

А.О.Камінський¹, М.В.Дудик²

**АНАЛІТИЧНІ МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ ЗОНИ ПЕРЕДРУЙНУВАННЯ
БІЛЯ ВЕРШИНИ МІЖФАЗНОЇ ТРІЩИНИ (ОГЛЯД)**

¹Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: dfm11@ukr.net
²Уманський державний педагогічний університет ім. Павла Тичини,
вул. Садова, 2, 20300, Умань, Україна; e-mail: dudik_m@hotmail.com

Abstract. The analytical models of the process zone near the tip of an interface crack in a piecewise-homogeneous elastic-brittle body are reviewed in connection with the study of crack kinking from the interface of joined materials. They are based on the complex model of an interface crack, which assumes the presence of a face contact area and a small-scale process zone with the near-the-tip area of material destruction in the near-the-tip of the crack. The main principles of the analytical method of taking into account a small-scale process zone near the tip of an interface crack are formulated. They allow us to reduce the original nonlinear problem of fracture mechanics to the solving of the boundary value problem of the theory of elasticity on the discontinuity line of displacement, which emanates from the tip of the crack into a less crack-resistant material. The Wiener-Hopf method in combination with the Mellin integral transform is a mathematical tool for the analytical solution of boundary value problems of the analyzed models. Variants of the implementation of a complex model of an interface crack for the cases of prevailing tensile or shear loadings are considered. A numerical analysis of the parameters of the process zone, the face contact area, and the destruction zone for various loading conditions is carried out. A comparison of the model's predictions with the experimental results of interface crack kinking studies is performed. The mechanism of the opening of an initially closed crack due to the formation of a destruction zone is described. Analysis of the results of the approximate analytical solution of the problem of the complex model of an interface crack under loadings that provide commensurate zones of process and the faces contact is carried out. A mutual influence of the face contact and the process zone on their parameters and the angle of crack kinking is established.

Key words: interface crack, complex model, process zone, destruction zone, contact of the faces, crack kinking.

Вступ.

Проблема повороту міжфазної тріщини активно досліджується впродовж кількох останніх десятиліть, але інтерес до неї досі не спадає. Актуальність цієї проблеми залишається високою внаслідок значного застосування у сучасному виробництві композитних матеріалів, ламінатів та інших типів кусково-однорідних матеріалів, що призводить до питань щодо зародження та подальшої еволюції в них міжфазних тріщин.

Дослідження міжфазних тріщин розпочались у другій половині минулого століття з визначення локального поля напружень і переміщень в околі її вершин. В теорії міжфазних тріщин найбільшої популярності набули модель розкритої тріщини-розрізу з вільними від напружень берегами [28, 29, 54, 60] та модель М. Комніноу [17 – 20, 27], яка постулює наявність контакту берегів біля вершини тріщини. Проте, жодна з вказаних моделей не є у повній мірі задовільною. Модель розкритої тріщини призводить до осциляційної особливості напружень і деформацій при наближенні до вершини,

наслідком якої є фізично неможливий взаємний перетин берегів. З іншого боку, контактна модель за певних умов навантаження (наприклад, при переважаючих відривних навантаженнях) передбачає екстремально малі розміри області контакту берегів, що ставить під сумнів існування контакту. Відповідно, вибір базової моделі міжфазної тріщини для прогнозування напрямку її поширення повинен у першу чергу визначатись умовами навантаження кусково-однорідного тіла, що, відповідно, впливатиме на постановку задачі про поворот тріщини.

Стандартний метод розрахунку кута повороту тріщини зводиться до розв'язання задачі про маломасштабну тріщину, яка поширюється з вершини початкової міжфазної тріщини в один з матеріалів композитного з'єднання [34]. До отриманого розв'язку застосовується той чи інший критерій вибору орієнтації повернутої тріщини, серед яких найбільш вживаними і ефективними та близькими за прогнозованими значеннями кутів повороту є умова максимуму швидкості вивільнення енергії і принцип локальної симетрії (локальний коефіцієнт інтенсивності напружень біля вершини вторинної бічної тріщини $k_{11} = 0$) [62].

Зазначений вище метод базується на дослідженні виключно останнього етапу повороту тріщини, коли поворот вже відбувся. Він не враховує процеси деструкції матеріалу, які передують утворенню повернутої тріщини, не пояснює механізм розкриття початково закритої міжфазної тріщини в рамках моделі з контактуючими берегами. У зв'язку з цим очікується, що розгляд початкового етапу повороту тріщини, який полягає в утворенні в околі її вершин, як концентраторів напружень, зон передруйнування у матеріалі, в який відбувається поворот, дозволить краще зрозуміти особливості процесу повороту тріщини за різних умов навантаження та уточнити умови зрушення і передбачувані значення кутів відхилення тріщини від межі поділу.

Через математичну складність кількості робіт, присвячених привершинним зонам передруйнування біля міжфазних тріщин та їх впливу на поворот тріщин, є досить малою, причому розрахунки параметрів зон виконувались переважно чисельними методами [13, 52]. Виняток складає цикл досліджень [2, 3, 22 – 24, 36, 38, 39, 41] маломасштабних зон передруйнування, виконаних авторами даної публікації за активної участі одного з натхненників цих досліджень професора Л.А. Кіпніса та ряду інших його колег. Модельне представлення в них зон передруйнування математичним розрізом (лінією розриву переміщення) з певним законом взаємодії його берегів дозволило авторам звести вихідну задачу про поворот міжфазної тріщини при різних умовах навантаження до відповідних крайових задач теорії пружності, розв'язаних аналітично за допомогою методу Вінера – Гопфа [49].

Метою даної публікації є огляд розвинутих авторами аналітичних моделей привершинних зон передруйнування і перспектив їх подальшого удосконалення та обґрунтування можливостей їх використання у зв'язку з поворотом міжфазної тріщини. Різноманітність і чисельність аналізованих моделей обумовлена, з одного боку, суттєвим впливом характеру зовнішнього навантаження на можливі співвідношення розмірів зон передруйнування і області контакту берегів, що призводить до мультимасштабності структурних елементів моделей і створює труднощі для побудови однієї універсальної моделі, а з іншого боку пов'язана зі спробою врахування наявності досить малої області деструкції матеріалу в частині зони передруйнування, прилеглої до вершини тріщини, яка характеризується підвищеним рівнем деформацій.

§1. Основні положення методу врахування маломасштабних зон передруйнування в теорії міжфазних тріщин.

Метод врахування впливу маломасштабних зон передруйнування на напружено-деформований стан в околі гострокінцевих концентраторів напружень в плоских задачах механіки руйнування, який використано у наступних розділах статті, вперше був реалізований Черепановим у роботі [16] при розрахунку параметрів пластичної зони біля вершини тріщини нормального відриву в однорідному пружно-пластичному матеріалі. Метод базується на наступних вихідних положеннях:

1). Розкладання вихідної задачі про визначення параметрів маломасштабної зони передруйнування (ЗП) і напружено-деформованого стану (НДС) в околі вершини гострокінцевого концентратора напружень на зовнішню задачу, яка описує НДС досліджуваного тіла без ЗП, і внутрішню задачу, метою якої є визначення параметрів ЗП і НДС біля вершини.

Розкладання вихідної задачі на зовнішню і внутрішню у випадку маломасштабних ЗП дає можливість їх незалежного розв'язування. Це важливо, оскільки розв'язування зовнішньої задачі суттєво ускладнюється у випадку нетривіальної будови досліджуваного тіла і складної конфігурації зовнішнього навантаження, тоді як внутрішня задача може бути розв'язана окремо в рамках лінійної механіки руйнування лише за відомого асимптотичного розв'язку зовнішньої задачі.

2). Використання «принципу мікроскопа» [11] для опису локального поля напружень і переміщень біля вершини концентратора.

Для розв'язання внутрішньої задачі у випадку маломасштабних ЗП достатньо знати локальне поле напружень біля вершини концентратора напружень як асимптотичної частини розв'язку зовнішньої задачі. «Принцип мікроскопа» дозволяє звести пошук асимптотичної частини розв'язку зовнішньої задачі до розв'язання відповідної однорідної канонічної сингулярної крайової задачі теорії пружності для особливих точок, якими є гострокінцеві концентратори, зокрема, вершини тріщин. Побудова розв'язку цієї задачі здійснюється за допомогою методу Вігхардта – Вільямса розвинення розв'язку за власними функціями [58, 59]. В рамках методу Вігхардта – Вільямса асимптотичний розв'язок подається у вигляді суперпозиції частинних розв'язків

$$\sigma_{jk}(r, \theta) \sim \sum_i C_i F_{jk}(\lambda_i, \theta) r^{\lambda_i} \quad (r \rightarrow 0) \quad (1.1)$$

(r, θ – координати в полярній системі з початком у вершині концентратора напружень), вклад кожного з яких визначається:

- коефіцієнтами C_i , що залежать від будови тіла і зовнішнього навантаження та розраховуються чисельними або ж, при можливості, аналітичними методами з розв'язку зовнішньої задачі. За фізичним змістом C_i відповідають коефіцієнтам інтенсивності напружень. Важливо, що в процесі розв'язання внутрішньої задачі не виникає потреби у визначенні коефіцієнтів C_i : на даному етапі достатньо вважати їх заданими за умовою і тільки для чисельного дослідження отриманого розв'язку потрібні їх числові значення для конкретного тіла і конкретного навантаження, які підставлятимуться в кінцеві формули розв'язку;

- коренями λ_i ($\text{Re } \lambda_i > -1$) характеристичного рівняння задачі, які пов'язані з локальною структурою привершинної області і у випадку від'ємних значень їх дійсних частин є показниками сингулярності напружень. Обмеження $\text{Re } \lambda_i > -1$ обумовлене вимогою скінченності переміщень при $r > 0$;

- функціями $F_{jk}(\lambda_i, \theta)$, які, як і показники сингулярності λ_i , визначаються локальною геометрією і пружними характеристиками матеріалів у привершинній області.

3). Використання моделей типу Леонова – Панасюка [6, 7] і Дагдейла [26] для зведення внутрішньої задачі про розрахунок параметрів ЗП до статичної крайової задачі теорії пружності про лінію розриву переміщення як математичного розрізу, що виходить з вершини концентратора, з заданим законом взаємодії його берегів, який відповідає певному критерію міцності матеріалу.

Визначення форми і розмірів зони передруйнування в рамках нелінійної механіки руйнування передбачає розв'язання системи диференціальних рівнянь в частинних похідних з крайовими умовами на заздалегідь невідомій границі, яка розмежовує ЗП та решту матеріалу, що перебуває у пружному стані і задовольняє рівнянням теорії пружності. На сьогоднішній день через відсутність дієвих методів аналітичного розв'язання таких нелінійних задач їх розв'язки знаходяться переважно чисельно. Проте,

у випадку маломасштабної зони передруйнування високий градієнт деформацій і стрімке зростання напружень при наближенні до вершини концентратора ускладнює застосування чисельних методів. Моделі типу Леонова – Панасюка і Дагдейла дозволяють обійти цю проблему шляхом вилучення області зони передруйнування з тіла, натомість з'єднуючи границі вилученої області з припущенням існування стрибка переміщень при перетині лінії з'єднання границь та формулюючи на ній певні умови стосовно напружень, які відповідним чином відображають стан матеріалу у зоні передруйнування.

Задача про початковий етап повороту міжфазної тріщини в умовах плоскої деформації у загальній постановці, яка враховує контакт берегів, утворення зони передруйнування з областю деструкції матеріалу у її привершинній частині, була сформульована в [3] в рамках так званої комплексної моделі. В ній представлення зони передруйнування лінією розриву переміщення призводить до розрахункової схеми, відображеної на рис. 1. Прямолінійний відрізок OO' моделює зону передруйнування довжиною l , що містить область деструкції OO'' довжиною d . Обмеження дослідження НДС лише в околі вершини міжфазної тріщини та припущення про маломасштабність зони передруйнування (довжина зони передруйнування l значно менша, ніж довжина тріщини L) дозволяє розглядати тіло як кусково-однорідну площину з півнескінченим розрізом на межі поділу і лінією розриву скінченної довжини, яка починається у

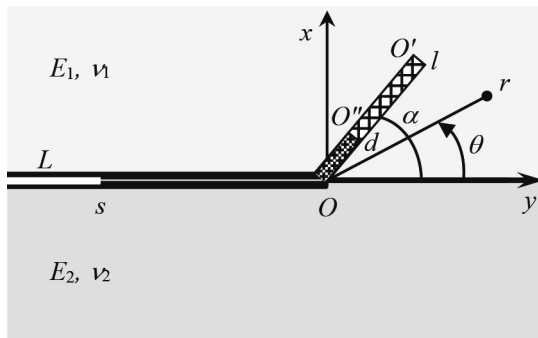


Рис. 1

вершині і поширюється у найменш тріщиностійкий (для визначеності перший) матеріал під кутом α до межі поділу (рис. 1). Частина берегів міжфазного розрізу довжиною s , прилегла до вершини, перебуває у контакті з тертям. Метою дослідження є визначення розмірів всіх структурних елементів привершинної області, орієнтації зони передруйнування та умов зрушення тріщини.

Механізм руйнування першого матеріалу, який призводить до поширення в ньому тріщини після повороту, вважається крихким, відповідно деформації в ЗП носять переважно відривний характер, тому ЗП моделюється лінією розриву нормального переміщення, на якій нормальне напруження дорівнює опору матеріалу відриву (модель типу Леонова – Панасюка, [6, 7]). У постановці внутрішньої задачі цій моделі відповідають крайові умови

$$\theta = \alpha, r < l: \sigma_\theta(r, \alpha) = \sigma_1; \quad \theta = \alpha, r > l: \langle u_\theta \rangle = 0, \quad (1.2)$$

де $\langle f \rangle$ позначає стрибок величини f при перетині відповідного відрізка. Опір відриву σ_1 визначається емпірично як середнє значення нормального напруження у зоні передруйнування. Прикладом вимірювання опору відриву для полімерів і композитів є експериментальна методика, що описана в роботі [1].

Згідно з експериментальними дослідженнями [37, 42, 43], внаслідок високого рівня деформацій і напружень у безпосередньому околі вершини тріщини відбувається деструкція матеріалу, яка характеризується високим рівнем не лише відривних, але і зсувних деформацій. Область локалізації процесів деструкції – зона деструкції (інші назви: fracture process zone (зона процесу руйнування), damage zone (зона пошкоджень) [12, 53], зона розпушення [51]) – є відносно малою порівняно з усією зоною передруйнування. У комплексній моделі зони передруйнування [3] зону деструкції представлено математичним розрізом довжиною d , на якому зазнає розриву не лише

нормальне, але і дотичне переміщення, а дотичне напруження дорівнює опору зсуву першого матеріалу τ_1 . Її враховують доповненням крайових умов (1.2) умовами

$$\theta = \alpha, r < d: \tau_{r\theta}(r, \alpha) = \tau_1; \theta = \alpha, r > d: \langle u_r \rangle = 0, \quad (1.3)$$

які формально відповідають моделі типу Дагдейла пластичної зони [26]. Опір матеріалу зсуву τ_1 наближено можна визначити як середнє арифметичне умовної границі текучості при допуску 0,2 % на пластичну деформацію і границі міцності (тимчасового опору).

Доповненням крайових умов (1.2) і (1.3) в задачі про поворот міжфазної тріщини в рамках комплексної моделі є умови ідеального з'єднання матеріалів

$$\theta = 0: \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \langle u_\theta \rangle = \langle u_r \rangle = 0 \quad (1.4)$$

та умови на берегах тріщини з урахуванням їх часткового контакту з тертям

$$\theta = \pm\pi, r > s: \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0;$$

$$\theta = \pm\pi, r < s: \langle \sigma_\theta \rangle = 0, \tau_{r\theta} = -\mu\sigma_\theta, \langle u_\theta \rangle = 0 \quad (1.5)$$

(μ – коефіцієнт тертя берегів) [3].

4). *Формулювання для внутрішньої задачі умови на нескінченності як вимоги зрощування розщипуваного розв'язку на відстанях, що значно перевищують розміри ЗП, але значно менші порівняно з характерними розмірами концентратора напружень або відстанню до найближчої актуальної точки тіла, з асимптотичним розв'язком (1.1) зовнішньої задачі біля вершини концентратора.* Таке формулювання умови на нескінченності відоме як метод Прандтля зрощування асимптотичних розв'инень [48]. Враховуючи (1.1), умова на нескінченності може бути записана як

$$\theta = \alpha, r \rightarrow \infty: \sigma_{jk} = \sum_i C_i F_{jk}(\lambda_i, \theta) r^{\lambda_i} + o(1/r). \quad (1.6)$$

5). *Врахування сингулярної поведінки напружень і деформацій в кінці лінії розриву переміщення, відомої із загальних принципів лінійної механіки руйнування [9, 11].*

Використовуючи загальні положення про поведінку напружень поблизу кутових точок пружних тіл можна показати, що у вільному кінці лінії розриву має місце коренева особливість напружень (передбачається, що береги лінії розриву взаємодіють без тертя). Зокрема, біля вільного кінця O' лінії розриву нормального переміщення у першому матеріалі (рис. 1) мають місце асимптотики

$$\begin{aligned} \theta = \alpha, r \rightarrow l+0: \sigma_\theta &\sim \frac{k_1}{\sqrt{2\pi(r-l)}}; \\ \theta = \alpha, r \rightarrow l-0: \left\langle \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right\rangle &\sim -\frac{4(1-\nu_1^2)}{E_1} \frac{k_1}{\sqrt{2\pi(l-r)}}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

а біля кінця O'' лінії розриву дотичного переміщення вони мають вигляд

$$\begin{aligned} \theta = \alpha, r \rightarrow d+0: \tau_{r\theta} &\sim \frac{k_2}{\sqrt{2\pi(r-d)}}; \\ \theta = \alpha, r \rightarrow d-0: \left\langle \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\rangle &\sim -\frac{4(1-\nu_1^2)}{E_1} \frac{k_2}{\sqrt{2\pi(d-r)}}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Тут k_1, k_2 – коефіцієнти інтенсивності локального поля напружень біля кінців ліній розриву, які підлягають визначенню в ході розв'язування задачі.

6). Зведення сформульованої крайової задачі за допомогою інтегрального перетворення до функціонального рівняння відносно трансформант напружень і градієнтів переміщень та його наступне розв'язування за допомогою методу Вінера – Гопфа.

Для побудови розв'язку внутрішньої задачі зі сформульованими вище крайовими умовами (1.2) – (1.6) доцільним є використання інтегрального перетворення Мелліна

[10] виду $m^*(p) = \int_0^{\infty} m(r)r^p dr$ з комплексним параметром p . Його застосування до

рівнянь рівноваги, умови сумісності деформацій, закону Гука та крайових умов призводить до функціонального рівняння, що пов'язує трансформанти Мелліна компонентів напруження і градієнта переміщення, які входять в крайові умови на лінії розриву. Розв'язок отриманого функціонального рівняння задачі отримується за допомогою методу Вінера – Гопфа [49] з використанням процедури факторизації коефіцієнтів рівняння та із залученням деяких положень теорій функцій комплексної змінної, зокрема, принципу аналітичного продовження і теореми Ліувілля.

7). Розрахунок параметрів зони переддруйнування (лінійного розміру, очікуваної орієнтації, розходження границь зони у вершині концентратора, швидкості вивільнення енергії) з отриманого на попередньому етапі розв'язку функціонального рівняння.

Умовою для визначення довжини ЗП є зазвичай вимога обмеженості напружень в її кінці. Вона зводиться до рівності коефіцієнта інтенсивності напружень k_1 в кінці ЗП деякому критичному значенню k_{1C} – в'язкості відриву матеріалу. Аналогічна умова для довжини зони деструкції має вигляд $k_2 = k_{2C}$, де k_{2C} – в'язкість зсуву. Проте, при виконанні умов $k_{1C} \ll \sigma_1 \sqrt{l}$ і $k_{2C} \ll \tau_1 \sqrt{d}$ в'язкістю матеріалу можна знехтувати, що призводить до вимоги обертання k_1 і k_2 в нуль. Саме ці умови використовуються в подальшому у роботі для визначення розмірів зон переддруйнування і деструкції.

Що стосується вибору напрямку поширення зони переддруйнування, то в цьому питанні загальноприйнятого критерію немає [8]. Поширеним є використання умови максимуму довжини зони, яка обґрунтовується тим, що це є напрям від вершини тріщини до найвіддаленішої точки зони. З енергетичних критеріїв ефективними для розрахунків є критерії максимуму швидкості вивільнення енергії в зоні або максимуму потенціальної енергії, накопиченої в зоні, які власне призводять до однакових умов та виражаються через знайдений в ході розв'язання функціонального рівняння вираз для трансформанти градієнта переміщення.

Так само через трансформанту градієнта переміщення визначається розходження берегів математичного розрізу, що моделює зону переддруйнування, у вершині концентратора напружень, яке у випадку тріщини дорівнюватиме розкриттю тріщини у її вершині. Досліджуючи залежність розходження від навантаження, прикладеного до тіла, можна встановити граничне навантаження, за якого розходження досягає критичного значення – модельної сталої матеріалу, якому відповідає розрив його суцільності у зоні переддруйнування і, як наслідок, зародження тріщини біля вершини гострокінцевого концентратора або зрушення (підростання) існуючої тріщини. Вказана умова поширює відомий критерій критичного розкриття тріщини в однорідному матеріалі (КРТ-критерій) [6, 57] на випадок кусково-однорідного тіла, для якого внаслідок наявності кількох варіантів можливого поширення тріщини (по межі поділу або ж в один з матеріалів з'єднання, у тому числі й розгалуження) поняття критичного розкриття тріщини у вершині стає неоднозначним і залежним не лише від матеріалу, в якому поширюється тріщина, але й від геометрії з'єднання.

8). Визначення змін локального поля напружень і деформацій в околі вершини концентратора внаслідок утворення маломасштабної зони переддруйнування.

Поява ЗП суттєво впливає на НДС в околі вершини концентратора напружень. В результаті розв'язання функціонального рівняння задачі визначаються трансформанти напружень, які матимуть загальний вигляд $\sigma_{jk}^*(p, \theta) = \frac{f_{jk}^*(p, \theta)}{D(p)}$, де $f_{jk}^*(p, \theta)$

– деякі аналітичні функції, що не мають особливостей для будь-яких значень комплексного параметра інтегрального перетворення Мелліна p . Застосувавши до трансформант напружень зворотне перетворення Мелліна, із залученням теореми про лишки визначаються головні члени розвинень напружень у асимптотичні ряди при $r \rightarrow 0$:

$$\sigma_{jk}(r, \theta) = \sum_s g_{jk}(\theta, \lambda'_s) r^{\lambda'_s}, \quad (1.9)$$

де λ'_s – корені характеристичного рівняння внутрішньої задачі $D_1(-1 - \lambda') = 0$ у півплощині $\text{Re } \lambda' > -1$; $g_{jk}(\theta, \lambda'_s)$ – функції

$$g_{jk}(\theta, \lambda'_s) = \frac{f_{jk}^*(-1 - \lambda'_s, \theta)}{D'(-1 - \lambda'_s)} \left(D'(p) = \frac{dD(p)}{dp} \right),$$

які залежать від геометрії тіла, пружних характеристик його матеріалів і навантаження. Якщо серед множини λ'_s є корені, які попадають у смугу $-1 < \text{Re } \lambda' < 0$, це означатиме збереження концентрації напружень в околі вершини концентратора напружень і, як наслідок, появу вторинної зони передруйнування, або ж утворення у частині зони передруйнування, прилеглої до вершини концентратора, області деструкції матеріалу з підвищеним рівнем деформацій. Розрахунок параметрів маломасштабної вторинної зони передруйнування або зони деструкції також може бути здійснений за допомогою описаного вище методу.

Сформульована вище комплексна модель міжфазної тріщини у загальній постановці призводить до системи взаємозв'язаних функціональних рівнянь, для якої відсутні методи розв'язання. Проте, існує можливість розщеплення цих рівнянь, тобто зведення до незалежних скалярних рівнянь, ефективно розв'язуваних за допомогою методу Вінера – Гопфа. Умови такого розщеплення зводяться до нерівностей типу $s \ll l$ або $s \gg l$, $s \ll d$ або $s \gg d$ тощо, що власне й використано в моделях, які розглядаються у наступних розділах.

§2. Особливості початкового етапу повороту розкритої міжфазної тріщини.

Нехай кусково-однорідне тіло з плоскою межею поділу, на якій розташована міжфазна тріщина, складене з двох пружно-крихких ізотропних матеріалів з модулями Юнга E_1, E_2 ($E_1 < E_2$) і коефіцієнтами Пуассона ν_1, ν_1 та перебуває під дією статичного зовнішнього навантаження, яке забезпечує суттєву малість області контакту берегів в околі однієї з вершин. Зокрема, така ситуація виникає біля вершини O (рис. 1) у випадку кусково-однорідної площини, навантаженої на нескінченності сталими зсувним і нормальним розтягувальним напруженнями ($\tau_{xy} = q \geq 0$, $\sigma_y = p > 0$ при $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$) [20, 27]. За даних обставин у загальній постановці задачі про поворот тріщини, сформульованій у п. 1, можна знехтувати контактом берегів ($s \ll l$) і вважати тріщину розкритою, що дозволяє в рамках описаного там же методу розв'язати наступні питання:

- 1). Які параметри матиме зона передруйнування в околі вершини та в якому напрямку очікується поворот тріщини ?
- 2). Як утворення зони передруйнування впливає на контакт берегів тріщини ?
- 3). Які розміри матиме зона деструкції та як вони співвідносяться з розмірами області контакту берегів тріщини ?

2.1. Модель маломасштабної зони передруйнування та поворот розкритої міжфазної тріщини. Для визначення параметрів маломасштабної зони передруйнування у постановці крайової задачі, сформульованої у п. 1, слід покласти $s = d = 0$ і, розглядаючи тріщину в рамках розкритої моделі, задати умову на нескінченності (1.6) у вигляді зрощування шуканого розв'язку задачі з відомою асимптотикою розв'язку аналогічної задачі без зони [54]:

$$\theta = \alpha, \quad r \rightarrow \infty: \sigma_\theta = 2 \operatorname{Re}(F(\alpha) r^{-1/2+i\omega}) + o(1/r), \quad (2.1)$$

де $\omega = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1-\beta}{1+\beta}$, $\beta = \frac{(1+e\kappa_2)-(e+\kappa_1)}{(1+e\kappa_2)+(e+\kappa_1)}$ (β – біматеріальний параметр Дандерса),

$$e = \frac{1+\nu_2}{1+\nu_1} \frac{E_1}{E_2}; \quad \kappa_{1(2)} = 3 - 4\nu_{1(2)};$$

$$F(\alpha) = -ie'KL^{-i\omega}F_1(\alpha); \quad e' = \frac{\sqrt{(e+\kappa_1)(1+e\kappa_2)}}{2\sqrt{2\pi}[(e+\kappa_1)^2 - (1+e\kappa_2)^2]};$$

$$F_1(\alpha) = -[a_1 \sin(\lambda+2)\alpha + a_2 \sin \lambda\alpha + a_3 \cos(\lambda+2)\alpha + a_4 \cos \lambda\alpha]_{\lambda=-1/2+i\omega};$$

$$a_1 = \frac{e+\kappa_1}{2} - 1 - e\kappa_2 + \left(e + \kappa_1 - \frac{1+e\kappa_2}{2}\right) \operatorname{ch} 2\pi\omega + i\omega[e + \kappa_1 - (1+e\kappa_2) \operatorname{ch} 2\pi\omega];$$

$$a_2 = (3/2 + i\omega)[(1+e\kappa_2) \operatorname{ch} 2\pi\omega - e - \kappa_1];$$

$$a_3 = -\omega(1+e\kappa_2) \operatorname{sh} 2\pi\omega - i\left(e + \kappa_1 - \frac{1+e\kappa_2}{2}\right) \operatorname{sh} 2\pi\omega; \quad a_4 = \left(\omega - \frac{3i}{2}\right)(1+e\kappa_2) \operatorname{sh} 2\pi\omega.$$

Цей розв'язок характеризується комплексно спряженими показниками сингулярності $-0,5 \pm i\omega$ та комплексним коефіцієнтом інтенсивності напружень $K = K_1 + iK_2$ [54], в якому закладено як величину і конфігурацію зовнішнього поля, так і особливості будови конкретного кусково-однорідного тіла. Вважатимемо K_1, K_2 заданими за умовою, припускаючи відсутність контакту берегів тріщини на межі поділу, або ж розміри області контакту є такими, що контактом можна знехтувати.

Розв'язок відповідної крайової задачі за допомогою методу Вінера – Гопфа отримано в [39]. Він призводить до наступного рівняння для розрахунку відносної довжини зони передруйнування $x = l/L$:

$$\frac{\tilde{\sigma} \sin(\omega \ln x + \varphi + \psi + \xi)}{\sqrt{x}} = C; \quad (2.2)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{K_2}{K_1}; \quad \psi = \arg(F_1(\alpha)); \quad \xi = \arg(N(\alpha)); \quad \tilde{\sigma} = \frac{\sqrt{K_1^2 + K_2^2}}{\sigma_1 \sqrt{L}};$$

$$C = \frac{K^+(-1)}{2e'G^+(-1)|F_1(\alpha)||N(\alpha)|}; \quad N(\alpha) = \frac{K^+(-1/2-i\omega)}{(1/2+i\omega)G^+(-1/2-i\omega)}; \quad K^\pm(p) = \frac{\Gamma(1 \mp p)}{\Gamma(0,5 \mp p)}$$

($\Gamma(z)$ – гамма-функція) та виразу для накопиченої в зоні потенціальної енергії:

$$W(\alpha) = \frac{4(1-\nu_1^2)\sigma_1 K^-(1)}{E_1(9+4\omega^2)} e' |3-4\omega^2-8i\omega| L^{3/2} \sqrt{K_1^2 + K_2^2} w(\alpha); \quad (2.3)$$

$$w(\alpha) = G^-(1)|F_1(\alpha)||N(\alpha)|x^{3/2}(\alpha) \sin(\omega \ln x + \psi + \xi + \varphi + \gamma); \quad \gamma = \arg(3-4\omega^2-8i\omega).$$

У формулах (2.2), (2.3) використано позначення

$$\exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\ln G(z)}{z-p} dz \right] = \begin{cases} G^+(p) \text{ (Re } p < 0); \\ G^-(p) \text{ (Re } p > 0); \end{cases} \quad G(p) = -\frac{D_1(p) \cos p\pi}{D_0(p) \sin^2 p\pi};$$

$$D_0(p) = 2(e + \kappa_1)(1 + e\kappa_2) \cos 2p\pi + (e + \kappa_1)^2 + (1 + e\kappa_2)^2;$$

$$D_1(p) = (1 + e\kappa_2)^2 \Delta_1(p) - 2(1 - e)(1 + e\kappa_2) \Delta_2(p) + 2(e + \kappa_1)(1 + e\kappa_2) \Delta_3(p) - \\ - 2(1 - e)(e + \kappa_1) \Delta_4(p) - (e + \kappa_1)^2 \Delta_5(p);$$

$$\Delta_1(p) = 2p^2 \sin^2 \alpha \cos p(\pi - 2\alpha) + p \sin 2\alpha \sin p(\pi - 2\alpha) - 2 \sin p\alpha \sin p(\pi - \alpha);$$

$$\Delta_2(p) = p^2 \sin^2 \alpha \cos p(3\pi - 2\alpha) + p \sin 2\alpha \cos p(2\pi - \alpha) \sin p(\pi - \alpha) + \\ + \cos p\pi \sin^2 p(\pi - \alpha);$$

$$\Delta_3(p) = p^2 \sin^2 \alpha \cos p(\pi + 2\alpha) - p \sin 2\alpha \sin p\alpha \cos p(\pi + \alpha) - \\ - \sin p(\pi - \alpha) [\sin p(2\pi + \alpha) - \sin p\pi \cos p(\pi - \alpha)];$$

$$\Delta_4(p) = p^2 \sin^2 \alpha \cos p(\pi - 2\alpha) + p \sin 2\alpha \cos p\alpha \sin p(\pi - \alpha) + \cos p\pi \sin^2 p(\pi - \alpha);$$

$$\Delta_5(p) = \sin p\pi [\sin 2p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha].$$

Найбільший корінь рівняння (2.2), який задовольняє умову $x < 1$, визначає довжину зони передруйнування при зовнішньому навантаженні, заданому за допомогою безрозмірного параметра $\tilde{\sigma}$ і фазовому куті навантаження ψ . Орієнтацію зони передруйнування розраховуємо за критерієм максимуму швидкості вивільнення енергії в зоні, який призводить до умови $w(\alpha) \rightarrow \max$.

Утворення зони передруйнування змінює НДС в околі вершини тріщини на відстанях, співрозмірних з розмірами зони. При цьому на відстанях, значно менших від довжини зони, НДС описуватиметься асимптотичним розв'язком досліджуваної задачі, який отримуємо шляхом застосування зворотного перетворення Мелліна до трансформант напружень і похідних переміщень, знайдених в процесі розв'язування задачі. Загальна структура компонентів тензора напружень на відстанях $r \ll l$ має вигляд

$$\sigma_{ik}(r, \theta) = C_{ik}(\theta) + \sum_j \frac{\sigma^*(-1 - \lambda_j)}{D'_1(-1 - \lambda_j)} f_{ik}(-1 - \lambda_j, \theta) r^{\lambda_j}, \quad (2.4)$$

де $C_{ik}(\theta) = \sigma_1 \frac{f_{ik}(-1, \theta)}{D_1(-1)}$ – незалежна від відстані функція полярного кута; $D'_1(p) \equiv \partial D_1(p) / \partial p$; $f_{ik}(p, \theta)$ – регулярні за змінною p функції, відомі з розв'язку задачі; $\sigma^*(p)$ – трансформанта нормального напруження на лінії розриву, яка дорівнює

$$\sigma^*(p) = -l^{p+1} \frac{pG^+(p)}{K^+(p)} \left[\frac{\sigma_1}{p+1} \frac{K^+(-1)}{G^+(-1)} + \frac{ZN(\alpha)}{p+1/2+i\omega} + \frac{\bar{Z}\bar{N}(\alpha)}{p+1/2-i\omega} \right];$$

$Z = -F(\alpha)l^{-1/2+i\omega}$; λ_j – корені рівняння

$$D_1(-1-x) = 0. \quad (2.5)$$

В (2.4) підсумовування здійснюється за всіма коренями рівняння (2.5), що задовольняють вимогу $\operatorname{Re} \lambda_j > -1$. При цьому кореням зі смуги $-1 < \operatorname{Re} \lambda_j < 0$ відповідають сингулярні члени розвинень напружень біля вершини тріщини, а λ_j мають смисл показників сингулярності, тоді як корені з $\operatorname{Re} \lambda_j > 0$ визначають доданки з регулярною поведінкою при $r \rightarrow 0$.

Знайдено також розкриття тріщини біля її вершини [23]:

$$\langle u_\theta(r, \theta) \rangle \Big|_{\theta = \pm \pi} = -\frac{4(1-\nu_1^2)}{E_1} \sigma_1 r \left[C_0 + \sum_j \frac{C_j}{\lambda_j + 1} r^{\lambda_j} \right]; \quad (2.6)$$

$$C_0 = \frac{\pi u_0}{D_1'(-1)}; \quad u_0(p) = (e + \kappa_1 + 1 + e\kappa_2)^2;$$

$$C_j = \frac{\sin \lambda_j \pi}{D_1'(-1-\lambda_j)} \frac{4(1+\lambda_j)u(\lambda_j)G^+(-1-\lambda_j)}{\sigma_1 \lambda_j l^{\lambda_j} K^+(-1-\lambda_j)} \operatorname{Re} \left[\frac{1-2i\omega}{1+2i\omega} \frac{F(\alpha)l^{-1/2+i\omega}}{1-2i\omega+2\lambda_i} \frac{K^+(-1/2-i\omega)}{G^+(-1/2-i\omega)} \right];$$

$$u(\lambda) = (e + \kappa_1)^2 \cos \lambda(\pi - \alpha) + 2(e + \kappa_1)(1 + e\kappa_2) [\lambda \sin \alpha \sin(\lambda(\pi + \alpha) + \alpha) + \cos \lambda(\pi + \alpha)] - \\ - (1 + e\kappa_2)^2 [2\lambda \sin \alpha \sin(\lambda(\pi - \alpha) - \alpha) - \cos \lambda(\pi - \alpha)].$$

Отримані формули можна використовувати для дослідження маломасштабної зони передруйнування біля вершини міжфазної тріщини у кусково-однорідному тілі довільної форми при дії на нього довільного зовнішнього навантаження, яке входить в кінцеві рівняння через комплексний коефіцієнт інтенсивності напружень $K = K_1 + iK_2$, що може бути знайдений незалежно при розв'язанні тієї чи іншої зовнішньої задачі. Для прикладу розглянемо випадок кусково-однорідної площини, навантаженої на нескінченності сталими зсувним і нормальним розтягувальним напруженнями ($\tau_{xy} = q$, $\sigma_y = p > 0$ при $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$, рис. 1), для якого коефіцієнт інтенсивності напружень біля вершини O у задачі без зони передруйнування дорівнює [54]:

$$K = K_1 + iK_2; \quad K_1 = (p - 2\omega q) \frac{\sqrt{\pi L/2}}{\operatorname{ch} \pi \omega}; \quad K_2 = (2\omega p + q) \frac{\sqrt{\pi L/2}}{\operatorname{ch} \pi \omega}.$$

Вимога неперервності напружень і переміщень на межі поділу призводить до необхідності прикладення до тіла нормальних напружень p_1, p_2 у верхній і нижній півплощинах паралельно межі поділу, зв'язаних умовою [54]

$$p_2 = \frac{E_2}{E_1} \frac{1-\nu_1^2}{1-\nu_2^2} p_1 + \left[\frac{\nu_2}{1-\nu_2} - \frac{E_2}{E_1} \frac{\nu_1(1+\nu_1)}{1-\nu_2^2} \right] p.$$

Ці напруження не входять у коефіцієнти K_1, K_2 , тому у першому наближенні вони не впливають на параметри зони передруйнування. Разом з тим, вони вносять додатковий, регулярний вклад у локальне поле напружень в околі вершини тріщини, відомий як T -напруження, який за необхідності може бути внесений в асимптотику (2.1) для дослідження його впливу на поворот тріщини, оскільки існують висновки про важливу роль T -напружень у стабільності поширення тріщини [33].

Параметри зони передруйнування при дії змішаного навантаження без урахування T -напружень зображено на рис. 2 – 4. Аналіз частинних випадків навантаження (зсув, двовісний розтяг) здійснено в [38].

При розрахунках коефіцієнти Пуассона з'єднаних матеріалів вважались однаковими і рівними $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$; окремий чисельний аналіз показав, що їх вплив на параметри зони є незначним. Зовнішнє навантаження характеризували безрозмірним модулем вектора напружень $f = \sqrt{p^2 + q^2} / \sigma_1$ і відношенням q/p , яке характеризує конфігурацію навантаження.

Залежність відносної довжини l/L і кута нахилу α зони передруйнування від величини зовнішнього навантаження для $E_1/E_2 = 0,5$ зображено на рис. 2, а і б, відповідно; криві 1–4 відповідають наступним відношенням зсувних і відривних навантажень: 1 – $q/p = -1$; 2 – $q/p = -0,5$; 3 – $q/p = 0$; 4 – $q/p = 0,5$. Згідно з рис. 2, а, довжина зони нелінійно зростає зі збільшенням модуля навантаження; швидкість зростання розмірів зони і самі розміри при однаковому модулі навантаження більші для від'ємної дотичної компоненти навантаження ($\tau_{xy} = q < 0$, $E_1/E_2 < 1$). Рис. 2, б показує, що кут нахилу зони передруйнування є відносно великим за наявності від'ємної дотичної складової ($\tau_{xy} = q < 0$) зовнішнього навантаження.

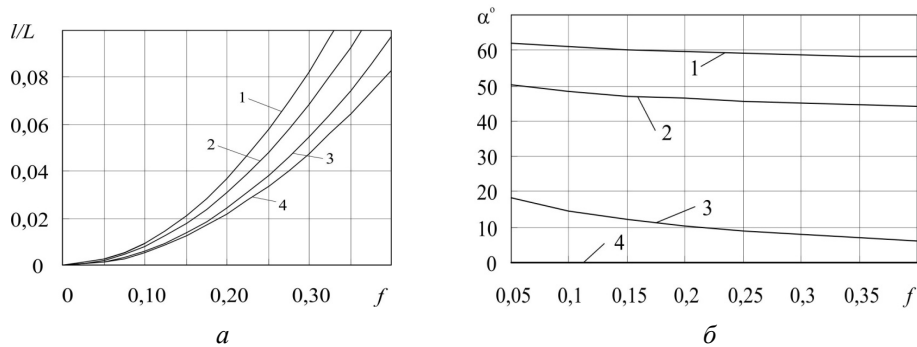


Рис. 2

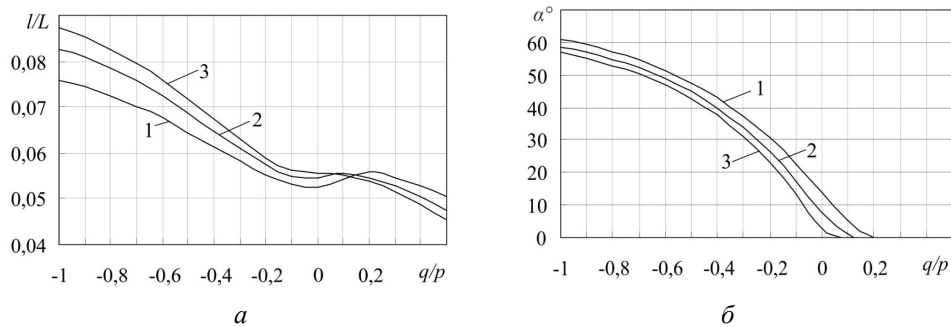


Рис. 3

Параметри зони передруйнування суттєво залежать від конфігурації зовнішнього навантаження, заданого величиною q/p (рис. 3, $f = 0,3$, криві: 1 – $E_1/E_2 = 0,2$; 2 – $E_1/E_2 = 0,5$; 3 – $E_1/E_2 = 0,8$). Як випливає з рис. 3, а, довжина зони немонотонно зменшується зі збільшенням відношення q/p , зазнаючи локального максимуму при $q/p \sim 0,1$. В околі цього максимуму кут нахилу зони передруйнування стає рівним 0 (рис. 3, б). При збільшенні вкладу від'ємного дотичного навантаження кут нахилу суттєво зростає. Кут нахилу повільно зменшується при збільшенні модуля навантаження та при збільшенні вкладу відривного нормального напруження $\sigma_x = p > 0$, обертаючись в 0 при зростанні вкладу додатної дотичної компоненти напруження

(рис. 3, б), що відповідає поширенню зони передруйнування уздовж межі поділу середовищ.

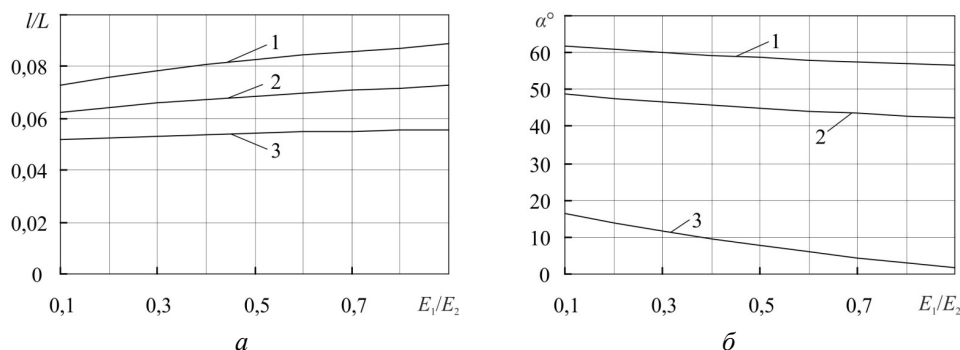


Рис. 4

Довжина зони передруйнування слабо залежить від співвідношення пружних параметрів з'єднаних матеріалів (відношення їх модулів Юнга E_1/E_2), повільно зростаючи при їх зближенні (рис. 4, а), тоді як кут нахилу зони зменшується (рис. 4, б). Криві 1 – 3 на рис. 4 відповідають модулю вектора напружень $f = 0,3$ і відношенням зсувних навантажень до відривних: $q/p = -1$ (1); $q/p = -0,5$ (2); $q/p = 0$ (3).

Таблиця 1

$\frac{E_1}{E_2}$	$\frac{q}{p}$	-1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0	0,2	0,4
0,2	α°	61,1	57,1	51,4	43,0	30,5	13,9	0	0
	λ_1	-0,4566	-0,4574	-0,4590	-0,4624	-0,4703	-0,4853	-0,5	-0,5
	λ_2	$-3,02 \cdot 10^{-2}$	$-2,45 \cdot 10^{-2}$	$-1,76 \cdot 10^{-2}$	$-9,71 \cdot 10^{-2}$	$-2,85 \cdot 10^{-3}$	$-1,37 \cdot 10^{-4}$	0	0
0,5	α°	58,7	54,7	48,9	40,0	26,4	7,8	0	0
	λ_1	-0,4804	-0,4807	-0,4814	-0,4831	-0,4873	-0,4950	-0,5	-0,5
	λ_2	$-5,67 \cdot 10^{-2}$	$-4,64 \cdot 10^{-2}$	$-3,33 \cdot 10^{-2}$	$-1,75 \cdot 10^{-2}$	$-4,01 \cdot 10^{-3}$	$-3,45 \cdot 10^{-5}$	0	0
0,8	α°	56,9	52,9	46,9	37,7	23,2	2,9	0	0
	λ_1	-0,4939	-0,4940	-0,4942	-0,4948	-0,4963	-0,4995	-0,5	-0,5
	λ_2	$-7,48 \cdot 10^{-2}$	$-6,15 \cdot 10^{-2}$	$-4,36 \cdot 10^{-2}$	$-2,19 \cdot 10^{-2}$	$-3,89 \cdot 10^{-3}$	$-1,06 \cdot 10^{-6}$	0	0

Поява зони передруйнування змінює НДС біля вершини тріщини: на відстанях, значно менших за розміри зони, він визначатиметься тепер коренями рівняння (2.5), які у смузі $-1 < \text{Re } x < 0$ відрізнятимуться від комплексно-спряжених показників сингулярності $-1/2 \pm i\omega$ моделі розкритої тріщини без зони. Числові розрахунки коренів рівняння (2.5) на інтервалі $(-1, 0)$ для $f = 0,3$, наведені в табл. 1, показують, що рівняння (2.5) має на інтервалі $(-1, 0)$ один дійсний корінь λ_1 , який близький до $-1/2$ і визначає сингулярну поведінку напружень при наближенні до вершини, і другий дійсний корінь λ_2 , близький до нуля, вплив якого на рівень напружень є менш суттєвим. Характер сингулярності напружень, який визначається показником λ_1 , наближається до кореневої ($\lambda_1 \rightarrow -1/2$) при зближенні пружних параметрів матеріалів ($E_1/E_2 \rightarrow 1$). При неперервному зростанні дотичної складової зовнішнього напруження від від'ємних значень до додатних показник сингулярності наближається до сталого значення $-1/2$, яке відповідає поширенню зони передруйнування вздовж межі поділу ($\alpha = 0^\circ$).

З появою зони передруйнування відбувається часткове розвантаження матеріалу біля вершини тріщини, що сприяє контакту берегів. Дійсно, розкриття тріщини (2.6) біля її вершини виявляється від'ємним та замість фізично неможливого взаємного перетину берегів призводить до їх контакту. Прирівнюючи розкриття тріщини (2.6) до нуля, визначаємо з рівняння $\langle u_\theta(s_0, \theta) \rangle \Big|_{\theta = \pm \pi} = 0$ орієнтовні розміри s_0 контактної зони після утворення зони передруйнування. Результати розрахунків s_0 наведено в табл. 2 разом з відповідною довжиною зони передруйнування l і довжиною s мало-масштабної області контакту, розрахованою за методикою [5] для випадку відсутності зони передруйнування при однакових умовах навантаження.

Таблиця 2

$\frac{E_1}{E_1}$	$\frac{q}{p}$	-1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0	0,2
0,2	s_0/L	$5,52 \cdot 10^{-3}$	$3,29 \cdot 10^{-3}$	$1,63 \cdot 10^{-3}$	$6,12 \cdot 10^{-4}$	$1,56 \cdot 10^{-4}$	$1,54 \cdot 10^{-5}$	0
	l/L	$7,59 \cdot 10^{-2}$	$7,25 \cdot 10^{-2}$	$6,75 \cdot 10^{-2}$	$6,12 \cdot 10^{-2}$	$5,53 \cdot 10^{-2}$	$5,28 \cdot 10^{-2}$	$5,59 \cdot 10^{-2}$
	s/L	$1,59 \cdot 10^{-6}$	$2,63 \cdot 10^{-7}$	$2,95 \cdot 10^{-8}$	$2,18 \cdot 10^{-9}$	$1,10 \cdot 10^{-10}$	$4,42 \cdot 10^{-12}$	$1,77 \cdot 10^{-13}$
0,5	s_0/L	$2,98 \cdot 10^{-3}$	$1,57 \cdot 10^{-3}$	$6,37 \cdot 10^{-4}$	$1,71 \cdot 10^{-4}$	$2,46 \cdot 10^{-5}$	$6,76 \cdot 10^{-7}$	0
	l/L	$8,26 \cdot 10^{-2}$	$7,85 \cdot 10^{-2}$	$7,24 \cdot 10^{-2}$	$6,48 \cdot 10^{-2}$	$5,75 \cdot 10^{-2}$	$5,45 \cdot 10^{-2}$	$5,48 \cdot 10^{-2}$
	s/L	$3,37 \cdot 10^{-12}$	$8,86 \cdot 10^{-14}$	$1,07 \cdot 10^{-15}$	$5,56 \cdot 10^{-18}$	$1,35 \cdot 10^{-20}$	$2,04 \cdot 10^{-23}$	$3,1 \cdot 10^{-26}$
0,8	s_0/L	$1,73 \cdot 10^{-3}$	$8,13 \cdot 10^{-4}$	$2,68 \cdot 10^{-4}$	$4,50 \cdot 10^{-5}$	$2,27 \cdot 10^{-6}$	0	0
	l/L	$8,74 \cdot 10^{-2}$	$8,27 \cdot 10^{-2}$	$7,60 \cdot 10^{-2}$	$6,73 \cdot 10^{-2}$	$5,89 \cdot 10^{-2}$	$5,53 \cdot 10^{-2}$	$5,39 \cdot 10^{-2}$
	s/L	$9,86 \cdot 10^{-35}$	$1,74 \cdot 10^{-39}$	$2,94 \cdot 10^{-45}$	$3,97 \cdot 10^{-52}$	$5,39 \cdot 10^{-60}$	$1,78 \cdot 10^{-68}$	$5,88 \cdot 10^{-77}$

Порівняння s і s_0 вказує на значне зростання розмірів області контакту внаслідок появи зони передруйнування для конфігурацій навантаження з $q/p > -1$ від екстремально малих значень, несумісних з фізичним сенсом, до значень, цілком прийнятних з фізичної точки зору. З іншого боку, величина s_0 для обраних конфігурацій навантаження виявляється на декілька порядків меншою від довжини зони передруйнування, що обґрунтовує прийняття в моделі припущення $s \ll l$. Проте, визначення справжнього значення довжини області контакту берегів передбачає розв'язання окремої задачі про контактну зону при наявності більшої за неї зони передруйнування. Ця задача розглядається у наступному пункті роботи.

Таблиця 3

$\psi_0, ^\circ$	6,584	32,26	53,29	71,79	86,93
q/p	-0,51	-1,06	-1,56	-2,51	-11,67
$\alpha_{\text{exp}}, ^\circ$ [62]	59,5 (60,0; 59,0)	65,3 (63,5; 60,0; 72,5)	72,2 (71,5; 77,0; 68,0)	72,1 (78,0; 71,0; 71,5, 68,0)	77,8 (75,5; 80,0)
$\alpha, ^\circ$	49,4	63,3	68,7	73,4	79,8

Отримані числові значення кута нахилу зони передруйнування в цілому узгоджуються з експериментальними даними щодо кутів повороту міжфазної тріщини в умовах розтягу. Так, у роботі [62] виконано експериментальне дослідження повороту тріщини від межі поділу епоксидного клею SIA 654ETG ($E_1 = 3,6949$ ГПа, $\nu_1 = 0,35$) і холоднокатаної сталі ($E_2 = 207$ ГПа, $\nu_2 = 0,285$). В табл. 3 експериментальні значення кута повороту α_{exp} (усереднені та виміряні) для різних фазових кутів навантаження

ψ_0 , визначених за відношенням швидкостей виділення енергії для мод навантаження II і I у напрямку межі поділу $\theta = 0$ ($\psi_0 = \arctg(G_{II}(0)/G_I(0))$), порівнюються з кутами нахилу зони передруйнування α , розрахованими за умовою максимуму накопиченої в зоні потенціальної енергії (2.3) для навантаження $f = 0,3$ з відповідними відношеннями q/p , що визначались за формулою $\frac{q}{p} = -\frac{\operatorname{tg} \sqrt{\psi_0} + 2\omega}{1 - 2\omega \operatorname{tg} \sqrt{\psi_0}}$. Зважаючи на значний

розкид експериментальних результатів та їх малу вибірку для кожного фазового кута навантаження, можна зробити висновок про хорошу узгодженість з ними розрахованих значень α в рамках розвинутої моделі.

Гіршою виявляється узгодженість аналітичних розрахунків кута нахилу зони передруйнування α з експериментальними значеннями кута повороту тріщини α_{exp} від межі поділу двох спільно затверділих листів поліуретану Solithane 113 з різними пропорціями основного полімеру і зшиваючого (crosslinking) агенту [31] (табл. 4). Пружні характеристики для матеріалу поліуретан/зшиваючий агент у пропорції 45/55 дорівнювали $E_1 = 1,23$ МПа, $\nu_1 = 0,499$, а у пропорції 55/45 – $E_2 = 3,19$ МПа, $\nu_2 = 0,499$. Локальний фазовий кут навантаження в експериментах визначався як $\gamma = \arctg(K_2/K_1)$, йому відповідає параметр $\frac{q}{p} = \frac{\operatorname{tg} \gamma + 2\omega}{1 - 2\omega \operatorname{tg} \gamma}$. Значні розбіжності між

вимірними і прогнозованими кутами повороту можуть бути спричинені пластичністю поліуретану, внаслідок якої механізм його руйнування є не крихким, а квазікрихким, що суперечить вихідним припущенням розглянутої моделі і вимагає інших підходів для моделювання зони передруйнування.

В [61] в умовах розтягу отримано, що кут відхилення тріщини від межі поділу з'єднання епоксидна смола – сталь знаходиться в інтервалі $16^\circ < \alpha < 18^\circ$, а для з'єднання епоксидна смола – епоксидна смола, зміцнена скляними кульками (25% об'ємного вмісту), цей кут складає $\alpha = 6^\circ$. В обох випадках поворот тріщини відбувався у бік менш міцного матеріалу – епоксидної смоли, причому максимальний кут відхилення тріщини від межі поділу спостерігався для з'єднання епоксидна смола – сталь, відношення модулів Юнга яких значно менше відношення модулів Юнга матеріалів другого з'єднання. За порядком величини експериментальні значення кутів повороту узгоджуються з розрахованими кутами нахилу зони передруйнування для $q/p = 0$ (рис. 3, б, криві 1, 2); строге порівняння не вдається зробити через відсутність відомостей про значення пружних характеристик з'єднаних матеріалів.

Таблиця 4

$\gamma, ^\circ$	-54	-46	-41	-33	-27	-24	-18	-14
q/p	-1,376	-1,036	-0,869	-0,649	-0,509	-0,445	-0,325	-0,249
$\alpha_{\text{exp}},$ [61]	≈ 49	≈ 48	≈ 47	≈ 41	≈ 34	≈ 31	≈ 15	≈ 0
$\alpha, ^\circ$	63,4	59,2	56,2	50,4	44,9	41,6	33,9	27,7

У статті [30] також при переважанні розтягувальних напружень визначено кут повороту тріщини від поверхні поділу кераміки Si3N4 і сталі S45C. Цей кут в залежності від довжини тріщини лежить в інтервалі $10^\circ < \alpha < 40^\circ$, що якісно і кількісно за порядком величини узгоджується зі значеннями кута нахилу зони передруйнування, представленими на рис. 3, б, рис. 4, б для $q/p = 0$. Відображені на цих же рисунках результати розрахунків показують, що збільшення вкладу у навантаження від'ємних дотичних напружень призводять до істотного збільшення кутів нахилу зони передруйнування. Аналогічні висновки отримано в роботі [56] для кута повороту міжфазної

тріщини при несиметричному навантаженні у випробуваннях міцності зразків з тріщиною на межі поділу з'єднання алюмінію і нікелю.

2.2. Вплив зони передруйнування на контакт берегів міжфазної тріщини. Виконаний у п. 2.1 розрахунок параметрів бічної зони передруйнування в припущенні малості розмірів області контакту берегів показав, що з появою зони змінюється НДС в околі вершини тріщини. Це, в свою чергу, повинно впливати на довжину контактної зони, на що вказує попередня оцінка її значення у п. 2.1 (табл. 2). Дослідимо цей вплив в рамках комплексної моделі, описаної у п. 1, приймаючи в ній $l = \infty$ і $d = 0$ та формулюючи замість (1.6) умову на нескінченності у вигляді вимоги зрощування шуканого розв'язку з асимптотикою розв'язку аналогічної задачі без контактної зони (п. 2.1) так, що згідно (2.6) маємо:

$$\theta = \pm\pi, \quad r \rightarrow \infty: \quad \left\langle \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right\rangle \sim -\frac{4(1-\nu_1^2)}{E_1} \sigma_1 \left\{ C_0 + \sum_i C_i r^{\lambda_i} \right\},$$

де λ_i – корені рівняння (2.5) ($\text{Re } \lambda_i > -1$). Також передбачається така конфігурація зовнішнього навантаження, заданого комплексним коефіцієнтом інтенсивності напружень $K = K_1 + iK_2$, яка забезпечує стискальний характер нормального напруження на берегах тріщини ($\sigma_\theta(r, \pm\pi) < 0$ для $r < s$) після утворення зони передруйнування, що необхідно для контакту берегів. Враховуємо також, що в кінці контактної зони мають місце сингулярності виду

$$\sigma_\theta(r, \pm\pi) \sim M_1(s-r)^{-1-\lambda} \quad (r \rightarrow s-0); \quad \left. \frac{E_1}{4(1-\nu_1^2)} \left\langle \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right\rangle \right|_{\theta=\pm\pi} \sim M_2(r-s)^{-1-\lambda} \quad (r \rightarrow s+0),$$

де M_1, M_2 – деякі сталі; $\lambda = -\pi^{-1} \arctg(\mu\beta)^{-1}$; β – біматеріальний параметр Дандерса. Відповідна крайова задача розв'язана за допомогою методу Вінера – Гопфа в [23]. Її розв'язок приводить до рівняння для визначення довжини зони:

$$\frac{C_0}{Q^+(-1)G_1^+(-1)} + \sum_i \frac{C_i s^{\lambda_i}}{Q^+(-1-\lambda_i)G_1^+(-1-\lambda_i)} = 0, \quad (2.7)$$

$$\text{де } Q^+(p) = \frac{\Gamma(1-p)}{\Gamma(-\lambda-p)}; \quad G_1^+(p) = \exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\ln G_1(z)}{z-p} dz \right] \quad (\text{Re } p < 0);$$

$$G_1(p) = \frac{2 \sin p\pi \cdot D(p)}{[(e+\kappa_1)+(1+e\kappa_2)](\text{ctg } p\pi - \mu\beta)D_1(p)}; \quad D(p) = \bar{D}(p) + \mu\hat{D}(p);$$

$$\bar{D}(p) = 2e(1+\kappa_2)(1-e)(1+e\kappa_2) \cos p\pi \Delta_1(p) -$$

$$-(1+\kappa_1) \left[2(1-e)^2 \bar{\Delta}_1(p) + e^2(1+\kappa_2)^2 \bar{\Delta}_2(p) + e(1+\kappa_2)(1+\kappa_1) \bar{\Delta}_3(p) + \right.$$

$$\left. + 2e(1+\kappa_2)(1-e) \bar{\Delta}_4(p) + (1-e)(1+\kappa_1) \bar{\Delta}_5(p) + (1+\kappa_1)^2 \bar{\Delta}_6(p) \right];$$

$$\bar{\Delta}_1(p) = 2p^2 \sin^2 \alpha \sin^2 p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha \sin p\pi \cos p(\pi - 2\alpha) -$$

$$-2 \sin p\alpha \left[\sin^2 \alpha \sin p\alpha - \sin p\pi \cos p(\pi - \alpha) \right];$$

$$\begin{aligned}
\bar{\Delta}_2(p) &= 4p^2 \sin^2 \alpha \cos^2 p\alpha - p \sin 2\alpha \sin 2p\alpha + \cos^2 \alpha - \\
&\quad - \sin p(\pi - \alpha) [\sin p(\pi + \alpha) + 2 \cos p\pi \sin p\alpha]; \\
\bar{\Delta}_3(p) &= p \sin 2\alpha \sin 2p\alpha - 2(\sin^2 p\pi - \cos^2 p\alpha + \sin^2 \alpha \cos 2p\alpha); \\
\bar{\Delta}_4(p) &= 2p^2 \sin^2 \alpha [\sin^2 p(\pi - \alpha) + \cos^2 p\alpha] - \\
&\quad - p \sin 2\alpha [\sin 2p\alpha + 0,5 \sin 2p(\pi - \alpha)] + 2 \cos^2 \alpha \sin^2 p\alpha; \\
\bar{\Delta}_5(p) &= p \sin 2\alpha \sin 2p\alpha - 4 \sin p\alpha [\sin p\pi \cos p(\pi - \alpha) - \sin^2 \alpha \sin p\alpha]; \\
\bar{\Delta}_6(p) &= \cos^2 \alpha - \sin^2 p(\pi - \alpha); \\
\hat{D}(p) &= -2(1-e)(1+e\kappa_2)(2-e+e\kappa_2) \sin p\pi \Delta_1(p) + \\
&\quad + (1+\kappa_1) [2(1-e)(1+\kappa_1) \hat{\Delta}_1(p) - 0,5(1+\kappa_1)^2 \hat{\Delta}_2(p) - 2(1-e)^2 \hat{\Delta}_3(p) + \\
&\quad + e^2(1+\kappa_2)^2 \hat{\Delta}_4(p) + 2e(1+\kappa_2)(1-e) \hat{\Delta}_5(p) + (1+\kappa_1)e(1+\kappa_2) \hat{\Delta}_6(p)]; \\
\hat{\Delta}_1(p) &= p \sin \alpha [\cos \alpha - \sin \alpha \sin 2p\alpha] + \sin 2\alpha \sin^2 p\alpha + \\
&\quad + \sin p(\pi - \alpha) [\cos p\pi \cos p\alpha + 3 \sin p\pi \sin p\alpha]; \\
\hat{\Delta}_2(p) &= \sin 2p(\pi - \alpha) + \sin 2\alpha; \\
\hat{\Delta}_3(p) &= -p^2 \sin^2 \alpha [2 \sin 2p\alpha + \sin 2p(\pi - \alpha)] + p \sin 2\alpha [2 \sin^2 p\alpha - \sin^2 p(\pi - \alpha)] - \\
&\quad - p \sin^2 \alpha \sin 2p\alpha + \sin p\alpha [6 \sin p\pi \sin p(\pi - \alpha) + \sin 2\alpha \sin p\alpha]; \\
\hat{\Delta}_4(p) &= 2p^2 \sin^2 \alpha \sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha \cos 2p\alpha - 0,5 \sin 2\alpha + \\
&\quad + \sin p(\pi - \alpha) [\cos p\pi \cos p\alpha - 3 \sin p\pi \sin p\alpha]; \\
\hat{\Delta}_5(p) &= p^2 \sin^2 \alpha [\sin 2p(\pi - \alpha) + 3 \sin 2p\alpha] + p \sin^2 \alpha \sin 2p\alpha + \\
&\quad + 0,5 p \sin 2\alpha [1 + 2 \sin^2 p(\pi - \alpha) - 6 \sin^2 p\alpha] - \sin 2\alpha \sin^2 p\alpha + \\
&\quad + \sin p(\pi - \alpha) [\cos p\pi \cos p\alpha - 7 \sin p\pi \sin p\alpha];
\end{aligned}$$

$$\widehat{\Delta}_6(p) = 2p \sin \alpha [\cos \alpha - \sin \alpha \sin 2p\alpha] - \sin 2\alpha \cos 2p\alpha + 4 \sin p(\pi - \alpha) \sin p\pi \sin p\alpha.$$

Знайдено загальний вигляд тензора напружень біля вершини тріщини в матеріалах з'єднання у вигляді розвинень за степенями r :

$$\sigma_{mn}(r, \theta) = \sigma_{mn}^0(\theta) + \sum_k g_{mn}(\theta, \lambda'_k) r^{\lambda'_k} \quad (r \rightarrow 0),$$

де $\sigma_{mn}^0(\theta)$, $g_{mn}(\theta, \lambda'_k)$ – відомі функції, λ'_k – корені рівняння

$$D(-1-x) = 0, \quad (2.8)$$

що задовольняють умову $\operatorname{Re} \lambda'_k > -1$. Зокрема, дотичне напруження у зоні передруйнування біля вершини тріщини дорівнює

$$\tau_{r\theta}(r, \alpha) = 2(1 + \kappa_1) \sigma_1 \left[\tilde{C}_0 + \sum_k \tilde{C}_k r^{\lambda'_k} \right] \quad (r \ll s); \quad (2.9)$$

$$\tilde{C}_0 = -\frac{C_0 S'(-1)}{\pi D(-1)};$$

$$\tilde{C}_k = \frac{S(-1-\lambda'_k) Q^+(-1-\lambda'_k) G_1^+(-1-\lambda'_k)}{\lambda'_k \sin \lambda'_k \pi D'(-1-\lambda'_k)} s^{-\lambda'_k} \sum_i \frac{C_i s^{\lambda_i - \lambda'_k}}{Q^+(-1-\lambda_i) G_1^+(-1-\lambda_i) (\lambda_i - \lambda'_k)} \frac{\lambda_i}{(\lambda_i - \lambda'_k)};$$

$$S(p) = S_0(p) + \mu S_1(p);$$

$$S_0(p) = \left[(1 + \kappa_1)^2 - 4(1 + \kappa_1)(1 - e) \sin^2 p\alpha - 4(1 + e\kappa_2)(1 - e)t_1(p) \right] s_{01}(p) +$$

$$+ e(1 + \kappa_2) \left[(1 + \kappa_1)s_{02}(p) - e(1 + \kappa_2)s_{03}(p) - 2(1 - e)t_2(p)t_3(p) \right];$$

$$s_{01}(p) = (p + 1) \sin \alpha \sin p(\pi - \alpha) \sin p\pi;$$

$$s_{02}(p) = 2(p + 1) \sin \alpha \cos p(\pi + \alpha) \sin p\alpha \sin p(\pi - \alpha) - d_1(p) \sin(p + 1)\alpha;$$

$$s_{03}(p) = 2p^3 \sin^3 \alpha \cos p\alpha - p^2 \sin^2 \alpha \sin(p - 1)\alpha - p \sin \alpha \sin p\pi \sin p(\pi - \alpha) +$$

$$+ \sin p\alpha \sin p(\pi - \alpha) \sin [p(\pi - \alpha) - \alpha];$$

$$S_1(p) = 4(1 + e\kappa_2)(1 - e) \sin p\pi t_1(p)t_4(p) +$$

$$+ e(1 + \kappa_2)t_2(p) \left[(1 + \kappa_1) \cos(p + 1)\alpha + 2(1 + e\kappa_2)(p + 1) \sin \alpha \sin p\alpha \right] -$$

$$-(1 + \kappa_1) \left[2e(1 + \kappa_2) \sin p\alpha \cos p(\pi + \alpha) - 4(1 - e) \sin p\pi \sin^2 p\alpha + (1 + \kappa_1) \sin p\pi \right] t_4(p) +$$

$$+ e^2(1 + \kappa_2)^2 s_{11}(p);$$

$$s_{11}(p) = p^2 \sin^2 \alpha \cos(p + 1)\alpha + p \sin \alpha \cos p(\pi - \alpha) \sin p(\pi - 2\alpha) -$$

$$- \sin p\alpha \sin p(\pi - \alpha) \cos [p(\pi - \alpha) + \alpha];$$

$$t_1(p) = p^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 p\alpha; \quad t_2(p) = p^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 p(\pi - \alpha);$$

$$t_3(p) = p \sin \alpha \cos p\alpha - \cos \alpha \sin p\alpha; \quad t_4(p) = p \sin \alpha \cos p(\pi - \alpha) + \cos \alpha \sin p(\pi - \alpha);$$

$$S'(p) = \partial S(p) / \partial p; \quad D'(p) = \partial D(p) / \partial p.$$

Визначення параметрів контактної зони в рамках розглянутої вище моделі здійснюється у два етапи. Спочатку за п. 2.1 розраховуються орієнтація і довжина зони передруйнування та напруження і деформації в околі вершини тріщини після її появи. Отримані результати використовуються далі для розрахунку за формулами (2.7) – (2.9) довжини контактної зони, показника сингулярності напружень та інших параметрів НДС біля вершини тріщини. Аналогічно п. 2.1, розглядатимемо як приклад кусково-однорідну площину з міжфазною тріщиною довжиною L , навантажену на нескінченності однорідними нормальним і дотичним зусиллями.

Результати числових розрахунків параметрів контактної зони відображено на рис. 5 – 7 для окремих параметрів задачі ($\nu_1 = \nu_2 = 0,3$). Рис. 5, а і рис. 5, б відображають залежність довжини зони від безрозмірного параметра навантаження f і від його конфігурації q/p , відповідно; при цьому $\mu = -0,5$, а криві 1 – 3 відповідають відношенням модулів Юнга з'єднаних матеріалів: 1 – $E_1/E_2 = 0,2$; 2 – $E_1/E_2 = 0,5$; 3 – $E_1/E_2 = 0,8$. Згідно з рис. 5, а завдяки утворенню зони передруйнування у контактній зоні з'являється залежність довжини від модуля навантаження, якої немає при відсутності ЗП [5]: розмір області контакту берегів зростає зі збільшенням безрозмірного параметра навантаження $f = \sqrt{p^2 + q^2} / \sigma_1$ (при $p = -q$), причому зростання виявляється тим більшим, чим менше відношення E_1 / E_2 .

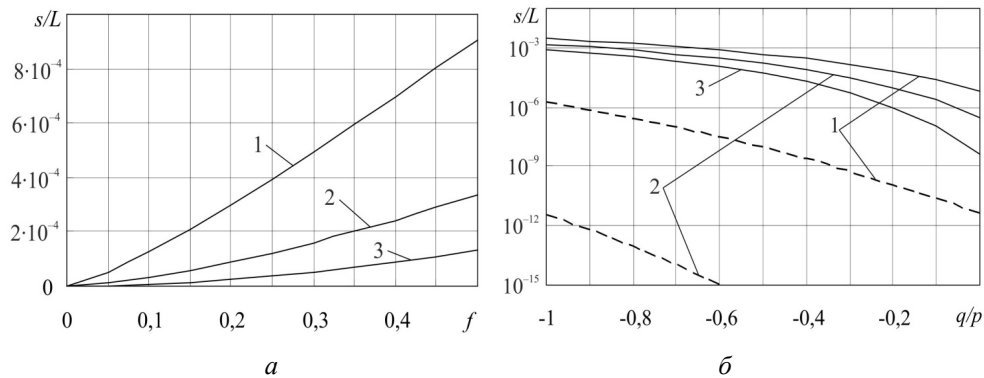


Рис. 5

З появою бічної зони передруйнування відбувається зміна характеру залежності розмірів контактної зони від конфігурації навантаження, заданої відношенням q/p . Якщо при відсутності зони передруйнування довжина контактної зони експоненціально зростає зі збільшенням вкладу дотичного напруження (рис. 5, б, пунктирні лінії), то при наявності зони передруйнування швидкість зростання довжини помітно сповільнюється (рис. 5, б, суцільні лінії).

На розміри контактної зони суттєво впливає відношення модулів Юнга з'єднаних матеріалів (рис. 6, де $\mu = -0,5$, $f = 0,3$; криві: 1 – $q/p = -1$, 2 – $q/p = -0,5$, 3 – $q/p = 0$): вона майже експоненціально спадає при наближенні E_1 / E_2 до одиниці. В той же час вплив коефіцієнта тертя на параметри зони є незначним (рис. 7, $f = 0,3$, $q/p = -1$; криві: 1 – $E_1 / E_2 = 0,2$; 2 – $E_1 / E_2 = 0,5$; 3 – $E_1 / E_2 = 0,8$): з посиленням тертя її довжина повільно зростає.

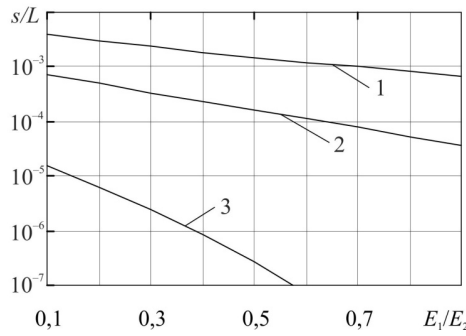


Рис. 6

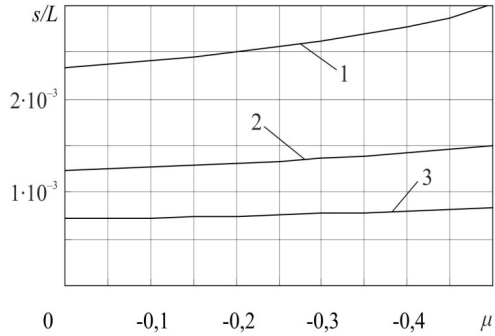


Рис. 7

Одночасне утворення зони передруйнування і маломасштабної контактної зони суттєво змінює НДС в околі вершини тріщини. На рис. 8 приведено графіки залежності показників сингулярності напружень для $\mu = -0,5$; $f = 0,3$; $q/p = -1$ за наявності лише контактної зони (λ), лише зони передруйнування (λ_1, λ_2), а також за наявності одночасно як зони передруйнування, так і маломасштабної контактної зони (λ'_1, λ'_2). Порівняння λ і λ_1 з

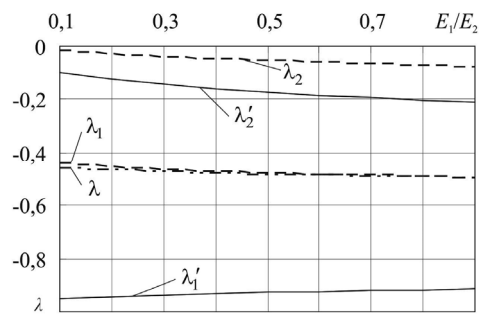


Рис. 8

λ'_1 показує, що одночасне існування обох зон призводить до підвищення концентрації напружень в околі вершини ($\lambda'_1 < \lambda_1, \lambda$).

Таким чином, поява зони передруйнування біля вершини тріщини при переважаних відривних навантаженнях обумовлює суттєве збільшення довжини контактної зони і підвищення рівня напружень. Розкриття тріщини у її вершині за одночасного існування зони передруйнування і області контакту берегів внаслідок граничних умов (1.2), (1.5) ($\langle u_r(0, \alpha) \rangle = \langle u_\theta(0, \pm \pi) \rangle = 0$) відсутнє, що унеможливорює подальше поширення тріщини і породжує питання про природу її зрушення. Відповідно до вихідних положень комплексної моделі (п. 1) розв'язання цього протиріччя вбачається у деструкції матеріалу біля вершини тріщини в зоні передруйнування, чому якраз і сприяє високий рівень напружень.

2.3. Параметри області деструкції матеріалу у зоні передруйнування в умовах переважаних відривних навантажень. Для розв'язання проблеми природи зрушення міжфазної тріщини, виявленої у п. 2.2, розглянемо в рамках комплексної моделі задачу про параметри зони деструкції у випадку, коли її розміри значно менші, ніж розміри області контакту берегів. Для цього в крайових умовах комплексної моделі (п. 1) прийнемо $l = s = \infty$ та представимо зону прямолінійним розрізом довжиною d , на якому зазнає розриву не лише нормальне, але і дотичне переміщення, а дотичне напруження дорівнює опору зсуву першого матеріалу τ_1 . Вимагаючи, щоб на відстанях $d \gg r \gg s$ розв'язок задачі про зону деструкції переходив у асимптотику розв'язку задачі про контакт берегів (п. 2.2) при $r > 0$, згідно з (2.9) формулюємо умову на нескінченності:

$$\theta = \alpha, \quad r \rightarrow \infty: \quad \tau_{r\theta} = 2(1 + \kappa_1)\sigma_1 \left[\tilde{C}_0 + \sum_k \tilde{C}_k r^{\lambda'_k} \right] + o(1/r).$$

Постановка задачі включає також умови (1.8). Розв'язок відповідної крайової задачі отримано в [22]. Він призводить до рівняння для розрахунку довжини області деструкції:

$$\sum_k \frac{\tilde{C}_k d^{\lambda'_k} K^+(-1-\lambda'_k) H^+(-1)}{(1+\lambda'_k) K^+(-1) H^+(-1-\lambda'_k)} = \frac{\tau_1}{2(1+\kappa_1)\sigma_1} - \tilde{C}_0,$$

$$\text{де } H^+(p) = \exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\ln H(z)}{z-p} dz \right] \quad (\operatorname{Re} p < 0);$$

$$H(p) = \frac{\cos p\pi D_2(p)}{2 \sin^2 p\pi D_1(p)}; \quad D_2(p) = D_{20}(p) - \mu D_{21}(p);$$

$$\begin{aligned} D_{20}(p) = & 0,5(1+\kappa_1)e(1+\kappa_2)s_1(p)t_5(p) - s_2(p)s_0(p) + \\ & + e(1+\kappa_2)\cos p\pi \left[-4e^2(1+\kappa_2)^2 t_1(p)t_2(p) - (1+\kappa_1)^2 t_6(p)t_7(p) + \right. \\ & \left. + 2(1+\kappa_1)e(1+\kappa_2)\cos p\pi s_3(p) \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{21}(p) = & 4 \sin p\pi s_4(p) \left[e^2(1+\kappa_2)^2 t_1(p) + s_0(p) \right] + \\ & + 4(1+\kappa_1)e(1+\kappa_2) \left[\cos p\pi \sin 2p\alpha s_4(p) + e(1+\kappa_2)p(p-1)\sin^2 \alpha \sin p(\pi-2\alpha) \right]; \end{aligned}$$

$$s_0(p) = (1+\kappa_1)^2 - 2(1+\kappa_1)[e(1+\kappa_2) + 2(1-e)]\sin^2 p\alpha - [e(1+\kappa_2) + 2(1-e)]^2 t_1(p);$$

$$s_1(p) = 2(1+\kappa_1)\cos p\pi t_6(p) - 4e(1+\kappa_2)\sin p\pi t_2(p);$$

$$s_2(p) = 2(1+\kappa_1)\sin p\pi t_6(p) + 4e(1+\kappa_2)\cos p\pi t_2(p);$$

$$s_3(p) = 2 \sin p\alpha \sin p(\pi-\alpha) + p \sin 2\alpha \sin p(\pi-2\alpha) - 2p^2 \sin^2 \alpha \cos p(\pi-2\alpha);$$

$$s_4(p) = (1+\kappa_1)t_8(p) - [e(1+\kappa_2) + 2(1-e)]t_2(p);$$

$$t_5(p) = p \sin 2\alpha - \sin 2p\alpha; \quad t_6(p) = p \sin 2\alpha - \sin 2p(\pi-\alpha);$$

$$t_7(p) = p \sin 2\alpha + \sin 2p\alpha; \quad t_8(p) = p \sin^2 \alpha - \sin^2 p(\pi-\alpha).$$

Поява області деструкції змінює НДС біля вершини тріщини, який тепер характеризується показником сингулярності напружень λ_{d1} , що визначається як найменший з інтервалу $(-1, 0)$ корінь рівняння

$$D_2(-1-x) = 0. \quad (2.10)$$

Якщо за відсутності області деструкції розкриття тріщини в її вершині дорівнює нулю (п. 2.2), то її поява призводить до ненульового зсувного зміщення берегів у вер-

шині δ , яке дорівнює $\lim_{x \rightarrow 0} |u_x(x, y=0)|$ і пов'язане зі стрибком дотичного переміщення співвідношенням $\delta = |u_r(0, \alpha) / \cos \alpha|$. Останнє знайдено в ході розв'язування задачі та призводить до розрахункового виразу:

$$\delta = \frac{4(1-\nu_1^2)\sigma_1}{E_1} \left| \frac{2(1+\kappa_1)d}{\sqrt{\pi H(0) \cos \alpha}} \sum_k \frac{\tilde{C}_k d^{\lambda'_k} K^+(-1-\lambda'_k)}{H^+(-1-\lambda'_k)} \frac{\lambda'_k}{(1+\lambda'_k)^2} \right|. \quad (2.11)$$

Зрушення тріщини відбудеться при досягненні величиною δ деякого критичного значення δ_1 (граничної витяжки за визначенням [14]), яке є характеристикою міцності першого матеріалу. Припускаючи малість довжини зони деструкції порівняно з довжиною контактної зони при будь-якому рівні навантажень аж до граничних, що є умовою прийнятності розглянутої моделі, з рівняння $|u_r(0, \alpha) / \cos \alpha| = \delta_1$ можна знайти величину руйнівного навантаження, яке призводить до зрушення тріщини у напрямку, визначеному орієнтацією зони передруйнування для даної величини навантаження.

В продовження розрахунків, виконаних у п.п. 2.1 і 2.2, дослідимо параметри зони деструкції при навантаженні кусково-однорідного тіла з міжфазною тріщиною нескінченно віддаленими відривним нормальним напруженням p і дотичним напруженням q , які забезпечують маломасштабність області контакту берегів. При розрахунках було прийнято $\tau_1 = -10\sigma_1$, що враховує крихкий характер руйнування матеріалів композитного з'єднання і, як наслідок, високий рівень опору зсуву матеріалу в зоні передруйнування. Знак "-" вказує на напрямок дотичного напруження в зоні передруйнування (за розрахунками, $\tilde{C}_1 < 0$).

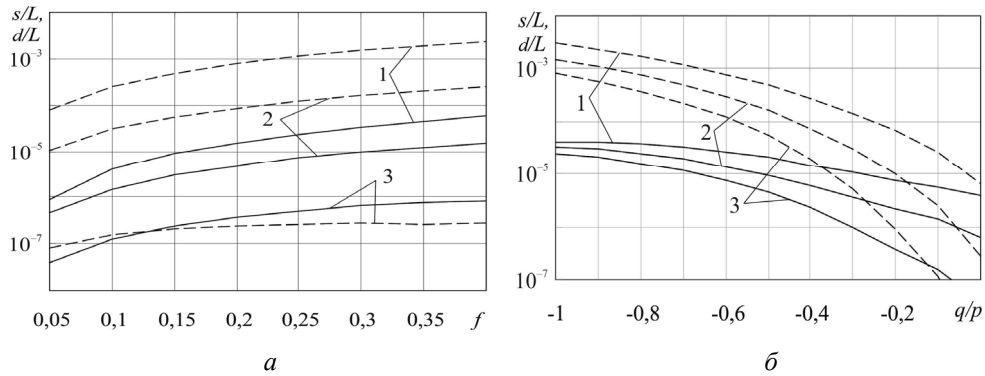


Рис. 9

На рис. 9, а показано залежність довжини d зони деструкції (суцільні лінії) і, для порівняння, розмірів s області контакту берегів (пунктирні лінії) від безрозмірного модуля навантаження f для $\mu = -0,5$; $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$; $E_1/E_2 = 0,5$; криві 1–3 відповідають відношенням прикладених зсувних і відривних напружень: 1 – $q/p = -1$; 2 – $q/p = -0,5$; 3 – $q/p = 0$. Рис. 9, б ілюструє залежність тих же величин від конфігурації навантаження q/p для $f = 0,3$ та відношень модулів Юнга з'єднаних матеріалів (криві 1–3): 1 – $E_1/E_2 = 0,2$; 2 – $E_1/E_2 = 0,5$; 3 – $E_1/E_2 = 0,8$. Як і слід було очікувати, довжина зони деструкції зростає зі збільшенням модуля навантаження (рис. 9, а), проте зменшується при збільшенні внеску у повному навантаженні відривних напружень (рис. 9, б). Аналіз рис. 9, б показує, що при конфігураціях навантаження в

межах $-1 \leq q/p \leq -0,5$ зона деструкції залишається на кілька порядків меншою від розмірів області контакту, що забезпечує виконання вихідної умови $d \ll s$ моделі, тоді як при зменшенні дотичної складової навантаження ця умова порушується, а використання розглянутого варіанту моделі стає некоректним.

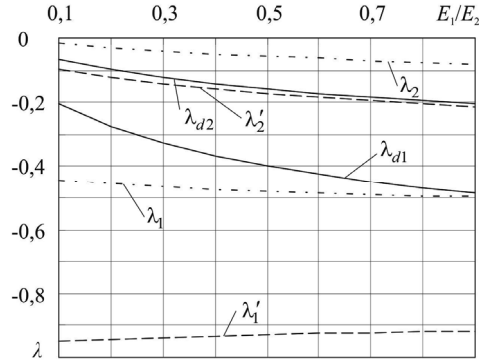


Рис. 10

На рис. 10 представлено результати розрахунків (для $\mu = -0,5$; $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$; $f = 0,3$; $q/p = -0,5$) коренів рівнянь (2.5), (2.8) і (2.10), які відповідають сингулярним членам розвинень напружень за степенями відстані до вершини тріщини. Найменші корені цих рівнянь у смугі $-1 < \text{Re } \lambda < 0$ є показниками сингулярності напружень і задовольняють нерівностям $\lambda'_1 < \lambda_1 < \lambda_{d1}$. За результатами розрахунків показників сингулярності можна прогнозувати зміну характеру залежності напружень від відстані по мірі наближення до вершини тріщини. На відстанях до вершини тріщини $l \ll r \ll L$ домінуючими у напруженнях є вклади типу (2.1) з кореневою особливістю. Осцилюючий множник, який входить у вираз (2.1), на вказаних відстанях не призводить до зміни знаків напружень і переміщень, оскільки наявність зони передруйнування модифікує характер поля напружень в околі вершини тріщини: на відстанях $s \ll r \ll l$ у напруженнях домінуватимуть внески, пропорційні r^{λ_1} з дійсним показником сингулярності $-0,5 < \lambda_1 < -0,4$ (рис. 10).

Отже, на відстанях $s \ll r \ll l$ рівень концентрації напружень знижується, а через відсутність у λ_1 уявної частини зникають фізично некоректні просторові осциляції переміщень. Проте, у досліджуваному інтервалі конфігурацій зовнішнього навантаження ($-1 \leq q/p \leq 0$) передбачається маломасштабний контакт берегів довжиною $s \ll l$, який призводить до значного зростання ступеня сингулярності напружень на відстанях $d \ll r \ll s$, що характеризуватиметься показником $\lambda'_1 < \lambda_1$ (п. 2.2). Утворення зони деструкції усуває вказане посилення концентрації напружень на відстанях $r \ll d$, обумовлене одночасним контактом берегів та існуванням бічної зони передруйнування, так що у прилеглій до вершини тріщини області ступінь сингулярності стає найнижчим з показником $\lambda_{d1} > \lambda_1$.

Згідно з аналізом, виконаним у п. 2.2, за наявності лише бічної зони передруйнування і контакту берегів нормальне розкриття тріщини у її вершині дорівнюватиме нулю, так що у відповідності з деформаційним критерієм зрушення тріщини виявля-

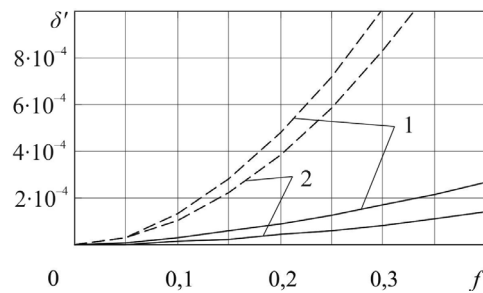


Рис. 11

ється неможливим. Проте, поява зони деструкції сприяє відносному зсуву берегів тріщини у її вершині, що призводить до зсувного розкриття δ тріщини (2.11). На рис. 11 відображено залежність нормованого зсувного розкриття тріщини $\delta' = \frac{\delta}{L} \frac{E_1}{4(1-\nu_1^2)\sigma_1}$ після утворення бічної зони передруйнування із зоною деструкції та області контакту берегів і від модуля навантаження f для $\mu = -0,5$; $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$; $q/p = -0,5$ (суцільні лінії) і

$q/p = -1$ (пунктирні лінії); криві 1, 2 відповідають відношенням модулів Юнга матеріалів: $1 - E_1/E_2 = 0,5$; $2 - E_1/E_2 = 0,8$. Аналіз рис. 11 показує, що величина зсувного розкриття зростає зі збільшенням модуля зовнішнього навантаження тим швидше, чим більшим є внесок від'ємного зсувного навантаження q .

Таким чином, поява області деструкції матеріалу у привершинній частині зони передруйнування виявляється необхідною умовою для розкриття тріщини і зниження рівня напружень в околі вершини за наявності контакту берегів та пояснює механізм поширення міжфазної тріщини. Одночасно за параметрами зони передруйнування із зоною деструкції встановлюються критерії зрушення і повороту тріщини: орієнтація зони передруйнування визначає напрямок повороту тріщини, а рівність її розкриття у вершині, обумовленого зоною деструкції, критичному розкриттю тріщини визначає навантаження, за якого відбувається зрушення.

2.4. Зона деструкції біля вершини міжфазної тріщини за відсутності контакту берегів. Як встановлено у п. 2.3, при значному переважанні у зовнішньому навантаженні розтягувальних зусиль у перпендикулярному до площини тріщини напрямку довжина контактної зони може виявитись меншою, ніж довжина зони деструкції (рис. 9, б, $q/p \rightarrow 0$), або ж контакт берегів виявиться відсутнім взагалі, і отриманий у попередньому пункті розв'язок стає некоректним. Аналогічна ситуація з екстремально малою протяжністю області контакту берегів має місце при дії додатних зсувних навантажень ($\tau_{xy} = q > 0$, $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$) [20, 27]. За таких обставин приходимо до моделі розкритої міжфазної тріщини з бічною зоною передруйнування, що містить біля вершини тріщини маломасштабну зону деструкції. Припускаючи береги тріщини вільними від навантаження ($\sigma_\theta(r, \pm\pi) = \tau_{r\theta}(r, \pm\pi) = 0$ для $r \in (0, \infty)$), отримуємо крайову задачу теорії пружності, аналогічну розглянутій у п. 2.3, з умовою на нескінченності у вигляді вимоги зрощування розшукуваного розв'язку з асимптотичним розв'язком при $r \ll l$ задачі про бічну маломасштабну зону передруйнування біля вершини розкритої міжфазної тріщини (п. 2.2), що з урахуванням (2.4) дає [22]:

$$\theta = \alpha, \quad r \rightarrow \infty: \quad \tau_{r\theta} = \sigma_1 \left[C_0 + \sum_i C_i r^{\lambda_i} \right] + o(1/r);$$

$$C_0 = \frac{-2u'(-1)}{D_1'(-1)}; \quad u'(p) = du(p)/dp; \quad D_1'(p) = \partial D_1(p)/\partial p;$$

$$C_i = \frac{4(1+\lambda_i)u(-1-\lambda_i)G^+(-1-\lambda_i)}{\sigma_1 \lambda_i D_1'(-1-\lambda_i)K^+(-1-\lambda_i)} l^{-\lambda_i} \operatorname{Re} \left[F(\alpha) l^{-0,5+i\omega} N(\alpha) \frac{1-2\omega}{1+2\lambda_i-2\omega} \right];$$

$$u(p) = -(1+e\kappa_2)^2 u_1(p) + (1-e)(1+e\kappa_2) u_2(p) + (e+\kappa_1)(1+e\kappa_2) u_3(p) + \\ + (1-e)(e+\kappa_1) u_4(p) + (e+\kappa_1)^2 \sin p\pi u_4(p);$$

$$u_1(p) = p(p+1) \sin^2 \alpha \sin p(\pi-2\alpha);$$

$$u_2(p) = p^2 \sin^2 \alpha \sin p(3\pi-2\alpha) + 2p \sin^2 \alpha [\cos 2p\pi \sin p(\pi-2\alpha) + \\ + \sin p\alpha \cos p(\pi+\alpha)] - \sin p\pi \sin^2 p(\pi-\alpha);$$

$$u_3(p) = p^2 \sin^2 \alpha \sin p(\pi + 2\alpha) + 2p \sin^2 \alpha \sin p\alpha \cos p(\pi + \alpha) - \sin p\pi \sin^2 p(\pi - \alpha);$$

$$u_4(p) = p^2 \sin^2 \alpha \sin p(\pi - 2\alpha) + 2p \sin^2 \alpha \sin p(\pi - \alpha) \cos p\alpha + \sin p\pi \sin^2 p(\pi - \alpha);$$

$$u_5(p) = p \sin^2 \alpha + \sin^2 p(\pi - \alpha),$$

де функції $F(\alpha)$, $D_1(p)$, $G^+(p)$, довжина зони передруйнування l і кут її нахилу α визначені у п. 2.1; λ_i – корені рівняння (2.5), які задовольняють умову $\operatorname{Re} \lambda_i > -1$.

Розв’язок сформульованої задачі, отриманий за допомогою методу Вінера – Гопфа у [22], призводить до рівняння для визначення довжини зони деструкції d та виразу для розкриття δ тріщини у її вершині:

$$\sum_i \frac{C_i d^{\lambda_i} K^+(-1 - \lambda_i) J_2(0)}{(1 + \lambda_i) K^+(-1) J_2(\lambda_i)} = \frac{\tau_1}{\sigma_1} - C_0;$$

$$J_2(x) = \exp \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln G_1(it)}{1+x+it} dt \right]; \quad G_1(p) = \frac{4t_1(p) D_3(p)}{\sin p\pi D_1(p)};$$

$$D_3(p) = (1 + \kappa_1)^2 \sin^2 p\pi - D_{31}(p) t_2(p) + \sin p\alpha [D_{32}(p) \cos p\alpha - D_{33}(p) \sin p\alpha];$$

$$D_{31}(p) = e^2 (1 + \kappa_2)^2 + 4(1 - e)(1 + e\kappa_2) \sin^2 p\pi;$$

$$D_{32}(p) = (1 + \kappa_1) e (1 + \kappa_2) \sin 2p\pi; \quad D_{33}(p) = 2(1 + \kappa_1) [e(1 + \kappa_2) + 2(1 - e)] \sin^2 p\pi;$$

$$\delta = -\frac{2(1 - \nu_1^2)}{E_1} \sigma_1 d \sqrt{\pi G_1(0)} \left[\frac{(\pi - \alpha) \sin \alpha}{(\pi - \alpha)^2 - \sin^2 \alpha} + \frac{e(1 + \kappa_2) \delta_1}{\delta_2} \right] \sum_i \frac{C_i d^{\lambda_i} \lambda_i K^+(-1 - \lambda_i)}{(1 + \lambda_i)^2 J_2(\lambda_i)};$$

$$\delta_1 = [e(1 + \kappa_2) \alpha + (1 + \kappa_1) \pi] \sin \alpha;$$

$$\delta_2 = (1 + \kappa_1)^2 \pi^2 + 2(1 + \kappa_1) e (1 + \kappa_2) \pi \alpha + e^2 (1 + \kappa_2)^2 (\alpha^2 - \sin^2 \alpha).$$

Чисельний аналіз отриманого розв’язку виконано для тієї ж конфігурації тіла і навантаження, що розглядалась у п.п. 2.2 – 2.3, але для відношень дотичного і нормального напружень q/p , для яких є допустимим нехтування контактом берегів. Довжина зони деструкції зростає при збільшенні модуля навантаження (рис. 12, *а*) і зменшується при збільшенні відношення дотичного і нормального напружень (рис. 12, *б*; $f = 0,3$). При цьому її числові значення виявляються одного порядку з довжиною зони деструкції, знайденими при тих же параметрах матеріалів і навантаження за наявності контактної зони у попередній частині роботи (рис. 9, *б*).

При зближенні пружних характеристик з’єднаних матеріалів ($E_1/E_2 \rightarrow 1$) довжина зони деструкції прямує до 0 (рис. 13, *а*). Це може означати більш ймовірний розвиток зони деструкції у іншому напрямку, відмінному від орієнтації зони передруйнування. Із зображеної на рис. 13, *б* залежності показника сингулярності від відношення модулів Юнга з’єднаних матеріалів для $f = 0,3$ можна зробити висновок, що поява зони деструкції зменшує рівень сингулярності напружень біля вершини тріщини від

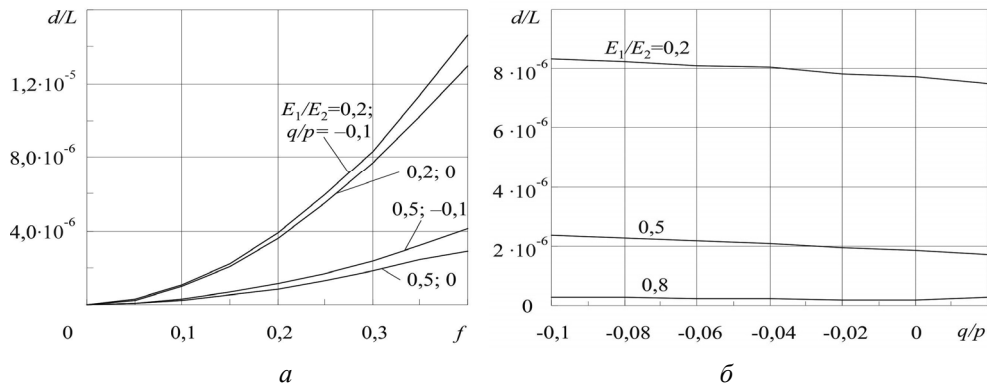


Рис. 12

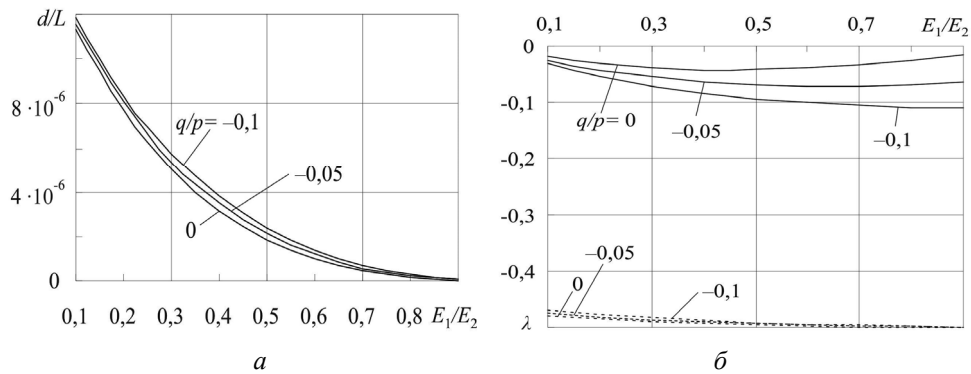


Рис. 13

майже кореневого, обумовленого зоною передруйнування (λ_1 , штрихові лінії), до значно нижчого рівня порядку $\lambda_{d1} \geq -0,1$ (суцільні лінії). Подібна ситуація спостерігалась у комплексній моделі зони передруйнування за наявності контакту берегів (п. 2.3). Це відповідає уявленню, що деструкція (тобто, фактично, руйнування) матеріалу біля вершини тріщини породжує область з розірваними міжчастинковими зв'язками, що спричиняє спад напружень та створює передумови для зрушення тріщини у напрямку, визначеному орієнтацією зони передруйнування.

§3. Поворот міжфазної тріщини за переважаючих зсувних навантажень.

При переважанні у зовнішньому навантаженні зсувних зусиль, які діють на кусково-однорідне тіло з міжфазною тріщиною на плоскій межі поділу, біля однієї з її вершин тріщини з'являється область контакту берегів довжиною одного порядку з довжиною тріщини [19, 27, 50]. Зокрема, така ситуація виникає біля вершини O (рис. 1) у розглянутому в п. 2 прикладі кусково-однорідної площини, навантаженої на нескінченності сталими зсувним і нормальним розтягувальним напруженнями $\tau_{xy} = q < 0$; $\sigma_y = p$ ($x^2 + y^2 \rightarrow \infty$) за умови $p < |q|$. Постає питання про механізм розкриття початково закритої тріщини та її повороту в один з матеріалів. У відповідності з комплексною моделлю, описаною в п. 1, він зводиться до утворення у менш тріщиностійкому матеріалі зони передруйнування з внутрішньою зоною деструкції, прилеглою до вершини. Для аналізу особливостей цього процесу звернемося до розрахунку параметрів зони передруйнування і зони деструкції на етапі розвитку, коли розміри зони передруйнування значно менші порівняно з розмірами контактної зони, та дослідимо їх вплив на зрушення тріщини.

3.1. Маломасштабна бічна зона передруйнування у кінці міжфазної тріщини в умовах переважаючих зсувних навантажень. Для визначення параметрів маломасштабної зони передруйнування в умовах плоскої деформації біля вершини тріщини, розташованої у кусково-однорідному тілі на прямолінійній межі поділу двох різних ізотропних матеріалів, при дії зовнішнього навантаження, яке забезпечує значний контакт берегів, в рамках комплексної моделі (п. 1) приймемо $s = \infty$, $d = 0$ та задаємо умову на нескінченності у вигляді вимоги зрощування шуканого розв'язку задачі з асимптотикою відомого розв'язку задачі про міжфазну тріщину з контактуючими берегами за відсутності зони [17, 45]:

$$\theta = \alpha, \quad r \rightarrow \infty: \quad \sigma_\theta = K_{II} F(\alpha) r^\lambda + o(1/r);$$

$$F(\alpha) = \frac{(2\pi)^\lambda}{2} \{ (2 + \lambda)(1 + \beta) \sin \lambda \alpha - [2 + \lambda(1 + \beta)] \sin(2 + \lambda)\alpha \}$$

(β – біматеріальний параметр Дандерса, $|\beta| \leq 0,5$; $\lambda = -\pi^{-1} \arctg(\mu\beta)^{-1}$ ($-1 < \lambda < 0$) – показник сингулярності напружень біля вершини тріщини з контактуючими берегами; μ – коефіцієнт тертя між берегами тріщини). При ковзанні верхнього матеріалу у напрямку $\theta = \pi$ відносно нижнього матеріалу (рис. 1) коефіцієнт тертя повинен бути від'ємним. Коефіцієнт інтенсивності напружень в кінці міжфазної тріщини зсуву K_{II} визначається з розв'язку зовнішньої задачі і вважається заданим за умовою, при цьому $K_I = 0$. Передбачається, що в задачі, яка відповідає тому етапу процесу деформації, коли зона передруйнування ще не з'явилася, при $\theta = \alpha$ біля вершини тріщини нормальні напруження є розтягувальними ($\theta = \alpha$, $\sigma_\theta > 0$). Це вимагає виконання умови $K_{II} F(\alpha) > 0$ додатково до вимоги стискальних напружень на берегах тріщини ($\theta = \pi$, $\sigma_\theta < 0$), яка необхідна для контакту берегів і формулюється у вигляді нерівності $\beta K_{II} > 0$ [45].

Розв'язок відповідної крайової задачі знайдено за допомогою методу Вінера – Гопфа в [36], з якого визначено довжину зони передруйнування:

$$l = \left(\frac{\sqrt{\pi} K_{II} \Gamma(1 + \lambda) F(\alpha) G^+(-1)}{2\sigma_1 \Gamma(1, 5 + \lambda) G^+(-\lambda - 1)} \right)^{-1/\lambda} \quad (3.1)$$

та кут нахилу α зони передруйнування за умовою максимуму відривного колового напруження σ_θ , яка еквівалентна рівнянню $\frac{\cos(\lambda + 2)\alpha}{\cos \lambda \alpha} = \frac{2 + \lambda(1 + \beta)}{\lambda(1 + \beta)}$, де

$$G^+(p) = \exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\ln G(z)}{z - p} dz \right] \quad (\operatorname{Re} p < 0); \quad G(p) = \frac{D_1(p)}{\cos(p\pi) D_0(p)};$$

$$D_0(p) = 2(1 + e\kappa_2)(e + \kappa_1)(1 + e\kappa_2 + e + \kappa_1)(\cos p\pi - \mu\beta \sin p\pi);$$

$$D_1(p) = D_{10}(p) - \mu D_{11}(p);$$

$$D_{10}(p) = (1 + \kappa_1) \left[(e + \kappa_1)^2 \Delta_1(p) + (e + \kappa_1)(1 + e\kappa_2) \Delta_2(p) + (1 + e\kappa_2)^2 \Delta_3(p) \right] +$$

$$+ e(1 + \kappa_2)(e + \kappa_1)(1 + e\kappa_2) \Delta_4(p);$$

$$\Delta_1(p) = \cos^2 \alpha - \sin^2 p(\pi - \alpha);$$

$$\begin{aligned}
\Delta_2(p) &= p \sin 2\alpha \sin 2p\alpha + \cos 2\alpha \cos 2p\alpha + \cos 2p\pi; \\
\Delta_3(p) &= \Delta_1(p) + 4p^2 \sin^2 \alpha \cos^2 p\alpha - p \sin 2\alpha \sin 2p\alpha - \\
&\quad - 4 \sin p\alpha \cos p\pi \sin p(\pi - \alpha); \\
\Delta_4(p) &= 2 \cos p\pi \left[2p^2 \sin^2 \alpha \cos p(\pi - 2\alpha) + p \sin 2\alpha \sin p(\pi - 2\alpha) - \right. \\
&\quad \left. - 2 \sin p\alpha \sin p(\pi - \alpha) \right]; \\
D_{11}(p) &= (1 + \kappa_1) \bar{D}_{11}(p) - 2(1 - e) \tilde{D}_{11}(p); \\
\bar{D}_{11}(p) &= (e + \kappa_1)^2 \bar{\Delta}_1 + (1 + e\kappa_2)^2 \bar{\Delta}_2 + (e + \kappa_1)(1 + e\kappa_2) \bar{\Delta}_3 + \\
&\quad + (1 - e)(e + \kappa_1) \bar{\Delta}_4 + (1 - e)(1 + e\kappa_2) \bar{\Delta}_5; \\
\bar{\Delta}_1(p) &= -\sin[p(\pi - \alpha) + \alpha] \cos[p(\pi - \alpha) - \alpha]; \\
\bar{\Delta}_2(p) &= 2p^2 \sin^2 \alpha \sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha \cos 2p\alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \\
&\quad + \sin p(\pi - \alpha) [\cos p(\pi + \alpha) - 2 \sin p\pi \sin p\alpha]; \\
\bar{\Delta}_3(p) &= 2[p \sin \alpha (\cos \alpha - \sin \alpha \sin 2p\alpha) - \sin \alpha \cos \alpha \cos 2p\alpha + \\
&\quad + 2 \sin p\pi \sin p\alpha \sin p(\pi - \alpha)]; \\
\bar{\Delta}_4(p) &= -2(p + 1) \sin \alpha \sin p(\pi - \alpha) \sin[p(\pi - \alpha) + \alpha]; \\
\bar{\Delta}_5(p) &= 2p^2 \sin^2 \alpha [\sin 2p(\pi - \alpha) + \sin 2p\pi] - \\
&\quad - 2 \sin \alpha \sin p(\pi - \alpha) \sin(p(\pi + \alpha) + \alpha) + \\
&\quad + 2p \sin \alpha [2 \cos \alpha \sin^2 p(\pi - \alpha) + \sin p(\pi + \alpha) \sin(p(\pi - \alpha) - \alpha)]; \\
\tilde{\Delta}_1(p) &= -(p + 1) \sin \alpha \sin p(\pi - \alpha) \sin(p(\pi - \alpha) + \alpha); \\
\tilde{\Delta}_2(p) &= 2[p^2 \sin^2 \alpha \cos p(\pi - 2\alpha) + p \sin \alpha \cos \alpha \sin p(\pi - 2\alpha) - \\
&\quad - \sin p(\pi - \alpha) \sin p\alpha] \sin p\pi; \\
\tilde{\Delta}_3(p) &= 2p^2 \sin^2 \alpha \cos p(\pi + \alpha) \sin p(\pi - \alpha) + \\
&\quad + p \sin \alpha [\cos \alpha - \cos p(\pi - \alpha) \cos(p(\pi + \alpha) - \alpha)] + \\
&\quad + \sin p(\pi - \alpha) [2 \sin p\pi \sin p\alpha - \sin \alpha \cos(p(\pi + \alpha) + \alpha)];
\end{aligned}$$

$$\tilde{\Delta}_4(p) = -(p+1)\sin\alpha\sin p(\pi-\alpha)\sin[p(\pi-\alpha)+\alpha];$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_5(p) = & 2p^2\sin^2\alpha\cos p\alpha\sin p(2\pi-\alpha) - \sin\alpha\sin p(\pi-\alpha)\sin(p(\pi+\alpha)+\alpha) + \\ & + p\sin\alpha\left[2\cos\alpha\sin^2 p(\pi-\alpha) + \sin p(\pi+\alpha)\sin(p(\pi-\alpha)-\alpha)\right].\end{aligned}$$

Згідно з (3.1), довжина зони передруйнування нелінійно зростає зі збільшенням зовнішнього навантаження, що входить у коефіцієнт інтенсивності напружень K_{II} . Крім того, довжина зони передруйнування тим більша, чим менший опір відриву матеріалу, в якому відбувається її розвиток.

Утворення зони передруйнування призводить до зміни локального поля напружень біля вершини тріщини на відстанях $r \ll l$, яке тепер визначатиметься тензором напружень виду:

$$\sigma_{mn}(r, \theta) = \sigma_{mn}^0(\theta) + \sum_i g_{mn}(\theta, \lambda_i) r^{\lambda_i} \quad (r \ll l),$$

де $\sigma_{mn}^0(\theta)$, $g_{mn}(\theta, \lambda_i)$ – відомі функції; λ_i – корені рівняння

$$D_1(-1-x) = 0, \quad (3.2)$$

що задовольняють умові $\text{Re } \lambda_i > -1$. Зокрема, дотичне напруження на лінії розриву дорівнює

$$\tau_{r\theta}(r, \alpha) = \sigma_1 \frac{T(-1)}{D_1(-1)} + \sigma_1 \sum_i \frac{T(-1-\lambda_i)}{D_1'(-1-\lambda_i)} \frac{\lambda K^+(-1-\lambda_i) G^+(-\lambda_i-1)}{\lambda_i(\lambda_i-\lambda) K^+(-1) G^+(-1)} \left(\frac{r}{l}\right)^{\lambda_i} \quad (r \ll l); \quad (3.3)$$

$$D_1'(p) = dD_1(p)/dp; \quad T(p) = T_0(p) + \mu T_1(p);$$

$$T_0(p) = (1+\kappa_1)T_{01}(p) + (1-e)T_{02}(p);$$

$$T_{01}(p) = 0,5(1+\kappa_1)^2 [\sin 2\alpha + \sin 2p(\pi-\alpha)] +$$

$$+ (1+\kappa_1)e(1+\kappa_2)(p+1)\sin 2\alpha \cos 2p\alpha - e^2(1+\kappa_2)^2 T_{03}(p);$$

$$T_{02}(p) = 2(1-e)(1+\kappa_1)(p+1)\sin\alpha \left[2\cos\alpha\sin^2 p\alpha - p\sin\alpha\sin 2p(\pi-\alpha) \right] -$$

$$- 4(1+e\kappa_2)e(1+\kappa_2)\cos p\pi T_{04}(p) +$$

$$+ (1+\kappa_1)^2 \left[p\sin 2\alpha \cos 2p\alpha - 2\sin 2\alpha \sin^2 p\alpha - \sin 2p(\pi-\alpha) \right] -$$

$$- (1+\kappa_1)e(1+\kappa_2)T_{05}(p);$$

$$T_{03}(p) = 2p^2\sin^2\alpha\sin 2p\alpha + 2p\sin\alpha(\sin\alpha\sin 2p\alpha - \cos\alpha) +$$

$$+ 0,5[\sin 2p(\pi-\alpha) - \sin 2\alpha];$$

$$T_{04}(p) = p(p+1)\sin^2\alpha\sin p(\pi-2\alpha);$$

$$\begin{aligned}
T_{05}(p) &= (p+1)\{2p\sin^2\alpha[\sin 2p\alpha + \sin 2p(\pi-\alpha)] - \\
&\quad - \sin 2\alpha(1+2\sin^2 p\alpha)\} + \sin 2\alpha + \sin 2p(\pi-\alpha); \\
T_1(p) &= (1+\kappa_1)T_{11}(p) + 4(1-e)(1+e\kappa_2)(1+e\kappa_2-e-\kappa_1)\sin p\pi T_{04}(p); \\
T_{11}(p) &= (1+\kappa_1)^2[\sin^2 p(\pi-\alpha) - \cos^2 \alpha] + \\
&\quad + e^2(1+\kappa_2)^2[4p(p+1)\sin^2 \alpha \sin^2 p\alpha + \sin^2 p(\pi-\alpha) - \cos^2 \alpha] - \\
&\quad - 2(1+\kappa_1)e(1+\kappa_2)[2p\sin^2 \alpha \sin^2 p\alpha + \sin^2 p(\pi-\alpha) + \cos^2 \alpha \cos 2p\alpha] - \\
&\quad - 4(1-e)(1+\kappa_1)[(p+1)\sin^2 \alpha \sin^2 p\alpha + \sin p\pi \sin p(\pi-2\alpha)] + \\
&\quad + 4(1-e)^2[p(p+2)\sin^2 \alpha \sin^2 p\alpha + \sin^2 p(\pi-\alpha) - \sin^2 p\alpha \cos^2 \alpha] + \\
&\quad + 4(1-e)e(1+\kappa_2)[(2p+1)(p+1)\sin^2 \alpha \sin^2 p\alpha + \sin p\pi \sin p(\pi-2\alpha)].
\end{aligned}$$

На початковому етапі розвитку зони передруйнування, коли область деструкції ще не з'явилася, розкриття тріщини в її вершині, згідно з прийнятими в моделі крайовими умовами $\langle u_\theta(r, \pm\pi) \rangle = 0$, $\langle u_r(r, \alpha) \rangle = 0$, дорівнює нулю, що унеможливорює зрушення тріщини. Проте можна уявити механізм зрушення тріщини, за яким спочатку відбувається розрив міжчастинкових зв'язків у зоні передруйнування у місці максимального розходження границь зони, яке дорівнює стрибку нормального переміщення $\delta u(r) = \langle u_\theta(r, \alpha) \rangle$, при досягненні ним деякого критичного значення δu_c , що є характеристикою першого матеріалу. В результаті всередині зони передруйнування утворюється мікротріщина (рис. 14), довжина якої збільшується зі збільшенням навантаження аж до досягнення нею вершини O початкової тріщини, що і призводить до зрушення останньої.

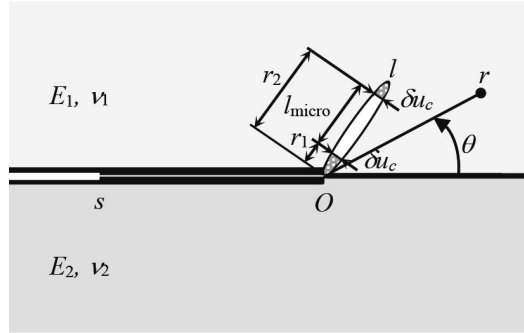


Рис. 14

Залежність $\delta u(r)$ визначена зі знайденого розв'язку задачі і має вигляд:

$$\delta u(r) = \frac{4(1-\nu_1^2)\sigma_1}{E_1} r \sum_{i=1}^{\infty} \frac{D_0(-1-\lambda_i) \sin \lambda_i \pi}{D_1'(-1-\lambda_i)} \frac{K^+(-1-\lambda_i) G^+(-\lambda_i-1) \lambda}{K^+(-1) G^+(-1) \lambda_i (\lambda_i - \lambda) (1+\lambda_i)} \left(\frac{r}{l}\right)^{\lambda_i}. \quad (3.4)$$

Умова максимуму розходження берегів зони передруйнування $d\delta u(r)/dr = 0$ призводить до рівняння для розрахунку відстані r_m , на якій слід чекати утворення мікротріщини:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{D_0(-1-\lambda_i) \sin \lambda_i \pi}{D_1'(-1-\lambda_i)} \frac{K^+(-1-\lambda_i) G^+(-\lambda_i-1)}{\lambda_i (\lambda_i - \lambda)} \left(\frac{r_m}{l}\right)^{\lambda_i} = 0, \quad (3.5)$$

відповідно, значення найбільшого розходження берегів зони дорівнюватиме $\delta u_m = \delta u(r_m)$. Прирівнявши це розходження критичному значенню δu_c , яке відповідає повному розриву міжчастинкових зв'язків на даній ділянці зони передруйнування і є модельною сталою першого матеріалу, приходимо до рівняння $\delta u(r_m) = \delta u_c$, з якого можна визначити навантаження, що відповідає моменту зародження мікротріщини.

Після зародження мікротріщини подальше збільшення навантаження буде супроводжуватися зростанням її довжини. Визначаючи положення кінців мікротріщини з рівнянь $\delta u(r_{1(2)}) = \delta u_c$ ($0 < r_1 \leq r_m \leq r_2 < l$), знаходимо її довжину: $l_{micro} = r_2 - r_1$ (рис. 14). При цьому слід мати на увазі, що наявність мікротріщини істотно впливатиме на НДС в області зони передруйнування, тому розглянута вище модель зони і знайдений розв'язок задачі про її параметри є коректними лише за виконання умови $l_{micro} \ll l$.

Відзначимо, що в (3.4), (3.5) підсумовування передбачається за всіма коренями λ_i рівняння (3.2), що задовольняють умову $\text{Re } \lambda_i > -1$; проте завдяки підвищеній концентрації напружень біля вершини тріщини має місце нерівність $r_m \ll l$, тому достатня точність визначення r_m досягається при врахуванні всього лише 4 – 6 перших коренів, і лише на відстанях одного порядку з l потрібно в сумі ряду (3.4) брати значно більше доданків. Не розв'язуючи трансцендентне рівняння (3.5), можна оцінити r_m і δ_m за першими двома коренями λ_i рівняння (3.2), що дає

$$r_m \approx l \left[-\frac{D_0(-1-\lambda_2)\sin\lambda_2\pi}{D_0(-1-\lambda_1)\sin\lambda_1\pi} \frac{D'_1(-1-\lambda_1)}{D'_1(-1-\lambda_2)} \frac{K^+(-1-\lambda_2)J(\lambda_2)}{K^+(-1-\lambda_1)J(\lambda_1)} \frac{\lambda_1(\lambda_1-\lambda)}{\lambda_2(\lambda_2-\lambda)} \right]^{1/(\lambda_1-\lambda_2)};$$

$$\delta_m \approx -\frac{4(1-\nu_1^2)\sigma_1}{E_1} r_m \sum_{i=1}^2 \frac{D_0(-1-\lambda_i)\sin\lambda_i\pi}{D'_1(-1-\lambda_i)} \frac{K^+(-1-\lambda_i)J(\lambda_i)\lambda}{K^+(-1)J(0)(\lambda_i-\lambda)(1+\lambda_i)} \left(\frac{r_m}{l} \right)^{\lambda_i}. \quad (3.6)$$

Формули (3.6) дають прийнятну оцінку δ_m (з похибкою до 1%) і r_m (похибка до 6%).

3.2. Параметри зони деструкції матеріалу у бічній зоні передруйнування в умовах переважання зсувних навантажень. Розрахунки показують, що рівняння (3.2) має корені у смугі $-1 < \text{Re } x < 0$, отже, концентрація напружень біля вершини тріщини зберігається, що призводить до виникнення у прилеглий до вершини тріщини частині зони передруйнування області деструкції матеріалу з високим рівнем і відривних, і зсувних деформацій. Як показано у п. 2.3, наявність зони деструкції є необхідною умовою розкриття тріщини з контактуючими берегами, що призводить до її з'єднання з мікротріщиною у зоні передруйнування та подальшого поширення у напрямку, визначеному орієнтацією зони.

Вважаючи довжину зони деструкції значно меншою порівняно з довжиною зони передруйнування, приходимо до моделі, розглянутої у п. 2.3, з тією відмінністю, що в умові на нескінченності використовується розвинення дотичного напруження (3.3) в асимптотичні ряди при $r \rightarrow 0$ у розв'язку задачі, розглянутої у п. 3.1:

$$\theta = \alpha, \quad r \rightarrow \infty, \quad \tau_{r\theta} = f_1(\alpha, e, \nu_1, \nu_2)\sigma_1 + \sum_i C_i f_{2i}(\alpha, e, \nu_1, \nu_2) r^{\lambda_i} + o(1/r),$$

де $C_i = \sigma_1 l^{-\lambda_i}$, l – знайдена у п.3.1 довжина всієї зони передруйнування; λ_i – корені рівняння (3.2) у смугі $-1 < \text{Re } x < 0$, яких виявляється два і які є дійсними:

$$f_1 = \frac{T(-1)}{D_1(-1)}; \quad f_{2i} = \frac{T(-1-\lambda_i)}{D'_1(-1-\lambda_i)} \frac{K^+(-1-\lambda_i)}{K^+(-1)} \frac{G^+(-\lambda_i-1)}{G^+(-1)} \frac{\lambda}{\lambda_i(\lambda_i-\lambda)}.$$

Подібно до п. 2.3, приходимо до трансцендентного рівняння для обчислення довжини області деструкції [36]:

$$\sum_i \frac{C_i f_{2i} d^{\lambda_i} K^+(-1-\lambda_i) G_1^+(-1)}{(1+\lambda_i) K^+(-1) G_1^+(-\lambda_i-1)} = \tau_1 - f_1 \sigma_1,$$

$$\text{де } G_1^+(p) = \exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\ln H(z)}{z-p} dz \right] \quad (\operatorname{Re} p < 0);$$

$$H(p) = \frac{\cos p\pi D_2(p)}{2 \sin^2 p\pi D_1(p)}; \quad D_2(p) = D_{20}(p) - \mu D_{21}(p);$$

$$\begin{aligned} D_{20}(p) = & 0,5(1+\kappa_1)e(1+\kappa_2)d_2(p)s_1(p) - s_2(p)s_0(p) + \\ & + e(1+\kappa_2)\cos p\pi \left[4e^2(1+\kappa_2)^2 d_1(p)d_4(p) - (1+\kappa_1)^2 d_3(p)d_5(p) + \right. \\ & \left. + 2(1+\kappa_1)e(1+\kappa_2)\cos p\pi s_3(p) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{21}(p) = & 4 \sin p\pi s_4(p) \left[e^2(1+\kappa_2)^2 d_4(p) + s_0(p) \right] + \\ & + 4(1+\kappa_1)e(1+\kappa_2) \left[\cos p\pi \sin 2p\alpha s_4(p) + e(1+\kappa_2)p(p-1)\sin^2 \alpha \sin p(\pi-2\alpha) \right]; \\ s_0(p) = & (1+\kappa_1)^2 - 2(1+\kappa_1) \left[e(1+\kappa_2) + 2(1-e) \right] \sin^2 p\alpha - \left[e(1+\kappa_2) + 2(1-e) \right]^2 d_4(p); \\ s_1(p) = & 2(1+\kappa_1)\cos p\pi d_3(p) + 4e(1+\kappa_2)\sin p\pi d_1(p); \\ s_2(p) = & 2(1+\kappa_1)\sin p\pi d_3(p) - 4e(1+\kappa_2)\cos p\pi d_1(p); \\ s_3(p) = & 2 \sin p\alpha \sin p(\pi-\alpha) + p \sin 2\alpha \sin p(\pi-2\alpha) - 2p^2 \sin^2 \alpha \cos p(\pi-2\alpha); \\ s_4(p) = & (1+\kappa_1)d_6(p) + \left[e(1+\kappa_2) + 2(1-e) \right] d_1(p); \\ d_1(p) = & \sin^2 p(\pi-\alpha) - p^2 \sin^2 \alpha; \quad d_2(p) = p \sin 2\alpha - \sin 2p\alpha; \\ d_3(p) = & p \sin 2\alpha - \sin 2p(\pi-\alpha); \quad d_4(p) = p^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 p\alpha; \\ d_5(p) = & p \sin 2\alpha + \sin 2p\alpha; \quad d_6(p) = p \sin^2 \alpha - \sin^2 p(\pi-\alpha). \end{aligned}$$

НДС біля вершини тріщини після утворення області деструкції матеріалу характеризуватиметься показником сингулярності напружень λ_{d1} , що визначається як найменший з інтервалу $(-1,0)$ корінь рівняння

$$D_2(-1-x) = 0. \quad (3.7)$$

Знаходимо також зсувне зміщення берегів тріщини в її вершині:

$$\delta = \lim_{x \rightarrow 0} \left| \langle u \rangle_{y=0} \right| = - \frac{4(1-\nu_1^2)}{E_1 \cos \alpha} \frac{d}{\sqrt{\pi H(0)}} \sum_{i=1}^2 \frac{C_i f_{2i} d^{\lambda_i} K^+(1+\lambda_i)}{J_1(\lambda_i)} \frac{\lambda_i}{(1+\lambda_i)^2}, \quad (3.8)$$

яке може бути використано для визначення величини граничного навантаження за деформаційним критерієм руйнування.

З метою числового аналізу отриманих результатів продовжимо розглядати приклад внутрішньої міжфазної тріщини довжиною L у кусково-однорідній площині, навантаженої на цей раз нескінченно віддаленим дотичним напруженням q ($\tau_{xy} \rightarrow -q$ при $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$, рис. 1), скориставшись відомим виразом для коефіцієнта інтенсивності напружень у вершині O [50]:

$$K_{II} = - \frac{4\pi E_1 D^2 \sqrt{L/2} (\gamma^2 + \omega^2)}{(1 + \nu_1) \Gamma(1, 5 + \gamma) |\Gamma(1 - \gamma + i\omega)|^2 \operatorname{sh} 2\pi\omega} \left(\frac{L-s}{2Ls} \right)^\gamma \sum_{m=0}^{\infty} \operatorname{Re} \frac{e^{i\omega\alpha_1} L_{1m}}{m - \gamma - i\omega};$$

$$D = \sqrt{\operatorname{ch}^2 \pi\omega + \mu^2 \operatorname{sh}^2 \pi\omega}; \quad \gamma = 0,5 + \lambda; \quad \omega = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1-\beta}{1+\beta}; \quad \alpha_1 = 2 \operatorname{arcth} \left(1 - \frac{2s}{L} \right);$$

$$L_{1m} = (-1)^{m+1} \frac{iq(1 + \nu_1)}{E_1} \frac{\Gamma(m+1, 5 - i\omega) \Gamma(m+1 - \gamma - i\omega)}{\Gamma(m+1 - 2i\omega)} \frac{e^{-m\alpha_1} (m+0,5 - i\omega)}{m!},$$

причому довжина контактної зони дорівнює $s = L(1 - \operatorname{th}(\alpha_1/2)) / 2$, де α_1 визначається з трансцендентного рівняння $\operatorname{Re} \left[e^{i\omega\alpha_1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{L_{1m}}{m+0,5 - i\omega} \right] = 0$.

Результати обчислень параметрів зони передруйнування (кута нахилу α до межі поділу матеріалів, відносних довжин s/L контактної зони, l/L і d/L всієї зони передруйнування і області деструкції, нормованого розходження берегів тріщини $\tilde{\delta} = \frac{\delta}{L} \frac{E_1}{4(1 - \nu_1^2)\sigma_1} \frac{\Delta y}{\Delta x}$) представлено у табл. 5 для деяких значень відношення модулів

Юнга E_1/E_2 з'єднаних матеріалів з однаковими коефіцієнтами Пуассона $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ при різних значеннях коефіцієнта тертя μ і при зовнішньому навантаженні $q = 0,1\sigma_1$. При обчисленнях параметрів області деструкції опір зсуву першого матеріалу, для прикладу, був прийнятий рівним $\tau_{1s} = 5\sigma_1$, що відповідає його незначній пластичності. Для менших значень τ_{1s} (особливо при $\tau_{1s} \leq \sigma_1$) довжина області деструкції виявляється одного порядку з довжиною зони передруйнування, що порушує початкові передумови задачі ($d \ll l$) і передбачає інший механізм розвитку зони передруйнування, а саме, утворення розвинутої пластичної зони, яка моделюється лінією розриву дотичного переміщення, у привершинній частині якої існує мала область деструкції, де зазнають розриву і дотичне, і нормальне переміщення.

Згідно з розрахунками, розміри зони передруйнування і області деструкції ростуть зі збільшенням коефіцієнта тертя між берегами тріщини і відношення модулів Юнга матеріалів E_1/E_2 ($E_1 < E_2$). У прийнятих умовах навантаження довжина зони передруйнування виявляється майже на два порядки менша від довжини контактної зони, а довжина області деструкції набагато менша, ніж довжина всієї зони передруйнування. Тому для таких достатньо низьких значень напружень використання розглянутої моделі цілком виправдане, тоді як для більших навантажень прийнята за постановкою задачі умова маломасштабності зони не виконується, а відповідні результати повинні розглядатися лише як наближена екстраполяція.

Кут нахилу зони спадає зі збільшенням (абсолютного значення) коефіцієнта тертя. Оскільки орієнтація зони передруйнування як області ослаблених міжчастинкових зв'язків визначає напрям подальшого поширення тріщини після досягнення умов зрушення, звідси випливає, що більше тертя (обумовлене більшою шорсткістю повер-

хонь берегів тріщини) зменшує кут відхилення тріщини від межі поділу. Цей результат узгоджується з висновками дослідження повороту тріщини в однорідному тілі, береги якої зміщуються один відносно одного з тертям [35]: значення кутів повороту, знайдених за допомогою методу скінчених елементів з умови максимуму розкриття тріщини у її вершині, спадають від $81,8^\circ$ для $\mu = 0$ до $\sim 50^\circ$ при зростанні коефіцієнта тертя і стискальних напружень на берегах тріщини. На відміну від вказаних висновків, подібної вираженої залежності кута повороту тріщини від коефіцієнта тертя берегів не виявлено в [45], де розрахунки кута повороту міжфазної тріщини виконано за допомогою методу скінчених елементів з використанням принципу локальної симетрії, еквівалентного вимозі рівності нулю локального коефіцієнта інтенсивності напружень k_{II} в кінці тріщини після її повороту в один з однорідних матеріалів.

Таблиця 5

$\frac{E_1}{E_2}$	μ	0	-0,05	-0,1	-0,15	-0,2	-0,25	-0,3
0,1	α°	67,57	67,37	67,16	66,95	66,75	66,54	66,34
	s/L	0,3098	0,3115	0,3133	0,3150	0,3168	0,3185	0,3203
	l/L	$6,19 \cdot 10^{-3}$	$6,06 \cdot 10^{-3}$	$5,94 \cdot 10^{-3}$	$5,83 \cdot 10^{-3}$	$5,73 \cdot 10^{-3}$	$5,64 \cdot 10^{-3}$	$5,56 \cdot 10^{-3}$
	d/L	$1,94 \cdot 10^{-4}$	$2,02 \cdot 10^{-4}$	$2,12 \cdot 10^{-4}$	$2,22 \cdot 10^{-4}$	$2,34 \cdot 10^{-4}$	$2,48 \cdot 10^{-4}$	$2,65 \cdot 10^{-4}$
	$\tilde{\delta}$	$2,74 \cdot 10^{-3}$	$2,82 \cdot 10^{-3}$	$2,92 \cdot 10^{-3}$	$3,02 \cdot 10^{-3}$	$3,13 \cdot 10^{-3}$	$3,26 \cdot 10^{-3}$	$3,40 \cdot 10^{-3}$
	λ	-0,5	-0,4963	-0,4926	-0,4888	-0,4851	-0,4814	-0,4777
	λ_1	-0,8422	-0,8514	-0,8610	-0,8712	-0,8821	-0,8940	-0,9073
	λ_{d1}	-0,3435	-0,3221	-0,3008	-0,2801	-0,2613	-0,2460	-0,2353
0,9	α°	70,33	70,31	70,30	70,28	70,27	70,25	70,24
	s/L	0,3052	0,3053	0,3054	0,3055	0,3056	0,3057	0,3059
	l/L	$6,96 \cdot 10^{-3}$	$7,03 \cdot 10^{-3}$	$7,10 \cdot 10^{-3}$	$7,19 \cdot 10^{-3}$	$7,29 \cdot 10^{-3}$	$7,43 \cdot 10^{-3}$	$7,62 \cdot 10^{-3}$
	d/L	$2,14 \cdot 10^{-4}$	$2,33 \cdot 10^{-4}$	$2,56 \cdot 10^{-4}$	$2,82 \cdot 10^{-4}$	$3,16 \cdot 10^{-4}$	$3,61 \cdot 10^{-4}$	$4,34 \cdot 10^{-4}$
	$\tilde{\delta}$	$5,32 \cdot 10^{-3}$	$5,85 \cdot 10^{-3}$	$6,47 \cdot 10^{-3}$	$7,23 \cdot 10^{-3}$	$8,20 \cdot 10^{-3}$	$9,56 \cdot 10^{-3}$	$1,19 \cdot 10^{-2}$
	λ	-0,5	-0,4998	-0,4995	-0,4993	-0,4990	-0,4988	-0,4986
	λ_1	-0,8731	-0,8841	-0,8957	-0,9080	-0,9215	-0,9368	-0,9556
	λ_{d1}	-0,4880	-0,4875	-0,4871	-0,4867	-0,4864	-0,4861	-0,4858

Відзначимо близькість за порядком величини значень кута нахилу зони передруйнування, розрахованого згідно моделі п. 3.1 для $p = 0$; $q = 0,3\sigma_1$; $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$, для близького до однорідного тіла з $E_1/E_2 = 0,9$ (табл. 5), з передбачуваними кутами повороту тріщини в однорідному тілі [35], а також зі значеннями кутів повороту міжфазної тріщини, отриманими в [44 – 46, 55] (табл. 6). Значно кращою виявляється узгодженість результатів робіт [44 – 46, 55] з результатами розрахунків кута нахилу зони передруйнування в умовах зсувного навантаження в рамках моделі розкритої міжфазної тріщини (п. 2.1). Передбачення п. 2.1 у тому числі добре узгоджуються з емпіричними результатами повороту міжфазної тріщини в умовах переважаючих зсувних навантажень від межі з'єднання «графіт – епоксидна смола», які для різних методик експерименту приводили до кутів повороту $80,8^\circ$ та $81,2^\circ$ [55]. Це дає підстави зробити висновок про розкриття тріщини після утворення зони деструкції, що обґрунтовує можливість використання розглянутих у п.п. 2.1, 2.4 моделей також і в умовах переважаючих зсувних навантажень, і може означати, що контакт берегів міжфазної тріщини є лише проміжним станом до відновлення розкриття тріщини внаслідок утворення зони передруйнування із зоною деструкції.

У табл. 5 наведено значення показників сингулярності напружень у вершині до (λ) і після (λ_1) утворення зони передруйнування, а також після виникнення області деструкції (λ_{d1}). Порівняння λ і λ_1 показує, що поява зони передруйнування призводить до підвищення концентрації напружень в околі вершини на відстанях $d \ll r \ll l$ ($\lambda_1 < \lambda$), неминучим наслідком чого стає подальший розвиток зони шляхом утворення в ній області деструкції. Поява області деструкції призводить до послаблення концентрації напружень при наближенні до вершини тріщини на відстань $r \ll d$: найменший корінь λ_{d1} рівняння (3.7) з інтервалу $(-1,0)$ є більшим не лише за показник сингулярності λ_1 після утворення початкової зони передруйнування, але і за показник λ до утворення обох зон ($\lambda_{d1} > \lambda > \lambda_1$). Отже, виникнення області деструкції усуває посилення концентрації напружень в околі вершини внаслідок утворення зони передруйнування, у повній відповідності з висновками п. 2.3.

Таблиця 6

E_1/E_2	0,1	0,2	0,5	1
α° (п. 3.1, $\mu=0$)	67,6	68,1	69,3	70,5
α° ([46], $\mu=0$)	81,6	81,5	81,2	77,8
α° ([55], $\mu=0$)	79,8; 86,1	79,3; 84,3	77,9; 81,1	75,7; 77,1
α° (п. 3.1, $\mu=-10$)	49,7	50,8	55,9	70,5
α° ([45], $\mu=-10$)	81,6	81,6	81,4	77,8
α° (п. 2.1)	81,5	80,5	78,1	75,2

Числові значення нормованого максимального розходження берегів зони передруйнування (3.6) $\tilde{\delta}_m = \frac{\delta u(r_m)}{L} \frac{E_1}{4(1-\nu_1^2)\sigma_1}$ і відносної відстані r_m/L від його розташування до вершини на етапі її розвитку, коли область деструкції ще не з'явилась, наведено в табл. 7 для $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$; $\tau_{1s} = 5\sigma_1$; $q = 0,08\sigma_1$. Розрахунки показують, що при малих відношення E_1/E_2 величина δu_m повільно зменшується з ростом тертя, тоді як при E_1/E_2 близьких до одиниці ця залежність є протилежною. Відстань r_m від вершини початкової тріщини, на якій може виникнути мікротріщина, тим менша, чим більший коефіцієнт тертя її берегів і жорсткість верхнього матеріалу.

Таблиця 7

E_1/E_2	μ	0	-0,05	-0,1	-0,15	-0,2	-0,25	-0,3
0,1	r_m/L	$1,98 \cdot 10^{-4}$	$1,87 \cdot 10^{-4}$	$1,76 \cdot 10^{-4}$	$1,63 \cdot 10^{-4}$	$1,50 \cdot 10^{-4}$	$1,36 \cdot 10^{-4}$	$1,20 \cdot 10^{-4}$
	$\tilde{\delta}_m$	$1,29 \cdot 10^{-4}$	$1,27 \cdot 10^{-4}$	$1,24 \cdot 10^{-4}$	$1,22 \cdot 10^{-4}$	$1,21 \cdot 10^{-4}$	$1,21 \cdot 10^{-4}$	$1,21 \cdot 10^{-4}$
0,9	r_m/L	$1,25 \cdot 10^{-4}$	$1,17 \cdot 10^{-4}$	$1,07 \cdot 10^{-4}$	$9,58 \cdot 10^{-5}$	$8,28 \cdot 10^{-5}$	$6,70 \cdot 10^{-5}$	$4,63 \cdot 10^{-5}$
	$\tilde{\delta}_m$	$3,77 \cdot 10^{-5}$	$3,89 \cdot 10^{-5}$	$4,02 \cdot 10^{-5}$	$4,19 \cdot 10^{-5}$	$4,40 \cdot 10^{-5}$	$4,67 \cdot 10^{-5}$	$5,09 \cdot 10^{-5}$

Механізм зрушення міжфазної тріщини в умовах зсуву шляхом утворення бічної мікротріщини у передвершинній області з наступним її злиттям з початковою макроскопічною тріщиною, підтверджений експериментально у [47] для випадку тріщини в однорідному матеріалі, може бути актуальним при достатньо великому терті берегів, оскільки за великих значень коефіцієнтів тертя, як показало чисельне моделювання в [21], біля вершини тріщини передбачається злипання берегів, тому їх відносне проковзування, а отже, і зрушення тріщини за механізмом зсуву, виявляються неможливими.

3.3. Поворот тріщини при навантаженнях, які забезпечують співрозмірні зони контакту берегів і передруйнування. У попередніх пунктах розглянуто моделі міжфазної тріщини та її повороту для випадку переважаючих відривних навантажень, коли довжина маломасштабної зони передруйнування є значно більшою за довжину контактної зони (п. 2), та у випадку переважаючих зсувних навантажень, коли довжина контактної зони є значно більшою за довжину маломасштабної зони передруйнування (п.п. 3.1, 3.2). Прийняті в цих моделях припущення дозволили звести відповідні крайові задачі до скалярних функціональних рівнянь Вінера – Гопфа, які розв’язуються у замкнутій аналітичній формі. Ситуація ускладнюється у випадку навантажень, які обумовлюють малі порівняно з довжиною тріщини, але близькі між собою розміри області контакту берегів і зони передруйнування ($s = l \ll L$). У сформульованій в п. 1 комплексній моделі, враховуючи одночасно умови (1.2) і (1.5) та приймаючи $d = 0$, задача зводиться до системи взаємозв’язаних функціональних рівнянь відносно трансформант Мелліна компонентів напружень $\sigma_\theta(r, \alpha), \sigma_\theta(r, \pm \pi)$ і градієнтів стрибків переміщень $\frac{\partial}{\partial r} \langle u_\theta(r, \alpha) \rangle, \frac{\partial}{\partial r} \langle u_\theta(r, \pm \pi) \rangle$. Її розв’язок був отриманий в роботі [24] за допомогою методу послідовних наближень, суть якого полягала в наступному.

У нульовому наближенні, нехтуючи взаємним впливом зони передруйнування і контакту берегів, вихідна задача розщеплюється на дві окремі задачі з відомими аналітичними розв’язками:

1) про бічну маломасштабну зону передруйнування, що розвивається з вершини міжфазної тріщини у першому матеріалі при відсутності контакту берегів; її розв’язок знайдено в [39] та описано у п. 2.1;

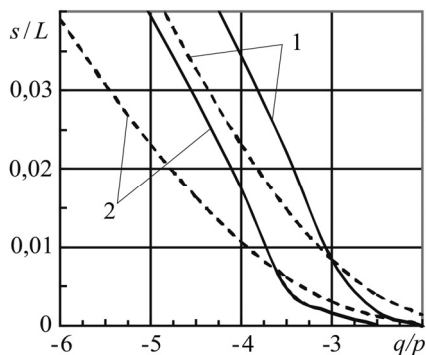
2) про маломасштабну контактну зону біля вершини міжфазної тріщини при відсутності зони передруйнування, розв’язок якої приведено в [5].

У першому наближенні в системі функціональних рівнянь враховуються доданки, які відповідають взаємному впливу контакту берегів і зони передруйнування. З цією метою у перехресних доданках системи невідомі трансформанти замінюються їх виразами, отриманими у попередньому наближенні, що дозволяє розщепити вихідну систему функціональних рівнянь на два незалежні рівняння та розв’язати їх за допомогою методу Вінера – Гопфа. Такий ітераційний процес може бути продовжений, але застосування інтегралів типу Коші на кожному етапі розв’язання системи призводить до зростання кратності інтегралів і до суттєвого збільшення часу виконання числових розрахунків, що змусило в [24] обмежитись лише першим наближенням.

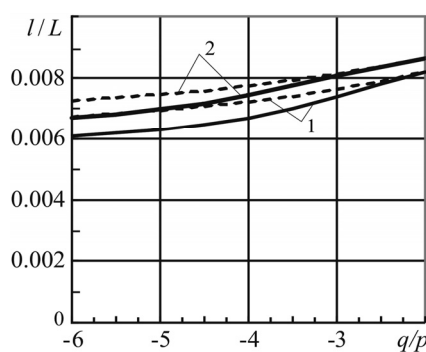
Рівняння для розрахунку довжини зони передруйнування отримано з умови обмеженості напружень в її кінці; рівняння для розрахунку довжини контактної зони виведено з умови обертання напруження в нуль в кінці зони. Для визначення кута нахилу зони передруйнування до межі поділу використано умову максимуму потенціальної енергії, накопиченої в зоні.

Для кількісного аналізу параметрів обох зон розглянуто, як і у попередніх прикладах, внутрішню міжфазну тріщину довжиною L у кусковооднорідній площині, яка навантажена в умовах плоскої деформації нескінченно віддаленими тангенціальними і розтягувальними нормальними напруженнями ($\tau_{xy} = q < 0$, $\sigma_x = p > 0$ при $x, y \rightarrow \infty$,

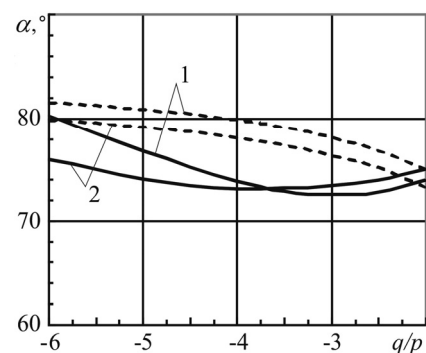
рис. 1). Зовнішнє навантаження задано безрозмірним модулем $f = \sqrt{p^2 + q^2} / \sigma_1$ та конфігурацією, що визначається відношенням q/p . Результати числових розрахунків для $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$; $\mu = -0,5$ зображено на рис. 15 – 17 для окремих параметрів задачі, які відповідають вимогам маломасштабності та співрозмірності контактної зони і зони передруйнування. Зокрема, для рис. 15 було прийнято $f = 0,1$; $E_1/E_2 = 0,1$ (крива 1) і $E_1/E_2 = 0,2$ (крива 2); для рис. 16 використовувались параметри $q/p = -0,4$; $E_1/E_2 = 0,1$ (1) і $E_1/E_2 = 0,2$ (2); для рис. 17 – $q/p = -0,4$; $f = 0,1$ (1) і $f = 0,2$ (2).



a



б



в

Рис. 15

до значень, що відповідають моделі бічної зони передруйнування в кінці розкритої міжфазної тріщини (п. 2.1).

Вплив зони передруйнування проявляється також у тому, що з її утворенням, згідно з рис. 16, а, довжина області контакту берегів стає залежною від модуля навантаження, заданого безрозмірним параметром f (суцільні лінії), тоді як при відсутності зони передруйнування залежність розміру контактної зони від модуля навантаження відсутня (нульове наближення, пунктирні лінії [5]). Довжина зони передруйнування під впливом контакту берегів несуттєво зменшується (рис. 16, б), проте помітно змінюється кут нахилу зони, яка на кілька градусів додатково наближається до межі поділу (рис. 16, в).

Пунктирні лінії на рисунках відповідають нульовому наближенню, а суцільні показують наближені параметри зон, розраховані у першому наближенні.

Після появи зони передруйнування зберігається характер залежності довжини контактної зони від конфігурації навантаження q/p (рис. 15, а): як і при відсутності зони передруйнування (пунктирні лінії) довжина контактної зони суттєво зростає зі збільшенням дотичного навантаження, що діє проти годинникової стрілки в обраній на рис. 1 декартовій системі координат ($q < 0$). В умовах переважаючих зсувних зусиль у зовнішньому навантаженні ($q/p \ll -1$), згідно рис. 15, а, вплив зони передруйнування призводить до значного збільшення довжини області контакту порівняно з її довжиною за відсутності зони передруйнування. При такій конфігурації навантаження довжина контактної зони s (рис. 15, а) виявляється значно більшою за довжину зони передруйнування l (рис. 15, б). Такий результат у даному випадку виправдовує використання моделі зони передруйнування в кінці півнескінченної міжфазної тріщини з контактуючими берегами, дослідженої у п. 3.1. В той же час контакт берегів несуттєво впливає на довжину зони перед руйнування (рис. 15, б), але помітно зменшує кут нахилу зони і змінює характер його залежності від конфігурації навантаження (рис. 15, в), у якій тепер є мінімум, відсутній у нульовому наближенні. Як і очікувалося, при збільшенні вкладу у зовнішньому навантаженні розтягувальних зусиль, перпендикулярних до площини міжфазної тріщини ($q/p \rightarrow 0$), розмір контактної зони прямує до нуля (п. 2.2), а довжина і кут нахилу зони передруйнування наближаються

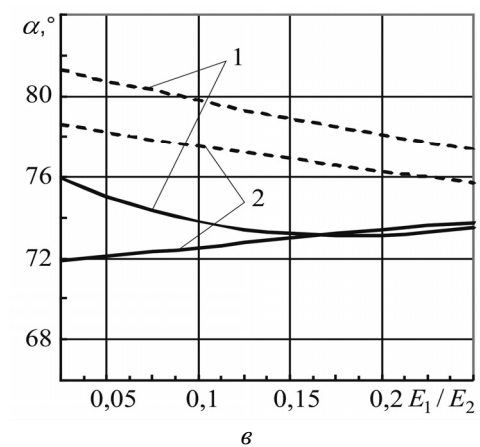
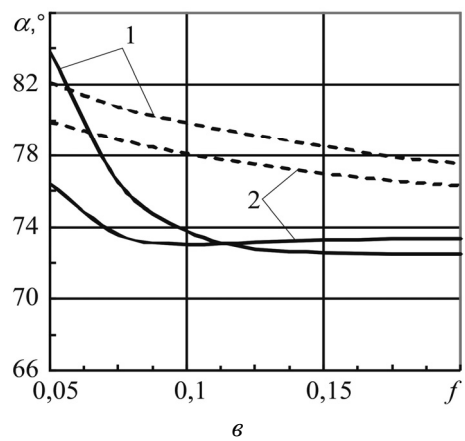
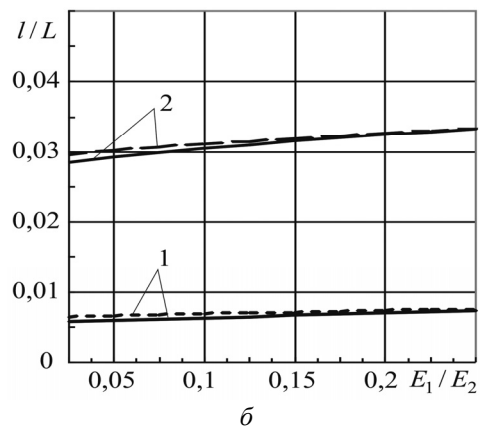
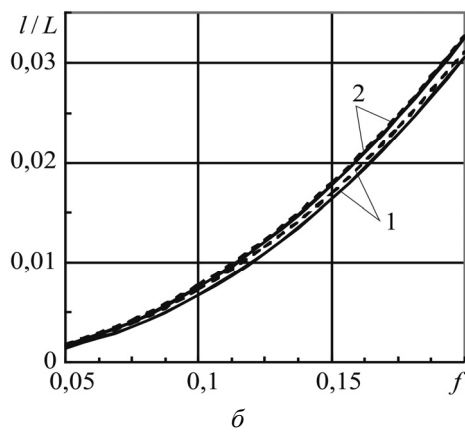
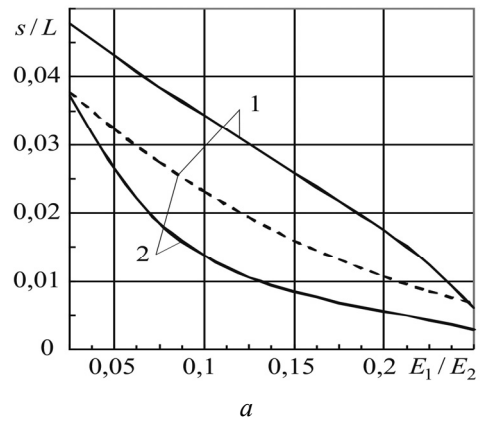
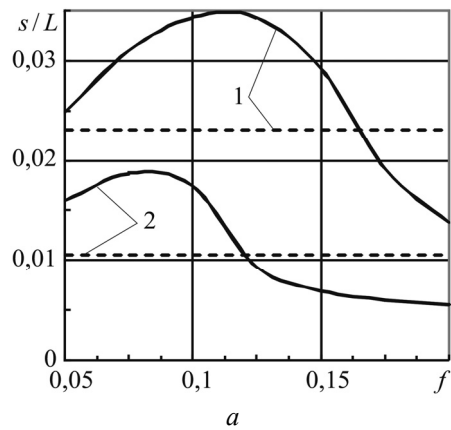


Рис. 16

Рис. 17

Аналогічні висновки про взаємний вплив контакту берегів і зони передруйнування випливають з аналізу залежності їхніх параметрів від відношення модулів Юнга матеріалів E_1/E_2 (рис. 17). Зі зближенням пружних властивостей з'єднаних матеріалів ($E_1/E_2 \rightarrow 1$) довжина контактної зони суттєво зменшується і стає меншою, ніж довжина зони передруйнування; при цьому довжина зони передруйнування і кут її нахилу до межі поділу прямують до значень, які відповідають відсутності контакту берегів.

Висновки.

Прогнозування повороту міжфазної тріщини є актуальною проблемою механіки руйнування, далекою від завершення. У даному огляді представлено аналітичний метод розв'язання цієї проблеми та результати його реалізації. Метод базується на використанні комплексної моделі міжфазної тріщини, яка враховує утворення біля вершини тріщини області контакту берегів і маломасштабної зони передруйнування з привершинною областю деструкції матеріалу.

Досліджувана модель є феноменологічною за своєю суттю. Її основним спрощуючим наближенням є нехтування поперечними розмірами зони передруйнування, що призводить до представлення зони математичним розрізом зі стрибком переміщення і заданим законом взаємодії її берегів. Через суттєву залежність розмірів структурних елементів комплексної моделі від конфігурації зовнішнього навантаження вона зводиться до кількох частинних варіантів з розкритою тріщиною або тріщиною з контактуючими берегами, які відрізняються співвідношеннями довжин зони передруйнування, області контакту берегів та зони деструкції.

Очевидна спрощеність комплексної моделі не забезпечує повного і строгого опису напружено-деформованого стану біля вершини, форми зони передруйнування тощо. Проте, її простота надає можливості отримання аналітичного розв'язку задачі про міжфазну тріщину, який дозволяє зробити наближену кількісну оцінку параметрів структури привершинної області та аналіз їх залежності від навантаження і пружних характеристик з'єднаних матеріалів. Одним з наслідків моделі є можливість передбачення напрямку повороту міжфазної тріщини та умов її зрушення, що має важливе практичне значення у сучасній інженерії. Узгодженість прогнозованих кутів повороту тріщини з відомими їх експериментальними значеннями та розрахунками інших авторів за різними моделями і критеріями засвідчує ефективність комплексної моделі. Наявні ж розбіжності з експериментом можуть бути пов'язані з кількома причинами. По-перше, для експериментів у механіці руйнування притаманними є значний розкид результатів або ж відсутність достатньої статистичної вибірки для надійного визначення середніх значень досліджуваних величин. По-друге, розглянута в статті комплексна модель стосується композитного з'єднання матеріалів з крихким механізмом руйнування, тоді як матеріали, задіяні в експериментах, можуть мати й пластичні властивості, що спричиняє квазікрихкий характер їх руйнування. У такому випадку модель потребує удосконалення, яке передбачає урахування появи біля вершини тріщини маломасштабної пластичної зони. Публікації [25, 40, 41] знайомлять з деякими варіантами таких моделей, які є альтернативою розглянутої тут комплексної моделі і передбачають існування біля вершини міжфазної тріщини області контакту берегів та маломасштабної пластичної зони із зоною деструкції матеріалу у прилеглий до вершини тріщини області.

Також одним з результатів комплексної моделі є пояснення природи повороту початково закритої міжфазної тріщини як наслідку утворення мікротріщини у зоні передруйнування. Усвідомлення такого механізму дає інструмент для розрахунку граничного навантаження, яке відповідає моменту утворення мікротріщини і може бути використаним для оцінки навантаження, за якого відбувається розкриття і зрушення початкової тріщини. Така можливість породжує перспективний напрямок подальших досліджень не лише поширення тріщин, але і їх зародження.

Іншим перспективним предметом досліджень в рамках комплексної моделі є механізм зрушення тріщини на плоскій межі поділу двох матеріалів при стисканні вздовж лінії її розташування. За таких умов навантаження модель потребує додаткових припущень, оскільки біля вершини тріщини реалізується однорідний напружено-деформований стан без сингулярної особливості напружень, що унеможливило застосування критеріїв лінійної механіки руйнування [15, 32]. Один з варіантів застосування комплексної моделі для розв'язання даного роду проблем продемонстровано в [4].

Нові напрямки удосконалення комплексної моделі міжфазної тріщини можуть бути пов'язані з урахуванням додаткових чинників, які можуть впливати на напружено-деформований стан біля вершин. Зокрема, до них можна віднести вплив властивостей

адгезійного прошарку між з'єднуваними матеріалами або ж можливе зчеплення бере-
гів тріщини в частині області їх контакту, виявлене в [21].

РЕЗЮМЕ. Виконано огляд аналітичних моделей зони передруйнування в околі вершини між-
фазної тріщини у кусково-однорідному пружно-крихкому тілі у зв'язку з дослідженням повороту
тріщини від межі поділу з'єднаних матеріалів. В їх основі лежить комплексна модель міжфазної трі-
щини, яка передбачає наявність в околі вершини тріщини області контакту берегів і маломасштабної
зони передруйнування з привершинною областю деструкції матеріалу. Сформульовано основні по-
ложення аналітичного методу врахування маломасштабної зони передруйнування біля вершини між-
фазної тріщини, які дозволяють звести вихідну нелінійну задачу механіки руйнування до розв'язання
крайової задачі теорії пружності про лінію розриву переміщення, що виходить з вершини тріщини у
менш тріщиностійкий матеріал. Математичним апаратом аналітичного розв'язання крайових задач
моделей, що аналізуються, є метод Вінера – Гопфа у поєднанні з інтегральним перетворенням
Мелліна. Розглянуто варіанти реалізації комплексної моделі міжфазної тріщини для випадків пере-
важаючих відривних або зсувних навантажень. Здійснено числовий аналіз параметрів зони перед-
руйнування, області контакту берегів для різних умов навантаження. Виконано порівняння передба-
чень моделі з експериментальними результатами досліджень повороту міжфазної тріщини. Описано
механізм розкриття початково закритої тріщини внаслідок утворення зони деструкції. Здійснено
аналіз результатів наближеного аналітичного розв'язку задачі про комплексну модель міжфазної
тріщини при навантаженнях, які забезпечують співрозмірні зони контакту берегів і передруйнування.
Встановлено взаємний вплив контакту берегів і зони передруйнування на їх параметри та кут пово-
роту тріщини.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: міжфазна тріщина, комплексна модель, зона передруйнування, зона де-
струкції, контакт берегів, поворот тріщини.

1. Каминский А.А., Гаврилов Д.А. Длительное разрушение полимерных и композитных материалов с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1992. – 248с.
2. Каминский А.А., Дудик М.В., Кипнис Л.А. Влияние области деструкции материала вблизи вершины межфазной трещины на условия ее страгивания // Доп. НАН України. – 2014. – № 5. – С. 50 – 57.
3. Каминский А.А., Кипнис Л.А. О страгивании трещины, расположенной на границе раздела упругих сред // Доп. НАН України. – 2011. – № 1. – С. 38 – 43.
4. Камінський А.О., Дудик М.В., Решітнік Ю.В., Феньків В.М. Дослідження початкового етапу руйнування кусково-однорідного тіла з міжфазною тріщиною при стисканні вздовж межі поділу // Матем. методи та фізико-механічні поля. – 2020. – **63**, № 4. – С. 109 – 121.
5. Камінський А.О., Дудик М.В., Кипніс Л.А. Маломасштабна контактна зона з тертям берегів біля вершини міжфазної тріщини // Вісн. Київського нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Серія: фіз.- мат. науки. – 2014. – № 1. – С. 62 – 67.
6. Леонов М.Я., Панасюк В.В. Развитие наиболее тонких трещин в твердом теле // Прикл. механика. – 1959. – **5**, № 4. – С. 391 – 401.
7. Панасюк В.В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1968. – 245 с.
8. Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упругопластического разрушения. – Москва: Наука, 1985. – 502 с.
9. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. – Москва: Наука, 1981. – 688 с.
10. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Ленинград: Наука, 1967. – 402 с.
11. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. – Москва: Наука, 1974. – 640 с.
12. Anderson T.L. Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications: 4th ed. – Boca Raton: CRC Press, 2004. – 680 p.
13. Aranda M.T., García I.G., Reinoso J., Mantič V. Experimental evaluation of the similarity in the inter-
face fracture energy between PMMA/epoxy/PMMA and PMMA/epoxy joints // Eng. Fract. Mech. 2022. – **259**. – N 108076.
14. Bakirov V.F., Gol'dshtein R.V. The Leonov – Panasyuk – Dugdale model for a crack at the interface of the joint of materials // J. Appl. Math. Mech. – 2004. – **68**, N 1. – P. 153 – 161.
15. Bogdanov V.L., Kipnis A.L. Investigation of the Fracture of a Semibounded Body Compressed Along a Near-Surface Interface Crack // J. Math. Sci. – 2021. – **253**, N 1. – P. 99 – 107.

16. Cherepanov G.P. Plastic rupture lines at the tip of a crack // J. Appl. Math. Mech. – 1976. – **40**, N 4. – P. 666 – 674.
17. Comninou M. Interface crack with friction in the contact zone // J. Appl. Mech. Trans. ASME. – 1977. – **44**. – P. 780 – 781.
18. Comninou M. The interface crack // J. Appl. Mech. Trans. ASME. – 1977. – **44**. – P. 631 – 636.
19. Comninou M., Schmueser D. The interface crack in a combined tension-compression and shear field // J. Appl. Mech. Trans. ASME. – 1977. – **44**. – P. 631 – 636.
20. Comninou M., Schmueser D. The interface crack in a combined tension-compression and shear field // J. Appl. Mech. Trans. ASME. – 1979. – **46**. – P. 345 – 348.
21. Dorogoy A., Banks-Sills L. Effect of crack face contact and friction on Brazilian disk specimens – A finite difference solution // Engng. Fract. Mech. – 2005. – **72**. – P. 2758 – 2773.
22. Dudyk M. Destruction Zone near the Tip of Interfacial Crack at a Prevailing Tensile Loading // Бiсн. Тернопільського нац. техн. ун-ту. – 2016. – **81**, № 1. – P. 21 – 28.
23. Dudyk M.V. Influence of the lateral process zone near the tip of an interface crack on the contact of its faces // J. Math. Sci. – 2017. – **222**, N 2. – P. 181 – 193.
24. Dudyk M.V. Mutual influence of the faces contact and the pre-fracture zone near the tip of the interfacial crack // Strength, Fracture and Complexity. – 2020. – **13**, N 3. – P. 143 – 161.
25. Dudyk M.V., Kipnis L.A. Model of the structure of the near tip area of interface crack in a piece-homogeneous elastic-plastic body // Strength, Fracture and Complexity. – 2018. – **11**, N 1. – P. 31 – 50.
26. Dugdale D. Yielding of steel sheets contains slits // J. Mech. Phys. Solids. – 1960. – **8**, N 2. – P. 100 – 104.
27. Dundurs J., Gdoutos A.K. An opportunistic analysis of the interface crack // Int. J. Fract. – 1988. – **36**. – P. 151 – 159.
28. England A.H. A crack between dissimilar media // J. Appl. Mech. Trans. ASME. – 1965. – **32**, N 2. – P. 400 – 402.
29. Erdogan F. Stress distribution in bonded dissimilar materials with cracks // J. Appl. Mech. Trans. ASME. – 1965. – **32**, N 2. – P. 403 – 410.
30. Fu L., Miyasita Y., Mutoh Y. Fracture toughness of Si₃N₄/S45C joint with an interface crack // Advances in Technology of Materials and Materials Processing. – 2005. – **7**, N 1. – P. 47 – 52.
31. Geubelle P.H., Knauss W.G. Crack propagation at and near bimaterial interfaces: Linear analysis // J. Appl. Mech. Trans. ASME. – 1994. – **61**. – P. 560 – 566.
32. Guz A.N., Bogdanov V. L., Nazarenko V.M. Fracture of Materials under Compression along Cracks. – Ser. Advanced Structured Materials. – 138. – Cham: Springer Nature Switzerland AG, 2020. – XVI+490 p.
33. He M.Y., Bartlett A., Evans A.G., Hutchinson J.W. Kinking of a Crack Out of an Interface: Role of In-Plane Stress // J. Amer. Ceram. Soc. – 1991. – **74**. – P. 767 – 771.
34. He M.Y., Hutchinson J.W. Kinking of a crack out of an interface // J. Appl. Mech. Trans. ASME. – 1989. – **56**. – P. 270 – 278.
35. Isaksson P., Ståle P. A directional crack path criterion for crack growth in ductile materials subjected to shear and compressive loading under plane strain conditions // Int. J. Solids Struct. – 2003. – **40**. – P. 3523 – 3536.
36. Kamins'kyi A.O., Dudyk M.V., Kipnis L.A. Investigation of the process zone near the tip of an interface crack in the elastic body in shear within the framework of the complex model // J. Math. Sci. – 2017. – **220**, N 2. – P. 117 – 132.
37. Kaminskii A.A., Usikova G.I., Dmitrieva E.A. Experimental Study of the Distribution of Plastic Strains Near a Crack Tip During Static Loading // Int. Appl. Mech. – 1994. – **30**, N 11. – P. 892 – 897.
38. Kaminsky A.A., Dudik M.V., Kipnis L.A. Initial Kinking of an Interface Crack Between two Elastic Media under Tension and Shear // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 6. – P. 635 – 642.
39. Kaminsky A.A., Dudik M.V., Kipnis L.A. Initial Kinking of an Interfacial Crack Between two Elastic Media // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, N 10. – P. 1090 – 1099.
40. Kaminsky A.A., Dudik M.V., Kipnis L.A. On the Direction of Development of a thin Prefracture Process Zone at the Tip of an Interfacial Crack between Dissimilar Media // Int. Appl. Mech. – 2006. – **42**, N 2. – P. 136 – 144.
41. Kaminsky A.O., Dudik M.V., Reshitnyk Y.V., Chornoivan Y.O. An analytical method of modeling the process zone near the tip of an interface crack due to its kinking from the interface of quasi-elastic materials // Int. J. Solids Struct. – 2023. – **267**, – N 112117.

42. Kohut I.S., Kalyta H.I. Evaluation of the sizes of the process zone for quasibrittle notched specimens // *Materials Sci.* – 2008. – **44**, N 1. – P. 97 – 103.
43. Kurchakov E.E. Experimental Study of the Plastic Zone at the Front of a Mode I Crack // *Int. Appl. Mech.* – 2018. – **54**, N 2. – P. 213 – 219.
44. Leblond J.B., Frelat J. Crack kinking from an initially closed interface crack // *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences – Series II B – Mechanics – Physics – Astronomy.* – 1999. – **327**, N 13. – P. 1311 – 1318.
45. Leblond J.B., Frelat J. Crack kinking from an initially closed, ordinary or interface crack, in the presence of friction // *Eng. Fract. Mech.* – 2004. – **71**. – P. 289 – 307.
46. Leblond J.B., Frelat J. Crack kinking from an interface crack with initial contact between the crack lips // *Eur. J. Mech. – A/Solids.* – 2001. – **20**. – P. 937 – 951.
47. Leksowskij A.M., Baskin B.L. Some aspects of nucleation and evolution of microscopic and mesoscopic cracks and quasi-brittle fracture of homogeneous materials // *Physics of the Solid State.* – 2011. – **53**, N. 6. – P. 1223 – 1233.
48. Nayfeh A.H. *Perturbation Methods.* – New York: Wiley-Interscience, 1973. – 415 p.
49. Noble B. *Methods Based on the Wiener – Hopf Technique for the Solution of Partial Differential Equations*, 2nd ed. – New York: Chelsea Pub. Co., 1988. – 246 p.
50. Ostryk V.I. Friction contact of the edges of an interface crack under the conditions of tension and shear // *Material Sci.* – 2003. – **39**, N 2. – P. 214 – 224.
51. Panasyuk V.V., Pan'ko I.M. Limiting Equilibrium of a Cracked Body with Regard for the Specific Features of the Distribution of Stresses Near the Crack Tip // *Materials Sci.* – 2005. – **41**, N 4. – P. 433 – 438.
52. Pro W.J., Sehr S., Lim R.K., Petzold L.R., Begley M.R. Conditions controlling kink crack nucleation out of, and delamination along, a mixed-mode interface crack // *J. Mech. Phys. Solids.* – 2018. – **121**. – P. 480 – 495.
53. Radaj D., Zhang S. Process zone fracture criteria for crack tips // *Eng. Fract. Mech.* – 1995. – **50**. – P. 111 – 120.
54. Rice J.R., Sih G.C. Plane problems of cracks in dissimilar media // *J. Appl. Mech. Trans. ASME.* – 1965. – **32**, N 2. – P. 418 – 423.
55. Shan B.X., Pelegri A.A., Pan Y. Interfacial crack kinking subjected to contact effects // *J. of Mechanics of Materials and Struct.* – 2008. – **3**, N 4. – P. 591 – 605.
56. Tang S., Zehnder A.T. Nickel-alumina interfacial fracture toughness using the thick foil technique // *Engng. Fract. Mech.* – 2002. – **69**. – P. 701 – 715.
57. Wells A.A. Critical tip opening displacement as fracture criterion. In: *Proc. of Crack Propagation Symposium*, Cranfield, 1961. – P. 210 – 221.
58. Wieghardt K. Über das spalten und zerreißen elastischer Körper // *Z. Math. Phys.* – 1907. – **55**. – S. 60 – 103.
59. Williams M.L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension // *J. Appl. Mech. Trans. ASME.* – 1952. – **19**, N 4. – P. 526 – 535.
60. Williams M.L. The stresses around a fault or crack in dissimilar media // *Bulletin of the Seismological Soc. of America.* – 1959. – **49**. – P. 199 – 204.
61. Wu E.M. Strength and fracture of composites. In: *Fracture and Fatigue*. Vol. 5 (ed. Broutman L. J.). – New-York: Academic Press, 1974. – P. 206 – 266.
62. Xie D., Waas A.M., Shahwan K.W., Schroeder J.A., Boeman R.G. Fracture criterion for kinking cracks in a tri-material adhesively bonded joint under mixed mode loading // *Eng. Fract. Mech.* – 2005. – **72**. – P. 2487 – 2504.

Надійшла 05.02.2023

Затверджена до друку 27.06.2023