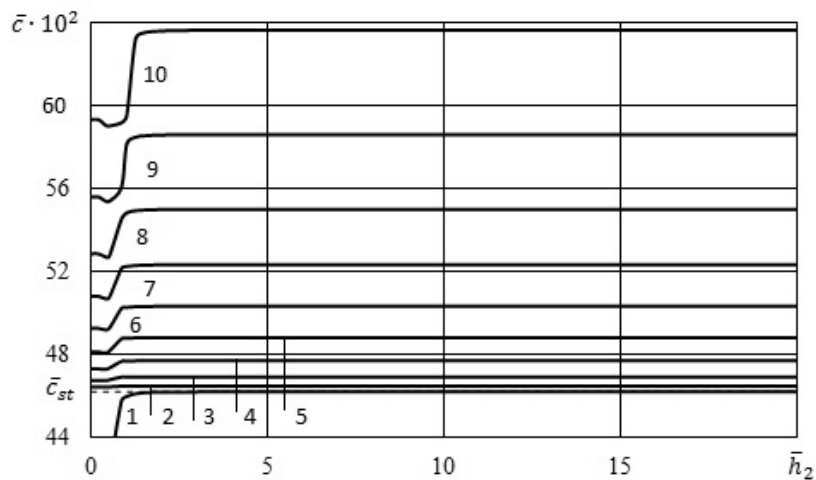


Рис. 2

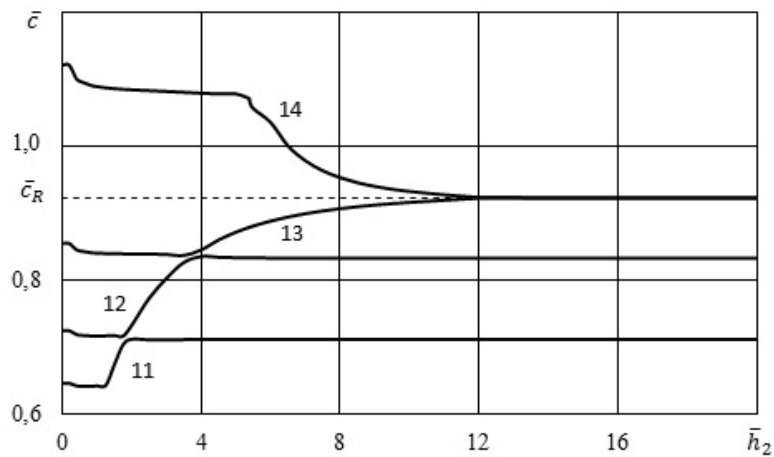


Рис. 3

Графіки для гідропружної системи, які наведені на рис. 2 і 3, показують, що при зростанні товщини пружного шару $\bar{h}_2$ швидкість першої моди прямує знизу до швидкості хвилі Стоунлі $\bar{c}_{st}$ ($\bar{c}_{st} = 0,461819$), яка дещо менша за швидкість хвилі звуку в рідкому середовищі $\bar{a}_0$ ($\bar{a}_0 = 0,463021$). Величини фазових швидкостей мод 2 – 12 прямують до швидкостей хвиль, величини яких більші швидкості звукової хвилі в рідині $\bar{a}_0$ ($\bar{a}_0 = 0,463021$), але менші швидкості квазірелеївської хвилі $\bar{c}_R$ ($\bar{c}_R = 0,923063$). Характерною особливістю дисперсійних кривих цих нормальних хвиль є наявність у них нульових частот замикання. Крім того, при зменшенні довжини хвиль і віддалення їх від частот замикання вони стають практично бездисперсійними. З графіків рис. 3 також випливає, що швидкість моди 13 зі збільшенням товщини пружного шару прямує до швидкості хвилі Релея $\bar{c}_R$ ($\bar{c}_R = 0,923063$) знизу, а фазова швидкість моди 14 – до швидкості хвилі Релея $\bar{c}_R$ ($\bar{c}_R = 0,923063$) зверху.

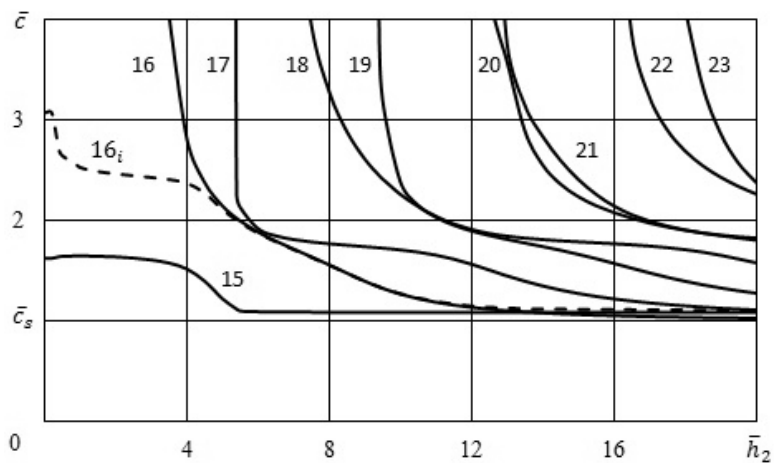


Рис. 4

З графіків рис. 4 випливає, що фазові швидкості всіх наступних мод високого порядку зі зростанням товщини (частоти) прямують до швидкості хвилі зсуву в матеріалі пружного тіла $\bar{c}_s$.

На рис. 5 – 7 наведено залежності безрозмірних величин коефіцієнтів згасання мод $\bar{\gamma}$ ($\bar{\gamma} = \gamma/k_s$, k_s – хвильове число хвилі зсуву в матеріалі пружного шару) від

безрозмірної величини товщини пружного шару $\bar{h}_2$ для шару в'язкої рідини з товщиною $\bar{h}_1$, рівною 20, і $\bar{\mu}^* = 0,001$. При цьому на рис. 5 представлені криві для перших 12-и мод.

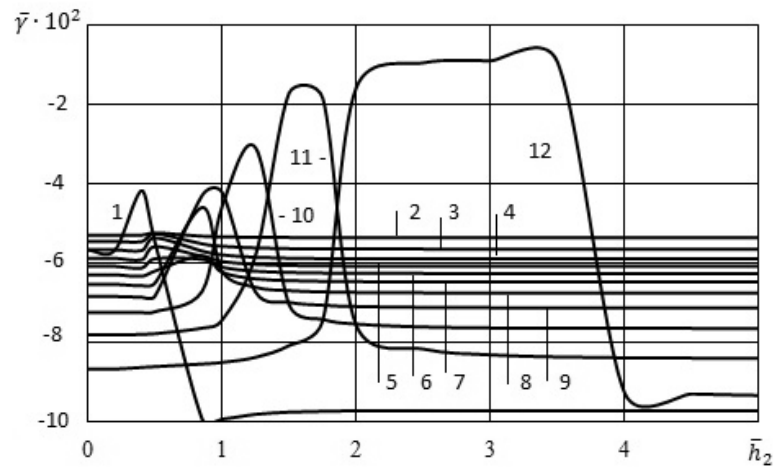


Рис. 5

Залежності $\bar{\gamma} = f(\bar{h}_2)$ для мод з 13 по 24 наведені на рис. 6 та 7.

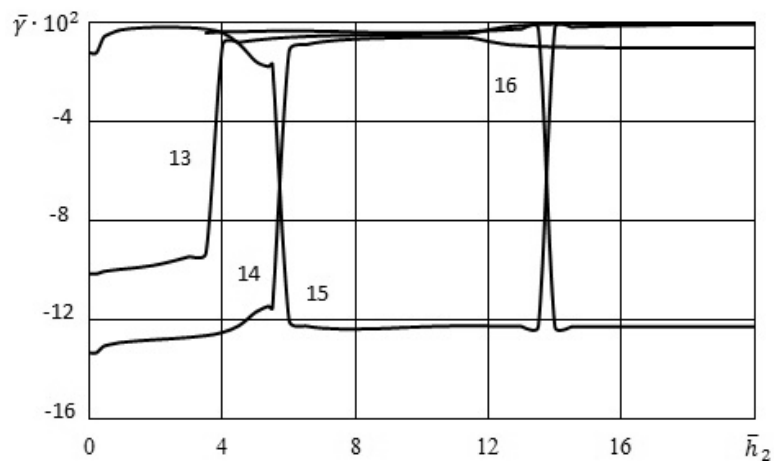


Рис. 6

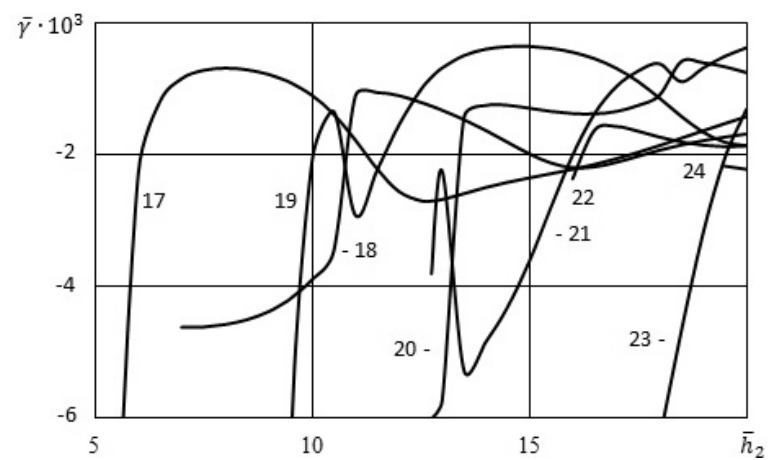


Рис. 7

З графіків, наведених на рис. 5 – 7, безпосередньо випливає, що для всіх мод існують пружні шари певної товщини, при яких моди поширюються як з найменшим, так і з найбільшим згасанням. Зі зростанням товщини пружного шару для мод, починаючи з 13-ої, характерно зменшення їх величин коефіцієнтів згасання та загального впливу в'язкої рідини на них.

Характер впливу попереднього розтягу ($\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$) на швидкості нормальних хвиль в пружно-рідинній системі ілюструють графіки на рис. 8 – 11, на яких представлені залежності відносних змін величин фазових швидкостей c_ε [$c_\varepsilon = (c_\sigma - c)/c$, c_σ – фазова швидкість мод у попередньо напруженому шарі, c – фазова швидкість нормальних хвиль у пружному шарі при відсутності початкових деформацій] від товщини пружного шару $\bar{h}_2$. На цьому рисунку наведено криві для гідропружного хвильоводу, товщина в'язкого рідкого шару якого $\bar{h}_1 = 20$ і $\bar{\mu}^* = 0,001$.

Із графіків, наведених на рис. 8 – 11, випливає, що початковий розтяг пружного шару ($\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$) призводить до підвищення фазових швидкостей мод 1 – 10. Швидкості всіх вищих мод (11 – 24) в околі товщин пружних шарів, при яких вони зароджуються, стають менші швидкостей відповідних хвиль у шарі без початкових напружень.

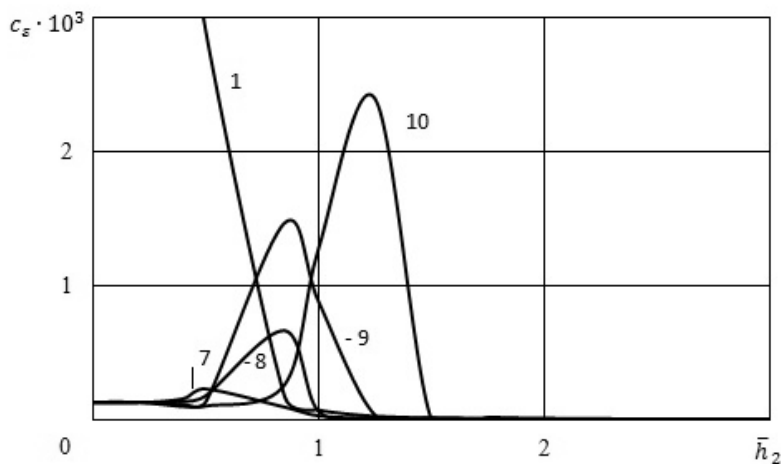


Рис. 8

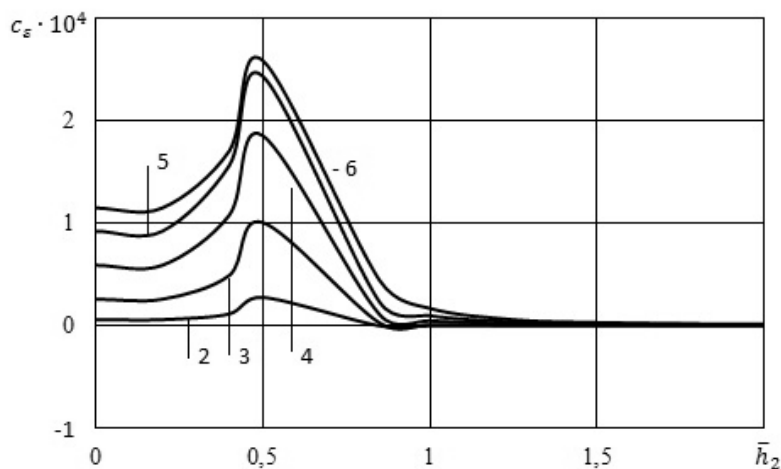


Рис. 9

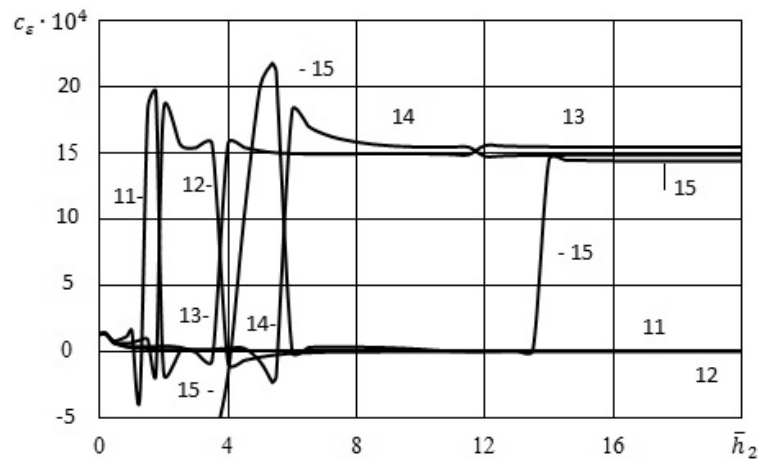


Рис. 10

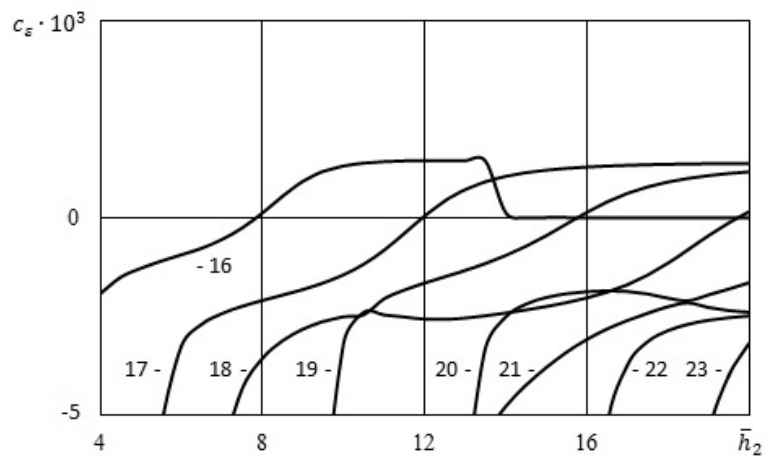


Рис. 11

Як видно, для другої моди, а також для мод, починаючи з 11-ої і далі для всіх наступних, існують товщини пружного шару, при яких попереднє деформування не впливає на їх фазові швидкості. У випадку, який розглядається, для гідропружної системи з товстим рідким шаром ($\bar{h}_1 = 20$) для другої моди, а також для кожної моди 11 – 24 існують пружні шари однієї такої товщини. Із графіків, наведених на рис. 8 – 11, також впливає, що початковий розтяг ($\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$) найбільше впливає на фазові швидкості рідинних мод 1 – 12 в основному в низькочастотній частині спектру. Для мод 1 – 8 це інтервал зміни частот $\bar{h}_2$ від 0 до 1. Таким діапазоном зміни $\bar{h}_2$ для мод 9 та 10 є проміжок 0,5 – 1,5. Максимальних значень відносні зміни величин фазових швидкостей мод 11 і 12 досягають на інтервалі 0 – 6. На фазові швидкості мод високого порядку з 13 по 24 початкові напруження мають найбільший вплив в околі частот їх зародження $\bar{h}_{кр}$.

Характер впливу попереднього розтягу ($\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$) на коефіцієнти згасання мод в пружному шарі, що взаємодіє з шаром в'язкої стисливої рідини, ілюструють графіки на рис. 12 – 15, на яких представлені залежності відносних змін величин коефіцієнтів згасання мод γ_ε [$\gamma_\varepsilon = (\gamma_\sigma - \gamma)/\gamma$, γ_σ – коефіцієнти згасання мод в гідропружній системі, пружний шар якої підданий початковим деформаціям, γ – коефіцієнти згасання мод у гідропружній системі за відсутності початкових деформацій] від безрозмірної

величини товщини пружного шару $\bar{h}_2$. На цих рисунках представлено графіки для гідропружного хвилеводу, товщина рідкого шару якого $\bar{h}_1 = 20$ і $\bar{\mu}^* = 0,001$.

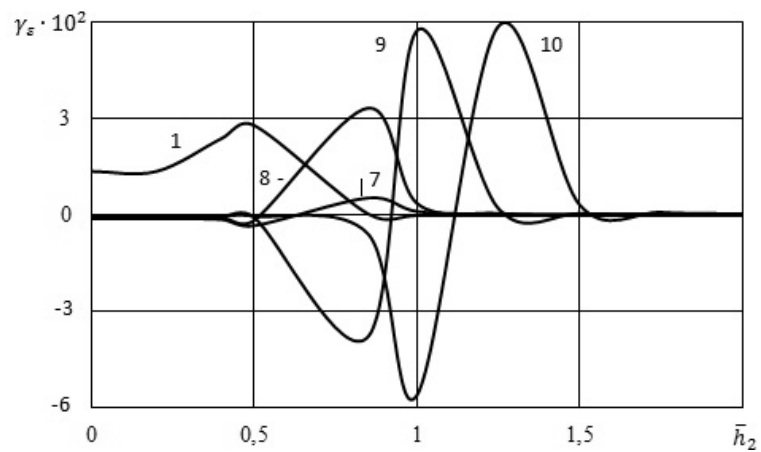


Рис. 12

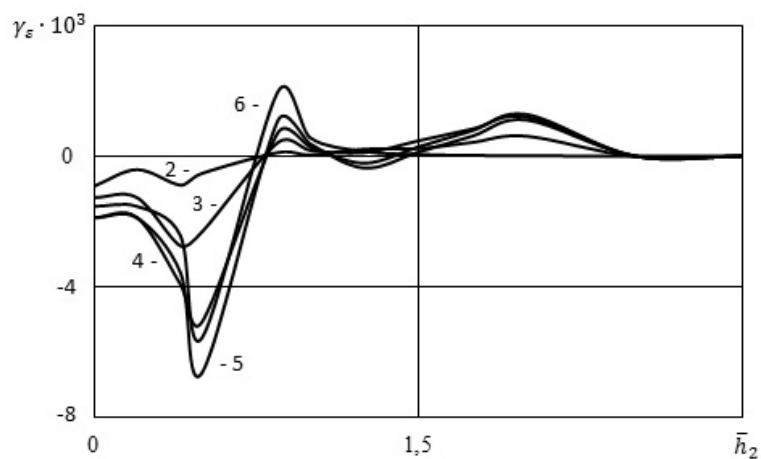


Рис. 13

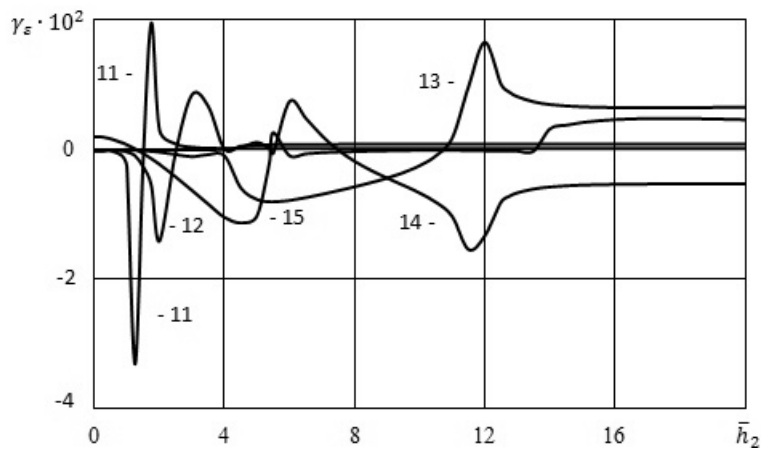


Рис. 14

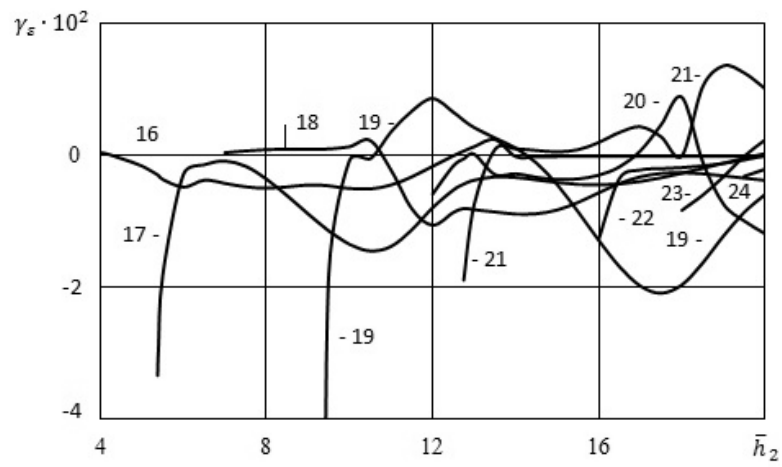


Рис. 15

Із графіків, наведених на рис. 12 – 15, випливає, що для всіх мод існують товщини пружного шару, при яких попередній розтяг ($\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$) не впливає на їхні коефіцієнти згасання.

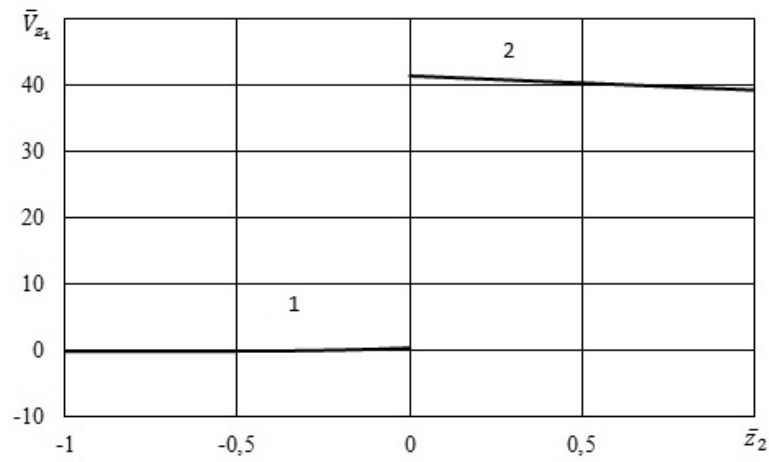


Рис. 16

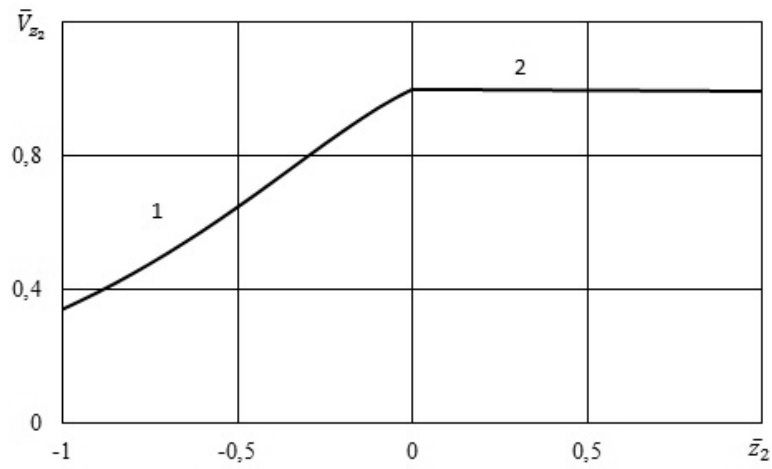


Рис. 17

Графіки, представлені на рис. 16, 17, відображають розподіл амплітуд зміщень (швидкостей) для гідропружного хвильоводу, який складається з пружного шару зі сталі ($-\bar{h}_2 \leq \bar{z}_2 \leq 0$) і шару ($0 \leq \bar{z}_2 \leq \bar{h}_1$) ідеальної рідини ($\bar{\mu}^* = 0$). На них наведено залежності безрозмірних величин поздовжніх $\bar{V}_{z_1}$ (рис. 16) і поперечних $\bar{V}_{z_2}$ (рис. 17) зміщень (швидкостей $\partial u_i / \partial t$ і v_i) від безрозмірної поперечної координати $\bar{z}_2$ для поверхневої хвилі 1 (рис. 2).

Аналогічні залежності для гідропружної системи, яка складається з пружного шару та в'язкого рідкого шару ($\bar{\mu}^* = 0,001$), наведено на рис. 18, 19.

Графіки, представлені на рис. 16, 17, отримані для першої нижчої квазіповерхневої моди 1 (рис. 2) у короткохвильовій частині спектра при частоті (товщині пружного шару) $\bar{h}_2 = 20$. Зазначимо, що розрив поздовжніх зсувів $\bar{V}_{z_1}$ в пружному тілі (крива 1) та в ідеальній рідині (крива 2) на межі контакту середовищ ($\bar{z}_2 = 0$) обумовлений нев'язкістю (ідеальністю $\bar{\mu}^* = 0$) рідини (рис. 16).

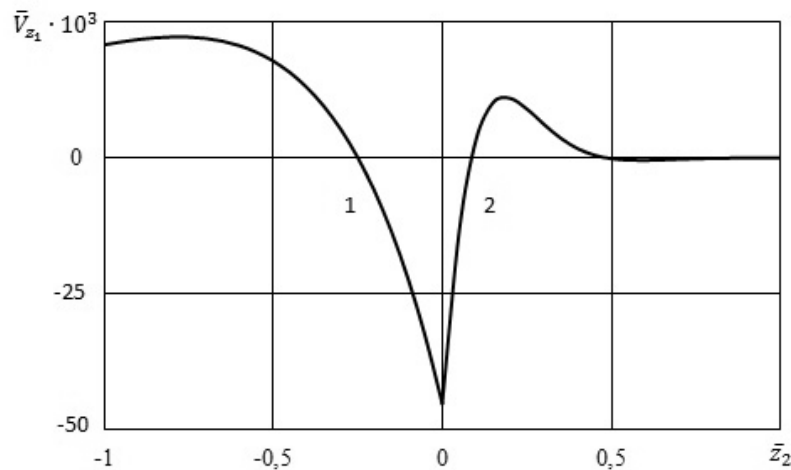


Рис. 18

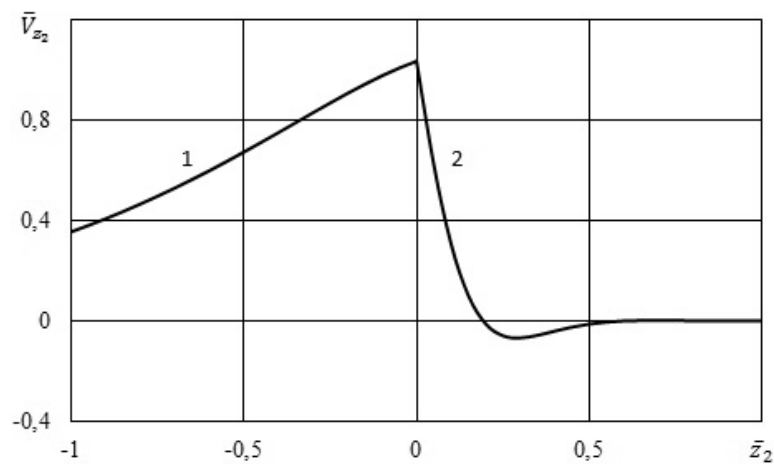


Рис. 19

Щодо нижчої моди 1 (рис. 2) зауважимо наступне. Як видно з графіків рис. 16, 17, у приконтактній області ($-1 \leq \bar{z}_2 \leq 0$) пружного шару поздовжні зміщення $\bar{V}_{z_1}$ (крива

1 на рис. 16) мізерно малі, а поперечні зміщення $\bar{V}_{z_2}$ (крива 1 на рис. 17) швидко зменшуються при віддаленні від межі поділу середовищ. У рідкому шарі ($0 \leq \bar{z}_2 \leq 1$) протилежна ситуація. Поздовжні $\bar{V}_{z_1}$ та поперечні $\bar{V}_{z_2}$ зміщення (криві 2 на рис. 16, 17), приймаючи найбільші значення на межі контакту ($\bar{z}_2 = 0$), повільно спадають із глибиною. Це свідчить про концентрацію хвильових рухів у рідині. Як бачимо, глибина проникнення квазіповерхневої моди 1 в ідеальну рідину значно більша глибини проникнення її в пружний шар. Тому в гідропружній системі при $\bar{a}_0 = 0,463021 < \bar{c}_R = 0,924531$, як випливає з графіків рис. 16, 17, зі збільшенням частоти (товщини пружного шару) нижча мода, поширюючись вздовж межі розділу середовищ, локалізується, головним чином, в області рідкого шару. Моді з 2 по 12 зі зростанням частоти також локалізуються в рідкому шарі. 13-а та 14-та моди зі зростанням товщини (частоти) поширюються вздовж поверхонь пружного шару. На відміну від цих мод рухи в модах високого порядку, починаючи з моди 15, поширюючись у твердому тілі, при $\bar{h} \rightarrow \infty$ зміщуються від поверхонь пружного шару в його товщу. З цим пов'язано зменшення впливу в'язкої рідини на параметри цих хвиль в гідропружному хвилеводі, який розглядається.

Порівняння графіків розподілу амплітуд зміщень, які представлені на рис. 16, 17 і 18, 19, показує, що жорсткий контакт, обумовлений в'язкістю (рис. 18, 19), на відміну від контакту з ковзанням, характерного для ідеальної рідини (рис. 16, 17), призводить до зменшення глибини проникнення квазіповерхневої моди 1 у рідкий шар.

Характер впливу попереднього розтягу ($\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$) на розподіл амплітуд поздовжніх зміщень (швидкостей) нижчої моди в пружно-рідинній системі ілюструє графік на рис. 20, який представляє залежність відносної зміни величини поздовжнього зміщення (швидкості) $\tilde{V}_{z_1} = (\bar{V}_{z_1}^{(\sigma)} - \bar{V}_{z_1}) / \bar{V}_{z_1}$, $\bar{V}_{z_1}^{(\sigma)}$ – поздовжнє зміщення моди 1 у попередньо напруженому шарі, $\bar{V}_{z_1}$ – поздовжнє зміщення нижчої моди в пружному шарі за відсутності початкових деформацій] від безрозмірної поперечної координати $\bar{z}_2$. На цьому рисунку наведена епюра для гідропружного хвилеводу, товщина в'язкого рідкого шару якого $\bar{h}_1 = 20$ і $\bar{\mu}^* = 0,001$.

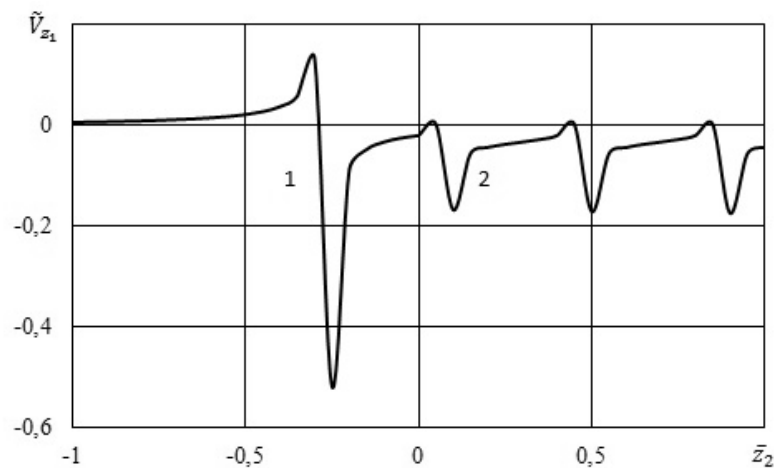


Рис. 20

Аналогічна залежність відносної зміни величини поперечного зміщення (швидкості) $\tilde{V}_{z_2} = (\bar{V}_{z_2}^{(\sigma)} - \bar{V}_{z_2}) / \bar{V}_{z_2}$ представлена на рис. 21.

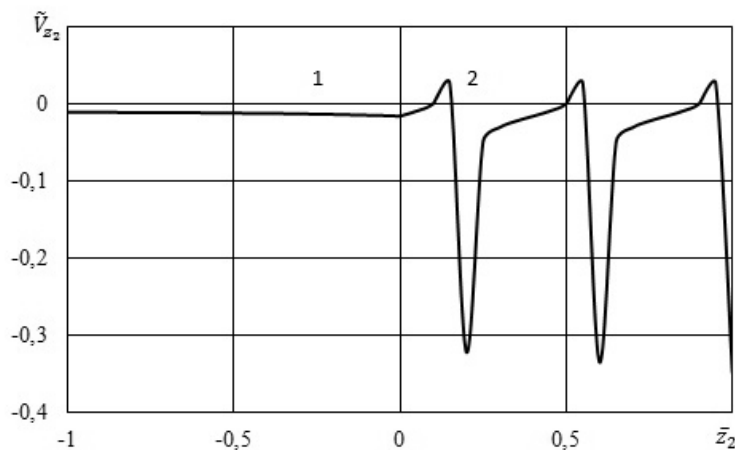


Рис. 21

Графіки, наведені на рис. 20 і 21, отримані для нижчої квазіповерхневої моди 1 (хвиля типу Стоунлі) при $\bar{h}_1 = 20$ і $\bar{h}_2 = 20$. При цьому фазова швидкість $\bar{c}_1$ моди дорівнює 0,461819 та лише незначно відрізняється від швидкості хвилі Стоунлі. У цьому випадку, як випливає з графіків, у поперечному перерізі існують точки, в яких поздовжні $\bar{V}_{z_1}$ та поперечні $\bar{V}_{z_2}$ зміщення (швидкості) не залежать від початкових напружень.

§4. Вплив в'язкої рідини на хвильовий процес.

Аналіз числових результатів показує, що в гідропружному хвильоводі рідина сприяє появі нових мод, які мають нульові частоти замикання. Крім того, для ряду узагальнених мод Лемба рідинне навантаження викликає зміщення критичних частот і дисперсійних кривих в довгохвильову частину спектра, а також зміну їх конфігурації. Це призводить до того, що в околі товщин пружного шару (частот), при яких відбувається зародження мод, вплив рідини на величини фазових швидкостей цих мод стає значним.

Вплив в'язкості рідини пов'язаний з її взаємодією зі зміщеннями, що виникають в пружно-рідинній системі при поширенні хвильових збурень. У тих точках мод, де переважаючими є зсувні зміщення на межі розділу середовищ, вплив в'язкості найбільший і величини коефіцієнтів згасання, а також відносні зміни величин фазових швидкостей приймають максимальне значення. У точках хвилі з малими поверхневими поперечними зміщеннями, відповідно, і вплив в'язкості найменший. Як зазначалося вище, зі збільшенням товщини пружного шару у всіх модах високого порядку, починаючи з п'ятнадцятої моди, переважають поперечні зміщення, амплітуда яких на поверхнях пружного шару прямує до нуля в порівнянні з їх амплітудами в товщі шару, тобто рухи в модах високого порядку зміщуються від поверхонь всередину пружного шару і локалізуються в його товщі. Наслідком цього є зменшення впливу в'язкої рідини на величини фазових швидкостей мод високого порядку в короткохвильовій частині спектру. Для рідинних мод з 1 по 12, які поширюються в рідкому шарі, ситуація протилежна. Для них характерний вплив в'язкості рідини на хвильові параметри на всьому частотному інтервалі.

§5. Властивості локалізації узагальнених мод Лемба.

Зазначимо, що, як відомо, фазова швидкість і структура хвилі Стоунлі при взаємодії твердого та рідкого півпросторів залежать від механічних параметрів гідропружної системи і визначаються співвідношенням між швидкістю звуку в рідкому та швидкістю хвилі Релея у твердому півпросторах. При цьому, у випадку, коли швидкість хвилі звуку в рідкому середовищі більша за швидкість хвилі Релея, то хвиля Стоунлі локалізується в пружному тілі. В іншому випадку ця хвиля поширюється в рідкому півпросторі. До хвильового процесу в системі «шар рідини – пружний шар»

цей критерій також може бути застосований, оскільки нижча квазіповерхнева мода 1 є хвилею типу Стоунлі і граничне значення її швидкості зі збільшенням товщини (частоти) прямує до швидкості хвилі Стоунлі. Відмінність полягає лише в тому, що в нашому випадку гідропружної системи порівнюються швидкості звукової хвилі в рідкому шарі зі швидкістю квазірелеївської хвилі, яка поширюється вздовж вільної поверхні пружного шару.

Графіки, наведені на рис. 2 для пружно-рідинної системи «сталь – вода», показують, що в гідропружному хвилеводі при збільшенні товщини пружного шару $\bar{h}_2$ швидкість першої моди 1, яка поширюється вздовж межі контакту середовищ, прямує до швидкості хвилі Стоунлі $\bar{c}_{st}$ знизу. При цьому в даному випадку механічні параметри гідропружної системи «сталь – вода» такі, що швидкість поширення звукової хвилі в рідині $\bar{a}_0$ менша швидкості квазірелеївської хвилі $\bar{c}_R$ ($\bar{a}_0 = 0,463021 < \bar{c}_R = 0,923063$). У цьому випадку, як випливає з графіків (рис. 16, 17) в короткохвильовій частині спектра глибина проникнення квазіповерхневої моди 1 в ідеальну рідину значно більша глибини проникнення в пружне тіло. Тому мода 1, поширюючись вздовж межі контакту середовищ, локалізується переважно в приповерхній області ідеального рідкого шару. Це стосується і мод з 2 по 12, які також поширюються в рідині. Внаслідок того, що жодна з нижчих мод (1 – 12) не проникає у тверде тіло, поверхня пружного шару, що межує з рідиною, залишається вільною від рідинних мод. Цю область займає мода 13. Швидкість цієї моди, яка розповсюджується вздовж межі контакту середовищ у приповерхній області пружного шару, прямує до швидкості хвилі Релея $\bar{c}_R$ знизу, як і у випадку твердого шару, який не взаємодіє з рідиною. Швидкість моди 14, яка поширюється в пружному шарі вздовж його вільної поверхні, прямує до швидкості хвилі Релея $\bar{c}_R$ зверху. Швидкості всіх мод більш високого порядку прямують до швидкості хвилі зсуву в матеріалі твердого тіла $\bar{c}_s$ і, як зазначено вище, їх рухи локалізуються в товщі пружного шару.

Таким чином, аналіз показує, що в даній пружно-рідинній системі не тільки перша мода, але і нижчі моди 2 – 12, які виникають в результаті взаємодії пружного шару з рідким шаром, не проникають в тверде тіло і поширюються вздовж межі контакту середовищ переважно у приповерхній ділянці рідини. Цим пояснюється незначний вплив пружного шару і початкових напружень на фазові швидкості, а також дисперсію цих мод. Решта мод вищого порядку, як зазначалося раніше, поширюються в пружному шарі. У цьому випадку хвилеводами для поширення нормальних хвиль та перенесення хвильової енергії служать як пружний, так і рідкий шари. З аналізу графіків, наведених на рис. 16 – 19, випливає, що для гідропружної системи «пружний шар – рідкий шар» в'язкість рідини зменшує глибину проникнення хвильових рухів нижчої моди в рідкий шар.

Зазначимо, що вплив рідини проявляється у зміні критичних частот та конфігурації дисперсійних кривих, а також у зміщенні їх у довгохвильову частину спектра. Рідина впливає на розподіл мод серед середовищ. Локалізація нижчих узагальнених мод Лемба в системі «шар рідини – пружний шар» залежить від механічних параметрів гідропружної системи. Основним критерієм розподілу нижчих нормальних хвиль у середовищах є співвідношення між величинами швидкостей хвилі звуку в шарі рідини і квазірелеївської хвилі, яка поширюється вздовж вільної поверхні пружного шару.

§6. Особливості впливу початкових напружень на дисперсію узагальнених хвиль Лемба в гідропружному хвилеводі.

Як показано в роботі [5], в пружному шарі, який не взаємодіє з рідиною, початкові розтяги викликають зміну частот зародження мод і зміщення їх дисперсійних кривих. Це призводить до того, що в околі критичних частот величини фазових швидкостей мод у попередньо деформованому шарі можуть бути як менші, так і більші величин фазових швидкостей відповідних мод в тілі без початкових напружень. Цим обу-

мовлена поява в пружному хвилеводі частот (товщин), при яких початкові напруження не впливають на величини фазових швидкостей ряду нормальних хвиль Лемба.

У гідропружних хвилеводах попереднє деформування (розтяг) викликає зміну критичних частот і зсув дисперсійних кривих в довгохвильову частину спектра, що призводить до появи для ряду узагальнених мод Лемба пружних шарів певних товщин, при яких початкові напруження не впливають на величини їх фазових швидкостей та коефіцієнтів згасання.

Як зазначалося, у разі гідропружної системи «сталь – вода» попередній розтяг призводить до зсуву дисперсійних кривих у довгохвильову частину спектра та зміни їх конфігурації. При цьому в гідропружному хвилеводі початковий розтяг ($\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$) призводить до «розтягування» дисперсійних кривих ряду мод. Тому у мод, починаючи з 16-ої і далі для всіх наступних мод високого порядку, незалежно від їх номера є по одному пружному шару з товщиною, при якій їх фазові швидкості не залежать від попереднього деформування.

Встановлено, що для всіх мод існують товщини пружного шару, при яких попередній розтяг не впливає на їхні коефіцієнти згасання.

Проведений аналіз отриманих графіків показує, що вплив початкових напружень на узагальнені моди Лемба тісно пов'язаний з їх властивостями локалізації. Як уже зазначалося, у цій пружно-рідинній системі при $\bar{a}_0 < \bar{c}_R$ ($\bar{a}_0 = 0,463021 < \bar{c}_R = 0,923063$) у високочастотній частині спектра перша мода, а також моди з 2 по 12, які виникають в результаті взаємодії пружного шару з рідким шаром, поширюються вздовж межі контакту середовищ, переважно в приповерхній області рідини. Цим пояснюється незначний вплив пружного шару та початкових напружень на фазові швидкості, коефіцієнти згасання, а також дисперсію цих мод (рис. 8 – 10, 12 – 14). На відміну від цих рідинних хвиль квазіповерхневі моди 13 та 14 поширюються в пружному шарі. При цьому зі зростанням частоти вони локалізуються біля його поверхонь. Всі інші моди вищого порядку, як зазначалося, зі зростанням частоти (товщини пружного шару) поширюються в пружному шарі у його товщі. Цим обумовлено вплив початкових напружень на фазові швидкості мод високого порядку, починаючи з 13.

Висновок.

Таким чином, аналіз показує, що в пружно-рідинній системі «сталь – вода» не тільки перша мода, але і нижчі моди 2 – 12, які виникають в результаті взаємодії пружного шару з рідким шаром, не проникають у тверде тіло і поширюються вздовж межі розділу середовищ, переважно, у приконтантній ділянці рідини. Моди 13 та 14 зі зростанням товщини (частоти) поширюються вздовж поверхонь пружного шару. Решта мод вищого порядку, починаючи з моди 15, поширюються в пружному шарі в його товщі. У цьому випадку хвилеводами для поширення нормальних хвиль та перенесення хвильової енергії служать як пружний, так і рідкий шари.

Встановлено, що характер впливу початкових напружень на характеристики узагальнених мод Лемба залежить від їхньої локалізації. Виявлено існування пружних шарів певної товщини, при яких початковий розтяг не впливає на фазові швидкості та коефіцієнти згасання певних мод. Встановлено, що в гідропружній системі початковий розтяг викликає зміщення дисперсійних кривих мод Лемба в довгохвильову частину спектра та зміну їхньої конфігурації. Показано, що для мод, починаючи з 16 і далі для всіх наступних мод високого порядку незалежно від їх номера існує по одному пружному шару з товщиною, при якій фазові швидкості не залежать від попереднього деформування. Встановлено, що для всіх мод існують товщини пружного шару, при яких попередній розтяг не впливає на їхні коефіцієнти згасання.

Показано, що для гідропружної системи «пружний шар – рідкий шар» в'язкість рідини зменшує глибину проникнення хвильових рухів нижчої моди в рідкий шар.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в цій статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Наукова та науково-технічна діяльність наукових установ Національної академії наук України» (КПКВК 6541030).

РЕЗЮМЕ. Розглянуто задачу про поширення акустичних хвиль у попередньо деформованому стисливому пружному шарі, що взаємодіє з шаром в'язкої стисливої рідини. Дослідження проведено на основі тривимірних рівнянь лінеаризованої теорії пружності скінченних деформацій для пружного шару та тривимірних лінеаризованих рівнянь Нав'є – Стокса для шару в'язкої стисливої рідини. Застосовано постановку задачі та підхід, які базуються на використанні представлень загальних розв'язків лінеаризованих рівнянь для пружного тіла та рідини. Отримано дисперсійне рівняння, яке описує поширення гармонічних хвиль у гідропружній системі у широкому діапазоні частот для товстого шару рідини. Проаналізовано вплив початкових напружень, а також товщини шарів пружного тіла і рідини на фазові швидкості та коефіцієнти згасання узагальнених мод Лемба. Розвинутий підхід та отримані результати дозволяють для хвильових процесів встановити межі застосування моделей, оснований на різних варіантах теорії малих початкових деформацій, класичної теорії пружності, а також моделі ідеальної рідини. Числові результати наведено у вигляді графіків і проаналізовано.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: узагальнені моди Лемба, стисливий пружний шар, шар в'язкої стисливої рідини, початкові напруження, гармонічні хвилі.

1. Гузь А.Н. Динамика сжимаемой вязкой жидкости. – Киев: А.С.К., 1998. – 350 с.
2. Гузь А. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями: в 2-х частях. Ч. 1. Общие вопросы. Волны в бесконечных телах и поверхностные волны. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. – 501 с.
3. Гузь А. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями: в 2-х частях. Ч. 2. Волны в частичноограниченных телах. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. – 505 с.
4. Гузь А.Н. Введение в динамику сжимаемой вязкой жидкости. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing RU, 2017. – 244 с.
5. Гузь А.Н., Жук А.П., Махорт Ф.Г. Волны в слое с начальными напряжениями. – Киев: Наук. думка, 1976. – 104 с.
6. Жук А.П. Волны Стоунли в среде с начальными напряжениями // Прикл. механика. – 1980. – **16**, № 1. – С. 113 – 116.
7. Babich S.Yu., Guz A.N., Zhuk A.P. Elastic Waves in Bodies with Initial Stresses // Int. Appl. Mech. – 1979. – **15**, N 4. – P. 3 – 23.
8. Bagnò A.M. Wave Propagation in an Elastic Layer Interacting with a Viscous Liquid Layer // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 2. – P. 133 – 139.
9. Bagnò A.M. Effect of Prestresses on the Dispersion of Quasi-Lamb Waves in the System Consisting of an Ideal Liquid Layer and a Compressible Elastic Layer // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 2. – P. 139 – 148.
10. Guz A. N. Aerohydroelasticity Problems for Bodies with Initial Stresses // Int. Appl. Mech. – 1980. – **16**, N 3. – P. 175 – 190.
11. Guz A.N. Compressible, Viscous Fluid Dynamics (review). Part 1 // Int. Appl. Mech. – 2000. – **36**, N 1. – P. 14 – 39.
12. Guz A.N. The Dynamics of a Compressible Viscous Liquid (review). II // Int. Appl. Mech. – 2000. – **36**, N 3. – P. 281 – 302.
13. Guz A.N. Elastic Waves in Bodies with Initial (Residual) Stresses // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, N 1. – P. 23 – 59.
14. Guz A.N. Dynamics of compressible viscous fluid. – Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2009. – 428 p.
15. Guz A.N. On the foundations of the ultrasonic non-destructive determination of stresses in near-the-surface layers of materials. Review // J. Phys. Sci. and Appl. – 2011. – **1**, N 1. – P. 1 – 15.
16. Guz A.N. Ultrasonic Nondestructive Method for Stress Analysis of Structural Members and Near-Surface Layers of Materials: Focus on Ukrainian Research (Review) // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 3. – P. 231 – 252.
17. Guz A.N., Bagnò A.M. Effect of Prestresses on Quasi-Lamb Waves in a System Consisting of a Compressible Viscous Liquid Half-Space and an Elastic Layer // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 6. – P. 617 – 627.
18. Guz A.N., Bagnò A.M. Propagation of Quasi-Lamb Waves in an Elastic Layer Interacting with a Viscous Liquid Half-Space // Int. Appl. Mech. – 2019. – **55**, N 5. – P. 459 – 469.
19. Guz A.N., Zhuk A. P., Bagnò A. M. Dynamics of Elastic Bodies, Solid Particles, and Fluid Parcels in a Compressible Viscous Fluid (Review) // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 5. – P. 449 – 507.
20. Ottenio M., Destrade M., Ogden R.W. Acoustic waves at the interface of a pre-stressed incompressible elastic solid and a viscous fluid // Int. J. Non-Linear Mech. – 2007. – **42**, N 2. – P. 310 – 320.

Надійшла 05.10.2022

Затверджена до друку 28.03.2023