

М.О.Бабешко, В.Г.Савченко

**МЕТОДИКА ПОКРАЩЕННЯ ЗБІЖНОСТІ МЕТОДУ ПОСЛІДОВНИХ
НАБЛИЖЕНЬ В КРАЙОВИХ ЗАДАЧАХ ТЕРМОВ'ЯЗКОПЛАСТИЧНОСТІ**

*Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: plast@inmech.kiev.ua*

Abstract. A procedure is suggested to increase the convergence velocity in the process of successive approximations for the boundary problems of thermoviscoplasticity. The constitutive equations of the theories of simple loading processes as well as the small curvature processes are used. Equality of the specific work of the specimen and body elementary volume of deformation under corresponding values of tangent stresses intensities and shear strains is assumed as the basis. The number of successive approximations in the test problems of the shell theory and the spatial problem during non-axisymmetric loading is considered. It is shown that the proposed modification of a process of successive approximations decreases the number of approximations almost twice.

Key words: thermoviscoplasticity, boundary problem, method of successive approximations, convergence velocity.

Вступ.

Задача дослідження напружено-деформованого стану багатьох елементів машинобудівних конструкцій, що працюють в умовах нерівномірного нагрівання під дією різних об'ємних і поверхневих навантажень, зводиться до розв'язання нелінійної крайової задачі термов'язкопластичності по визначенню переміщень, деформацій і напружень для фіксованих моментів часу і наступної оцінки міцності конструкції [12 – 14, 18, 21, 22, 27]. Для цього процес навантаження і нагрівання розділяється на окремі дрібні за часом етапи таким чином, щоб моменти часу, які розмежовують етапи, по можливості збігалися з моментами зміни напрямку процесу деформування окремих елементів тіла від активного навантаження до розвантаження і навпаки. Історія навантаження простежується шляхом послідовного розв'язування задачі на кожному етапі. Отримання такого розв'язку є досить трудомісткою процедурою, яка включає вибір визначальних рівнянь, що адекватно описують деформування матеріалу елемента тіла, їх лінеаризацію, дискретизацію поперечного перерізу та ін. Одним з важливих елементів цієї процедури є організація процесу послідовних наближень у відповідності до використаних визначальних рівнянь і методу їх лінеаризації. Пропонується спосіб побудови процесу послідовних наближень, збіжність якого краща порівняно з описаними раніше [2 – 6, 11 – 14, 17, 19 – 22, 29] алгоритмами. Його запропоновано в роботах [1, 26], де він апробований на тестових задачах теорії термопластичності для осесиметричних тонких оболонок і просторових тіл. В даній роботі запропонований спосіб розвинуто стосовно класу просторових задач термов'язкопластичності і виконано оцінку збіжності порівняно з традиційними методами послідовних наближень. При цьому використовувались співвідношення теорії простих процесів деформування, лінеаризовані методом пружних розв'язків і методом змінних параметрів пружності, та співвідношення теорії процесів малої кривизни, лінеаризовані методом додаткових напружень [13, 14, 17].

§1. Постановка задачі термов'язкопластичності.

Наведемо загальну постановку задач термов'язкопластичності, яка в кожному конкретному випадку при розв'язуванні задачі адаптується до геометрії об'єкта, що досліджується, стану його матеріалу, умов термосилового навантаження, траєкторії процесу деформування та ін.

Розглянемо в ортогональній системі координат q_i ($i = 1, 2, 3$) напружений стан складених тіл з ізотропних і ортотропних матеріалів, які деформуються непружно, при навантаженні об'ємними $\vec{K}(K_1, K_2, K_3)$ і поверхневими $\vec{t}_n(t_{n1}, t_{n2}, t_{n3})$ силами і нерівномірному нагріванні. Рівень навантаження такий, що деформації, які виникають в елементах тіла, малі. Припустимо, що механічні властивості матеріалів залежать від температури. Навантаження і нагрівання тіла відбуваються таким чином, що в його елементах здійснюються прості (або близькі до простих) процеси деформування або процеси деформування вздовж траєкторій малої кривизни, що супроводжуються непружними деформаціями і областями розвантаження.

Процес дослідження напружено-деформованого стану таких тіл зводиться до послідовного розв'язування задачі нестационарної теплопровідності по визначенню температури T і задачі термов'язкопластичності по визначенню переміщень u_i , деформацій ε_{ij} і напружень σ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) для фіксованих моментів часу. Тензор деформацій представляється у вигляді суми тензорів пружної і пластичної деформації та деформацій повзучості, при цьому в процесі деформування припускається непружна зміна об'єму. Як показують дослідження [7, 10, 16], таке припущення про непружну зміну об'єму призводить до розпушення матеріалу [15, 24] і для більшості сталей необхідно його враховувати при деформаціях більше 4% – 5%, хоча для чавуну, алюмінієвих сплавів і інших зернистих матеріалів цей ефект проявляється і при значно менших деформаціях. Пружні деформації при зміні напружень підлягають узагальненому закону Гука.

Для врахування історії деформування весь процес навантаження і нагрівання розбивається на окремі досить малі за часом етапи таким чином, щоб їх кінці по можливості співпадали з моментами зміни напрямку процесу деформування окремого елемента тіла від навантаження до розвантаження і навпаки. Історія враховується шляхом послідовного розв'язування задачі на кожному етапі.

Залежність між компонентами тензора напруження σ_{ij} і компонентами тензора деформації ε_{ij} (визначальні рівняння) для ізотропного і анізотропного матеріалів можна записати в єдиній формі, незалежно від того, на якій стадії деформування знаходиться цей матеріал. Для цього в роботі використано узагальнений закон Гука для анізотропного тіла. У випадку, коли осі q_i ортогональної криволінійної системи координат не співпадають з головними осями q'_i анізотропії теплофізичних і механічних властивостей матеріалу, ці співвідношення будуть наступними:

$$\sigma_{ij} = A_{ijmn}\varepsilon_{mn} - \sigma_{ij}^* \quad (m, n = 1, 2, 3) \quad (1.1)$$

при умові

$$A_{ijmn} = A_{jimn} = A_{ijnm} = A_{mnij}. \quad (1.2)$$

Тут і надалі за індексами, які повторюються, в одночленних виразах ведеться підсумовування в границях, вказаних в круглих дужках.

В (1.1), (1.2) коефіцієнти A_{ijmn} і додаткові члени σ_{ij}^* мають різний вигляд в залежності від типу матеріалу, теорій пластичності та повзучості, які використовуються, а також від способу лінеаризації визначальних рівнянь. Додаткові члени σ_{ij}^* враховують теплову деформацію, відхилення матеріалу від пружного, пошкодження матеріалу, залежність діаграм деформування матеріалу від виду напруженого стану і темпе-

ратури, а також метод лінеаризації початкових нелінійних співвідношень [24, 25]. Для лінеаризації цих рівнянь використовується метод послідовних лінійних наближень, коли в кожному наближенні розв'язання початкової нелінійної задачі зводиться до розв'язання лінійної задачі теорії пружності з деякими додатковими об'ємними і поверхневими силами. Ці члени враховують теплову деформацію, залежність властивостей матеріалу від температури, непружну поведінку матеріалу і визначаються за результатами розв'язання задачі в попередньому наближенні.

Для конкретизації функціональної залежності між інтенсивностями напружень і деформацій, температурою і часом, пропонуються підходи, які базуються на безпосередньому використанні миттєвої термомеханічної поверхні, діаграм повзучості і діаграм тривалої міцності. Ці діаграми задаються у вигляді експериментальних даних [25, 28], одержаних при різних фіксованих значеннях температури. Розв'язок крайової задачі теплопровідності по визначенню температури в тілі, яке розглядається, як і розв'язок задачі по визначенню напружено-деформованого стану, будується чисельно з використанням методик, описаних в роботах [13, 14, 26].

§2. Термов'язкопластичний стан ізотропних тіл.

Наведемо основні співвідношення для опису пружнопластичного деформування початково ізотропних тіл. Розглянемо малі деформації при простих процесах деформування і процесах деформування вздовж траєкторій малої кривизни. Покажемо, як при цьому реалізується процес послідовних наближень на кожному етапі навантаження. Оскільки розглядаються тільки осесиметричні тіла, для розрахунку використаємо методики, описані в роботах [14, 22, 24, 25], а результати наведемо в циліндричній системі координат z, r, φ .

2.1. Прості процеси деформування. При використанні співвідношень теорії малих пружнопластичних деформацій, яка враховує історію навантаження [21 – 23, 27], лінеаризованих методом пружних розв'язків, коефіцієнти A_{ijmn} в визначальних рівняннях (1.1) приймають вигляд

$$A_{ijmn} = G_0 (\delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm}) + \frac{1}{3} (K_0 - 2G_0) \delta_{ij} \delta_{mn}, \quad (2.1)$$

а додаткові члени в цих рівняннях мають вигляд

$$\sigma_{ij}^* = 2G_0 \omega e_{ij} + 2G^* e_{ij}^{1n} + \left[K_0 \omega_1 \varepsilon_0 + K^* (\varepsilon_0^{1n} + \varepsilon_T) \right] \delta_{ij}, \quad (2.2)$$

де G_0, K_0 – модулі зсуву і об'ємного розширення матеріалу при температурі T_0 ; δ_{ij} – символ Кронекера; $\varepsilon_0 = \varepsilon_{ii} / 3$ – перший інваріант тензора деформацій (середня деформація); $\varepsilon_T = \alpha_T (T - T_0)$ – теплова деформація; α_T – коефіцієнт лінійного теплового розширення матеріалу; $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_0 \delta_{ij}$ – компоненти девіатора деформації. Величини, які входять в (2.2), наступні:

$$\omega = 1 - \frac{G^*}{G_0}; \quad \omega_1 = 1 - \frac{K^*}{K_0}; \quad 2G^* = \frac{S}{\Gamma}; \quad K^* = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 - \varepsilon_T}, \quad (2.3)$$

де $\sigma_0 = \sigma_{ii} / 3$ – середнє нормальне напруження; $S = (s_{ij} s_{ij} / 2)^{1/2}$ – інтенсивність дотичних напружень; $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}$ – компоненти девіатора напружень; $\Gamma = (e_{ij} e_{ij} / 2)^{1/2}$ – інтенсивність деформацій зсуву. Величини $e_{ij}^{1n}, \varepsilon_0^{1n}$ – значення незворотних деформацій складових компонент девіатора і середня деформація в момент розвантаження елемента тіла. При активному процесі деформування елемента тіла ці величини рівні нулю, а при розвантаженні

$$e_{ij}^{1n} = e_{ij}^1 - \frac{s_{ij}^1}{2G^1}; \quad \varepsilon_0^{1n} = \varepsilon_0^1 - \varepsilon_T^1 - \frac{\sigma_0^1}{K^*}. \quad (2.4)$$

Тут індексом «1» помічені відповідні величини в момент розвантаження елемента тіла при певній температурі. Припускається, що S і σ_0 в (2.3) визначаються з експериментів, на основі яких будуються миттєві термомеханічні поверхні

$$S = F^*(\Gamma^*, T); \quad \sigma_0 = \Phi^*(\bar{\varepsilon}_0^*, T) \quad (2.5)$$

і спряжені з ними діаграми повзучості $\varepsilon^c = \varepsilon^c(\sigma, T, t)$ при різних фіксованих температурах і рівнях навантаження. Досліди проводяться при пропорційному навантаженню осьювою силою і внутрішнім тиском трубчастих зразків з фіксацією поздовжньої ε_{11} і колової ε_{22} деформацій. Результати експериментів використовуються у вигляді таблиць без апроксимації. Тут $\Gamma = \Gamma^* + \Gamma^c$, $\varepsilon_0 = \bar{\varepsilon}_0^* + \varepsilon^c + \varepsilon_T$, Γ^c і ε_0^c визначаються діаграмами повзучості $\Gamma^c \sim t$. В цих дослідках

$$S = \frac{\sigma}{\sqrt{3}}; \quad \Gamma^* = \frac{\varepsilon_{11}^* - \varepsilon_{22}^*}{\sqrt{3}}; \quad \Gamma^c = \frac{\varepsilon_{11}^c - \varepsilon_{22}^c}{\sqrt{3}}; \quad (2.6)$$

$$\sigma_0 = \frac{\sigma}{\sqrt{3}}; \quad \bar{\varepsilon}_0^* = \frac{\varepsilon_{11}^* + \varepsilon_{22}^*}{3} - \varepsilon_T; \quad \varepsilon_0^c = \frac{\varepsilon_{11}^c + 2\varepsilon_{22}^c}{3},$$

де σ – нормальне напруження при розтязі зразка; $\varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^c$ – миттєві деформації; $\bar{\varepsilon}_{ij}^* = \varepsilon_{ij}^* - \varepsilon_T \delta_{ij}$ – чисто силові миттєві деформації.

Величини (2.3) на основі сформульованих експериментів визначаються в кожному етапі методом послідовних наближень в процесі розв'язання крайової задачі. В першому наближенні першого етапу навантаження і нагрівання ці функції покладаються рівними нулю, а на наступних етапах беруться рівними їх значенням в останньому наближенні попереднього етапу. В кожному наближенні функції пластичності ω і ω_1 беруться з попереднього наближення. Аналогічно на початку першого етапу навантаження і нагрівання Γ^c і ε_0^c покладаються рівними нулю, а на початку наступних етапів ці величини приймають значення, знайдені на останньому наближенні попереднього етапу. В результаті розв'язання пружної крайової задачі з додатковими напруженнями (2.2) в першому наближенні m -го етапу навантаження і нагрівання визначаються для кожного елемента тіла інтенсивність деформацій зсуву Γ_m і перший інваріант тензора деформацій ε_0^m в першому наближенні в кінці цього етапу для навантаження і температури кінця етапу. Потім визначаються відповідні значення миттєвих величин $\Gamma_m^* = \Gamma_m - \Gamma_{m-1}^c$ і $(\bar{\varepsilon}_0^*)_m = \varepsilon_0^m - \varepsilon_T^m - (\varepsilon_0^c)_{m-1}$. По цих значеннях для температури кожного елемента тіла в кінці етапу, користуючись рівняннями (2.5), знаходимо діаграмні значення S_D^m і $(\sigma_0^m)_D$. З використанням цих значень і температури відповідного елемента тіла визначаються, шляхом інтерполяції, відповідні діаграми повзучості. По цих діаграмах для часу етапу і за час його протікання визначаються $\Delta_m \Gamma^c$, $\Delta_m \varepsilon_0^c$, а також інтенсивність деформації зсуву $\Gamma_m^c = \Gamma_{m-1}^c + \Delta_m \Gamma^c$ і перший інваріант $(\varepsilon_0^c)_m = (\varepsilon_0^c)_{m-1} + \Delta_m \varepsilon_0^c$ в першому наближенні в кінці m -го етапу навантаження і нагрівання. Після цього визначаємо відповідні повні значення інтенсивності де-

формацій зсуву $\Gamma_m = \Gamma_m^* + \Gamma_m^c$ і першого інваріанту тензора деформації $\varepsilon_0^m = (\varepsilon_0^*)_m + (\varepsilon_0^c)_m$, де $\varepsilon_0^* = \bar{\varepsilon}_0^* + \varepsilon_T$. Потім обчислюються значення G^* і K^* і функцій пластичності ω і ω_1 (2.3) в кінці m -го етапу в другому наближенні і т.д. Процес послідовних наближень продовжується до тих пір, доки в кожному елементі тіла інтенсивність дотичних напружень $S_\phi = (s_{ij}s_{ij}/2)^{1/2}$ не стане рівною (з заданою точністю) її значенню $S_D = (s_{ij}s_{ij}/2)^{1/2}$, знайденому по миттєвій поверхні (2.5). Після чого перевіряється умова активного деформування

$$s_{ij}\Delta e_{ij}^n > 0. \quad (2.7)$$

Якщо ця умова для якого-небудь елемента тіла не виконується, то проводиться розрахунок цього етапу з урахуванням (2.4) для компонентів незворотних деформацій в кінці попереднього етапу. При цьому вважається, що при розвантаженні деформації повзучості не розвиваються.

При лінеаризації співвідношень теорії малих пружнопластичних деформацій методом змінних параметрів пружності коефіцієнти A_{ijmn} у визначальних рівняннях (1.1) приймають вигляд

$$A_{ijmn} = G^* (\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm}) + \frac{1}{3} (K^* - 2G^*) \delta_{ij}\delta_{mn}, \quad (2.8)$$

а додаткові напруження в цих рівняннях визначаються виразами

$$\sigma_{ij}^* = 2G^* e_{ij}^{1n} + K^* (\varepsilon_0^{1n} + \varepsilon_T) \delta_{ij}. \quad (2.9)$$

Алгоритм визначення G^* , K^* , σ_{ij}^* залишається попереднім, як і у випадку лінеаризації визначальних рівнянь методом пружних розв'язків.

Для покращення збіжності методу послідовних наближень було запропоновано дещо інший спосіб визначення січних модулів і функцій пластичності (2.3). Ця модифікація методів послідовних наближень відноситься до визначення функції пластичності ω або січного модуля G^* у випадку теорії малих пружнопластичних деформацій і приросту інтенсивності накопичених пластичних деформацій зсуву $\Delta_k \Gamma_p$ в теорії процесів деформування вздовж траєкторій малої кривизни, через які визначаються додаткові напруження σ_{ij}^* , що входять у визначальні рівняння (1.1). Відмінність від традиційного підходу полягає в методиці визначення координат точки на термомеханічній поверхні для продовження процесу послідовних наближень при розв'язанні задачі термов'язкопластичності. Суть модифікації полягає в тому, що для визначення відповідних значень інтенсивності дотичних напружень і деформацій зсуву безпосередньо використовується припущення про рівність питомої роботи формозміни, потрібної для деформування елементарних об'ємів зразка і відповідного елемента тіла. Це призводить до зміни способу визначення S_D^m і $(\sigma_0^m)_D$, а також значень $\Gamma_m^* = (\Gamma_D^*)_m$, $(\varepsilon_0^*)_m = (\varepsilon_0^*)_D^m$ з використанням експериментальних поверхонь (2.5).

Спосіб знаходження цих величин проілюструємо на прикладі визначення S_D^m і $\Gamma_m^* = (\Gamma_D^*)_m$. На основі залежності $S = F^*(\Gamma^*, T_m)$ знаходимо таку пару значень S_D^m , $\Gamma_m^* = (\Gamma_D^*)_m$, щоб в кожному наближенні виконувалась умова $S_\phi \Gamma_\phi^* = S_D \Gamma_D^*$. Тут

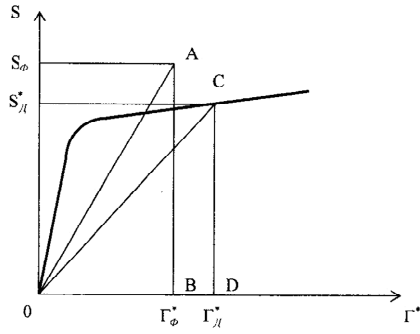


Рис. 1

S_ϕ, Γ_ϕ^* – значення інтенсивності дотичних напружень і значення інтенсивності деформацій зсуву, одержаних в результаті розв’язання крайової задачі термов’язкопластичності в поточному наближенні. Схему такого визначення цих величин зображено на рис. 1. Ця умова відповідає вимозі рівності площ трикутників AOB і COD. За подібною схемою з використанням залежності $\sigma_0 = \Phi^*(\bar{\varepsilon}_0^*, T)$ визначаються величини

$(\sigma_0^m)_D$ і $(\varepsilon_0^*)_m = (\varepsilon_0^*)_D^m$. Знайдені таким чи-

ном величини $S_D^m, (\sigma_0^m)_D, \Gamma_m^* = (\Gamma_D^*)_m, (\varepsilon_0^*)_m = (\varepsilon_0^*)_D^m$ використовуються в подальшому описанім раніше способом. На конкретних прикладах буде показано, що запропоновані зміни в загальноприйнятий алгоритм побудови послідовних наближень істотно зменшують кількість наближень як у випадку методу пружних розв’язків, так і у випадку методу змінних параметрів пружності.

В літературі [2 – 5, 17] показано, що при загальноприйнятому процесі реалізації методу пружних розв’язків і методу змінних параметрів пружності отримаємо їх збіжність (при деякому обмеженні на матеріал і характер деформування) як у геометричній прогресії, але з різними знаменниками. При цьому збіжність методу змінних параметрів пружності вища за збіжність методу пружних розв’язків.

2.2. Деформування вздовж траєкторій малої кривизни. В тому випадку, коли матеріал тіла ізотропний і для розв’язування крайової задачі використовуються співвідношення теорії термов’язкопластичного деформування елемента тіла вздовж траєкторій малої кривизни [13, 14, 27], лінеаризовані методом додаткових напружень, коефіцієнти A_{ijmn} у визначальних рівняннях (1.1) будуть мати вигляд

$$A_{ijmn} = G(\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm}) + \frac{1}{3}(K - 2G)\delta_{ij}\delta_{mn}, \quad (2.10)$$

а додаткові напруження σ_{ij}^* в цих рівняннях запишуться в такому вигляді

$$\sigma_{ij}^* = 2Ge_{ij}^n + K(\varepsilon_0^n + \varepsilon_T)\delta_{ij}, \quad (2.11)$$

де G і K – модулі зсуву і об’ємного розширення матеріалу, які є функціями температури. Якщо представити їх у вигляді

$$G = G_0(1 - \omega); \quad K = (1 - \omega_1), \quad (2.12)$$

то коефіцієнти A_{ijmn} визначаються виразами (2.1), а додаткові напруження σ_{ij}^* – рівностями

$$\sigma_{ij}^* = 2G_0\omega e_{ij} + 2Ge_{ij}^n + [(K_0\omega_1 + 2G_0\omega)\varepsilon_0 + K(\varepsilon_0^n + \varepsilon_T)]\delta_{ij}. \quad (2.13)$$

Тут G_0 і K_0 – значення модулів зсуву і об’ємного розширення матеріалу при початковій температурі T_0 , а ω і ω_1 визначаються рівностями

$$\omega = 1 - \frac{G}{G_0}; \quad \omega_1 = 1 - \frac{K}{K_0}. \quad (2.14)$$

Компоненти незворотної деформації e_{ij}^n і ε_0^n в кінці m -го етапу навантаження визначаються рівностями

$$\left(e_{ij}^n\right)_m = \sum_{k=1}^m \Delta_k e_{ij}^n = \sum_{k=1}^m \left\langle \frac{S_{ij}}{S} \right\rangle_k \Delta_k \Gamma^n; \quad \left(\varepsilon_0^n\right)_m = \sum_{k=1}^m \Delta_k \varepsilon_0^n. \quad (2.15)$$

Прирости $\Delta_k \Gamma^n$ і $\Delta_k \varepsilon_0^n$ за k -й етап визначаються на основі сформульованих вище базових експериментів і рівнянь (2.5) методом послідовних наближень в процесі розв'язування крайової задачі. При цьому

$$\Delta_k \Gamma^n = \Delta_k \Gamma^p + \Delta_k \Gamma^c; \quad \Delta_k \varepsilon_0^n = \Delta_k \varepsilon_0^p + \Delta_k \varepsilon_0^c \quad (2.16)$$

і вважається, що на початку m -го етапу навантаження відомі значення миттєвої деформації пластичності

$$\Gamma_{m-1}^p = \sum_{k=1}^{m-1} \Delta_k \Gamma^p; \quad \left(\varepsilon_0^p\right)_{m-1} = \sum_{k=1}^{m-1} \Delta_k \varepsilon_0^p, \quad (2.17)$$

які були знайдені в кінці попереднього $m-1$ -го етапу. Тоді в першому наближенні m -го етапу вважаємо, що $\Delta_m \varepsilon_{ij}^n$ і $\Delta_m \varepsilon_0^n$ рівні нулю. Далі розв'язуємо крайову задачу, використовуючи в рівняннях (1.1) для коефіцієнтів A_{ijmn} вирази (2.1) або (2.10) і відповідні вирази для додаткових напружень σ_{ij}^* в формі (2.11) або (2.13) при відомих значеннях компонентів незворотної деформації ε_{ij}^n і ε_0^n в кінці попереднього етапу. Визначивши після цього інтенсивність дотичних напружень $S_\Phi = (s_{ij} s_{ij} / 2)^{1/2}$, середнє напруження $\sigma_0^\Phi = \sigma_{ii} / 3$ і значення

$$\Gamma^* = \frac{S_\Phi}{2G} + \Gamma_{m-1}^p; \quad \bar{\varepsilon}_0^* = \frac{\sigma_0^\Phi}{K} - \varepsilon_T + \left(\varepsilon_0^p\right)_{m-1}, \quad (2.18)$$

використовуючи рівняння (2.5) при відомому значенні температури елемента тіла визначаємо значення S_Δ і σ_0^Δ . Тоді в другому наближенні маємо

$$\Delta_m \Gamma^p = \frac{S_\Phi - S_\Delta}{2G}; \quad \Delta_m \varepsilon_0^p = \frac{\sigma_0^\Phi - \sigma_0^\Delta}{K}. \quad (2.19)$$

Користуючись відповідними діаграмами повзучості для знайдених значень S_Δ , σ_0^Δ і температури T в кінці етапу для часу етапу і за час Δt тривалості етапу, визначаємо $\Delta_m \Gamma^c$, $\Delta_m \varepsilon_0^c$ і значення $\Delta_m \Gamma^n$, $\Delta_m \varepsilon_0^n$ (2.19), а також значення e_{ij}^n , ε_0^n (2.15) і Γ_m^p , $\left(\varepsilon_0^p\right)_m$ (2.17) в кінці m -го етапу навантаження в другому наближенні.

Аналогічно визначаються прирости незворотних деформацій в наступних наближеннях. При цьому в другому і наступних наближеннях значення (2.19) є уточненнями значень $\Delta_m \Gamma^p$, $\Delta_m \varepsilon_0^p$, а повні прирости рівні сумі відповідних величин, знайдених в кожному наближенні. Критерії закінчення процесу послідовних наближень такі ж, як і в попередньому випадку. При активному процесі деформування величини (2.4) позитивні, а при розвантаженні – негативні. В цьому останньому випадку вважаємо, що $\Delta_m \Gamma^p = \Delta_m \varepsilon_0^p = 0$, а $\Delta_m \Gamma^c$ і $\Delta_m \varepsilon_0^c$ як і раніше визначаються діаграмами повзучості. Перевірка напрямку процесу деформування кожного елемента тіла здійснюється

після того, як закінчився процес послідовних наближень в кінці кожного етапу. Якщо виявиться, що в якомусь елементі тіла на поточному етапі активне навантаження змінюється розвантаженням, то розрахунок на цьому етапі виконується повторно при значеннях незворотних деформацій, знайдених в кінці попереднього етапу і при $\Delta_m \Gamma^p = 0$, $\Delta_m \varepsilon_0^p = 0$.

В тому випадку, коли матеріал тіла непружно нестисливий, в попередніх рівняннях всі величини, які характеризують незворотну зміну об'єму, необхідно вважати рівними нулю, а замість другого співвідношення (2.5) прийняти

$$\sigma_0 = K(\varepsilon_0 - \varepsilon_T), \quad (2.20)$$

де K – модуль об'ємного розширення матеріалу, залежний від температури; $K^* = K$ (2.12); $\varepsilon_0^n = \varepsilon_0^c = 0$. В рівностях (2.6) $\varepsilon_{22}^* = -\nu^* \varepsilon_{11}^*$ і коефіцієнт поперечної деформації ν^* з умови пружної зміни об'єму визначається рівністю [14, 23]

$$\nu^* = \frac{1}{2} - \frac{1-2\nu}{2E} \frac{\sigma}{\varepsilon^*},$$

де ν – коефіцієнт Пуассона; E – модуль пружності матеріалу; σ і ε^* – нормальне напруження і миттєва силова деформація, яка виникає в зразку при його розтязі в умовах різних фіксованих температур. Алгоритми обчислення незворотних деформацій реалізуються за схемою, описаною раніше, за винятком того, що немає необхідності обчислювати величини, що характеризують незворотну зміну об'єму.

Як і у випадку рівнянь теорії малих пружнопластичних деформацій, при використанні рівнянь теорії термов'язкопластичності, які описують процеси деформування вздовж траєкторій малої кривизни, пропонується дещо інший спосіб визначення S_D , σ_0^D , $\Delta_k \Gamma^p$ і $\Delta_k \varepsilon_0^p$ на відміну від традиційного. Відмінність в підходах полягає в методиці визначення координат точки на термомеханічних поверхнях $S = F^*(\Gamma^*, T)$,

$\sigma_0 = \Phi^*(\varepsilon_0^*, T)$ для продовження процесу послідовних наближень при розв'язанні задачі термов'язкопластичності. В цьому випадку S_D і приріст незворотної деформації $\Delta_k \Gamma^p$ обчислюються наступним чином (рис. 2). Після розв'язання задачі в k -му наближенні по відомому напруженому стану визначається S_ϕ та значення накопиченої інтенсивності деформацій зсуву Γ^* (2.18) і по відповідній діаграмі (2.5) при заданій температурі елемента тіла визначається

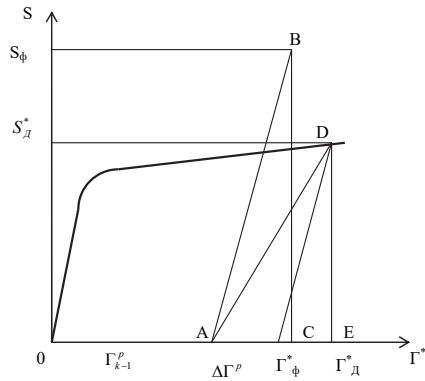


Рис. 2

пара значень S_D^k , $\Gamma_k^* = (\Gamma_D^*)_k$, для яких в кожному наближенні виконується умова $S_\phi(\Gamma_\phi^* - \Gamma_{m-1}^p) = S_D(\Gamma_D^* - \Gamma_{m-1}^p)$, яка свідчить про рівність площ трикутників ABC і ADE. Тоді приріст $\Delta_m \Gamma^p$ для організації наступного наближення замість (2.18) буде визначатися співвідношенням $\Delta_m \Gamma^p = \Gamma_D^* - \Gamma_{m-1}^p - (S_D / 2G)$. Обчислення σ_0^D і $\Delta_k \varepsilon_0^p$ здійснюється по аналогічній схемі. В подальшому знайдені таким чином величини використовуються описаним вище способом.

Описана процедура побудови процесу послідовних наближень апробована при розв'язанні крайових задач термопластичності. Результати цих розрахунків дають можливість оцінити збіжність запропонованого алгоритму при дослідженні деформування елементів тіла вздовж прямолінійних траєкторій та траєкторій малої кривизни. Будемо розглядати такі процеси навантаження, коли повзучість можна в розрахунках не враховувати.

§3. Результати розв'язання тестових задач пластичності при термосиловому навантаженні.

Як приклади наведемо результати дослідження осесиметричного і неосесиметричного термонапруженого стану елементів конструкцій, в яких здійснюється деформування вздовж прямолінійних траєкторій та ліній малої кривизни, і оцінимо переваги того чи іншого способу побудови послідовних наближень при чисельному розв'язанні нелінійної задачі термопластичності.

3.1. З використанням визначальних рівнянь теорії малих пружнопластичних деформацій визначимо осесиметричний стан тонкої циліндричної оболонки постійної товщини $h = 0,005$ м, радіуса серединної поверхні $R = 0,1025$ м і довжини $2L = 0,2$ м. Оцінимо збіжність методу пружних розв'язків і методу змінних параметрів пружності та запропонованої їх модернізації при розвинутих пластичних деформаціях для матеріалу з низьким зміцненням. З цією метою візьмемо за матеріал оболонки сталь 30ХГСА [23]. Оболонка перебуває під дією внутрішнього тиску $p = 24$ МПа і осьового зусилля $N_z = 200$ Н/м при 200°C .

Задача статично визначена і, користуючись співвідношеннями теорії простих процесів деформування, при відомій діаграмі $\sigma \sim \varepsilon$ можна обчислити точні значення компонентів напружень і деформацій. Вони такі:

$$\sigma_{zz} = 400 \text{ МПа} ; \quad \sigma_{\varphi\varphi} = 492 \text{ МПа} ; \quad \varepsilon_{zz} = 1,296 \cdot 10^{-2} ;$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = 2,201 \cdot 10^{-2} ; \quad \varepsilon_{rr} = -2,643 \cdot 10^{-2} .$$

При чисельному розв'язанні задачі була використана методика, описана в [22]. Послідовні наближення здійснювалися до досягнення точності $\delta = 0,0005$. Першому наближенню відповідали значення

$$\varepsilon_{zz} = 0,3616 \cdot 10^{-2} ; \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = 0,4306 \cdot 10^{-2} ; \quad \varepsilon_{rr} = 0,0616 \cdot 10^{-2} .$$

Зміна значень компонент деформацій в процесі послідовних наближень і відповідні значення похибки відображені в табл. 1 (метод пружних розв'язків (МПР) і метод пружних розв'язків модернізований (МПРМ)) і в табл. 2 (метод змінних параметрів пружності (МЗПП) і метод змінних параметрів пружності модернізований (МЗППМ)).

Таблиця 1

№ наближення	МПР			МПРМ		
	$\varepsilon_{zz} \cdot 10^2$	$\varepsilon_{\varphi\varphi} \cdot 10^2$	$\delta, \%$	$\varepsilon_{zz} \cdot 10^2$	$\varepsilon_{\varphi\varphi} \cdot 10^2$	$\delta, \%$
2	0,381	0,467	32,64	0,395	0,494	32,51
5	0,437	0,574	32,50	0,494	0,682	32,10
10	0,532	0,753	32,20	0,650	0,978	24,53
20	0,712	1,095	26,11	0,874	1,402	13,55
30	0,853	1,362	18,48	1,017	1,674	8,20
50	1,039	1,715	9,81	1,172	1,968	3,31
100	1,229	2,075	2,31	1,277	2,167	0,41
152	1,278	2,167	0,54	1,291	2,193	0,00
200	1,289	2,189	0,14			
239	1,292	2,194	0,00			

Таблиця 2

№ набли- ження	МЗПП			МЗППМ		
	$\varepsilon_{zz} \cdot 10^2$	$\varepsilon_{\varphi\varphi} \cdot 10^2$	$\delta, \%$	$\varepsilon_{zz} \cdot 10^2$	$\varepsilon_{\varphi\varphi} \cdot 10^2$	$\delta, \%$
2	0,387	0,478	32,63	0,420	0,542	32,41
5	0,523	0,736	32,22	0,899	1,449	32,56
10	1,016	1,672	10,79	1,276	2,169	0,38
13	1,200	2,020	3,38	1,291	2,193	0,00
20	1,288	2,187	0,17			
23	1,292	2,194	0,00			

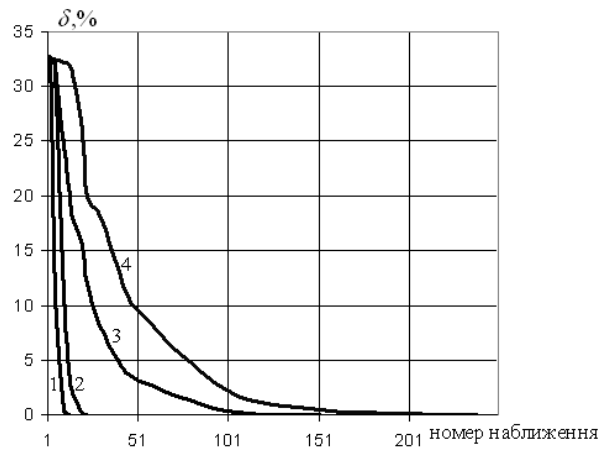


Рис. 3

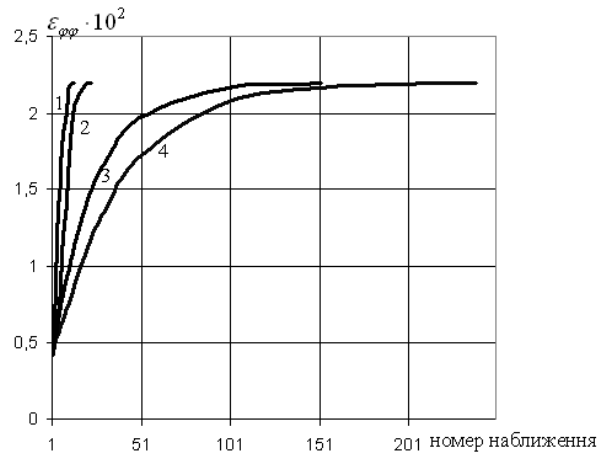


Рис. 4

Зміна похибки δ і значення колової деформації $\varepsilon_{\varphi\varphi}$ в залежності від номера наближення m відображено на рис. 3 і 4, відповідно. Тут номери 1 – 4 біля кривих відповідають МЗППМ, МЗПП, МПРМ і МПР. Із наведених результатів видно, що процеси послідовних наближень по МПР і МПРМ збігаються значно повільніше, ніж по МЗПП і МЗППМ. При цьому запропонована модернізація МПР і МЗПП дає можливість зменшити кількість наближень більш, ніж на третину.

Таким чином, при простих процесах деформування запропонований підхід побудови процесу послідовних наближень дає можливість значно прискорити процес розрахунку.

3.2. Скористаємося визначальними рівняннями теорії процесів деформування вздовж траєкторій малої кривизни та порівняємо збіжність методу додаткових напружень в загальноприйнятій формі і після модернізації, оцінимо їх ефективність при процесі складного навантаження. Для цього розглянемо пружнопластичний напружено-деформований стан тонкої циліндричної оболонки постійної товщини такої ж геометрії, як і в попередньому прикладі, навантаженої внутрішнім тиском p і осьовим зусиллям N_z^* , які змінюються за заданими законами, при температурі 20°C. Оболонка виготовлена зі сталі 30ХГСА [23].

Процес навантаження оболонки поділено на 22-а етапи. На кожному етапі задача розв'язувалась для половини оболонки при граничних умовах, які забезпечують однорідність напружено-деформованого стану оболонки [24, 25]. Значення навантажень на етапах наведено в другій та третій колонках табл. 3, а в першій колонці вказано номер етапу.

Як і в попередньому прикладі, напруження на кожному етапі визначаються величиною навантажень, а деформації можна обчислити як безпосередньо, користуючись визначальними рівняннями, значеннями напружень і діаграмою $\sigma \sim \varepsilon$, а також в процесі послідовних наближень по методиці розв'язання крайових задач теорії оболонок [24, 25]. Одержані безпосередньо значення меридіональної ε_{zz} і колової $\varepsilon_{\varphi\varphi}$ компонентів тензора деформації наведено в колонках 4, 5 табл. 3; в колонці 5 наведено значення інтенсивності накопиченої пластичної деформації зсуву Γ_p^* .

Таблиця 3

№ етапу	$N_z^* \cdot 10^{-3}$, Н/м	p , МПа	$\varepsilon_{zz} \cdot 10^2$	$\varepsilon_{\varphi\varphi} \cdot 10^2$	$\Gamma_p^* \cdot 10^2$
1	165,8	8,06	0,145	0,034	0
2	221,0	10,78	0,313	0,045	0,119
3	226,0	11,46	0,423	0,053	0,227
4	227,9	11,91	0,666	0,066	0,475
5	228,7	12,09	0,695	0,069	0,504
6	228,9	12,14	0,702	0,070	0,511
7	229,8	12,36	0,735	0,074	0,545
8	233,5	13,27	0,872	0,095	0,688
9	237,0	14,49	0,964	0,121	0,787
10	238,8	16,26	1,056	0,162	0,896
11	249,5	17,95	1,159	0,219	1,028
12	239,0	19,71	1,239	0,282	1,144
13	237,0	21,07	1,303	0,344	1,246
14	231,5	22,44	1,343	0,404	1,328
15	225,5	23,46	1,367	0,453	1,388
16	223,0	23,90	1,380	0,480	1,420
17	215,5	24,88	1,401	0,539	1,489
18	203,0	25,90	1,412	0,608	1,562
19	177,5	27,12	1,409	0,717	1,665
20	165,0	27,46	1,400	0,757	1,701
21	1540	27,70	1,391	0,798	1,738
22	1430	27,90	1,381	0,848	1,784

Таблиця 4

Метод	$\varepsilon_{zz} \cdot 10^2$	$\varepsilon_{\varphi\varphi} \cdot 10^2$	$\Gamma_p^* \cdot 10^2$
МДН	1,348	0,843	1,746
МДНМ	1,349	0,843	1,747
Точні значення	1,381	0,848	1,784

При розв'язанні крайової задачі пластичності в процесі послідовних наближень з заданою точністю $\delta = 0,0005$ значення деформацій на 22-ому етапі навантаження наведено в табл. 4. Ці значення одержано як методом додаткових напружень в традиційній формі (МДН), так і з використанням запропонованого вдосконалення в модер-

нізований формі (МДНМ). З табл. 4 видно, що одержані в процесі послідовних наближень значення деформацій мають похибку меншу, ніж задана точність $\delta = 0,0005$.

Кількість наближень на кожному етапі при використанні МДН завжди більша, ніж при використанні МДНМ. Це чітко видно на рис. 5, на якому показана кількість наближень в залежності від номера етапу. Тут крива 1 відповідає МДН, а крива 2 – МДНМ. Загальна кількість наближень у випадку МДН рівна 938, а у випадку МДНМ – 478, тобто використання запропонованої модернізації дало можливість зменшити кількість наближень майже вдвічі.

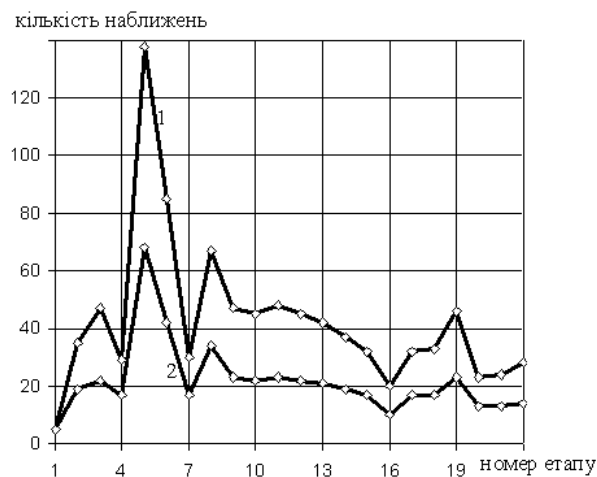


Рис. 5

Варто зауважити, що розглянутий процес навантаження характеризується плоскою криволінійною траєкторією деформування малої кривизни, яка була побудована з використанням значень деформацій (табл. 3) за формулами О.А.Ільюшина [8, 23]. Правильність ділення процесу навантаження на 22-а етапи перевірялась шляхом зменшення величини етапів. Вибрана кількість етапів вважається достатньою, тому що при наступному зменшенні етапів в 2 рази значення деформацій в кінці процесу відрізняються менш, ніж на 0,0001.

Таким чином, порівняння двох методів реалізації процесу послідовних наближень показує доцільність використання запропонованої модернізації методу додаткових напружень при розв'язанні крайових задач теорії пластичності з використанням визначальних рівнянь теорії процесів деформування вздовж траєкторій малої кривизни. При цьому зберігається задана точність одержаного розв'язку з суттєвим скороченням витраченого часу.

3.3. Для оцінки ефективності запропонованого способу організації обчислень при розв'язанні неосесиметричних просторових задач термопластичності наведемо результати дослідження напружено-деформованого стану

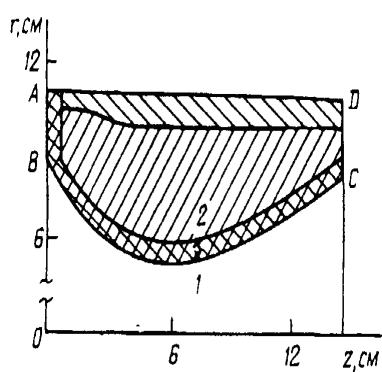


Рис. 6

сідла клапана вдування ракетного двигуна як тришарового ізотропного тіла обертання в процесі його нагрівання від початкової температури 20°C за рахунок конвективного теплообміну з оточуючим середовищем температури $\theta = 3000(1 + 0,1 \cos \varphi)^{\circ}\text{C}$. Половина меридіонального перетину зображена на рис. 6.

Механічні і теплофізичні характеристики матеріалів шарів наведено в [26]. Вважалося, що поверхня тіла на ділянці ADC теплоізолювана; коефіцієнт тепловіддачі між середовищем і поверхнею тіла на ділянці АВ задано лінійно змінним від 0 в

точці A до $0,35 \text{ Вт/см}^2$ в точці B , а на ділянці BC – постійним і рівним $0,35 \text{ Вт/см}^2$. Температурне поле тіла в процесі нагрівання визначалось шляхом розв'язування нестационарної задачі теплопровідності за методикою [13, 14, 22]. За рівняння стану були використані співвідношення термов'язкопластичності, що описують процеси деформування вздовж траєкторій малої кривизни, лінеаризовані методом додаткових напружень. При розв'язанні задачі використана як запропонована методика побудови процесу послідовних наближень, так і традиційна. Розрахунки напружено-деформованого стану тіла були проведені на 30-и етапах навантаження зі змінним кроком за час нагрівання: на етапах 1 – 4 крок приймався рівним 0,05 сек, на етапах 5 – 7 – 0,1 сек, на етапах 8 – 16 – 0,25 сек, на етапах 18 – 30 – 0,5 сек. Такий дрібний крок на початку процесу, що досліджується, було вибрано в зв'язку з тим, що в тілі біля внутрішньої поверхні за рахунок контакту з середовищем дуже високої температури в сусідніх елементах тіла виникають значні температурні градієнти. Аналіз результатів розрахунків (рис. 7) напружено-деформованого стану показав, що в оболонці, яка покриває внутрішню частину тіла, виникають значні пластичні деформації: інтенсивність накопичених пластичних деформацій зсуву в околі точки 1 меридіонального перетину тіла в кінці процесу, що досліджується, досягає 1,5%, а її зростання відбувається аналогічно зростанню температури. В околі точки 2 інтенсивність накопичених пластичних деформацій зсуву нижча і досягає 0,4%. Їх зміна в процесі нагрівання в точках 1 і 2 показана на рис. 7.

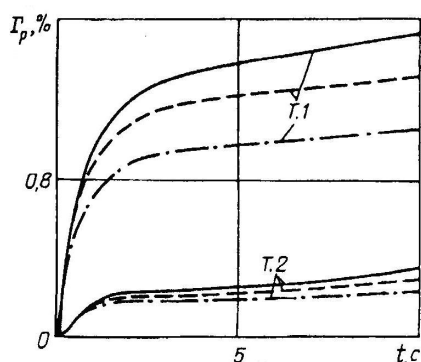


Рис. 7

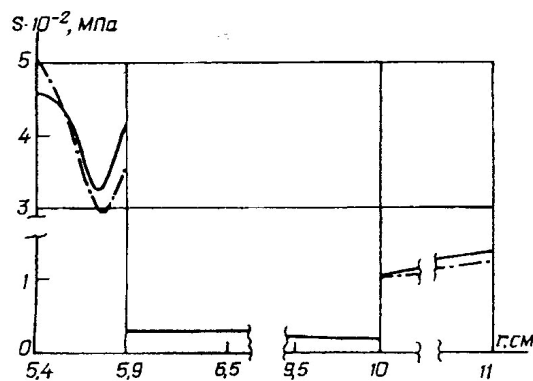


Рис. 8

Зміна інтенсивності дотичних напружень в перетині тіла, що проходить через точки 1 і 2 перпендикулярно осі обертання, на 10 сек нагрівання показана на рис. 8. На цих рисунках суцільні криві відповідають $\varphi = 0$, штрихові – $\varphi = \pi/2$, штрихпунктирні – $\varphi = \pi$. Відсутність штрихових або штрихпунктирних ліній на рис. 8 свідчить про те, що вони збігаються з суцільними.

На рис. 9 показана сумарна кількість послідовних наближень Σn , необхідна для розв'язання задачі по двох методиках з заданою точністю 1%, в залежності від номера етапу l . Суцільна крива на цьому рисунку відповідає модернізованій методиці, а штрихпунктирна – загальноживаній. Як показали розрахунки, зміна способу обчислення приросту інтенсивності пластичних деформацій зсуву дає можливість зменшити загальну кількість наближень на 30-и етапах навантаження з 235 до 170, тобто більш, ніж на 25%.

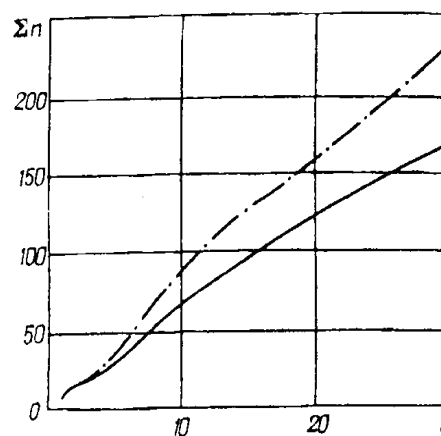


Рис. 9

Висновки.

Таким чином, порівняння результатів розрахунків з використанням двох методик побудови процесу послідовних наближень при розв'язанні нелінійних крайових задач свідчить про доцільність застосування запропонованого способу модернізації відповідних алгоритмів, побудованих як на основі визначальних рівнянь теорії простих процесів, так і теорії процесів деформування вздовж траєкторій малої кривизни. Це стосується як задач термопластичності для тонких оболонок, так і просторових осесиметричних та неосесиметричних задач, процес розв'язування яких потребує тривалої роботи комп'ютера, або для прискорення обробки експериментальних даних при одночасному знаходженні розв'язків крайових задач термопластичності (метод СН-ЕОМ [8, 9]).

Наукові дослідження, результати яких опубліковано у цій статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Запропоновано спосіб підвищення швидкості збіжності процесу послідовних наближень в крайових задачах термов'язкопластичності. Використано визначальні рівняння теорії простих процесів та теорії процесів деформування вздовж траєкторій малої кривизни. В основу способу покладено припущення про рівність питомої роботи формозміни елементарних об'ємів зразка і тіла при відповідних значеннях інтенсивностей дотичних напружень і деформацій зсуву. Розглянуто кількість наближень в тестових задачах теорії оболонок та просторовій задачі при неосесиметричному навантаженні. Показано, що запропонована модернізація процесу послідовних наближень зменшує кількість наближень майже вдвічі.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: термов'язкопластичність, крайова задача, метод послідовних наближень, швидкість збіжності.

1. Бабешко М.Е., Савченко В.Г. Модификация методов последовательных приближений в краевых задачах термопластичности // Вестник нац. техн. ун-та ХПИ / Сб. науч. трудов «Динамика и прочность машин». – 2002. – 9. – С. 39 – 42.
2. Биргер И.А. Метод дополнительных деформаций в задачах теории пластичности // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. – 1963. – Вып. 1. – С. 47 – 56.
3. Биргер И.А. Методы упругих решений в теории пластического течения // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. – 1963. – Вып. 2. – С. 116 – 118.
4. Биргер И.А. Некоторые общие методы решения задач теории пластичности // Прикл математика и механика. – 1951. – 15, №6. – С. 765 – 770.
5. Быков Д.Л. О некоторых методах решения задач теории пластичности // Упругость и неупругость. – 1975. – Вып. 4. – С. 119 – 149.
6. Ворович И.И., Красовский Ю.П. О методе упругих решений // Докл. АН СССР – 1959. – 126, №4. – С. 740 – 743.
7. Золочевский А.А., Склепус А.Н., Склепус С.Н. Нелинейная механика деформируемого твердого тела. – Харків: Бізнес Інвестор Груп, 2011. – 720 с.
8. Ильюшин А.А. Метод СН-ЭВМ в теории пластичности // Пробл. прикл. математики и механики – 1971. – 35, Вып.1. – С. 166 – 178.
9. Ильюшин А.А., Ленский В.С. Модель и алгоритм // Прикл. пробл. прочности и пластичности твердых тел. – 1975. – Вып. 1. – С.3 – 18.
10. Ковальчук Б.И., Лебедев А.А. Деформационные свойства серого чугуна при плоском напряженном состоянии в условиях низких температур // Проблемы прочности. – 1970. – № 7. – С. 9 – 13.
11. Ленский В.С., Бровко Г.А. Метод однородных линейных приближений в несвязанных задачах терморadiационной упругости и пластичности // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1971. – 11. – С. 100 – 113.
12. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – Москва: Машиностроение, 1968. – 400 с.
13. Механика композитов (под общ. ред. Гузя А.Н.): в 12-ти томах. Т.11. Григоренко Я.М., Шевченко Ю.Н., Савченко В.Г. и др. Численные методы. – Киев: «А.С.К.», 2002. – 448 с.

14. *Механика связанных полей* в элементах конструкций (под общ. ред. Гузя А.Н.): в 5-ти томах. Т.2. Шевченко Ю.Н., Савченко В.Г. Термовязкопластичность. – Киев: Наук. думка, 1987. – 264с.
15. Новожилов В.В. О пластическом разрыхлении // Прикл. математика и механика. – 1965. – **29**, **4**. – С. 681 – 689.
16. Паняев В.А. О деформациях и разрушении полухрупких тел. – Автореф. дис. канд. техн. наук. – Фрунзе, 1970. – 16 с.
17. *Пространственные задачи* теории упругости и пластичности (под общ. ред. Гузя А.Н.): в 6-ти томах. Т.6. Шевченко Ю.Н. Численные методы решения прикладных задач. – Киев: Наук. думка, 1986. – 272 с.
18. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. – Москва: Наука, 1979. – 744 с.
19. Угодчиков А.Г., Коротких Ю.Г. Некоторые методы решения на ЭЦВМ нелинейных задач теории пластин и оболочек. – Киев: Наук. думка, 1971. – 220 с.
20. Харченко В.В., Чирков А.Ю., Кобельский С.В., Кравченко В.И. Методы расчетного анализа в задачах прочности элементов оборудования реакторных установок ВВЭР. – Київ: Ін-т проблем прочности имени Г.С.Писаренко НАН Украины, 2018. – 196 с.
21. Шевченко Ю.Н. Термопластичность при переменных нагружениях. – Киев: Наук. думка, 1970. – 288 с.
22. Шевченко Ю.Н., Бабешко М.Е., Пискун В.В. и др. Решение осесимметричной задачи термопластичности для тонкостенных и толстостенных тел вращения на ЕС ЭВМ. – Киев: Наук. думка, 1980. – 196 с.
23. Шевченко Ю.Н., Терехов Р.Г. Физические уравнения термовязкопластичности. – Киев: Наук. думка, 1982. – 240 с.
24. Babeshko M.E., Savchenko V.G. Different Options of Accounting for Loosening in the Theory of Isotropic Plasticity // Int. Appl. Mech. – 2022. – **58**, N 3. – P. 289 – 298.
25. Babeshko M.E., Shevchenko Yu.N. Method of Successive Approximations for Solving Boundary-Value Problems of Plasticity with Allowance for the Stress Mode // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 7. – P. 744 – 752.
26. Savchenko V.G., Babeshko M.E. Solution of Nonaxisymmetric Three-Dimensional Thermoplasticity Problem by the Secondary-Stress Method // Int. Appl. Mech. – 1999. – **35**, N 12. – P. 1207 – 1213.
27. Shevchenko Yu.N., Savchenko V.G. Three-Dimensional Problems of Thermoviscoplasticity: Focus on Ukrainian Research (Review) // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 3. – P. 217 – 271. Savchenko V.G., Shevchenko Yu.N. Methods for Investigating Thermoviscoplastic Deformation of Three-Dimensional Structural Members (Review) // Int. Appl. Mech. – 1993. – **29**, N 9. – P. 677 – 691.
28. Shevchenko Yu.N., Terekhov R.G., Tormakhov N.N. Constitutive Equations for Describing the Elastoplastic Deformation of Elements of a Body along Small-Curvature Paths in View of the Stress Mode // Int. Appl. Mech. – 2006. – **42**, N 4. – P. 421 – 430.
29. Steblyanko P.A., Shevchenko Yu.N. Computational Methods in Stationary and Nonstationary Thermal – Plasticity Problems. In.: «Encyclopedia of thermal Stresses. In. 11 volumes (Ed. R.B.Hetnarski). – New York, Dordrecht: Springer, 2014. Vol. 2, C-D, P. 507-1084». – P. 623 – 630.

Надійшла 15.11.2022

Затверджена до друку 28.03.2023