

Я.Я.Рущицький¹, О.О.Хотенко¹, В.М.Юрчук^{1,2}

ПРО ОСОБЛИВОСТІ ГРАНИЧНИХ УМОВ В АНАЛІЗІ НЕЛІНІЙНИХ ХВИЛЬ
НА ПРИКЛАДІ ПОВЕРХНЕВОЇ І КРУТИЛЬНОЇ ХВИЛЬ

¹Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,

вул. П.Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна;

e-mail: rushch@inmtech.kiev.ua; e-mail: rheol@inmtech.kiev.ua

²Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського»,

просп. Берестейський, 37, 03056, Київ, Україна

Abstract. The peculiarities of using the boundary conditions in the nonlinear problems of wave propagation are analyzed for media that deform elastically and have an internal or external boundary. The analysis is carried out on the example of two types of waves – a Rayleigh surface wave and a torsional wave. The statement and wave analysis of the specified two waves in the linear (classical) approach are briefly described since the linear solutions are used in the work as a first approximation in the nonlinear approach. Common to both types of waves (and, apparently, to other waves in media with boundaries) is a significant complication in the nonlinear approach of the boundary conditions due to the difference between the shape of the boundary before and after deformation (in the linear approach, the shape of the boundary does not change). Also, a common feature is the significant complication of the mathematical representation of boundary conditions due to the appearance of additional nonlinear terms. An example of the Rayleigh surface wave shows that the procedure for solving the problem using nonlinear boundary conditions is difficult but possible. The example of a torsional wave revealed the fact that the use of the condition of absence of stresses on the boundary surface (assumption of a free boundary) may not be completely correct.

Key words: boundary conditions; nonlinear surface and torsional waves; five-constant Murnaghan potential; comparison of features of boundary conditions analysis.

Вступ.

Предметом проведеного дослідження є граничні умови, які необхідно задовольняти при аналізі поширення поверхневої та крутильної хвиль в пружних матеріалах в рамках лінійного та нелінійного підходів. Історичний досвід аналізу пружних хвиль в матеріалах з-поміж спостережених багатьох загальних важливих фактів [1 – 5, 8, 9, 12, 15 – 20, 25, 34, 35, 37] містить два, які є суттєвими для проведеного дослідження. Перший полягає у тому, що постановка задачі і отриманий при лінійному підході розв'язок складають, як правило, основу в реалізації нелінійного підходу. Другий стосується хронології аналізу нелінійних хвиль в матеріалах – спочатку досліджувалися вільні (біжучі) хвилі, які за означенням поширюються в пружних середовищах (матеріалах), що не мають внутрішніх чи зовнішніх границь, і лише згодом вивчалися хвилі в пружних середовищах з границями. Тому так сталося, що нелінійні пружні хвилі в середовищах з границями вивчені у меншій степені.

Нелінійний підхід в механіці матеріалів починається з вибору нелінійної моделі деформування. Найбільш поширеною моделлю є п'ятиконстантна модель Мернагана [2, 3, 30, 35, 37].

Необхідна інформація щодо нелінійної моделі Мернагана. В даному дослідженні модель Мернагана характеризується потенціалом

$$W = \frac{1}{2} \lambda (\varepsilon_{mm})^2 + \mu (\varepsilon_{ik})^2 + \frac{1}{3} A \varepsilon_{ik} \varepsilon_{im} \varepsilon_{km} + B (\varepsilon_{ik})^2 \varepsilon_{mm} + \frac{1}{3} C (\varepsilon_{mm})^3, \quad (1)$$

де λ, μ – пружні константи другого порядку (константи Ляме); A, B, C – пружні константи третього порядку (константи Мернагана). В потенціалі (1) використано записаний через вектор деформації $\vec{u} = \{u_k\}$ нелінійний тензор деформації Коші – Гріна у вигляді

$$\varepsilon_{nm} = \frac{1}{2} (u_{n,m} + u_{m,n} + u_{n,i} u_{i,m}). \quad (2)$$

Необхідна інформація щодо класичних задач теорії пружності про поширення двох хвиль – поверхневої та крутильної. Ця інформація потрібна для аналізу цих двох хвиль в рамках нелінійного підходу, який оснований на моделі Мернагана, тому що розв’язок нелінійної задачі шукається наближеним методом в рамках перших двох наближень і перше наближення є лінійним (є розв’язком лінійної задачі).

Розглянемо лінійний підхід для кожної хвилі окремо.

Класична поверхнева хвиля Релея. Ця хвиля описана в багатьох книгах з теорії пружності [8, 31] та окремо з теорії хвиль [1, 9, 35]. Поверхнею, вздовж якої поширюється хвиля, є площина. Тому використовуються прямокутні декартові координати і рівняння руху записується через напруження. Тут слід зазначити, що симетричний тензор напруження Лягранжа σ_{ik} і несиметричний тензор напруження Кірхгофа t_{ik} в нелінійному підході відмінні між собою, а в лінійному вони ідентичні. Звичайно рівняння руху записуються через тензор Лягранжа [2, 30]

$$\sigma_{ik,k} = \rho u_{i,tt}. \quad (3)$$

Далі в (3) враховуються конститутивні рівняння $\sigma_{ik} = \lambda \varepsilon_{ik} \delta_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ik}$ (рівняння Гука з пружними постійними Ляме λ, μ) і лінійні співвідношення Коші (2) $\varepsilon_{ik} = (u_{i,k} + u_{k,i})/2$.

В результаті отримуються рівняння руху, записані лише через зміщення (рівняння Ляме)

$$\mu \Delta u_i + (\lambda + \mu) u_{k,ki} = \rho u_{i,tt}. \quad (4)$$

Класична постановка задачі про хвилю Релея полягає у знаходженні розв’язку трьох рівнянь (4) при умові, що пружне середовище займає верхній півпростір $x_3 \geq 0$ і вздовж площини $x_3 = 0$ поширюється гармонічна хвиля, яка локалізована біля площини (хвиля є поверхневою). Звичайно задача спрощується за припущенням, що горизонтальний і вертикальний рухи вздовж площини є ідентичними. Тоді рух не залежатиме від координати x_2 , і задача стає двовимірною (плоскою задачею в площині Ox_1x_3). Напрямок руху хвилі вибирається вздовж осі Ox_1 . В результаті необхідно аналізувати два рівняння руху

$$\mu \Delta u_1 + (\lambda + \mu) (u_{1,11} + u_{3,31}) = \rho u_{1,tt}; \quad \mu \Delta u_3 + (\lambda + \mu) (u_{1,13} + u_{3,33}) = \rho u_{3,tt}. \quad (5)$$

Система (5) є зв’язаною і тому вводять замість двох зміщень дві нові функції-потенціали за формулами

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_3, t) &= [\varphi(x_1, x_3, t)]_{,1} + [\psi(x_1, x_3, t)]_{,3}; \\ u_3(x_1, x_3, t) &= [\varphi(x_1, x_3, t)]_{,3} - [\psi(x_1, x_3, t)]_{,1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Потенціали визначаються вже з незв'язаних достатньо простих рівнянь

$$\rho\varphi_{,tt} - (v_L)^2 \Delta\varphi = 0; \quad \rho\psi - (v_T)^2 \Delta\psi = 0, \quad (7)$$

де $v_L = \omega/k_L = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$; $v_T = \omega/k_T = \sqrt{\mu/\rho}$ є швидкостями поздовжньої та поперечної хвиль.

Розв'язок системи (7) вибирається у вигляді гармонічних хвиль з невідомими амплітудами

$$\varphi^{(1)}(x_1, x_3, t) = e^{i(k_{lin}x_1 - \omega t)} \tilde{\varphi}(x_3); \quad \psi^{(1)}(x_1, x_3, t) = e^{i(k_{lin}x_1 - \omega t)} \tilde{\psi}(x_3). \quad (8)$$

Амплітуди $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\psi}$ задовольняють рівняння

$$\tilde{\varphi}'' - k_\varphi^2 \tilde{\varphi} = 0; \quad \tilde{\psi}'' - k_\psi^2 \tilde{\psi} = 0; \quad k_\varphi^2 = k_{lin}^2 - k_L^2; \quad k_\psi^2 = k_{lin}^2 - k_T^2$$

і розв'язок у вигляді затухаючої зі збільшенням відстані від поверхні хвилі стає таким:

$$\varphi^{(1)}(x_1, x_3, t) = A_\varphi e^{i(k_{lin}x_1 - \omega t) - \sqrt{k_{lin}^2 - k_L^2} x_3} = A_\varphi E E_L; \quad (9)$$

$$\psi^{(1)}(x_1, x_3, t) = A_\psi e^{i(k_{lin}x_1 - \omega t) - \sqrt{k_{lin}^2 - k_T^2} x_3} = A_\psi E E_T.$$

Отже, в лінійному підході потенціали мають вигляд гармонічної хвилі з частотою ω і хвильовим числом k_{lin} , яка затухає за експоненціальним законом при віддаленні від площини $x_3 = 0$. Однак, хвильове число залишається невідомим. Воно визначається з граничних умов. Граничні умови вільної від напружень границі вважаються природними в задачі про хвилі Релея

$$t_{13}(x_1, 0, t) = 0; \quad t_{33}(x_1, 0, t) = 0. \quad (10)$$

Умови (10) в записі через потенціали мають вигляд

$$t_{33}(x_1, x_3 = 0, t) = \lambda \Delta[\varphi(x_1, 0, t)] + 2\mu[\varphi(x_1, 0, t)]_{,33} - 2\mu[\psi(x_1, 0, t)]_{,13} = 0; \quad (11)$$

$$t_{31}(x_1, x_3 = 0, t) = \mu \left\{ 2[\varphi(x_1, 0, t)]_{,31} + [\psi(x_1, 0, t)]_{,33} - [\psi(x_1, 0, t)]_{,11} \right\} = 0. \quad (12)$$

При підстановці в (11), (12) розв'язків (9) граничні умови набувають вигляду

$$l_1(k_{lin}) A_\varphi + l_2(k_{lin}) A_\psi = 0; \quad l_3(k_{lin}) A_\varphi + l_4(k_{lin}) A_\psi = 0; \quad (13)$$

$$l_1 = 2\mu k_{lin}^2 - (\lambda + 2\mu)(k_L^2); \quad l_2 = 2\mu i k_{lin} \sqrt{k_{lin}^2 - k_T^2};$$

$$l_3 = -2i\mu k_{lin} \sqrt{k_{lin}^2 - k_L^2}; \quad l_4 = \mu(2k_{lin}^2 - k_T^2).$$

З аналізу однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь щодо невідомих постійних амплітуд A_φ , A_ψ (13) отримують два важливі висновки.

Висновок 1. Одна з амплітуд виражається через іншу, яка вважається довільною

$$A_\psi^{(1)} = -[l_1(k_{lin})/l_2(k_{lin})] A_\varphi^{(1)} = i(2k_{lin}^2 - k_T^2) / [2k_{lin} \sqrt{k_{lin}^2 - k_T^2}] A_\varphi^{(1)}. \quad (14)$$

Тут доцільно вказати на книгу [1], де доведено, що довільність амплітуди є іманентною властивістю будь-якої поверхневої хвилі.

Розв'язок задачі про хвилю Релея в лінійному підході має вигляд

$$\varphi^{(1)}(x_1, x_3, t) = A_\varphi e^{i(k_{lin}x_1 - \omega t) - k_\varphi x_3}; \quad (15)$$

$$\psi^{(1)}(x_1, x_3, t) = A_\psi e^{i(k_{lin}x_1 - \omega t) - k_\psi x_3} = -[l_1(k_{lin})/l_2(k_{lin})] A_\varphi e^{i(k_{lin}x_1 - \omega t) - k_\psi x_3}.$$

Висновок 2. Хвильове число (чи швидкість) хвилі знаходять з умови рівності детермінанта лінійної системи однорідних алгебраїчних рівнянь (13) нулеві

$$l_1 l_4 - l_2 l_3 = 0 \quad \text{або} \quad (2k^2 - k_T^2)^2 + 4k^2 \sqrt{k^2 - k_L^2} \sqrt{k^2 - k_T^2} = 0. \quad (16)$$

Рівняння (15) і його варіанти називають рівнянням Релея.

Класична крутильна хвиля. Як правило, в задачі про поширення гармонічної хвилі негласно приймається, що така хвиля збуджується гармонічним у часі імпульсом. Щодо гармонічної крутильної хвилі в напрямку осі симетрії Oz циліндра кругового поперечного перерізу вважається, що вона збуджується імпульсом $u_\vartheta(t) = u_\vartheta^0 e^{i\omega t}$, прикладеним до поперечного перерізу циліндра $z = 0$. Тоді в циліндрі виникає гармонічна у часі крутильна хвиля, яка поширюється вздовж осі циліндра. Особливості лінійної крутильної хвилі в пружному циліндрі є такими [9, 31]: а) застосовуються циліндричні координати (r, ϑ, z) ; б) деформований стан є осесиметричним і тому не залежить від координати ϑ ; в) радіальне і осьове зміщення відсутні $u_r(r, z, t) = u_z(r, z, t) = 0$ (ці ж особливості зберігаються і при нелінійному описі). Тоді система з трьох рівнянь руху циліндра спрощується до вигляду

$$u_{\vartheta,rr} + (1/r)u_{\vartheta,r} - (1/r^2)u_\vartheta + u_{\vartheta,zz} - (1/v_T^2)u_{\vartheta,tt} = 0. \quad (17)$$

Класичний аналіз крутильної хвилі проводиться у декілька кроків. Спочатку припускається, що колове зміщення u_ϑ є гармонічним у часі і просторі

$$u_\vartheta(r, z, t) = \tilde{u}_\vartheta(r) e^{i(k_z z - \omega t)}. \quad (18)$$

Розв'язок (18) є гармонічною крутильною хвилею, оскільки кожен поперечний переріз циліндра здійснює гармонічне коливання у коловому напрямку з заданою частотою ω у часі і за просторовою координатою z рухається хвиля з довжиною $\lambda = (2\pi/k_z)$ та хвильовим числом k_z . При цьому циліндр піддається деформації кручення і саме тому хвилю називають крутильною.

З постановки задачі випливає, що необхідні компоненти тензорів напружень та деформацій є такими:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = 2\mu\varepsilon_{rr} + \lambda e = 0; \quad \sigma_{r,g} = 2\mu\varepsilon_{r,g}; \quad \sigma_{rz} = 2\mu\varepsilon_{rz} = 0; \\ \varepsilon_{rr} = 0; \quad \varepsilon_{r,g} = (1/2)[u_{\vartheta,r} - (1/r)u_\vartheta]; \quad \varepsilon_{rz} = 0; \quad e = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Далі амплітуда хвилі, що залежить від радіуса, визначається з рівняння

$$u_{\vartheta,rr} + (1/r)u_{\vartheta,r} + [k_z^2 - k_T^2 - (1/r^2)]u_\vartheta = 0. \quad (20)$$

Розв'язок рівняння (20) виражається через функцію Бесселя 1-го роду і 1-го індексу $\tilde{u}(r) = \tilde{u}_\vartheta^0 J_1(\beta r)$, $\beta = \sqrt{k_T^2 - k_z^2}$ і розв'язок (18) у вигляді крутильної хвилі набуває вигляду

$$u_\vartheta(r, z, t) = \tilde{u}_\vartheta^0 J_1(\beta r) e^{i(k_z z - \omega t)}. \quad (21)$$

Невідоме хвильове число k_z і відповідна швидкість $v_z = (\omega/k_z)$ визначаються з умови відсутності напружень на боковій поверхні циліндра $r = r^o$

$$\sigma_{rr}(r^o, z, t) = \sigma_{r\theta}(r^o, z, t) = \sigma_{rz}(r^o, z, t) = 0. \quad (22)$$

Тут слід зазначити, що напруження σ_{rr} , σ_{rz} взагалі відсутні в циліндрі в лінійній постановці задачі.

При підстановці розв'язку (21) у граничну умову $\sigma_{r\theta}(r^o, z, t) = 0$ отримують трансцендентне рівняння $\beta r^o J_0(\beta r^o) = 2J_1(\beta r^o)$ для знаходження хвильового числа k_z . Це рівняння має нескінченну кількість коренів $\beta_k r^o$ ($k = 1, 2, \dots$), які для конкретної задачі знаходять чисельно. Відповідно, крутильна хвиля має нескінченну кількість мод з відмінними між собою швидкостями

$$(v_z)_k = v_T \sqrt{1 + \beta^2 (k_z)_k^2}.$$

1. Нелінійний підхід до аналізу поверхневої хвилі Релея.

Хвиля Релея, незважаючи на дуже давній теоретичний опис Релеєм і очевидну класичність, вивчається до цього часу представниками різних областей науки [6, 13 – 19, 21 – 24, 26, 28, 29, 31 – 33, 35, 42, 46 – 48]. Основні рівняння реалізованого у даному дослідженні нелінійного підходу можна знайти в роботах [6, 31, 35]

$$\begin{aligned} & \rho \ddot{u}_1 - (\lambda + 2\mu)u_{1,11} - (\lambda + 2\mu)u_{3,31} - \mu u_{1,33} = \\ & = 2(A + 3B + C)u_{1,1}u_{1,11} + \left(\frac{A}{2} + 3B + 2C\right)u_{3,3}u_{3,13} + \\ & + \left(\frac{A}{2} + B\right)(u_{1,1}u_{1,33} + 2u_{1,3}u_{1,13} + u_{3,1}u_{3,11} + u_{3,1}u_{3,33}); \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & \rho \ddot{u}_3 - (\lambda + 2\mu)u_{3,33} - (\lambda + 2\mu)u_{1,13} - \mu u_{3,11} = \\ & = 2(A + 3B + C)u_{3,3}u_{3,33} + \left(\frac{A}{2} + 3B + 2C\right)u_{1,1}u_{1,13} + \\ & + \left(\frac{A}{2} + B\right)(u_{3,3}u_{3,11} + 2u_{3,1}u_{3,13} + u_{1,3}u_{1,33} + u_{1,3}u_{1,11}). \end{aligned} \quad (24)$$

Вкажемо на три особливості рівнянь (23), (24). Перша полягає у тому, що нелінійність тут врахована через застосування моделі Мернагана і рівняння є квадратично нелінійними. Причому врахована лише фізична нелінійність, що дає змогу аналізувати хвилі з малими амплітудами чи, іншими словами, вважати деформації малими, оскільки саме модель Мернагана є нелінійною при малих деформаціях. Звичайно в нелінійній теорії пружності розрізняють два типи нелінійностей в основних рівняннях – геометричну і фізичну. Геометрична виникає, коли в записі тензора деформації враховуються квадратично нелінійні доданки. Тоді у загальному випадку при записі хвильових рівнянь у цих рівняннях виникають нелінійні доданки з множниками у вигляді пружних констант Ляме μ , λ . Фізична нелінійність пов'язана з вибором конститутивних рівнянь (залежностей між напруженнями і деформаціями). Тоді основні нелінійні рівняння містять нелінійні доданки, які включають лише параметри нелінійності. Саме така ситуація присутня в рівняннях (24).

Друга дозволяє використовувати при знаходженні розв'язків системи (23), (24) метод послідовних наближень, тому що обидва рівняння системи мають відповідну структуру – вони містять окремо лінійну частину, яка відповідає лінійному класичному підходу, і окремо нелінійну частину.

Третя пов'язана з тим, що нелінійні частини включають лише три пружні постійні Мернагана.

Процедура отримання розв'язку у вигляді двох перших наближень є класичною для теорії лінійних і нелінійних хвиль. Спочатку вводяться потенціали за формулами (6), при підстановці яких в рівняння руху (23), (24) отримуються рівняння (в них не врахований нелінійний перехресний вплив потенціалів)

$$\begin{aligned} & [\rho\ddot{\varphi} - (\lambda + 2\mu)\Delta\varphi]_{,1} + [\rho\ddot{\psi} - \mu\Delta\psi]_{,3} = \\ & = 2(A + 3B + C)\varphi_{,11}\varphi_{,111} + \left(\frac{1}{2}A + B\right)\varphi_{,11}\varphi_{,133} + \left(\frac{A}{2} + 3B + 2C\right)\varphi_{,33}\varphi_{,133} + \\ & + 3\left(\frac{1}{2}A + B\right)\varphi_{,13}\varphi_{,113} + \left(\frac{1}{4}A + 2B\right)\varphi_{,13}\varphi_{,333} + \left(\frac{5}{2}A + 9B + 3C\right)\psi_{,13}\psi_{,113} + \left(\frac{1}{2}A + B\right)\psi_{,13}\psi_{,333} + \\ & + (A + 2B)\psi_{,33}\psi_{,133} + \left(\frac{1}{2}A + B\right)\psi_{,11}\psi_{,111} + \left(\frac{1}{4}A + 2B\right)\psi_{,11}\psi_{,133}; \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & [\rho\ddot{\varphi} - (\lambda + 2\mu)\Delta\varphi]_{,3} - [\rho\ddot{\psi} - \mu\Delta\psi]_{,1} = \\ & = 2(A + 3B + C)\varphi_{,33}\varphi_{,333} + \left(\frac{1}{2}A + B\right)\varphi_{,33}\varphi_{,113} + \left(\frac{A}{2} + 3B + 2C\right)\varphi_{,11}\varphi_{,113} + \\ & + 3\left(\frac{1}{2}A + B\right)\varphi_{,13}\varphi_{,133} + \left(\frac{1}{4}A + 2B\right)\varphi_{,13}\varphi_{,111} + \left(\frac{5}{2}A + 9B + 3C\right)\psi_{,13}\psi_{,133} + \left(\frac{1}{2}A + B\right)\psi_{,13}\psi_{,111} + \\ & + (A + 2B)\psi_{,11}\psi_{,113} + \left(\frac{1}{2}A + B\right)\psi_{,33}\psi_{,333} + \left(\frac{1}{4}A + 2B\right)\psi_{,33}\psi_{,113} \end{aligned} \quad (26)$$

(перше і друге рівняння отримуються один з одного заміною індексів $1 \rightleftharpoons 3$).

Якщо застосувати до рівнянь (25), (26) метод послідовних наближень (тобто, використати досвід аналізу плоских нелінійних хвиль [2, 3, 8, 9]), то перше (лінійне) наближення слід вибирати у вигляді (9).

Хвильові рівняння для знаходження другого наближення є двома неоднорідними рівняннями

$$\Delta[\ddot{\varphi}^{(2)} - (\omega^2/k_L^2)\Delta\varphi^{(2)}] = (A_\varphi^{(1)})^2 (E)^2 [M_\varphi^L (E_L)^2 + M_\varphi^{(T)} (E_T)^2 + M_{\varphi\psi}^{LT} E_L E_T]; \quad (27)$$

$$\Delta[\ddot{\psi}^{(2)} - (\omega^2/k_T^2)\Delta\psi^{(2)}] = -i(A_\psi^{(1)})^2 (E)^2 [M_\psi^L (E_L)^2 + M_\psi^{(T)} (E_T)^2 + M_{\varphi\psi}^{LT} E_L E_T]. \quad (28)$$

Коефіцієнти M_φ^L , M_φ^T , M_ψ^L , M_ψ^T , $M_{\varphi\psi}^{LT}$, $M_{\psi\varphi}^{TL}$ залежать від невідомого хвильового числа нелінійної хвилі Релея та фізичних властивостей середовища поширення хвилі. Наприклад,

$$\begin{aligned} M_\varphi^L &= -\frac{4}{\rho} \left[(A + 3B + C)(k^6 + k_\varphi^6 - 3k^2 k_\varphi^4) + (2A + 5B + C)k^4 k_\varphi^2 \right]; \\ M_\psi^L &= \frac{8i}{\rho} \left\{ -\left(\frac{A}{2} + 2B + C\right)k^2 k_\varphi^4 + (B + C)k^4 k_\varphi^2 \right\}. \end{aligned} \quad (29)$$

Розв'язок системи (27), (28) є таким:

$$\begin{aligned} \varphi^{(2)}(x_1, x_3, t) = & \frac{1}{4} x_1 x_3 \left(A_{\varphi}^{(1)} \right)^2 E^2 \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \times \\ & \times \left\{ -\frac{1}{4k_L^2} \frac{k_{\varphi} x_1 + ik_{lin} x_3}{(k_{\varphi} x_1)^2 + (k_{lin} x_3)^2} M_{\varphi}^L E_L^2 - \frac{1}{4k_T^2} \frac{k_{\psi} x_1 + ik_{lin} x_3}{(k_{\psi} x_1)^2 + (k_{lin} x_3)^2} M_{\varphi}^T E_T^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{k_{\varphi} k_{\psi} - k_{lin}^2} \frac{2x_1 (k_{\varphi} + k_{\psi}) + 4ik_{lin} x_3}{[2x_1 (k_{\varphi} + k_{\psi})]^2 + 16(k_{lin} x_3)^2} M_{\varphi\psi}^{LT} E_L E_T \right\}; \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \psi^{(2)}(x_1, x_3, t) = & \frac{1}{4} x_1 x_3 \left(A_{\psi}^{(1)} \right)^2 E^2 \frac{\rho}{\mu} \times \\ & \times \left\{ -\frac{1}{4k_L^2} \frac{k_{\varphi} x_1 + ik_{lin} x_3}{(k_{\varphi} x_1)^2 + (k_{lin} x_3)^2} M_{\psi}^L E_L^2 - \frac{1}{4k_T^2} \frac{k_{\psi} x_1 + ik_{lin} x_3}{(k_{\psi} x_1)^2 + (k_{lin} x_3)^2} M_{\psi}^T E_T^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{k_{\varphi} k_{\psi} - k_{lin}^2} \frac{2x_1 (k_{\varphi} + k_{\psi}) + 4ik_{lin} x_3}{[2x_1 (k_{\varphi} + k_{\psi})]^2 + 16(k_{lin} x_3)^2} M_{\psi\varphi}^{TL} E_L E_T \right\}. \end{aligned} \quad (31)$$

Далі знехтуємо доданками з перехресним впливом $M_{\psi\varphi}^{TL}$ і вкажемо на два прості випадки розв'язків (30), (31). Якщо врахувати лише вплив поверхневої хвилі і знехтувати її затуханням вглиб матеріалу, то ці розв'язки спрощуються

$$\varphi^{(2)}(x_1, x_3, t) = ix_1 \frac{M_{\varphi}^{(1)}}{4k_{lin}} \left(A_{\varphi}^{(1)} \right)^2 e^{2\left[i(k_{lin} x_1 - \omega t) - \sqrt{k_{lin}^2 - k_L^2} x_3 \right]}; \quad (32)$$

$$\psi^{(2)}(x_1, x_3, t) = ix_1 \frac{M_{\psi}^{(1)}}{4k_{lin}} \left(A_{\psi}^{(1)} \right)^2 e^{2\left[i(k_{lin} x_1 - \omega t) - \sqrt{k_{lin}^2 - k_T^2} x_3 \right]}. \quad (33)$$

Якщо врахувати лише вплив затухання поверхневої хвилі вглиб матеріалу і знехтувати рухом самої хвилі, то ці розв'язки спрощуються до іншого вигляду

$$\varphi^{(2)}(x_1, x_3, t) = -\frac{x_3 M_{\varphi}^{(1)}}{4\sqrt{k_{lin}^2 - k_L^2}} \left(A_{\varphi}^{(1)} \right)^2 e^{2\left[i(k_{lin} x_1 - \omega t) - \sqrt{k_{lin}^2 - k_L^2} x_3 \right]}; \quad (34)$$

$$\psi^{(2)}(x_1, x_3, t) = -\frac{x_3 M_{\psi}^{(1)}}{4\sqrt{k_{lin}^2 - k_T^2}} \left(A_{\psi}^{(1)} \right)^2 e^{2\left[i(k_{lin} x_1 - \omega t) - \sqrt{k_{lin}^2 - k_T^2} x_3 \right]}. \quad (35)$$

Таким чином, розв'язок сформульованої вище задачі про поширення хвилі Релея в рамках двох наближень має вигляд

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_3, t) = & \varphi^{(1)}(x_1, x_3, t) + \varphi^{(2)}(x_1, x_3, t) = \\ = & A_{\varphi}^{(1)} E E_L + \frac{1}{4} x_1 x_3 \left(A_{\varphi}^{(1)} \right)^2 E^2 \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \times \end{aligned}$$

$$\times \left\{ -\frac{1}{4k_L^2} \frac{k_\varphi x_1 + ik_{lin} x_3}{(k_\varphi x_1)^2 + (k_{lin} x_3)^2} M_\varphi^L E_L^2 - \frac{1}{4k_T^2} \frac{k_\psi x_1 + ik_{lin} x_3}{(k_\psi x_1)^2 + (k_{lin} x_3)^2} M_\varphi^T E_T^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{k_\varphi k_\psi - k_{lin}^2} \frac{2x_1(k_\varphi + k_\psi) + 4ik_{lin} x_3}{[2x_1(k_\varphi + k_\psi)]^2 + 16(k_{lin} x_3)^2} M_{\varphi\psi}^{LT} E_L E_T \right\}; \quad (36)$$

$$\psi(x_1, x_3, t) = \psi^{(1)}(x_1, x_3, t) + \psi^{(2)}(x_1, x_3, t) = \quad (37)$$

$$= A_\varphi^{(1)} E E_T + \frac{1}{4} x_1 x_3 (A_\psi^{(1)})^2 E^2 \frac{\rho}{\mu} \times$$

$$\left\{ -\frac{1}{4k_L^2} \frac{k_\varphi x_1 + ik_{lin} x_3}{(k_\varphi x_1)^2 + (k_{lin} x_3)^2} M_\psi^L E_L^2 - \frac{1}{4k_T^2} \frac{k_\psi x_1 + ik_{lin} x_3}{(k_\psi x_1)^2 + (k_{lin} x_3)^2} M_\psi^T E_T^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{k_\varphi k_\psi - k_{lin}^2} \frac{2x_1(k_\varphi + k_\psi) + 4ik_{lin} x_3}{[2x_1(k_\varphi + k_\psi)]^2 + 16(k_{lin} x_3)^2} M_{\psi\varphi}^{TL} E_L E_T \right\}.$$

В формулах (36), (37) амплітуди A_φ , A_ψ і хвильове число k_{lin} поки що невідомі. Але ще не використано граничні умови. В лінійній задачі це умови відсутності напружень на граничній поверхні. В нелінійній постановці треба розрізнити два випадки. Якщо припускається загальний нелінійний випадок, коли деформації поверхні є великими, то поверхня вже не буде плоскою. У простому випадку гранична лінія є синусоїдою $x_3 = e^{i(kx_1 - \omega t)} = E(x_1, t)$ і змінюється при русі поверхневої хвилі. У прийнятому тут теж простому випадку врахування лише фізичної нелінійності і малих деформацій гранична поверхня є незмінною (площиною чи прямою лінією $x_3 = 0$).

В загальному випадку граничні умови мають вигляд

$$t_{ik} n_k = 0 \quad \text{чи} \quad t_{11} n_1 + t_{13} n_3 = 0; \quad t_{31} n_1 + t_{33} n_3 = 0, \quad (38)$$

де $n_1 = (ikE/\sqrt{1+k^2 E^2})$, $n_3 = (1/\sqrt{1+k^2 E^2})$ – компоненти вектора-нормалі до поверхні.

У загальному випадку граничні умови можна записати у вигляді формул

$$t_{11}(x_1, E) n_1(E) + t_{13}(x_1, E) n_3(E) = 0; \quad t_{31}(x_1, E) n_1(E) + t_{33}(x_1, E) n_3(E) = 0.$$

Тут слід зазначити, що ці формули виявляють одну з основних особливостей граничних умов в задачах поширення хвиль в середовищах з граничними поверхнями.

У другому випадку $n_1 = 0$, $n_3 = 1$ і умови є такими

$$t_{13}(x_1, 0, t) = 0; \quad t_{33}(x_1, 0, t) = 0. \quad (39)$$

Тоді граничні умови визначаються формулами щодо потенціалів

$$t_{33}(x_1, x_3 = 0, t) = \lambda \Delta [\varphi(x_1, 0, t)] + 2\mu [\varphi(x_1, 0, t)]_{,33} - 2\mu [\psi(x_1, 0, t)]_{,13}; \quad (40)$$

$$t_{31}(x_1, x_3 = 0, t) = \mu \left\{ 2[\varphi(x_1, 0, t)]_{,31} + [\psi(x_1, 0, t)]_{,33} - [\psi(x_1, 0, t)]_{,11} \right\}. \quad (41)$$

В реалізованому нелінійному підході, основанийому на моделі Мернагана, тензор напружень складається з двох частин – лінійної і нелінійної і запис граничних умов є більш складним

$$-\lambda\Delta\varphi - 2\mu\varphi_{,11} - 2\mu\psi_{,31} = (B+C)\varphi_{,11}^2 + (A+3B+C)\varphi_{,33}^2 + (A+4B)\varphi_{,13}^2 + \quad (42)$$

$$+ \left(\frac{1}{2}A+4B\right)(\varphi_{,11}\varphi_{,13} + \varphi_{,33}\varphi_{,13}) + \left(\frac{1}{4}A+B\right)\psi_{,33}^2 + (A+2B)(\psi_{,13}^2 + \psi_{,11}^2) - \left(\frac{1}{2}A+2B\right)\psi_{,11}\psi_{,33};$$

$$-\mu(2\varphi_{,31} + \psi_{,33} - \psi_{,11}) = \left(\frac{1}{2}A+B\right)\left[(\varphi_{,11} + \varphi_{,33})\varphi_{,13} + (\psi_{,11} + \psi_{,33})\psi_{,13}\right]. \quad (43)$$

Розглянемо далі варіант аналізу, коли потенціали зберігають класичне лінійне представлення (9) $\varphi = A_\varphi EE_L$; $\psi = A_\psi EE_T$, але при цьому граничні умови (42), (43) залишаються нелінійними. У такому разі нелінійність впливатиме як на амплітуди, так і на хвильове число.

Отже, підставимо значення потенціалів на границі $x_3 = 0$

$$\varphi(x_1, 0, t) = A_\varphi e^{i(kx_1 - \omega t)} = A_\varphi E; \quad \psi(x_1, 0, t) = A_\psi e^{i(kx_1 - \omega t)} = A_\psi E$$

в граничні умови (42), (43) і отримаємо два однорідні нелінійні алгебраїчні рівняння відносно амплітуд, які включають лінійні частини (13)

$$l_1 A_\varphi + l_2 A_\psi = n_1 (A_\varphi)^2 + n_2 (A_\psi)^2; \quad l_3 A_\varphi + l_4 A_\psi = n_4 (A_\varphi)^2 + n_5 (A_\psi)^2; \quad (44)$$

$$\begin{aligned} n_1 &= \left[\frac{1}{2}Ak^4 - \left(\frac{3}{2}A+4B+2C \right)k^2k_L^2 + (A+3B+C)k_L^4 \right] E; \\ n_2 &= \left[-2(B+C)k^4 + \left(\frac{1}{2}A+3B+2C \right)k^2k_T^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}A+B \right)k_T^4 \right] E; \\ n_4 &= \left(\frac{1}{2}A+B \right)ikk_L^2\sqrt{k^2-k_L^2}E; \quad n_5 = \left(\frac{1}{2}A+B \right)ikk_T^2\sqrt{k^2-k_T^2}E. \end{aligned} \quad (45)$$

Система (44) раніше не зустрічалася в аналізі хвиль Релея і для знаходження її розв'язку потрібна певна нова процедура.

Таким чином, система (44) виявляє другу фундаментальну особливість нелінійного підходу до аналізу хвилі Релея як хвилі в середовищі з граничною поверхнею – нелінійні граничні умови породжують нелінійні рівняння для знаходження хвильового числа (чи швидкості) хвилі Релея.

Покажемо далі процедуру знаходження хвильового числа як розв'язку системи рівнянь (44).

Процедура складається з багатьох кроків.

Припустимо, що, подібно до лінійного випадку, одна амплітуда виражається через іншу $A_\psi = mA_\varphi$ з невідомим множником m . Тоді система (44) дещо спрощується

$$l_1 A_\varphi + l_2 mA_\varphi = n_1 (A_\varphi)^2 + n_2 (mA_\varphi)^2; \quad l_3 A_\varphi + l_4 mA_\varphi = n_4 (A_\varphi)^2 + n_5 (mA_\varphi)^2. \quad (46)$$

Далі перетворимо систему (46)

$$A_\varphi \left[-l_1 - l_2 m + (n_1 + n_2 m^2) A_\varphi \right] = 0; \quad A_\varphi \left[-l_3 - l_4 m + (n_4 + n_5 m^2) A_\varphi \right] = 0. \quad (47)$$

Розглянемо рівняння (47) з тієї точки зору – а що б було потрібно отримати з аналізу цих рівнянь, враховуючи досвід аналізу відповідних лінійних рівнянь. У даному

випадку потрібно б мати два результати. Перш за все, бажано б довести, що амплітуда A_φ є довільною. Ця довільність випливає з припущення, що обидва вирази в квадратних дужках рівнянь (47) дорівнюють нулеві. Така операція є допустимою, оскільки амплітуда не може бути нульовою. Тому для задоволення рівнянь (47) достатньо прирівняти вирази в квадратних дужках до нуля.

Інший бажаний результат повинен полягати у тому, що з рівнянь (47) отримуються рівняння для знаходження невідомого хвильового числа k хвилі Релея. Прирівняння квадратних дужок якраз дає нову вже лінійну систему двох алгебраїчних рівнянь щодо двох невідомих величин – хвильового числа k та коефіцієнта m . При цьому амплітуда вважається параметром

$$-l_1 + n_1 A_\varphi - l_2 m + n_2 A_\varphi m^2 = 0; \quad -l_3 + n_4 A_\varphi - l_4 m + n_5 A_\varphi m^2 = 0. \quad (48)$$

Тепер розглянемо перше рівняння системи (48) як квадратне рівняння щодо коефіцієнта m

$$n_2 A_\varphi m^2 - l_2 m - l_1 + n_1 A_\varphi = 0.$$

Корені цього рівняння є такими

$$m = \frac{1}{2n_2 A_\varphi} l_2 \pm \frac{1}{2n_2 A_\varphi} \sqrt{l_2^2 - 4n_2 A_\varphi (n_1 A_\varphi - l_1)},$$

чи

$$m = \frac{1}{2n_2 A_\varphi} \left[l_2 \pm l_2 \sqrt{1 - \frac{4n_2 A_\varphi (n_1 A_\varphi - l_1)}{l_2^2}} \right].$$

З отриманих двох коренів треба вибрати один. Для цього вводиться критерій відповідності цього кореня лінійному випадку $m = -(l_1/l_2)$. Тоді при виборі знаку мінус отримується

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{2n_2 A_\varphi} \left\{ l_2 - l_2 \sqrt{1 - \frac{4n_2 A_\varphi (-l_1 + n_1 A_\varphi)}{l_2^2}} \right\} \sim \frac{1}{2n_2 A_\varphi} \left\{ l_2 - l_2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{4n_2 A_\varphi (-l_1 + n_1 A_\varphi)}{l_2^2} \right) \right\} = \\ &= \frac{1}{2n_2 A_\varphi} \frac{1}{2} \frac{4n_2 A_\varphi (-l_1 + n_1 A_\varphi)}{l_2} \xrightarrow{n_1, n_2 \rightarrow 0} \frac{-l_1}{l_2}. \end{aligned}$$

Отже, коефіцієнт m задається формулою

$$m = \frac{1}{2n_2 A_\varphi} l_2 - \frac{1}{2n_2 A_\varphi} \sqrt{l_2^2 - 4n_2 A_\varphi (n_1 A_\varphi - l_1)}. \quad (49)$$

Формула (49) свідчить, що залежність між амплітудами A_φ і A_ψ у нелінійному підході значно ускладнюється – коефіцієнт m нелінійно залежить від усіх п'ятих пружних констант, хвильового числа і амплітуди та форми профіля хвилі (коефіцієнти n_1, n_2 містять вираз $E = e^{i(kx_1 - \omega t)}$).

Нарешті, при підстановці отриманого значення (49) у друге рівняння системи (48) отримується нелінійне рівняння для знаходження хвильового числа

$$-l_1 l_4 + l_2 l_3 - \left[\frac{1}{(l_2 n_5 - l_4 n_2)} (l_3^2 n_2^2 + l_1^2 n_5^2 - 2l_1 l_3 n_2 n_5) - \frac{1}{n_2} (l_4 n_1 n_2 + l_2 n_2 n_4 - 2l_2 n_1 n_5) \right] A_\varphi -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{(l_2 n_5 - l_4 n_2)} (l_3 n_1 n_2 n_5 + l_1 n_2 n_4 n_5 - l_3 n_2^2 n_4 - l_1 n_1 n_5^2) A_\varphi^2 + \\
& -\frac{1}{(l_2 n_5 - l_4 n_2)} (n_2^2 n_4^2 - 2 n_1 n_2 n_4 n_5 - n_1^2 n_5^2) A_\varphi^3 = 0.
\end{aligned} \tag{50}$$

Доречно привести пару коментарів до отриманого рівняння (50). Це рівняння узгоджується з його лінійним аналогом, оскільки при прямуванні коефіцієнтів до нуля рівняння (50) переходить у рівняння (13), яке отримується в класичному випадку.

Зазначимо, що в лінійному підході хвильове число хвилі Релея залежить тільки від хвильових чисел плоских лінійних поздовжньої k_L і поперечної k_T хвиль в матеріалі (від пружних констант Ляме). У нелінійному підході додається ще залежність від констант Мернагана, амплітуди та форми хвилі. У випадку, що розглядається в даному дослідженні, амплітуда вважається малою і тому виглядає раціональним нехтування степенями амплітуди. Тоді формула (50) спрощується до вигляду

$$\begin{aligned}
& (l_1 l_4 - l_2 l_3) (l_2 n_5 - l_4 n_2) n_2 + \\
& + \left[n_2 (l_3^2 n_2^2 + l_1^2 n_5^2 - l_1 l_3 2 n_2 n_5) - (l_2 n_5 - l_4 n_2) (l_4 n_1 n_2 + l_2 n_2 n_4 - 2 l_2 n_1 n_5) \right] A_\varphi = 0.
\end{aligned} \tag{51}$$

Варта уваги також присутність в коефіцієнтах n_i множника $E = e^{i(kx_1 - \omega t)}$, який вводить ще один параметр у залежність хвильового числа від даних задачі. Цей параметр є фазою хвилі $kx_1 - \omega t$, яка змінюється при поширенні хвилі.

З точки зору особливостей граничних умов в нелінійному підході, залежність хвильового числа від фази є певною несподіванкою, яка ймовірно буде виявлятися і в експериментах.

2. Нелінійний підхід до аналізу крутильної хвилі.

Незважаючи на свою класичність і близькість до циліндричних хвиль, крутильна хвиля досліджена достатньо мало. Нелінійний підхід до її вивчення є актуальним і на даний момент реалізується в ряді робіт [7, 10, 11, 31, 38 – 41, 43 – 45]. Процедура отримання основного нелінійного хвильового рівняння містить ряд послідовних кроків, першими з яких є використання циліндричних координат $\theta^1 = r$, $\theta^2 = \vartheta$, $\theta^3 = z$ і вибір відповідної конфігурації. Такою конфігурацією є осесиметрична конфігурація з віссю симетрії Oz , яка залежить від координат r , z і не залежить від координати ϑ .

Далі потрібно записати класичне рівняння руху $\nabla_k [\sigma^{ki} (\delta_i^n + \nabla_i u^n)] = \rho \ddot{u}^i$ і конститутивні рівняння, які відповідають п'ятиконстантній моделі Мернагана [17, 27]. Остаточо отримується нове скорочене нелінійне хвильове рівняння [4]

$$\begin{aligned}
& (v_T)^2 \left[Lu_\vartheta \equiv \left(u_{\vartheta,rr} + (1/r) u_{\vartheta,r} - (1/r^2) u_\vartheta + u_{\vartheta,zz} \right) \right] - u_{\vartheta,tt} = \\
& = \frac{B}{2\mu} \left[(u_{\vartheta,r})^2 + \frac{1}{r} u_{\vartheta,r} u_\vartheta + \frac{2}{r^2} u_\vartheta^2 + (u_{\vartheta,z})^2 \right] Lu_\vartheta.
\end{aligned} \tag{52}$$

Відзначимо спершу необхідну властивість рівняння (52): у лівій частині воно повністю співпадає з лінійним хвильовим рівнянням для крутильної хвилі [7].

Далі слід відзначити іншу важливу особливість рівняння (52): воно у правій частині містить доданки, які є кубічно нелінійними щодо зміщення і тому крутильні хвилі є виключно кубічно нелінійними в рамках реалізованого підходу. Цей факт вирізняє крутильну хвилю спосеред інших циліндричних хвиль, досліджених раніше [35 – 40] і для яких хвилям характерна квадратична нелінійність.

Наступною особливістю рівняння (52) є те, що нелінійна частина цього рівняння включає лише одну з трьох пружних констант третього порядку – B .

Нове нелінійне рівняння (52) виявило ще одну особливість в описі крутильної хвилі. Звичайно в нелінійній теорії пружності розрізняють два типи нелінійностей в основних рівняннях – геометричну і фізичну. Геометрична виникає, коли в записі тензора деформації враховуються квадратично нелінійні доданки. Тоді у загальному випадку при записі хвильових рівнянь у цих рівняннях виникають нелінійні доданки з множниками у вигляді пружних констант Ляме μ, λ . З хвильового рівняння (52) і конститутивних рівнянь, в рамках прийнятої постановки задачі про крутильні хвилі, випливає, що такі доданки відсутні. Присутні лише нелінійні доданки з множниками у вигляді пружних констант Мернагана A, B , що свідчить про врахування у рівнянні (16) лише фізичної нелінійності. Ця ситуація не є наслідком нехтування геометричної нелінійності, а наслідком специфіки загальної для теорії пружності постановки задачі про крутильні хвилі.

Наостанок, можна застосувати до аналізу наближеного розв'язку рівняння (52) метод обмеження на градієнт зміщення [35 – 41].

Новому наближеному методу побудови розв'язку нелінійного рівняння (52) присвячена публікація [43]. Розв'язок рівняння (52) представляється у вигляді хвилі з невідомим хвильовим числом і невідомою амплітудою

$$u_g(r, z, t) = \tilde{u}_g(r) e^{i(k_z z - \omega t)}. \quad (53)$$

В результаті нелінійне хвильове рівняння (52) перетворюється на якби лінійне рівняння зі змінною швидкістю хвилі v_K

$$(v_K)^2 \left[u_{g,rr} + (1/r) u_{g,r} + \left((k_z)^2 - (1/r^2) \right) u_g \right] - \omega^2 u_g = 0$$

або

$$u_{g,rr} + (1/r) u_{g,r} + \left((k_z)^2 - (k_K)^2 - (1/r^2) \right) u_g = 0, \quad (54)$$

де

$$k_K = (\omega/v_K), \quad v_K = c_T \sqrt{1 - \frac{B}{2\mu} \left[(u_{g,r})^2 + \frac{1}{r} u_{g,r} u_g + \frac{2}{r^2} u_g^2 + (u_{g,z})^2 \right]}. \quad (55)$$

Раніше [19] автори застосовували до нелінійного хвильового рівняння

$$u_{1,tt} - \left\{ (v_L)^2 + (N_1/\rho) u_{1,1} \right\} u_{1,11} = 0 \quad (56)$$

щодо плоскої поздовжньої хвилі метод обмеження на градієнт зміщення. Згідно з цим методом, рівняння (31) далі перетворювалось у якби лінійне рівняння $u_{1,tt} - v^2 u_{1,11} = 0$ зі змінною швидкістю хвилі $v = \sqrt{1 + \alpha u_{1,1}} v_L$, $\alpha = [N_1/(\lambda + 2\mu)]$. Далі накладалося обмеження на невелику зміну швидкості

$$\alpha u_{1,1} \ll 1 \quad (57)$$

(на невелику зміну градієнта зміщення). Метод отримав назву методу обмеження на градієнт зміщення.

За новим методом, потрібно ввести обмеження на змінну швидкість (55)

$$\frac{B}{2\mu} M(u_g) \ll 1, \quad M(u_g) = \left[(u_{g,r})^2 + \frac{1}{r} u_{g,r} u_g + \frac{2}{r^2} u_g^2 + (u_{g,z})^2 \right]. \quad (58)$$

Принагідно зазначимо, що, зважаючи на порядок множника перед $M(u_g)$, обмеження (58) включає обмеження на пройдений хвилею шлях від поверхні циліндра до центру циліндра, зміщення і два компоненти градієнта зміщення. Тому новий метод можна б назвати методом обмеження на змінну швидкість хвилі – зміна повинна бути малою порівняно з одиницею. Оскільки обмежуються добутки, то умова (58) є дуже відмінною від умови (57). Наприклад, умова на квадрат градієнта є значно слабшою умови на сам градієнт (величина градієнта 10^{-2} і величина його квадрату 10^{-4}). Звичайно величина зміщення в конструкційних пружних матеріалах має порядок 10^{-4} і тоді, відповідно, величина його квадрату – 10^{-8} . Отже, в реальних числових розрахунках кожен з чотирьох доданків в $M(u_g)$ повинен оцінюватися окремо.

Наступний крок у методі полягає в використанні лінійного розв'язку (22) і його формальному записі через функцію Бесселя

$$u_g(r, z, t) = \tilde{u}^o J_1(\beta_K r) e^{i(k_z z - \omega t)}, \quad \beta_K = \sqrt{k_K^2 - k_z^2}. \quad (59)$$

Зазначимо, що особливістю наближеного представлення хвилі (59) є те, що воно вже включає постійну швидкість хвилі $c_z = (\omega/k_z)$, яка відповідає лінійному наближенню, але швидкість хвилі залежить від невідомого зміщення, його похідних і пройденої хвилею відстані в поперечному перерізі циліндра.

Далі метод використовує ще одне обмеження

$$\delta = r \frac{Bk_z^2}{4\mu} M(u_g) \quad (60)$$

і наближене представлення функції Бесселя $J_1(\sqrt{k_K^2 - k_z^2} r)$, в результаті чого з (59) отримується наближений розв'язок в такому вигляді

$$\tilde{u}(r) = \tilde{u}_g^o J_1\left(r\sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) - r \tilde{u}_g^o \frac{Bk_T^2}{8\mu} M(u_g) \left[J_0\left(r\sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) - J_2\left(r\sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) \right]. \quad (61)$$

Нарешті, в (61) слід дещо перетворити вираз $M(u_g)$ і остаточно представлення розв'язку у вигляді двох наближень – лінійного (першого) і другого (певної нелінійної добавки) – має вигляд

$$\begin{aligned} u_g(r, z, t) = & \tilde{u}_g^o e^{i(k_z z - \omega t)} \left\{ J_1\left(r\sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) - \right. \\ & - r \left(\tilde{u}_g^o \right)^3 \frac{Bk_T^2}{8\mu} e^{2i(k_z z - \omega t)} \left[r^2 \left(k_T^2 - k_z^2 \right) + r\sqrt{k_T^2 - k_z^2} + 2 - (k_z)^2 \right] \times \\ & \left. \left[J_0\left(r\sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) - J_2\left(r\sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) \right] \left[J_1\left(r\sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) \right]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (62)$$

Звичайно, в наближеному аналізі плоских та циліндричних хвиль друге наближення вносить спотворення в початковий профіль хвилі, тому що вплив нелінійної добавки збільшується зі збільшенням відстані, яку проходить хвиля. В проведеному аналізі крутильної хвилі це не так. Тут відбуваються два види спотворення. Одне показує еволюцію хвилі при зміні відстані від центру до поверхні циліндра (добавка містить r як множник). Друге спотворення пов'язане з тим, що на поверхні циліндра лінійна гармонічна хвиля (перша гармоніка) отримує постійну добавку у вигляді третьої гармоніки, тобто, хвиля спотворюється до вигляду модульованої хвилі, але ця добавка не змінюється з відстанню поширення хвилі в осьовому напрямку. Можна

вважати, що реалізований наближений підхід не описує еволюцію хвилі, а лише одно-моментно переводить гармонічну хвилю у модульовану хвилю. Поступового переходу першої гармоніки у третю цей підхід не описує.

Оскільки функції Бесселя вбудовані в більшість комп'ютерних пакетів (наприклад, в Mathematica), то ускладнень з комп'ютерним аналізом еволюції крутильної хвилі не передбачається. Однак достовірність наближеного представлення (62) регулюється певними обмеженнями – перш за все, це обмеження на профіль хвилі (відношення максимальної амплітуди до довжини хвилі) та на відстань поширення хвилі. Крім того, в обмеження входять вибір початкового амплітудного множника, частоти хвилі і матеріалу. Практика комп'ютерного аналізу еволюції хвилі показує, що такий аналіз вносить корективи в розуміння обмежень в наближеному аналізі хвилі.

Звернемося тепер до граничних умов в нелінійній задачі про крутильні хвилі. Виглядає логічним визначати тут, як і в лінійній задачі, хвильове число k_z і швидкість хвилі $v_z = (\omega/k_z)$ з додаткової умови відсутності напружень на бічній поверхні циліндра $r = r^o$

$$\sigma_{rr}(r^o, z, t) = \sigma_{rg}(r^o, z, t) = \sigma_{rz}(r^o, z, t) = 0. \quad (63)$$

Далі слід вирахувати напруження з (63) через деформації і далі зміщення. Формула для нормального напруження σ_{rr} через зміщення не показана нижче з тих міркувань, що в ній немає доданків першого порядку (лінійних доданків) але є доданки другого і четвертого порядків. Формули для дотичних напружень є такими:

$$\begin{aligned} \sigma_{rg} = \mu \left(u_{g,1} + \frac{u_g}{r} \right) + \left(\frac{1}{12} A + \frac{1}{2} B \right) (u_{g,r})^3 - \\ - \left(\frac{1}{4} A - B \right) \frac{u_g}{r} (u_{g,z})^2 + \frac{1}{2} B \left[u_{g,r} (u_{g,z})^2 + \frac{u_g}{r} (u_{g,r})^2 \right]; \end{aligned} \quad (64)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rz} = \left(2\mu + \frac{1}{12} A \right) u_{g,r} u_{g,z} + \left(2\mu - \frac{1}{12} A \right) \frac{1}{r} u_g u_{g,z} - \frac{1}{6} A \left(\frac{1}{r^2} (u_g)^2 u_{g,r} u_{g,z} - \frac{1}{r^3} (u_g)^3 u_{g,z} \right) + \\ + \frac{1}{2} B \left[\left((u_{g,r})^3 u_{g,z} - \frac{1}{r} u_g u_{g,z} (u_{g,r})^2 \right) + \left(u_{g,r} (u_{g,z})^3 - \frac{1}{r} u_g (u_{g,z})^3 \right) \right]. \end{aligned} \quad (65)$$

Формула (64) включає лінійну частину, яка відповідає лінійному класичному підходу, і чотири доданки, які є кубічно нелінійними. Формула (65) включає два доданки другого порядку нелінійності та шість доданків четвертого порядку.

Отже, всі три напруження на поверхні циліндра включають нелінійні доданки і не можуть прирівнюватись до нуля, оскільки у такому випадку для знаходження однієї невідомої величини – хвильового числа – задаються три рівняння. Тоді задача стає переозначеною.

Виникає питання загального порядку про перехід від лінійної задачі до спорідненої з нею нелінійної. У лінійній постановці обставини склалися у такий спосіб, що два напруження з граничних умов є нульовими завжди і всюди (не лише на граничній поверхні циліндра). Характерне для багатьох задач збереження граничних умов при переході від лінійної постановки до нелінійної у задачі про нелінійні крутильні хвилі не виглядає коректним.

Тому раціонально зберегти в граничних умовах нелінійної задачі одну граничну умову щодо дотичного напруження σ_{rg} , характерного для крутильної хвилі. Саме вона у лінійній постановці трансформується в трансцендентне рівняння для знаходження хвильового числа. Щодо нормального σ_{rr} та дотичного σ_{rz} напружень на

поверхні циліндра в нелінійній постановці можна вважати, що вони не будуть нульовими і можуть бути вираховані при відомому хвильовому числі.

Тут доречно згадати, що історія механіки зафіксувала два нелінійні ефекти, пов'язані з класичною задачею про кручення круглого пружного циліндра. Ефект зменшення зсувного (дотичного) напруження при збільшенні кута закручування (деформації) до рівня немалих значень названий іменем Пойнтінга через публікацію 1909 р., де був описаний цей ефект. При цьому Пойнтінг не згадав результати експериментів Кулона (1784 р.), Вертгейма (1857 р.), Кельвіна (1865 р.), Баушінгера (1881 р.), Томлінсона (1883 р.), де в тій чи іншій мірі такий ефект теж був описаний. Однак, лише в рамках теорії скінченних пружних деформацій, розвинутій в 20 столітті, цей ефект був задовільно пояснений теоретично Рівліном у 1951 р. за допомогою моделі нелінійного деформування, яка зараз має назву модель Муні – Рівліна. Ефект Кельвіна теж нелінійний і полягає в появі у циліндрі нормальних напружень σ_{11} , σ_{22} , які квадратично нелінійно залежать від кута закручування циліндра.

Отже, в задачі статичної прокручення кругового пружного циліндра нелінійна постановка задачі описує появу нормального напруження σ_{rr} , яке лише нелінійно залежить від кута закручування як основного кінематичного параметру задачі.

Таким чином, поява в задачі про крутильну хвилю (задачі динаміки) нормального напруження σ_{rr} , яке лише нелінійно залежить від зміщення u_θ , узгоджується з результатами відповідної задачі статичної. Можна вважати, що при аналізі нелінійної задачі початкове збудження крутильної хвилі формує кути закручування в поперечних перетинах циліндра і якраз існування таких кутів спричиняє появу нормальних напружень в циліндрі.

Аналіз нелінійної граничної умови раціонально проводити у два кроки. Спочатку нелінійними доданками в умові можна знехтувати, а далі розглядати повну умову з нелінійними доданками і оцінювати вплив нелінійності на значення хвильових чисел.

Доступним способом такої оцінки є числове моделювання для матеріалів, які моделюються потенціалом Мернагана. Більшість таких матеріалів проявляють слабку нелінійність. Тому слід очікувати в такому випадку і слабкий вплив нелінійності.

Загальні висновки.

Проаналізовано і порівняно особливості в аналізі граничних умов на прикладі двох типів хвиль в нелінійно пружних середовищах з зовнішньою границею – поверхневих та крутильних.

Спільними для обох типів хвиль (і, мабуть, для інших хвиль в середовищах з границями внутрішніми і зовнішніми) є значне ускладнення в нелінійному підході граничних умов внаслідок відмінності між формою границі до і після деформування. В лінійному підході форма границі не змінюється.

Також спільною особливістю є значне ускладнення математичного запису граничних умов через появу додаткових нелінійних доданків. Приклад поверхневої хвилі Релея показує, що процедура розв'язування задачі за допомогою нелінійних граничних умов є складною, але можливою.

Приклад крутильної хвилі виявив факт, що використання умов відсутності трьох напружень на граничній поверхні (припущення про вільну границю) може бути не зовсім коректним.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано у цій статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Проаналізовано особливості використання граничних умов в нелінійних задачах про поширення хвиль в середовищах, які деформуються пружно і мають внутрішню чи зовнішню границю. Аналіз проведено на прикладі двох типів хвиль – поверхневої хвилі Релея та крутильної хвилі. Коротко описані постановки і хвильовий аналіз вказаних двох хвиль в лінійному (класичному) підході,

оскільки лінійні розв'язки в роботі використовуються як перше наближення в нелінійному підході. Спільними для обох типів хвиль (і, мабуть, для інших хвиль в середовищах з границями) є значне ускладнення в нелінійному підході граничних умов внаслідок відмінності між формою границі до і після деформування (в лінійному підході форма границі не змінюється). Також спільною особливістю є значне ускладнення математичного запису граничних умов через появу додаткових нелінійних доданків. Приклад поверхневої хвилі Релея показує, що процедура розв'язування задачі за допомогою нелінійних граничних умов є складною, але можливою. Приклад крутильної хвилі виявив факт, що використання умов відсутності напружень на граничній поверхні (припущення про вільну границю) може бути не зовсім коректним.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: нелінійно пружні поверхнева та крутильна хвилі, п'ятиконстантний потенціал Мернагана, особливості граничних умов.

1. *Викторов И.А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. – Москва: Наука, 1981. – 288 с.
2. *Гузь А.* Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями: в 2-х частях. Ч. 1. Общие вопросы. Волны в бесконечных телах и поверхностные волны. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. – 501 с.
3. *Гузь А.* Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями: в 2-х частях. Ч. 2. Волны в частичноограниченных телах. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. – 505 с.
4. *Зарембо Л.К., Красильников В.А.* Введение в нелинейную акустику. – Москва: Наука, 1966. – 519 с.
5. *Крылов В.В., Красильников В.А.* Введение в физическую акустику. – Москва: Наука, 1986. – 432 с.
6. *Руцицкий Я.Я., Хотенко О.О.* Наближені розв'язки нелінійних хвильових рівнянь, що описують пружні поверхневі хвилі Релея // Доп. НАН України. – 2011. – №12. – С. 44 – 52.
7. *Руцицкий Я.Я.* Пружна крутильна хвиля і відповідне нелінійне хвильове рівняння // Доп. НАН України. – 2022. – № 2. – С. 39 – 45.
8. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. В 2-х томах. – Москва: Наука, 1970. – 492 с., – 568 с.
9. *Achenbach J.D.* Wave Propagation in Elastic Solids. – Amsterdam: North Holland, 1973. – 436p.
10. *Arda M.* Torsional Wave Propagation in Carbon Nanotube Bundles // NOISE Theory and Practice – 2018. – 4, N 2. – P. 7 – 21.
11. *Arreola-Lucas A., Báez G., Cervera F., Clemente A., Méndez-Sánchez R.A., Sánchez-Dehesa J.* Experimental Evidence of Rainbow Trapping and Bloch Oscillations of Torsional Waves in Chirped Metallic Beams // Nature Scientific Reports. – 2019. – 9: 1860. – P. 1 – 13.
12. *Bedford A., Drumheller D.* Introduction to Elastic Wave Propagation. – New York: John Wiley, 1994. – 300 p.
13. *Bekki N., Ishii K., Endo K.* Soliton for Nonlinear Rayleigh Surface Waves // J. Phys. Soc. Jpn. – 2019. – 88. – P. 014001.
14. *Caliendo C.* Acoustoelectric Effect for Rayleigh Wave in ZnO Produced by an Inhomogeneous In-Depth Electrical Conductivity Profile // Sensors. – 2023. – 23, N 3. – 1422.
15. *Chapman C.H.* Fundamentals of seismic wave propagation. – Cambridge University Press, 2004. – 608 p.
16. *Engelbrecht J.* Questions about Elastic Waves. – Berlin: Springer, 2015. – 148 p.
17. *Farnell G.W.* Elastic Surface Waves / In Physical Acoustics. 6. Ed. Mason W.P. and Thurston R.N. – New York: Academic Press, 1972. – P. 139 – 201.
18. *Farnell G.W.* Surface Acoustic Waves / In surface wave filters. Design, construction, and use. Ed. Matthews H. – New York: Wiley Interscience Publ., 1977. – P. 8 – 54.
19. *Farnell G.W., Adler E.L.* Elastic wave propagation in thin layers / In Physical Acoustics. 9. Eds. Mason W.P. and Thurston R.N. – New York: Academic Press, 1972. – P. 35 – 127.
20. *Guz A.N., Rushchitsky J.J.* Short Introduction to Mechanics of Nanocomposites. – Rosemead, CA: Scientific & Academic Publishing, 2013. – 280 p.
21. *Hamilton M.F., Il'inskii Yu.A., Zabolotskaya E.A.* Model equations for nonlinear surface waves // J. Acoust. Soc. Am. – 1998. – 103, N 5. – P. 2925.
22. *Haney M.M., Tsai V.C.* Perturbational and nonperturbational inversion of Rayleigh-wave velocities // Geophysics – 2017. – 82, N 3. – P. 15 – 28.
23. *Hariharan A., Dalton C.A., Ma Z., Ekström G.* Evidence of Overtone Interference in Fundamental-Mode Rayleigh Wave Phase and Amplitude Measurements // J. Geophysical Research: Solid Earth – 2020. – 125, N 1. – P. 301 – 312.
24. *Knight E.Yu., Hamilton M.F., Il'inski Yu.A., Zabolotskaya E.A.* Extensions of the theory for nonlinear Rayleigh waves // J. Acoust. Soc. Am. – 1994. – 96, N 5. – P. 3322.

25. *Lempriere B.* Ultrasound and Elastic Waves: Frequently Asked Questions. – New York: Academic Press, 2002. – 154 p.
26. *Liu M., Kim J.Y., Jacobs L., Qu J.* Experimental study of nonlinear Rayleigh wave propagation in shot-peened aluminum plates – feasibility of measuring residual stress // *NDT & E International*. – 2010. – **44**, N1. – P.67 – 74.
27. *Lou J., Fang X., Du J., Wu H.* Propagation of fundamental and third harmonics along a nonlinear seismic metasurface // *Int. J. Mech. Sci.* – 2022. – **221**. – P. 107189.
28. *Magrini F., Diaferia G., Fadel I., Cammarano F., van der Meijde M., Boschi L.* 3-D shear wave velocity model of the lithosphere below the Sardinia – Corsica continental block based on Rayleigh-wave phase velocities // *Geophys. J. Int.* – 2020. – **220**, N 3. – P. 2119 – 2130.
29. *Maupin V., Mauerberger A., Tilmann F.* The radial anisotropy of the continental lithosphere from analysis of Love and Rayleigh wave phase velocities in Fennoscandia // *J. Geophysical Research: Solid Earth*. – 2022. – **127**, N 10. – P.422 – 432.
30. *Murnaghan F.* Finite Deformation in an Elastic Solid. 3rd ed. – Gloucester, MA, USA: Peter Smith Publisher Inc., 1985. – 140 p.
31. *Nowacki W.* Teoria Sprężystości. – Warszawa: PWN, 1970. – 688 p.
32. *Palermo A., Yousefzadeh B., Daraio C., Marzani A.* Rayleigh wave propagation in nonlinear metasurfaces // *J. Sound and Vibration*. – 2022. – **520**. – P. 116599.
33. *Rushchitsky J.J., Khotenko E.A.* On Rayleigh Wave in Quadratically Nonlinear Elastic Half-Space (Murnaghan Model) // *Int. Appl. Mech.* – 2011. – **47**, N 3. – P. 120 – 128.
34. *Rushchitsky J.J.* Certain class of nonlinear hyperelastic waves: classical and novel models, wave equations, wave effects // *Int. J. Appl. Math. Mech.* – 2012. – **8**, N 6. – P. 400 – 443.
35. *Rushchitsky J.J.* Nonlinear Elastic Waves in Materials. – Heidelberg: Springer, 2014. – 455 p.
36. *Rushchitsky J.J.* Plane Nonlinear Elastic Waves: Approximate Approaches to Analysis of Evolution. Chapter in the book “Understanding Plane Waves” Ed. William A. Cooper. – London: Nova Science Publishers, 2019. – 300 p. – P. 201 – 220.
37. *Rushchitsky J.J.* Foundations of Mechanics of Materials. – Copenhagen: Ventus Publishing ApS, 2021. – 276 p.
38. *Rushchitsky J.J.* Scenarios of Evolution of Some Types of Simple Waves in Nonlinear Elastic Materials // *Archive of Appl. Mech.* – 2021. – **91**, N 7. – P. 3151 – 3170.
39. *Rushchitsky J.J., Yurchuk V.M.* Effect of the Third Approximation in the Analysis of the Evolution of a Nonlinear Elastic P-wave. Part 1 // *Int. Appl. Mech.* – 2020. – **56**, N 5. – P. 581 – 589.
40. *Rushchitsky J.J., Yurchuk V.M.* Effect of the Third Approximation in the Analysis of the Evolution of a Nonlinear Elastic P-wave. Part 2 // *Int. Appl. Mech.* – 2020. – **56**, N 6. – P. 666 – 673.
41. *Shu H., Dong L., Li S., Liu W., Liu S., Wang W., Shi D., Zhao D.* Propagation of torsional waves in a thin circular plate of generalized phononic crystals // *J. Phys. D: Appl. Phys.* – 2014. – **47**. – P. 295501 – 295512.
42. *Tanuma K.* Stroh Formalism and Rayleigh Waves // *J. Elasticity*. – 2007. – **89**. – P. 5 – 154.
43. *Tomar S., Kaur N.* Role of sliding contact interface on torsional waves // *The Mathematics Student*. – 2019. – **88**, N 3 – 4. – P. 171 – 177.
44. *Vasheghani Farahani S., Ghanbari E., Ghaffari G., Safari H.* Torsional wave propagation in solar tornadoes // *Astronomy and Astrophysics*. – 2017. – **599**, A19. – P. 7 – 12.
45. *Wang Y.Z., Li Z.N., Wang Y.S.* Three-dimensional nonreciprocal transmission in a layered nonlinear elastic wave metamaterial // *Int. J. Non-Linear Mech.* – 2020. – **125**, N 10. – P. 193531.
46. *Zabolotskaya E.A.* Nonlinear propagation of plane and circular Rayleigh waves in isotropic solids // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1992. – **91**, N5. – P. 2569 – 2575.
47. *Zabolotskaya E.A., Il'inskii Yu.A., Hamilton M.F.* Nonlinear Rayleigh waves in soft tissue // *J. Acoust. Soc. Am.* – 2006. – **119**, N 5. – P. 3319.
48. *Zhang Zd., Saygin E., He L. et al.* Rayleigh Wave Dispersion Spectrum Inversion Across Scales // *Surv. Geophys.* – 2021. – **42**, N 2. – P. 1281 – 1303.

Надійшла 29.12.2022

Затверджена до друку 27.06.2023