

В.І.Острик

КОНТАКТ З ТЕРТЯМ БЕРЕГІВ МІЖФАЗНОЇ ТРІЩИНИ
ЗА СТИСКУ ТА ЗСУВУ

*Інститут прикладної фізики НАН України,
вул. Петропавлівська, 58, 40000, Суми, Україна; e-mail: v.i.ostryk@gmail.com*

Abstract. The compression and shear of an elastic piecewise homogeneous plane with a rectilinear crack on the interface are considered. A friction contact of the crack sides close to its apexes is taken into account. An analytical solution of the problem is obtained using the Wiener – Hopf method. The dimensions of the contact areas, distributions of stresses, displacement jumps on the crack line and its extension, and stress intensity coefficients are found.

Key words: interface crack, Comninou's model, friction, Wiener – Hopf method, hypergeometric function.

Вступ.

У задачах про рівновагу пружних тіл із міжфазними тріщинами (такими, що містяться на межі поділу середовищ із різних матеріалів) в околах вершин тріщин спостерігається сингулярна осциляція напружень та обмежена за амплітудою осциляція переміщень [24, 25]. Осцилюючі розв'язки є фізично некоректними, оскільки поблизу вершин тріщини відбувається взаємне проникнення матеріальних частинок, які розташовані на протилежних берегах розрізу. Зазначений недолік такого математичного розв'язку було усунуто в роботах М. Комніноу [4, 13 – 15] шляхом введення областей контакту берегів тріщини поблизу її вершин. У цих роботах розміри областей контакту та розподіл контактних напружень отримано за допомогою числового розв'язування відповідних сингулярних інтегральних рівнянь у межах моделі гладкого та фрикційного контакту берегів тріщини.

Аналітичні розв'язки задач для міжфазної тріщини за моделлю Комніноу в однорідному полі напружень розтягу і зсуву отримано в роботах [3, 9, 12, 17] за моделлю гладкого та в [1, 7, 18] – фрикційного контакту берегів тріщини. З'ясовано, що залежно від напрямку зсувних напружень та відношення жорсткостей матеріалів біля однієї з вершин тріщини виникає відносно велика область контакту, яка зі збільшенням зсувного навантаження може досягати приблизно половини тріщини, а біля іншої – надзвичайно мала (на декілька порядків менша за розмір тріщини). Виняток складає випадок розтягу (без зсуву), у якому біля обох вершин тріщини виникають мікрозони контакту.

Напружено-деформований стан кусково-однорідної площини з міжфазною тріщиною за гладкого контакту її берегів під дією заданих на нескінченності напружень стиску і зсуву досліджено в роботах [11, 16]. Хоча цей випадок навантаження охоплюють також розв'язки, що побудовані в роботах [1, 9], проте результати обчислень розподілів напружень, які відповідають стиску та зсуву середовища, у цих роботах відсутні. Разом з тим з'ясовано, що під тиском і зсувом більша область контакту стає ще більшою, а менша – ще меншою порівняно з випадком розтягу та зсуву. При цьому при необмеженому зростанні відношення навантаження стиску та зсуву розмір зони розкриття тріщини прямує до нуля.

Нижче, аналогічно до [18], із застосуванням методу Вінера – Гопфа розв'язано задачу для міжфазної тріщини у полі напружень стиску і зсуву з урахуванням фрикцій-

ного контакту її берегів. Розв'язок, що побудований в [18], відповідає довжині більшої області контакту берегів тріщини, що не досягає половини розміру тріщини. Тут розглянуто протилежний випадок, коли вказана довжина перевищує піврозмір тріщини. При цьому система інтегральних рівнянь, яка виведена в [18], зберігає свій вигляд, а необхідні для подальшого розв'язування задачі розвинення змінюються.

§ 1. Постановка задачі. Система інтегральних рівнянь.

Кусково-однорідна площина складена із двох різнорідних півплощин $y \geq 0$, $y \leq 0$ ($-\infty < x < \infty$), модулі зсуву яких G_1 , G_2 , а коефіцієнти Пуассона ν_1 , ν_2 , відповідно (рис. 1). Півплощини на частинах $a \leq x < \infty$, $-\infty < x \leq -a$ своєї спільної межі $y = 0$ жорстко з'єднані, а на іншій її частині $-a < x < a$ кусково-однорідна площина має тріщину. На нескінченності прикладено напруження стиску $-p_\infty$ і зсуву $-q_\infty$. Згідно з моделлю Комініоу вважаємо, що береги тріщини $y = \pm 0$ в околах $-b \leq x < a$, $-a < x \leq -c$ ($0 < b < c < a$) вершин тріщини контактують. При цьому враховуємо сили тертя в контакті за законом Амонтона. Довжини $l_1 = a + b$, $l_2 = a - c$ областей контакту берегів тріщини заздалегідь невідомі та підлягають визначенню.

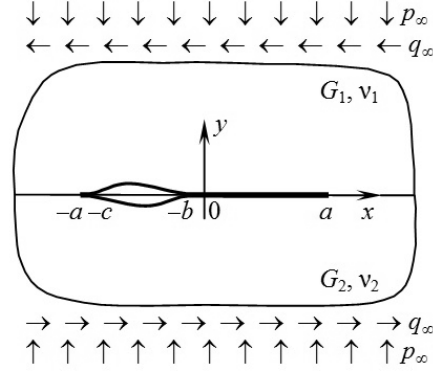


Рис. 1

Крайові умови задачі мають вигляд

$$\begin{aligned} u_x^{(1)}|_{y=0} &= u_x^{(2)}|_{y=0}; \quad \sigma_y^{(1)}|_{y=0} = \sigma_y^{(2)}|_{y=0}; \quad \tau_{xy}^{(1)}|_{y=0} = \tau_{xy}^{(2)}|_{y=0} \quad (|x| \geq a); \\ u_y^{(1)}|_{y=0} &= u_y^{(2)}|_{y=0} \quad (-\infty < x < -c; -b < x < \infty); \\ \tau_{xy}^{(1)}|_{y=0} &= \tau_{xy}^{(2)}|_{y=0} = \text{sign } x \cdot \mu_0 \sigma_y^{(1)}|_{y=0} = \text{sign } x \cdot \mu_0 \sigma_y^{(2)}|_{y=0} \quad (-a < x \leq -c; -b \leq x < a); \\ \sigma_y^{(j)}|_{y=0} &= 0; \quad \tau_{xy}^{(j)}|_{y=0} = 0; \quad j = 1, 2 \quad (-c < x < -b), \end{aligned} \quad (1.1)$$

де μ_0 – коефіцієнт тертя. П'ята крайова умова вказує на проковзування верхнього берега тріщини відносно нижнього у напрямку від її вершин, що справедливо за умови [4]

$$G_2(1 - 2\nu_1) > G_1(1 - 2\nu_2). \quad (1.2)$$

У роботах [7, 18], де розглянуто випадок $b < 0$, розв'язок задачі з крайовими умовами (1.1) на спільній межі півплощин подано у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{1}{G_1} \frac{d}{dx} [u_y^{(1)} - u_y^{(2)} + i(u_x^{(1)} - u_x^{(2)})] \Big|_{y=0} &= -i \left(\frac{1 - 2\nu_1}{G_1} - \frac{1 - 2\nu_2}{G_2} \right) \begin{cases} (1 + i\mu_0)\sigma_1(\alpha), & \alpha > -\alpha_1 \\ (1 - i\mu_0)\sigma_2(\alpha), & \alpha < -\alpha_2 \\ 0, & -\alpha_2 < \alpha < -\alpha_1 \end{cases} - \\ -2 \left(\frac{1 - \nu_1}{G_1} + \frac{1 - \nu_2}{G_2} \right) (\text{ch } \alpha + 1) &\left[\frac{1 + i\mu_0}{2\pi} \int_{-\alpha_1}^{\infty} \frac{\sigma_1(\tau)}{\text{ch } \tau + 1} \frac{e^{-i\theta(\alpha - \tau)}}{\text{sh}((\alpha - \tau)/2)} d\tau + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{1-i\mu_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{-\alpha_2} \frac{\sigma_2(\tau)}{\operatorname{ch} \tau + 1} \frac{e^{-i\theta(\alpha-\tau)}}{\operatorname{sh}((\alpha-\tau)/2)} d\tau + \frac{P+iQ}{\operatorname{ch} \pi\theta} \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{e^{-i\theta\alpha}}{\operatorname{ch}(\alpha/2)} \right) \Bigg] \quad (-a < x < a);$$

$$\frac{1}{2G_1} (\sigma_y^{(1)} + i\tau_{xy}^{(1)}) \Big|_{y=0} = \operatorname{ch} \pi\theta \cdot (\operatorname{ch} \alpha - 1) \left[\frac{1+i\mu_0}{2\pi} \int_{-\alpha_1}^{\infty} \frac{\sigma_1(\tau)}{\operatorname{ch} \tau + 1} \frac{e^{-i\theta(\alpha-\tau)}}{\operatorname{ch}((\alpha-\tau)/2)} d\tau + \right. \quad (1.3)$$

$$\left. + \frac{1-i\mu_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{-\alpha_2} \frac{\sigma_2(\tau)}{\operatorname{ch} \tau + 1} \frac{e^{-i\theta(\alpha-\tau)}}{\operatorname{ch}((\alpha-\tau)/2)} d\tau + \frac{P+iQ}{\operatorname{ch} \pi\theta} \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{e^{-i\theta\alpha}}{\operatorname{sh}(\alpha/2)} \right) \right] \quad (|x| \geq a);$$

$$\sigma_1(\alpha) = -\frac{1}{2G_1} \sigma_y^{(1)} \Big|_{y=0} \quad (-\alpha_1 < \alpha < \infty, -b < x < a);$$

$$\sigma_2(\alpha) = -\frac{1}{2G_1} \sigma_y^{(1)} \Big|_{y=0} \quad (-\infty < \alpha < -\alpha_2, -a < x < -c); \quad \alpha = \ln \frac{x+a}{|x-a|};$$

$$\theta = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{G_1 + G_2(3-4\nu_1)}{G_1(3-4\nu_2) + G_2}; \quad \alpha_1 = \ln \frac{a+b}{a-b}; \quad \alpha_2 = \ln \frac{a+c}{a-c} \quad (\theta, \alpha_1, \alpha_2 > 0).$$

Задовольняючи за допомогою (1.3) четверту крайову умову (1.1) в областях контакту $-b < x < a$, $-a < x < -c$ відносно функцій

$$\varphi_1(\eta) = \frac{\sigma_1(-\alpha_1 + \eta)}{\operatorname{ch}(\alpha_1 + \eta) + 1}; \quad \varphi_2(\eta) = \frac{\sigma_1(-\alpha_2 - \eta)}{\operatorname{ch}(\alpha_2 + \eta) + 1} \quad (0 < \eta < \infty), \quad (1.4)$$

отримуємо систему інтегральних рівнянь [7, 18]

$$\int_0^{\infty} [k(\xi - \eta)\varphi_j(\eta) + k^*(\xi + \eta)\varphi_{3-j}(\eta)] d\eta = (-1)^j f(-\alpha_j + (-1)^{j+1} \xi) \quad (1.5)$$

$$(0 < \xi < \infty), \quad j = 1, 2,$$

ядра та права частина якої мають вигляд

$$k(\xi - \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\lambda) e^{-i\lambda(\xi - \eta)} d\lambda; \quad K(z) = \frac{\operatorname{sh} \pi z \operatorname{ch} \pi(z + i\gamma)}{\operatorname{ch} \pi(z + \theta) \operatorname{ch} \pi(z - \theta)};$$

$$k^*(\xi + \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K^*(\lambda) e^{-i\lambda(\alpha_2 - \alpha_1 + \xi + \eta)} d\lambda; \quad K^*(z) = \frac{\operatorname{sh} \pi z \operatorname{ch} \pi(z - i\gamma)}{\operatorname{ch} \pi(z + \theta) \operatorname{ch} \pi(z - \theta)}; \quad (1.6)$$

$$f(\alpha) = -\frac{i}{D} \operatorname{Re} \left[(P + iQ) \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{e^{-i\theta\alpha}}{\operatorname{ch}(\alpha/2)} \right) \right];$$

$$\gamma = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(\mu_0 \operatorname{th} \pi\theta); \quad D = \sqrt{\operatorname{ch}^2 \pi\theta + \mu_0^2 \operatorname{sh}^2 \pi\theta}; \quad P = \frac{P_{\infty}}{2G_1}; \quad Q = \frac{q_{\infty}}{2G_1}.$$

§2. Розв'язування системи інтегральних рівнянь.

Систему інтегральних рівнянь (1.5) зведемо до нескінченної системи алгебричних рівнянь за допомогою методу Вінера – Гопфа [6, 8, 23]. Продовжимо рівняння (1.5) на всю числову вісь, поклавши $\varphi_1(\eta) = 0$, $\varphi_2(\eta) = 0$, якщо $-\infty < \eta \leq 0$, та застосуємо до них інтегральне перетворення Фур'є, ввівши до розгляду невідомі функції

$$\begin{aligned}\Phi_j^+(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \varphi_j(\xi) e^{iz\xi} d\xi; \\ \Phi_j^-(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{iz\xi} d\xi \int_0^\infty \left[k(\xi - \eta) \varphi_j(\eta) + k^*(\xi + \eta) \varphi_{3-j}(\eta) \right] d\eta,\end{aligned}\quad (2.1)$$

аналітичні відповідно у півплощинах $\text{Im } z > c^+$ ($c^+ < 0$) і $\text{Im } z < c^-$ ($c^- > 0$) комплексної площини, отримаємо систему функціональних рівнянь ($j = 1, 2$)

$$\begin{aligned}K(z)\Phi_j^+(z) - \Phi_j^-(z) &= F_j(z) \quad (-\infty < \text{Re } z < \infty; \quad c^+ < \text{Im } z < c^-); \\ F_j(z) &= \frac{(-1)^{j+1}i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(-\alpha_j + (-1)^{j+1}\xi) e^{iz\xi} d\xi - K^*(z) e^{-i(\alpha_2 - \alpha_1)z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \varphi_{3-j}(\eta) e^{-iz\eta} d\eta.\end{aligned}\quad (2.2)$$

Факторизуємо коефіцієнт

$$K(z) = zK^+(z)K^-(z); \quad K^\pm(z) = \frac{\Gamma(1/2 \mp iz \mp i\theta)\Gamma(1/2 \mp iz \pm i\theta)}{\Gamma(1 \mp iz)\Gamma(1/2 \mp iz \pm \gamma)}, \quad (2.3)$$

де $K^+(z)$ і $K^-(z)$ – функції, які є аналітичні та не обертаються в нуль у півплощинах $\text{Im } z > c^+$ і $\text{Im } z < c^-$, відповідно, та подамо праві частини рівнянь (2.2) різницею аналітичних у вказаних півплощинах функцій:

$$\begin{aligned}\frac{F_j(z)}{K^-(z)} &= f_j^+(z) - f_j^-(z) \quad (j = 1, 2); \\ f_1^+(z) &= f^-(z) + \frac{F_0(z)}{K^-(z)} + \frac{i}{D\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{e^{\theta_0\alpha_1} L_{1k}}{\theta_k - iz} + \frac{e^{\bar{\theta}_0\alpha_1} \bar{L}_{1k}}{\bar{\theta}_k - iz} \right); \\ f_2^+(z) &= \frac{i}{D\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{e^{-\theta_0\alpha_2} L_{2k}}{\theta_k - iz} + \frac{e^{-\bar{\theta}_0\alpha_2} \bar{L}_{2k}}{\bar{\theta}_k - iz} \right); \\ f^-(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^\infty (-1)^k \left(Pk^2 K^+(ik) \frac{e^{-k\alpha_1}}{z - ik} + (\mu_0 P - Q) \text{sh } \pi\theta \cdot \gamma_k^2 K^+(i\gamma_k) \frac{e^{-\gamma_k\alpha_1}}{z - i\gamma_k} \right); \\ F_0(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{z}{D} \left(\frac{P + iQ}{\text{ch } \pi(z - \theta)} + \frac{P - iQ}{\text{ch } \pi(z + \theta)} \right) e^{iz\alpha_1}; \quad L_{1k} = \frac{(1 + i\mu_0) \text{ch } \pi\theta}{K^-(i\theta_k)} e^{k\alpha_1 - \theta_k\alpha_2} z_k^{(2)}; \\ L_{2k} &= \frac{e^{-k\alpha_2}}{K^-(i\theta_k)} \left[(-1)^{k+1} (P + iQ) \theta_k + (1 + i\mu_0) \text{ch } \pi\theta \cdot e^{\theta_k\alpha_1} z_k^{(1)} \right]; \\ z_k^{(j)} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Phi_j^+(i\theta_k) \quad (j = 1, 2); \quad \theta_k = k + 1/2 - i\theta; \quad \gamma_k = k - 1/2 - \gamma \quad (k = 0, 1, \dots).\end{aligned}\quad (2.4)$$

Розв'язок системи функціональних рівнянь (2.2) отримуємо у вигляді

$$\Phi_j^+(z) = \frac{f_j^+(z)}{zK^+(z)}; \quad \Phi_j^-(z) = K^-(z) f_j^-(z) \quad (j = 1, 2). \quad (2.5)$$

Для забезпечення аналітичності функцій $\Phi_j^\pm(z)$ у точці $z = 0$ накладаємо додаткові умови

$$f_j^+(0) = 0 \quad (j = 1, 2). \quad (2.6)$$

Розв'язок (2.5) не визначений повністю, оскільки містить невідомі функціонали $z_k^{(j)}$ ($j = 1, 2$; $k = 0, 1, \dots$) шуканих функцій. Поклавши у першій рівності (2.5) $z = i\theta_n$ ($n = 0, 1, \dots$), отримаємо нескінченну систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} z_n^{(j)} = & \frac{1}{2\pi\theta_n K^+(i\theta_n)} \left[\frac{1}{D} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{e^{(3-2j)\theta_0\alpha_1} L_{1k}}{\theta_k + \theta_n} + \frac{e^{(3-2j)\bar{\theta}_0\alpha_1} \bar{L}_{1k}}{k + n + 1} \right) + \right. \\ & + 2(2-j) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(Pk^2 K^+(ik) \frac{e^{-k\alpha_1}}{k - \theta_n} + (\mu_0 P - Q) \operatorname{sh} \pi\theta \cdot \gamma_k^2 K^+(i\gamma_k) \frac{e^{-\gamma_k\alpha_1}}{\gamma_k - \theta_n} \right) \Bigg] + \\ & + (-1)^n \frac{(2-j)(P+iQ)}{(1+i\mu_0) \operatorname{ch} \pi\theta} \theta_n e^{-\theta_n\alpha_1} \quad (j = 1, 2; n = 0, 1, \dots), \end{aligned} \quad (2.7)$$

яка разом із умовами (2.6) використовується для знаходження комплексних $z_k^{(j)}$ ($j = 1, 2$; $k = 0, 1, \dots$) і дійсних α_1, α_2 сталих.

Система рівнянь (2.6), (2.7), коефіцієнти якої експоненціально спадають із зростанням k , є регулярною типу Пуанкаре – Коха, отже, може бути розв'язана методами редукції та послідовних наближень [5]. Числовий аналіз цієї системи рівнянь показує, що відносна довжина $\bar{l}_2 = (a-c)/(2a)$ області контакту біля лівої вершини тріщини є вкрай малою, меншою за 10^{-8} . Тому отримані вище співвідношення з високою точністю (порядку $\bar{l}_2$) можуть бути асимптотично спрощені. Нехтуючи множником $e^{-\alpha_2}$ порівняно з 1 у формулах (2.4), знаходимо

$$L_{20} = -\frac{\Gamma(\theta_1)\Gamma(\theta_0 + \gamma_1)}{\Gamma(2\theta_0)} \left[(P+iQ)\theta_0 - (1+i\mu_0) \operatorname{ch} \pi\theta \cdot z_0^{(1)} e^{\theta_0\alpha_1} \right]; \quad (2.8)$$

$$L_{10} = 0; \quad L_{jk} = 0 \quad (j = 1, 2; k = 1, 2, \dots).$$

Рівняння (2.7) при $j = 1$ тепер дають явні вирази для значень $z_n^{(1)}$ ($n = 0, 1, \dots$) через невідому α_1 . При $j = 2$ і $e^{-\alpha_2} = 0$ із (2.7) знаходимо $z_n^{(2)} = 0$ ($n = 0, 1, \dots$). Параметр α_1 довжини більшої області контакту (біля правої вершини тріщини, її відносна довжина $\bar{l}_1 = (a+b)/(2a) = (1 + \operatorname{th}(\alpha_1/2))/2$) знаходимо із трансцендентного рівняння (2.6) при $j = 1$, яке запишемо через гіпергеометричну функцію:

$$\begin{aligned} & P|\theta_0|^2 \Gamma(\gamma_0)\Gamma(\gamma_1) {}_2F_1(\theta_1, \bar{\theta}_1; 1 - \gamma_0; -e^{-\alpha_1}) - \\ & - (\mu_0 P - Q) \operatorname{sh} \pi\theta \cdot |\Gamma(\theta_0 + \gamma_1)|^2 e^{-\gamma_0\alpha_1} {}_2F_1(\theta_0 + \gamma_1, \bar{\theta}_0 + \gamma_1; \gamma_1; -e^{-\alpha_1}) = 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Відзначимо, що відповідне рівняння в іншій формі, що містить ряди за степенями параметра $(a-b)/(2a)$, коефіцієнти яких зв'язані рекурентними співвідношеннями, отримано в роботі [1].

Із використанням формули аналітичного продовження гіпергеометричної функції [2]

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a_1, a_2; a_3; z) = & \frac{\Gamma(a_3)\Gamma(a_2 - a_1)}{\Gamma(a_2)\Gamma(a_3 - a_1)} (-z)^{-a_1} {}_2F_1(a_1, 1 - a_3 + a_1; 1 - a_2 + a_1; 1/z) + \\ & + \frac{\Gamma(a_3)\Gamma(a_1 - a_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_3 - a_2)} (-z)^{-a_2} {}_2F_1(a_2, 1 - a_3 + a_2; 1 - a_1 + a_2; 1/z) \quad (|\arg(-z)| < \pi), \end{aligned} \quad (2.10)$$

рівняння (2.9) перетворимо до вигляду

$$\operatorname{Re} \left[e^{i\theta(2\ln 2 - \alpha_1)} (P - iQ) \theta_0 \frac{\Gamma(\theta_0 + \gamma_1)}{\Gamma(1/2 + \theta_0)} {}_2F_1(\theta_1, \theta_0 + \gamma_1; 2\theta_0; -e^{\alpha_1}) \right] = 0, \quad (2.11)$$

що збігається з відповідним рівнянням у випадку $b < 0$ ($\alpha_1 < 0$) [7, 18].

У граничному випадку при $b \rightarrow a$ ($\alpha_1 \rightarrow \infty$), коли область контакту $-b \leq x < a$ збільшується до охоплення всієї тріщини, із (2.9) випливає асимптотична формула

$$1 - \bar{l}_1 \sim e^{-\alpha_1} \sim \left[\left(\frac{Q}{P} - \mu_0 \right) \frac{-\gamma_0 |\Gamma(\theta_0 + \gamma_1)|^2}{|\theta_0|^2 \Gamma^2(\gamma_1)} \operatorname{sh} \pi \theta \right]^{1/(1/2 + \gamma)}, \quad Q \rightarrow \mu_0 P. \quad (2.12)$$

Тобто, у цьому випадку відносна довжина зони розкриття тріщини $1 - \bar{l}_1$ зникає пропорційно до величини $(Q/P - \mu_0)^{1/(1/2 + \gamma)}$. Якщо $0 < Q \leq \mu_0 P$, то тріщина є повністю закритою. За відсутності тертя

$$1 - \bar{l}_1 \sim \left(\frac{Q}{P} \frac{\theta}{2|\theta_0|^2} \right)^2, \quad Q \rightarrow 0 \quad (\mu_0 = 0), \quad (2.13)$$

тобто, відносна довжина $1 - \bar{l}_1$ пропорційна $(Q/P)^2$, а тріщина повністю закрита тільки, якщо $Q = 0$.

У випадку гладкого контакту ($\mu_0 = 0$) гіпергеометричні функції із (2.9), (2.11) перетворюємо до елементарних [10]:

$$\begin{aligned} {}_2F_1(\theta_1, \bar{\theta}_1; 3/2; -e^{-\alpha_1}) &= -\frac{e^{\alpha_1/2}}{4|\theta_0|^2} \operatorname{Re} F(\alpha_1); \\ {}_2F_1(1/2 + \theta_0, 1/2 + \bar{\theta}_0; 1/2; -e^{-\alpha_1}) &= \frac{1}{2\theta} \operatorname{Im} F(\alpha_1); \\ {}_2F_1(\theta_1, 1/2 + \theta_0; 2\theta_0; -e^{\alpha_1}) &= -\frac{1}{8\theta_0} F(\alpha_1) e^{(\theta_0 + 1/2)(2\ln 2 - \alpha_1)}; \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$F(\alpha_1) = \frac{1}{\sqrt{(1 + e^{-\alpha_1})^3}} \left(2i\theta \sqrt{1 + e^{-\alpha_1}} - e^{-\alpha_1/2} \right) \left(\sqrt{1 + e^{-\alpha_1}} + e^{-\alpha_1/2} \right)^{2i\theta}$$

і кожне з рівнянь (2.9), (2.11) спростуємо до вигляду

$$\operatorname{Re} \left[e^{-i\theta\alpha_1} (P - iQ) \left(1 - 2i\theta \sqrt{1 + e^{\alpha_1}} \right) \left(1 + \sqrt{1 + e^{\alpha_1}} \right)^{2i\theta} \right] = 0 \quad (2.15)$$

та перетворюємо до відомого рівняння [9]:

$$\operatorname{tg} \left(\theta \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \bar{l}_1}}{1 - \sqrt{1 - \bar{l}_1}} + \operatorname{arctg} \frac{P}{Q} \right) = \frac{2\theta}{\sqrt{1 - \bar{l}_1}}, \quad (2.16)$$

або до еквівалентного йому [3, 11]:

$$\operatorname{tg} \left(2\theta \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \bar{l}_1}}{\sqrt{\bar{l}_1}} \right) = \frac{2\theta Q - P\sqrt{1 - \bar{l}_1}}{Q\sqrt{1 - \bar{l}_1} + 2\theta P}. \quad (2.17)$$

При $j = 2$ рівняння (2.6) для визначення α_2 набуває вигляду

$$\cos(\theta\alpha_2 + \arg L_{20} + \arctg 2\theta) = 0. \quad (2.18)$$

Від'ємні корені рівняння (2.18) відповідають розміру області контакту, який більший за розмір тріщини. Додатні корені, окрім найменшого з них, – взаємному перекриттю берегів розрізу поза областю контакту [7]. Тільки найменший додатний корінь рівняння визначає відносний розмір області контакту біля лівої вершини тріщини:

$$\bar{l}_2 = \frac{a-c}{2a} = e^{-\alpha_2}; \quad \alpha_2 = \frac{1}{\theta}(\pi/2 - \arg L_{20} - \arctg 2\theta). \quad (2.19)$$

Відмітимо, що побудований тут розв'язок функціонального рівняння (2.2) при $j = 1$ (після асимптотичного спрощення система функціональних рівнянь (2.2) переходить у два окремих функціональних рівняння) можна також отримати формально із його ж розв'язку у випадку $b < 0$ із [18] так само, як і для рівняння (2.11), перейшовши до гіпергеометричних функцій і скориставшись їх аналітичним продовженням. Покажемо це. Функція $f_1^+(z)$ із розв'язку (2.5) у випадку $b < 0$ ($\alpha_1 < 0$) має вигляд [7, 18]

$$f_1^+(z) = \frac{i}{D\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{(P+iQ)\theta_k}{K^-(i\theta_k)(\theta_k - iz)} e^{-\theta_0\alpha_1} + \frac{(P-iQ)\bar{\theta}_k}{K^-(i\bar{\theta}_k)(\bar{\theta}_k - iz)} e^{-\bar{\theta}_0\alpha_1} \right). \quad (2.20)$$

Через гіпергеометричні функції її можна записати так:

$$f_1^+(z) = -\frac{i}{D} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{iz\alpha_1} \int_{-\infty}^{\alpha_1} e^{-iz\alpha_1} \operatorname{Re} \left[\frac{P-iQ}{K^-(i\theta_0)} \frac{d}{d\alpha_1} \left(e^{\theta_0\alpha_1} {}_2F_1(\theta_1, \theta_0 + \gamma_1; 2\theta_0; -e^{\alpha_1}) \right) \right] d\alpha_1. \quad (2.21)$$

Аналітично продовжимо гіпергеометричну функцію в (2.21) із області $-\infty < e^{\alpha_1} < 0$ в область $0 < e^{\alpha_1} < 1$ за формулою (2.10); подамо інтеграл на інтервалі $(-\infty, \alpha_1)$ різницею відповідних інтегралів на інтервалах $(-\infty, \infty)$, (α_1, ∞) і використаємо для обчислення першого із них після інтегрування частинами значення інтеграла Мелліна від гіпергеометричної функції [2]:

$$\int_0^{\infty} {}_2F_1(a_1, a_2; a_3; -x) x^{s-1} dx = \frac{\Gamma(a_3)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \frac{\Gamma(s)\Gamma(a_1-s)\Gamma(a_2-s)}{\Gamma(a_3-s)}; \quad (2.22)$$

$$a_1 = \theta_1; \quad a_2 = \theta_0 + \gamma_1; \quad a_3 = 2\theta_0; \quad x = e^{\alpha_1}; \quad s = \theta_0 - iz.$$

У результаті отримаємо функцію $f_1^+(z)$ у вигляді (2.4) за умови (2.8). Розв'язок функціонального рівняння (2.2) при $j = 2$ такий самий, як і у випадку $b < 0$ [18].

Розв'язок системи інтегральних рівнянь (1.5) знаходимо через розв'язок (2.5) системи функціональних рівнянь (2.2), обернувши інтеграли Фур'є з (2.1):

$$\varphi_j(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_j^+(\tau)}{\tau K^+(\tau)} e^{-i\tau\eta} d\tau \quad (j = 1, 2). \quad (2.23)$$

§3. Напруження та стрибки переміщень на лінії поділу матеріалів.

Обчисливши інтеграли із (2.23) за теорією лишків і перейшовши від функцій $\varphi_j(\eta)$ ($j = 1, 2$) за формулами (1.4), (1.3) до $\sigma_y^{(1)}|_{y=0}$, отримаємо нормальні напруження в областях контакту:

$$\frac{1}{2G_1} \sigma_y^{(1)}|_{y=0} = -P + (\mu_0 P - Q) \frac{\operatorname{sh} \pi \theta}{D} \frac{x + 2\gamma a}{(a-x)^{1/2-\gamma} (a+x)^{1/2+\gamma}} + i \sqrt{\frac{2}{\pi}} D \operatorname{ch} \pi \theta \cdot (\operatorname{ch} \alpha + 1) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{k=1}^{\infty} \left(K^{-}(-ik) f^{-}(-ik) e^{-k(\alpha+\alpha_1)} - \frac{1+\mu_0^2}{D^2} \operatorname{sh}^2 \pi \theta \cdot K^{-}(-i\gamma_k) f^{-}(-i\gamma_k) e^{-\gamma_k(\alpha+\alpha_1)} \right) \\
& \quad (-b < x < a); \\
& \frac{1}{2G_1} \sigma_y^{(1)} \Big|_{y=0} = \sqrt{\frac{2a}{a-c}} \frac{\theta |L_{20}|}{|\theta_0| \operatorname{ch} \pi \theta} \left[\frac{\operatorname{ch} \pi \theta}{\Gamma(\gamma_2)} {}_2F_1(\theta_0, \bar{\theta}_0; \gamma_2; (x+a)/(a-c)) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\pi}{\Gamma(-\gamma_0) |\Gamma(\theta_0 + \gamma_1)|^2} {}_2F_1(\theta_0 - \gamma_1, \bar{\theta}_0 - \gamma_1; -\gamma_0; (x+a)/(a-c)) \left(\frac{x+a}{a-c} \right)^{-1/2+\gamma} \right] \\
& \quad (-a < x < -c).
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Комплексну комбінацію нормальних і дотичних напружень на лінії жорсткого з'єднання півплощин із (1.3) зведемо до вигляду

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2G_1} (\sigma_y^{(1)} + i\tau_{xy}^{(1)}) \Big|_{y=0} = \operatorname{ch} \pi \theta \cdot (\operatorname{ch} \alpha - 1) \left[\frac{P+iQ}{\operatorname{ch} \pi \theta} \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{e^{-i\theta\alpha}}{\operatorname{sh}(\alpha/2)} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{1+i\mu_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi_1^+(\tau)}{\operatorname{ch} \pi(\tau-\theta)} e^{-i\tau(\alpha+\alpha_1)} d\tau + \frac{1-i\mu_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi_2^+(\tau)}{\operatorname{ch} \pi(\tau+\theta)} e^{i\tau(\alpha+\alpha_2)} d\tau \right] \quad (|x| \geq a). \tag{3.2}
\end{aligned}$$

Обчисливши інтеграли, знаходимо напруження у зоні спряження півплощин:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2G_1} \sigma_y^{(1)} \Big|_{y=0} = -P + i\sqrt{\frac{2}{\pi}} D \operatorname{ch} \pi \theta \cdot (\operatorname{ch} \alpha + 1) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} K^{-}(-ik) f^{-}(-ik) e^{-k(\alpha+\alpha_1)}; \\
& \frac{1}{2G_1} \tau_{xy}^{(1)} \Big|_{y=0} = \frac{\mu_0}{2G_1} \sigma_y^{(1)} \Big|_{y=0} + (\mu_0 P - Q) \frac{x+2\gamma a}{(x-a)^{1/2-\gamma} (x+a)^{1/2+\gamma}} + \\
& + \frac{1+\mu_0^2}{i\sqrt{2\pi}} \operatorname{sh} 2\pi \theta \cdot (\operatorname{ch} \alpha - 1) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} K^{-}(-i\gamma_k) f^{-}(-i\gamma_k) e^{-\gamma_k(\alpha+\alpha_1)} \quad (x > a, \ x < -a^2/b); \\
& \frac{1}{2G_1} (\sigma_y^{(1)} + i\tau_{xy}^{(1)}) \Big|_{y=0} = \operatorname{ch} \pi \theta \cdot (\operatorname{ch} \alpha - 1) \left[\frac{P+iQ}{\operatorname{ch} \pi \theta} \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{e^{-i\theta\alpha}}{\operatorname{sh}(\alpha/2)} \right) + \right. \\
& \quad \left. + 2(1+i\mu_0) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z_k^{(1)} e^{\theta_k(\alpha+\alpha_1)} \right] \quad (-a^2/b < x < c-2a); \tag{3.3} \\
& \frac{1}{2G_1} \sigma_y^{(1)} \Big|_{y=0} = \sqrt{\frac{2a}{a-c}} \frac{\theta |L_{20}|}{|\theta_0| \Gamma(\gamma_2)} {}_2F_1(\theta_0, \bar{\theta}_0; \gamma_2; (x+a)/(a-c)); \\
& \frac{1}{2G_1} \tau_{xy}^{(1)} \Big|_{y=0} = -\frac{\mu_0}{2G_1} \sigma_y^{(1)} \Big|_{y=0} + \sqrt{\frac{2a}{a-c}} \frac{\pi \theta |L_{20}|}{|\theta_0| \Gamma(-\gamma_0) |\Gamma(\theta_0 + \gamma_1)|^2 \operatorname{sh} \pi \theta \cos \pi \gamma} \times \\
& \times {}_2F_1(\theta_0 - \gamma_1, \bar{\theta}_0 - \gamma_1; -\gamma_0; (x+a)/(a-c)) \left(-\frac{x+a}{a-c} \right)^{-1/2+\gamma} \quad (c-2a < x < -a).
\end{aligned}$$

Аналогічно із першої рівності (1.3) знаходимо стрибки переміщень на тріщині:

$$GD(u_x^{(1)} - u_x^{(2)}) \Big|_{y=0} = (\mu_0 P - Q)(a-x)^{1/2+\gamma} (a+x)^{1/2-\gamma} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1+\mu_0^2}{i\sqrt{2\pi}} a \operatorname{sh} 2\pi\theta \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_k} K^-(-i\gamma_k) f^-(-i\gamma_k) e^{-\gamma_k(\alpha+\alpha_1)} \quad (-b < x < a); \\
& G\left[u_y^{(1)} - u_y^{(2)} + i(u_x^{(1)} - u_x^{(2)})\right] \Big|_{y=0} = -(P+iQ)(a-x)^{1/2+i\theta}(a+x)^{1/2-i\theta} + \\
& + 2(1+i\mu_0)a \operatorname{ch} \pi\theta \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k^{-1} z_k^{(1)} e^{\theta_k(\alpha+\alpha_1)} \quad (-c < x < -b); \quad (3.4) \\
& G(u_x^{(1)} - u_x^{(2)}) \Big|_{y=0} = \frac{2\pi\theta \sqrt{2a(a-c)} |L_{20}|}{|\theta_0| \Gamma(1-\gamma_0) |\Gamma(\theta_0 + \gamma_1)|^2 \operatorname{sh} 2\pi\theta} \times \\
& \times {}_2F_1(\theta_0 - \gamma_1, \bar{\theta}_0 - \gamma_1; 1 - \gamma_0; (x+a)/(a-c)) \left(\frac{x+a}{a-c}\right)^{1/2+\gamma} \quad (-a < x < -c);
\end{aligned}$$

$$G = \frac{G_2}{\sqrt{[G_1 + G_2(3 - 4\nu_1)][G_1(3 - 4\nu_2) + G_2]}}.$$

Завдяки тому, що гіпергеометрична функція із передостанньої рівності (3.4) при заданих значеннях своїх параметрів і аргумента приймає тільки дійсні додатні значення на інтервалі $-a < x < -c$, різниця тангенціальних переміщень на цьому інтервалі є додатною: $(u_x^{(1)} - u_x^{(2)}) \Big|_{y=0} > 0$. Це підтверджує сформульоване при постановці задачі припущення про напрямок взаємного проковзування берегів тріщини у меншій із областей контакту. Аналогічне припущення для більшої області контакту $-b < x < a$ перевірено обчисленнями за першою із формул (3.4).

Із співвідношень (3.3) впливає поведінка напружень в околах вершин тріщини:

$$\begin{aligned}
& \tau_{xy}^{(1)} \Big|_{y=0} \sim \frac{K_{\Pi}(\pm a)}{[2(\pm x - a)]^{1/2-\gamma}}; \quad \sigma_y^{(1)} \Big|_{y=0} \sim \sigma_y(\pm a), \quad x \rightarrow \pm a \pm 0; \\
& \sigma_y^{(1)} \Big|_{y=0} \sim \frac{K_0(\pm a)}{[2(\pm x - a)]^{1/2-\gamma}}, \quad x \rightarrow a - 0; \quad K_0(\pm a) = \pm K_{\Pi}(\pm a) \operatorname{th} \pi\theta \cos \pi\gamma < 0; \\
& \frac{1}{2G_1} K_{\Pi}(a) = \left(P \frac{\pi^2 |\theta_0|^2 e^{(\gamma_0-1)\alpha_1}}{\Gamma(-\gamma_0) \Gamma(2-\gamma_0) |\Gamma(\theta_0 + \gamma_0)|^2 \operatorname{sh} \pi\theta \cos^2 \pi\gamma} {}_2F_1(\theta_1, \bar{\theta}_1; 2-\gamma_0; -e^{-\alpha_1}) - \right. \\
& \left. - (\mu_0 P - Q) \gamma_0 {}_2F_1(\theta_0 + \gamma_0, \bar{\theta}_0 + \gamma_0; \gamma_0; -e^{\alpha_1}) \right) (4a)^{1/2-\gamma}; \quad (3.5) \\
& \frac{1}{2G_1} K_{\Pi}(-a) = \sqrt{\frac{2a}{a-c}} \frac{\pi\theta |L_{20}| [2(a-c)]^{1/2-\gamma}}{|\theta_0| \Gamma(-\gamma_0) |\Gamma(\theta_0 + \gamma_1)|^2 \operatorname{sh} \pi\theta \cos \pi\gamma}; \\
& \frac{1}{2G_1} \sigma_y(a) = - \left[P \frac{d}{d\alpha_1} \left(e^{\alpha_1} {}_2F_1(\theta_0 - 1, \bar{\theta}_1 - 1; -\gamma_1; -e^{-\alpha_1}) \right) - \right. \\
& \left. - (\mu_0 P - Q) \operatorname{sh} \pi\theta \cdot \frac{|\Gamma(\theta_0 + \gamma_1)|^2}{\Gamma(\gamma_2) \Gamma(\gamma_3)} |\theta_0|^2 \frac{d}{d\alpha_1} \left(e^{-\gamma_1 \alpha_1} {}_2F_1(\theta_0 + \gamma_1, \bar{\theta}_0 + \gamma_1; \gamma_3; -e^{-\alpha_1}) \right) \right] e^{-\alpha_1};
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2G_1} \sigma_y(-a) = \sqrt{\frac{2a}{a-c}} \frac{\theta |L_{20}|}{|\theta_0| \Gamma(\gamma_2)}.$$

Тут $K_{II}(\pm a)$ і $K_0(\pm a)$ – коефіцієнти інтенсивності зсувних і нормальних контактних напружень, відповідно. На продовженні тріщини за її вершини дотичні напруження мають степеневу особливість з показником $1/2 - \gamma$ (кореневу – у випадку гладкого контакту), а нормальні напруження – скінченні. Контактні напруження необмежені у вершинах тріщини з тим самим показником особливості $1/2 - \gamma$. Вказані особливості характерні для контактних задач про міжфазні тріщини [4, 20, 22]. Через коефіцієнти $K_{II}(\pm a)$ розподіли напружень та переміщень всередині півплощин поблизу вершин тріщини можна визначити за відомими формулами [4, 19].

За відсутності тертя коефіцієнт $K_{II}(a)$ із (3.5) спрощуємо до такого вигляду:

$$\frac{1}{2G_1} K_{II}(a) = -\sqrt{P^2 + Q^2} (1 + 4\theta^2) \sqrt{\frac{(1 - \bar{l}_1)a}{1 + 4\theta^2 - \bar{l}_1}} \quad (\mu_0 = 0), \quad (3.6)$$

що збігається з результатом роботи [9].

Граничне значення нормальних напружень $\sigma_y(-a)$ у вершині тріщини $x = -a$, як випливає із (3.5), виражається через значення $K_{II}(-a)$ і довжину області контакту $a - c$ біля цієї вершини

$$\sigma_y(-a) = \frac{|\Gamma(\theta_0 + \gamma_1)|^2 \operatorname{sh} \pi \theta}{\Gamma(\gamma_1) \Gamma(\gamma_2)} \frac{K_{II}(-a)}{[2(a - c)]^{1/2 - \gamma}}; \quad \sigma_y(-a) = \frac{\theta K_{II}(-a)}{\sqrt{(a - c)/2}} \quad (\mu_0 = 0) \quad (3.7)$$

так само, як і у випадку напівнескінченної міжфазної тріщини [21]. Щоб отримати аналогічну залежність в околі вершини тріщини $x = a$, у гіпергеометричних функціях, що визначають величини $\sigma_y(a)$, $K_{II}(a)$ у (3.5), перейдемо до аргумента e^{α_1} за формулою (2.10). Після диференціювання за α_1 і використання співвідношень Гаусса між суміжними гіпергеометричними функціями [2], з урахуванням (2.11) знайдемо:

$$\sigma_y(a) = \left(\gamma_1 |\theta_0|^{-2} - e^{-\alpha_1} \right) \frac{|\Gamma(\theta_0 + \gamma_1)|^2 \operatorname{sh} \pi \theta}{\Gamma(\gamma_1) \Gamma(\gamma_2)} \frac{e^{(1/2 + \gamma)\alpha_1}}{(4a)^{1/2 - \gamma}} K_{II}(a); \quad (3.8)$$

$$\sigma_y(a) = \left(\frac{1}{2} |\theta_0|^{-2} - e^{-\alpha_1} \right) \frac{\theta}{\sqrt{a}} e^{\alpha_1/2} K_{II}(a) \quad (\mu_0 = 0); \quad e^{\alpha_1} = \frac{\bar{l}_1}{1 - \bar{l}_1}.$$

У випадку розтягу ($b < 0$, $p_\infty < 0$, $q_\infty = 0$), коли $e^{\alpha_1} \ll 1$, відношення $\sigma_y(a)/K_{II}(a)$ із (3.8) з точністю до знаку стає таким самим, як і $\sigma_y(-a)/K_{II}(-a)$ із (3.7), якщо в (3.8), де $e^{\alpha_1} = (a + b)/(2a)$, b замінити на $-c$.

Аналогічно до виведення попередньої формули, перетворивши величини L_{20} із (2.8) і $K_{II}(a)$ із (3.5) до вигляду

$$L_{20} = -i \frac{\Gamma^2(\theta_1) \Gamma^2(\theta_0 + \gamma_1) e^{(\gamma - i\theta)\alpha_1}}{2G_1 \bar{\theta}_0 \Gamma^2(2\theta_0) \Gamma(\gamma_1) (4a)^{1/2 - \gamma}} K_{II}(a); \quad (3.9)$$

$$\frac{1}{2G_1} K_{II}(a) = -2 \operatorname{Im} \left[(P - iQ) \frac{\Gamma(\gamma_1) \Gamma(2\bar{\theta}_0 - 1) e^{-(\gamma + i\theta)\alpha_1}}{\Gamma(\bar{\theta}_0 + \gamma_0) \Gamma(-\theta_0)} {}_2F_1(\theta_1, \theta_0 + \gamma_0; 2\theta_0; -e^{\alpha_1}) \right] (4a)^{1/2 - \gamma},$$

отримаємо зв'язок між коефіцієнтами інтенсивності напружень у вершинах тріщини:

$$K_{II}(-a) = -\left(\frac{\bar{l}_1}{(1-\bar{l}_1)\bar{l}_2}\right)^{\gamma} K_{II}(a). \quad (3.10)$$

У випадку гладкого контакту ($\mu_0 = 0$, $\gamma = 0$) маємо $K_{II}(-a) = -K_{II}(a)$, як раніше було встановлено в роботі [9]. За наявності тертя ($\mu_0 > 0$, $\gamma > 0$) із (3.10) випливає, що через малість відносної довжини меншої області контакту ($\bar{l}_2 < 10^{-8}$) $K_{II}(-a) > |K_{II}(a)|$ ($\gamma \sim 0,1$); при цьому відношення $K_{II}(-a)/|K_{II}(a)|$ зростає з одночасним збільшенням величин $1/\bar{l}_2$ і Q/P .

З урахуванням (3.9) параметр α_2 із (2.19) перетворюємо до вигляду

$$\alpha_2 = \alpha_1 - 4 \ln 2 + \frac{1}{\theta} \left(\pi + 2 \arg \frac{\Gamma(1-\gamma+i\theta)}{\Gamma(1+i\theta)} + 2 \arctg 2\theta \right), \quad (3.11)$$

звідки знаходимо залежність між відносними розмірами областей контакту:

$$\bar{l}_2 = 16 \frac{1-\bar{l}_1}{\bar{l}_1} \exp \left\{ -\frac{1}{\theta} \left(\pi + 2 \arg \frac{\Gamma(1-\gamma+i\theta)}{\Gamma(1+i\theta)} + 2 \arctg 2\theta \right) \right\}. \quad (3.12)$$

§ 4. Результати обчислень.

Розрахунки проведено, як і в роботі [16], для значення $\operatorname{th} \pi\theta = 0,5$. У таблиці наведено відносні розміри областей контакту $\bar{l}_1 = (a+b)/(2a)$, $\bar{l}_2 = (a-c)/(2a)$, безрозмірні коефіцієнти інтенсивності зсувних напружень $\bar{K}_{II}(\pm a) = K_{II}(\pm a)/(a^{1/2-\gamma} q_{\infty})$ і безрозмірні граничні значення нормальних напружень $\bar{\sigma}_y(\pm a) = \sigma_y(\pm a)/q_{\infty}$ у вершинах тріщини за різних відношень p_{∞}/q_{∞} інтенсивностей навантаження стиску та зсуву для фрикційного ($\mu_0 = 0,3$, верхні значення) та гладкого ($\mu_0 = 0$, нижні) контакту берегів тріщини. Значення $\bar{l}_1$ для $p_{\infty}/q_{\infty} = 0,2; 0,4; 0,6$ збігаються з наведеними в роботі [1]. Видно, що наявність тертя суттєво зменшує абсолютні значення $\bar{K}_{II}(a)$, особливо – за великих відношень p_{∞}/q_{∞} . За малих p_{∞}/q_{∞} значення $\bar{K}_{II}(-a)$ приблизно у 2,5 рази більше, ніж без урахування тертя. Якщо за гладкого контакту $\bar{K}_{II}(\pm a)$ рівні між собою та близькі до 1, то за фрикційного – вони різні та спадають до нуля, якщо $p_{\infty}/q_{\infty} \rightarrow 1/\mu_0$, а їх відношення $\bar{K}_{II}(-a)/\bar{K}_{II}(a)$ за абсолютним значенням при цьому значно зростає. Водночас, тертя майже не впливає на значення $\bar{\sigma}_y(\pm a)$. Напруження $\sigma_y(-a)$ на 4 порядки перевищують інтенсивність навантаження q_{∞} . Як і припускалося за постановкою задачі область контакту біля вершини тріщини $x = a$ займає більше половини тріщини, а біля вершини $x = -a$ – є надто малою.

Таблиця

p_{∞}/q_{∞}	0,2	0,4	0,6	0,8	1	2	3
$\bar{l}_1$	0,586 0,551	0,761 0,722	0,863 0,825	0,918 0,884	0,950 0,919	0,994 0,977	0,9998 0,9894
$\bar{l}_2 \cdot 10^9$	4,44 4,37	1,97 2,07	0,998 1,14	0,559 0,704	0,331 0,473	0,035 0,126	0,0014 0,0575
$-\bar{K}_{II}(a)$	0,976 1,015	0,908 1,007	0,843 1,004	0,781 1,003	0,718 1,002	0,410 1,000	0,103 1,000
$\bar{K}_{II}(-a)$	2,470 1,015	2,480 1,007	2,457 1,004	2,403 1,003	2,324 1,002	1,640 1,000	0,557 1,000
$-\bar{\sigma}_y(a)$	0,191 0,190	0,397 0,397	0,601 0,598	0,798 0,799	1,005 0,999	1,932 2,005	3,001 2,993
$\bar{\sigma}_y(-a) \cdot 10^{-4}$	0,266 0,268	0,386 0,387	0,521 0,520	0,660 0,661	0,812 0,805	1,516 1,556	2,346 2,306

На рис. 2 показано розподіли безрозмірних нормальних контактних напружень $\bar{\sigma} = q_{\infty}^{-1} \sigma_y^{(1)}|_{y=0}$ ($-b \leq x < a$). Криві 1 – 4 відповідають відношенню інтенсивностей навантаження $p_{\infty}/q_{\infty} = 0,2; 0,4; 0,6; 0,8$; суцільні криві – фрикційному контакту берегів тріщини ($\mu_0 = 0,3$), штрихові – гладкому ($\mu_0 = 0$). Точками показано відповідні розподіли напружень без урахування тертя із числового розв'язку [16] (окрім кривої 1, яка збігається зі штриховою). Зазначимо, що значення напружень, які обчислювали за першою з формул (3.1) у випадку гладкого контакту для побудови зображених на рисунку штриховими лініями розподілів, з точністю до 10^{-4} збігаються з напруженнями, обчисленими за формулами [3, 11]

$$\sigma_y^{(1)}|_{y=0} = \text{ch}^{-1} \pi \theta \cdot \lambda(x) \left[\lambda_1(x) \text{sh} \varphi_0(x) + 2\theta \sqrt{x+b} \text{ch} \varphi_0(x) \right] \quad (-b < x < a);$$

$$\lambda(x) = \sqrt{\frac{p_{\infty}^2 + q_{\infty}^2}{(4|\theta_0|^2 - \bar{l}_1)(x+a)}}; \quad \lambda_1(x) = (x + 4\theta^2 a) \sqrt{\frac{1 - \bar{l}_1}{a-x}}; \quad (4.1)$$

$$\varphi_0(x) = 2\theta \arctg \sqrt{\frac{2a(x+b)}{(a-b)(a-x)}}.$$

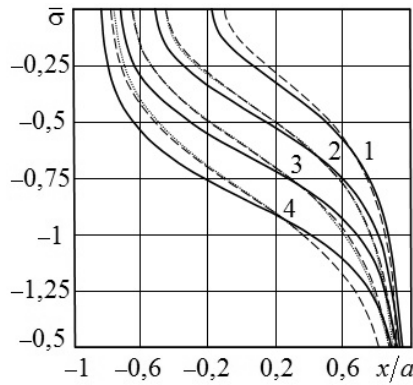


Рис. 2

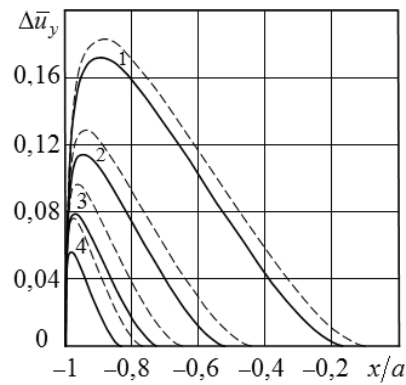


Рис. 3

Безрозмірне розкриття тріщини $\Delta \bar{u}_y = G q_{\infty}^{-1} \text{ch} \pi \theta \cdot (u_y^{(1)} - u_y^{(2)})|_{y=0}$ ($-c \leq x \leq -b$) показано на рис. 3. Тут нумерація кривих така сама, як і на рис. 2. За наявності тертя порівняно з випадком гладкого контакту зменшується як зона розкриття тріщини, так і саме розкриття. При обчисленні $\Delta \bar{u}_y$ у випадку $\mu_0 = 0$ за допомогою другої з формул (3.4) перевірено збіжність з відповідними значеннями, отриманими числовим інтегруванням функції [3, 11]

$$\frac{d}{dx} (u_y^{(1)} - u_y^{(2)})|_{y=0} = -\frac{1}{2G_1 G} \lambda(x) \left[\lambda_1(x) \sin \varphi^*(x) - 2\theta \sqrt{-b-x} \cos \varphi^*(x) \right] \quad (-c < x < -b);$$

$$\varphi^*(x) = 2\theta \ln \frac{\sqrt{(a+b)(x+a)}}{\sqrt{2a(-b-x)} + \sqrt{(a-b)(a-x)}}. \quad (4.2)$$

Відповідні графіки, що наведені в роботі [16], де максимальні значення розкриття збільшуються із зростанням параметра навантаження p_{∞}/q_{∞} , є помилковими, на що

вказано в [9]. Так само, як і на рис. 3, за результатами робіт [1, 9, 11] ці значення зменшуються із зростанням відношення p_{∞}/q_{∞} .

Висновки.

Із застосуванням методу Вінера – Гопфа знайдено аналітичний розв’язок контактної задачі для міжфазної тріщини в кусково-однорідній площині в однорідному полі напружень стиску та зсуву. Завдяки малому розміру області контакту берегів тріщини біля однієї з її вершин цей розв’язок отримано у замкненому вигляді. Трансцендентне рівняння для визначення більшої з областей контакту та коефіцієнти інтенсивності напружень у випадку гладкого контакту перетворені до знайдених раніше іншими авторами [3, 9, 11]. На жаль, подібні перетворення не вдалося здійснити відносно розподілів напружень та стрибків переміщень на лінії спряження півплощин, зокрема, контактних напружень, а лише чисельно перевірено тотожність відповідних виразів. Показано, що рівність коефіцієнтів інтенсивності напружень у різних вершинах тріщини у випадку гладкого контакту, що була встановлена в роботі [9], порушується у випадку фрикційного контакту, коли значення цих коефіцієнтів можуть відрізнятися один від одного у декілька разів. Граничне значення нормальних напружень у кожній із вершин тріщини виражено через відповідні коефіцієнти інтенсивності напружень та розмір області контакту.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто стиск і зсув пружної кусково-однорідної площини з прямолінійною тріщиною на межі поділу матеріалів. Враховано фрикційний контакт берегів тріщини поблизу її вершин. Із застосуванням методу Вінера – Гопфа отримано аналітичний розв’язок задачі. Знайдено розміри областей контакту, розподіли напружень та стрибків переміщень на лінії тріщини та її продовженні, коефіцієнти інтенсивності напружень.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: міжфазна тріщина, модель Комніноу, тертя, метод Вінера – Гопфа, гіпергеометрична функція.

1. Антипов Ю.А. Трещина на линии раздела упругих сред при наличии сухого трения // Прикл. математика и механика. – 1995. – **59**, вып. 2. – С. 290 – 306.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. – Москва: Наука, 1965. – 295 с.
3. Говоруха В.Б., Лобода В.В. Моделі та методи механіки руйнування п’єзокерамічних тіл з міжфазними тріщинами. – Дніпропетровськ: Вид-во Дніпропетр. нац. ун-ту, 2013. – 252 с.
4. Дундурс Я., Комніноу М. Обзор и перспективы исследования межфазной трещины // Разрушение композит. материалов. – 1979. – №3. – С. 387 – 396.
5. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. – Москва; Ленинград: Физматгиз, 1962. – 708 с.
6. Нобл Б. Метод Винера – Хопфа. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 280 с.
7. Острик В.И., Улитко А.Ф. Метод Винера – Хопфа в контактных задачах теории упругости. – Киев: Наук. думка, 2006. – 328 с.
8. Попов Г.Я. Метод Винера – Хопфа. В кн.: Развитие теории контактных задач в СССР. – Москва: Наука, 1976. – 495 с. – С. 34 – 45.
9. Симонов И.В. Межфазная трещина в однородном поле напряжений // Механика композит. материалов. – 1985. – № 6. – С. 969 – 976.
10. Справочник по специальным функциям (под ред. Абрамовица М., Стиган И.) – Москва: Наука, 1979. – 832 с.
11. Шевельова А.С., Лобода В.В. Математичне моделювання привершинних зон тріщин в областях поділу п’єзоактивних та п’єзопасивних матеріалів. – Дніпро: ЛІРА, 2020. – 204 с.
12. Atkinson C. The interface crack with a contact zone (an analytical treatment) // Int. J. Fract. – 1982. – **18**. – P. 161 – 177.
13. Comninou M. The interface crack // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1977. – **44**. – P. 631 – 636.

14. *Comninou M.* The interface crack with friction in the contact zone // J. Appl. Mech. – 1977. – **44**. – P. 780 – 781.
15. *Comninou M.* The interface crack in a shear field // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1978. – **45**. – P. 287 – 290.
16. *Comninou M., Schmueser D.* The interface crack in a combined tension – compression and shear field // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1979. – **46**. – P. 345 – 348.
17. *Gautesen A.K., Dundurs J.* The interface crack under a combined loading // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1988. – **55**. – P. 580 – 586.
18. *Ostryk V.I.* Friction contact of the edges of an interface crack under the conditions of tension and shear // Materials Sci. – 2003. – **39**, N 2. – P. 214 – 224.
19. *Ostryk V.I.* Asymptotic distributions of stresses and displacements near the edge of a contact zone // J. Mathem. Sci. – 2019. – **238**, N 1. – P. 63 – 82.
20. *Ostryk V.I.* Closed Semi-Infinite Crack at the Interface between Materials in a Piecewise-Homogeneous Strip // Int. Appl. Mech. – 2021. – **57**, N 3. – P. 363 – 372.
21. *Ostryk V.I.* Contact of the faces of an interfaces semiinfinite crack // J. Mathem. Sci. – 2023. – **270**, N 1. – P. 123 – 142.
22. *Ostryk V.I., Ulitko A.F.* Axisymmetric contact problem for an interface crack // Materials Sci. – 2004. – **40**, N 1. – P. 20 – 28.
23. *Wiener N., Hopf E.* Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen // S. B. Preuss. Akad. Wiss. – 1931. – S. 696 – 706.
24. *Williams M.L.* Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1952. – **19**, N 4. – P. 526 – 535.
25. *Williams M.L.* The stresses around a fault or cracks in dissimilar media // Bulletin of the Seismological Soc. of America. – 1959. – **49**. – P. 199 – 204.

Надійшла 31.08.2022

Затверджена до друку 28.03.2023