

В. А. Максимюк, Є. А. Сторожук, І. С. Чернишенко

**ВРАХУВАННЯ НЕЛІНІЙНО-ПРУЖНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ КОМПОЗИТНИХ
МАТЕРІАЛІВ ПРИ РОЗРАХУНКУ ОБОЛОНКОВИХ
ЕЛЕМЕНТІВ РАКЕТ З ОТВОРАМИ**

*Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ Україна; e-mail: desc@inmech.kiev.ua*

Abstract. Based on the analysis of the manufacturing technology and properties of composite materials, a statement is given and a method of numerical solution of physically non-linear problems of statics is developed concerning the shell elements of rocket technology structures with curvilinear holes. The design schemes of thin-walled composite elements of rocket technics with holes are based on the straight normal hypothesis and the taking into account the nonlinear deformation of orthotropic polymer composite materials with the use of the finite difference method. The nonlinear elastic state of orthotropic composite spherical shells with a hole supported by a flange is studied. The distribution and concentration of stresses near the hatch flange are shown on an example of the fuel tank bottom of the «Cyclone-4M» carrier rocket, in the case of its manufacture from the nonlinear elastic polymer composite material.

Key words: «Cyclone-4M», fuel tank, nonlinear elastic composites, stress concentration.

Вступ.

У фундаментальному огляді про розвиток механіки і ракетної технології в Україні [27] акцентовано на перспективі використання нових конструкційних матеріалів, насамперед композитів, і розробці нових більш точних розрахункових методів аналізу міцності елементів конструкцій з таких матеріалів.

Для зменшення ваги та збільшення міцності й жорсткості елементів ракетно-космічної техніки в розробках ДП «КБ «Південне» ім. М.К.Янгеля» (КБП) широко використовуються композитні матеріали (КМ) на основі вугле-, органо-, базальто- і скловолокон, зокрема і полімерні композиційні матеріали (ПКМ) [10]. Органопластики й склопластики мають високу питому міцність, а вуглепластики й боропластики – високу питому жорсткість. Деякі ПКМ, наприклад, на основі епоксидної смоли, при підвищених рівнях навантажень проявляють нелінійно-пружні властивості. Хоча ця нелінійність і не настільки значна порівняно із пластичністю металів, проте, її врахування може суттєво змінити розрахунки напружено-деформованого стану (НДС). Нелінійність ПКМ обумовлена властивостями компонентів і способами виготовлення.

Для розрахунків застосовуються чисельні методи: метод скінченних різниць (МСР), варіаційно-різницевого методу (ВРМ) і метод скінченних елементів (МСЕ). Необхідно відзначити, що спроби універсалізації програмних засобів з розрахунку НДС, що є характерним для більшості сучасних комерційних пакетів, у випадку великих вигинів призводять до ряду специфічних обчислювальних ефектів, що проявляються в уповільненій збіжності й неадекватних результатах. Розробка проблемно-орієнтованих засобів у цьому випадку виглядає доцільнішою. В даній статті описано ряд таких проблемно-орієнтованих методів.

§1. Аналіз способів виготовлення композитних матеріалів для елементів ракетної техніки.

На даний час накопичено великий багаторічний досвід з розробки методів розрахунків НДС біля отворів у металевих тонкостінних елементах конструкцій з врахуванням фізичної й геометричної нелінійностей, що відображено в ряді монографій [3, 7]. В останні десятиліття тривають аналогічні розробки стосовно КМ [8, 25].

Раніше для виготовлення елементів конструкцій ракетної техніки у вигляді оболонок обертання складної форми із ПКМ застосовувався, в основному, метод намотування [2]. Технологічно відрізняють так звані способи «сухого» і «мокрого» намотування. За типом укладання армувальника розрізняють поперечні, поздовжньо-поперечні (рис. 1), спіральні (рис. 2 і рис. 3) та ін. намотування [2].

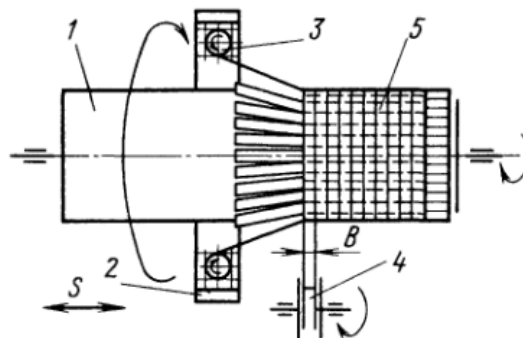


Рис. 1

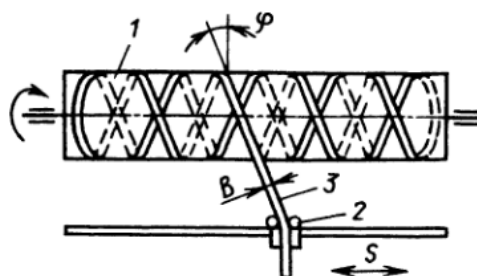


Рис. 2

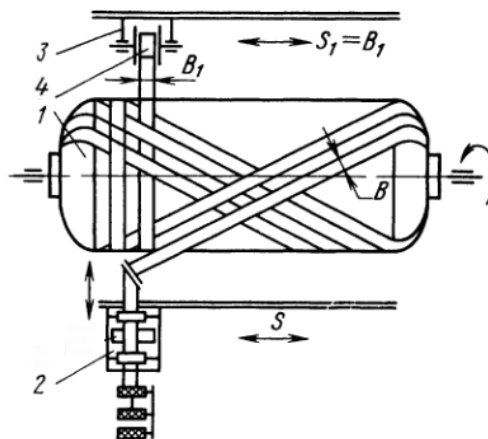
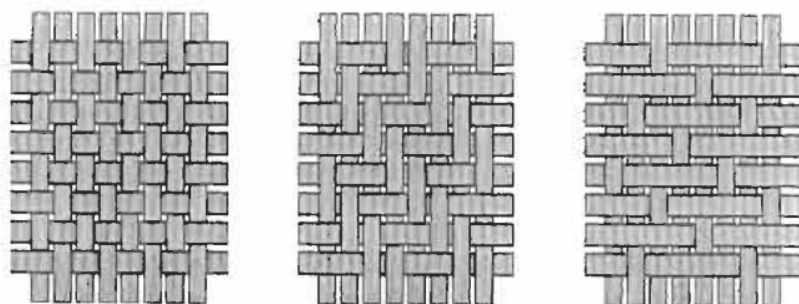


Рис. 3

На рис. 1 позначено: 1 – оправка; 2 – укладчик; 3 – котушка поздовжньої стрічки; 4 – котушка кільцевої стрічки; 5 – намотувана оболонка; на рис. 2 – 1 – оправка; 2 – укладчик; 3 – стрічка; на рис. 3 – 1 – оправка; 2 – укладчик спірального намотування; 3 – укладчик кільцевого намотування; 4 – котушка кільцевої стрічки.

Особливим різновидом спірального намотування є геодезичне намотування. Армувальний компонент укладається на поверхню оправки за геодезичними лініями, які з'єднують дві точки найкоротшим шляхом, що сприяє зменшенню маси оболонки.

В останні десятиліття широко застосовуються багатовимірно армовані ПКМ [31]. Схеми армування класифікують залежно від розташування волокон за геометричним принципом: 2D армування, коли волокна орієнтовані у двох напрямках; 3D, 4D і т.д., коли волокна орієнтовані в трьох й більше напрямках. 2D армовані КМ виготовляють, в основному, методом ткацтва (рис. 4, *а* – полотняне; *б* – саржеве; *в* – сатинове переплетення) [31]. Просторово армовані (3D, 4D) теж виготовляють методом ткацтва (weaving) або нетканими методами плетіння (braiding), в'язання (knitting), зшивання (stitching). Такі високопродуктивні методи дозволяють із застосуванням трьох і більше ниток одержувати багатовимірні тонкостінні структури. Просторові зв'язки між нитками утворюються за рахунок їх переплетення.



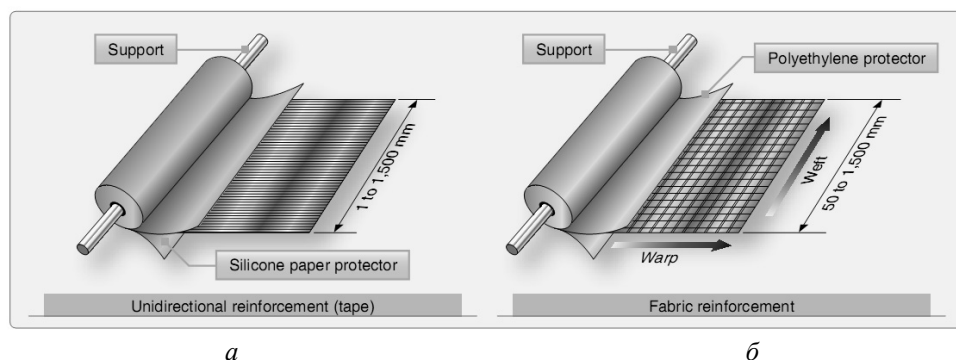
а

б

в

Рис. 4

Активно розвивається технологія так званих препрегів (pre-impregnated – попередньо просочений), тобто напівфабрикатів (рис. 5, *а* – однонаправлені стрічкові; *б* – 2D – тканинні) 2D-КМ [11, 31]. Спочатку їх використовували в галузях, де не потрібна висока точність (автомобіле-, суднобудування), але з удосконаленням верстатів і, власне, матеріалів вони застосовуються й в авіабудуванні [11]. Проте, область їх застосування обмежується низькою міжшаровою зсувною жорсткістю [31]. Із цього погляду перспективнішими вбачаються просторово армовані ПКМ.



а

б

Рис. 5

Так, метод плетіння дозволяє виготовляти оболонки різної геометрії з високим ступенем прилягання ниток (наприклад, сопло ракети [31], рис. 6) одна до одної. Метод в'язання, на перший погляд, не може бути придатним для виробництва КМ через властиву, подібно трикотажу, розтяжність просторово розташованої нитки. Проте, значні успіхи в технології в'язальних машин і програмного забезпечення дозволили створювати складні 3D форми [32] (рис. 7). Зшивання є найпростішим із розглянутих тут способів одержання 3D структур з кількох шарів. На рис. 8 зображено машину для прошивання композитних панелей крила [31]. Зшивають, як правило, «сухі» шари КМ, бо липкість препрегів затрудняє цей процес.

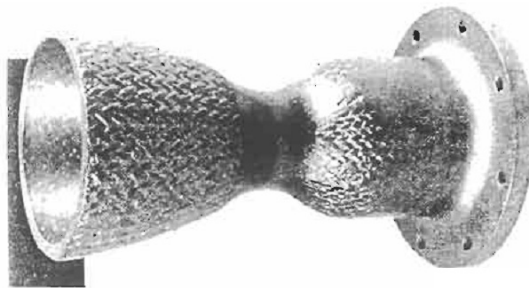


Рис. 6

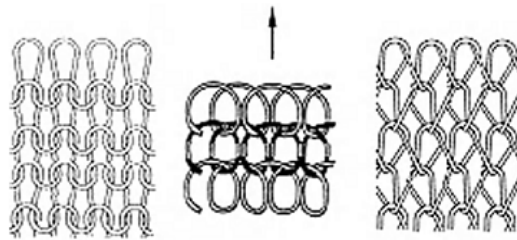


Рис. 7

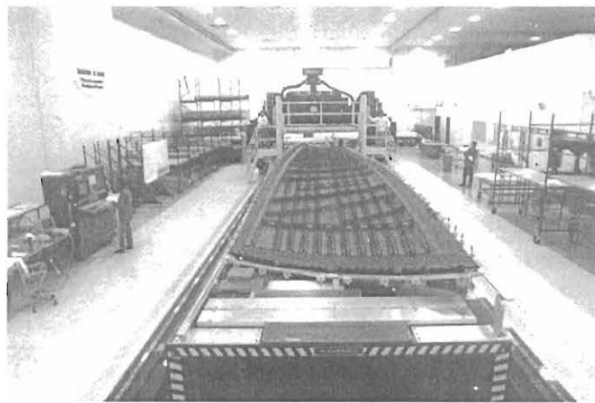


Рис. 8

Метод зшивання запобігає міжшаровому розшаруванню КМ. Його застосовують у місцях концентрації напружень, у тому числі біля отворів. Даний метод був застосований у центральній частині фюзеляжу багатоцільового винищувача «Тайфун» фірми Eurofighter і при виготовленні перегородок у хвостовій частині літака Airbus A380 [31].

Перспективною є методика виробництва КМ, що поєднує переваги ткацького й трикотажного методів, тобто в'язально-прошивальна. Одержуваний КМ називають по-різному: мультиаксіальний основов'язаний трикотаж, багатонаправлено прошита тканина, яка, власне, тканиною не є. В англійській літературі вживається абревіатура NCF (Non-Crimp Fabric) [11, 31]. На рис. 9 показана структурна схема процесу виробництва мультиаксіальних основов'язаних трикотажів фірми LIBA Machine Company (Німеччина) [11].

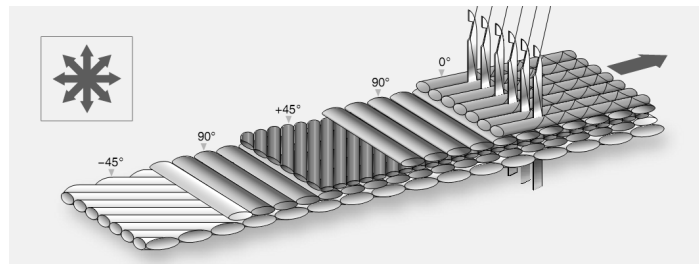


Рис. 9

Технологія КМ трикотажної структури використовується в вітчизняному ракетобудуванні (КБП). На рис. 10 показана соплова насадка радіаційного охолодження, яка є тонкостінною оболонкою змінної товщини [4].

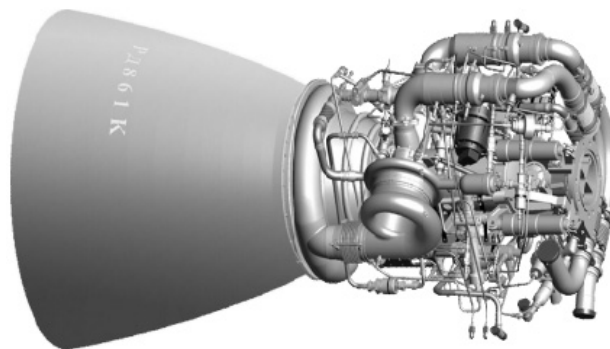


Рис. 10

Основні переваги [5] мультиаксіального основов'язаного трикотажу перед багатонаправленими тканинами полягає у відсутності хвилястості, бо утокові нитки в трикотажі лежать рівно, а не переплетені. Тому основов'язані матеріали можуть сприймати зусилля розтягу вже при незначних деформаціях на відміну від тканин, в яких виникає затримка сприйняття зусиль розтягу через переплетення.

Таке різноманіття компонентів і методів виготовлення КМ наводить на думку, що, очевидно, буде проблематично створити універсальну теорію КМ на основі структурного підходу.

§2. Експериментальні дослідження нелінійних властивостей анізотропних КМ.

Донедавна дослідники рідко враховували нелінійні властивості анізотропних КМ. Очевидно, це було викликано крихкими властивостями перших КМ з одного боку, а з іншого – складністю побудови теорії нелінійного деформування КМ, яка на підставі простих базових експериментів дозволяла б прогнозувати поведінку конструкції при складному навантаженні. Останні дослідження [18 – 20, 32] показують наявність нелінійних властивостей у багатьох сучасних ПКМ, врахування яких стає актуальним.

Очевидно, однією з перших була праця [24], де теоретичні й експериментальні проблеми нелінійного деформування КМ вирішені в комплексі. Були детально експериментально вивчені нелінійні властивості двох склопластиків: ЕДФ-5-6 – на основі

епоксидно-фенолоформальдегідної смоли та ПН-1 – на основі поліефірної смоли. Заповнювач в обох випадках – склотканина Т-1. Діаграми деформування $\sigma(\varepsilon)$ показані на рис. 11 (ЕДФ-5-6) і рис. 12 (ПН-1). Криві 1, 2, 3 відповідають розтягу під кутами 0° , 45° , 90° до основи. Там же [24] була запропонована методика визначення з експерименту функції й констант, що входять в теорію.

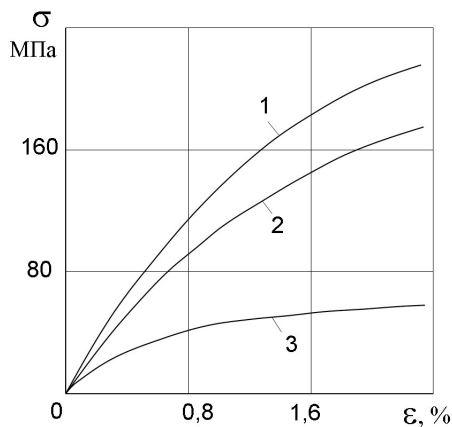


Рис. 11

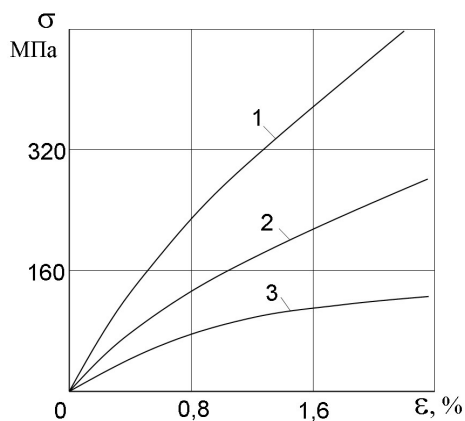


Рис. 12

Було виявлено нелінійність кривих деформування склопластиків на основі епоксидного зв'язуючого ЕДТ-10 та багатошарових склотканин [30]. Діаграми деформування $\sigma(\varepsilon)$ двох склопластиків на основі алюмоборосилікатних волокон С-ІІ-21-50 та С-ІІ-32-50 (перше число арабськими цифрами вказує на кут нахилу волокон, а друге – на об'ємний вміст волокон в КМ) показані на рис.13 та 14, відповідно. Тут криві 1, 2, 3 відповідають розтягові під кутами 0° , 45° , 90° до основи.

Наведемо результати наших експериментальних досліджень нелінійних властивостей двох ортотропних органопластиків [8, 13]. Це шаруваті двовимірно армовані волокнами КМ. Один з них (варіант 8 шарів, джгут СВМ, смола ЕДТ-10) мав чотири волокнисті шари, орієнтовані під кутами $\varphi = \pm 27^\circ$ до осі OX (для визначеності) і чотири шари під кутами $\varphi = 90^\circ$. Другий (варіант 4 шари, джгут ЖСВМ, смола ЕДТ-10) мав два шари під кутами $\varphi = \pm 22^\circ$ та два шари під кутами $\varphi = 90^\circ$.

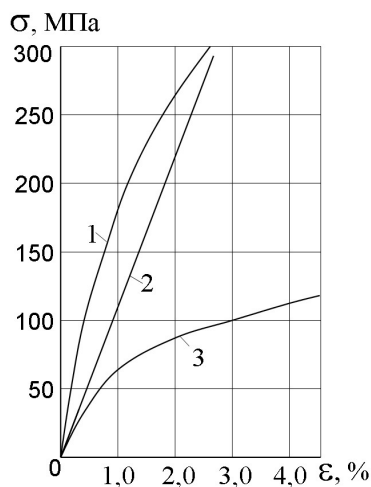


Рис. 13

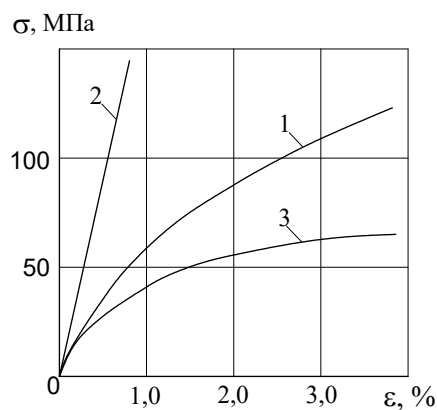


Рис. 14

Експерименти на одноосовий та дво-
вісний розтяг виконано на тонкостінних
циліндричних зразках, які виготовлені спі-
ральним намотуванням просоченого епок-
сидною смолою волокна на оправку цилін-
дричної форми (діаметр – 400 мм, довжи-
на – 600 мм) з коефіцієнтом об'ємного ар-
мування – 0,67. Діаграми деформування,
побудовані на основі експериментальних
даних, показані на рис. 15.

Тут суцільні лінії 1 – 3 відповідають
одноосовому розтягу зразків чотириша-
ровового органопластика під кутами $\varphi = 0^\circ$,
 90° , 45° до осі OX (вісь симетрії цилінд-
ра). Пунктирні лінії 1' – 2' відносяться до
восьмишарового органопластика.

Відзначимо, що для всіх розглянутих
КМ [2, 8, 30, 32] виконуються співвідношення симетрії констант анізотропних матері-
алів за порівняно невеликих відношень модулів пружності до модулів поперечного
зсуву: $E_x/G_{xz} \sim (1,5 - 6,0)$; $E_y/G_{yz} \sim (5,0 - 7,5)$. Такі співвідношення вимагають ува-
жного підходу до вибору роз-рахункових схем елементів конструкцій із шаруватих
ПКМ через можливе властиве деяким чисельним методам так зване «замикан-
ня» [25].

Результати експериментального дослідження деформування односпрямованих
вуглепластиків, виготовлених на основі вуглецевих волокон Т700 і епоксидної матри-
ці, також свідчать про нелінійну залежність між напруженнями і деформаціями ПКМ,
які застосовуються у КБП [16]. Діаграми деформування вуглепластика при кімнатній
й підвищеній (260°C) температурі наведено на рис. 16 і 17. Хоча діаграма деформу-
вання в напрямку волокон (рис. 16) досить добре описується лінійною залежністю у
широкому діапазоні температур, але за зсуву (рис. 1.17) спостерігається істотна нелі-
нійна залежність між напруженням і деформацією навіть за кімнатної температури.

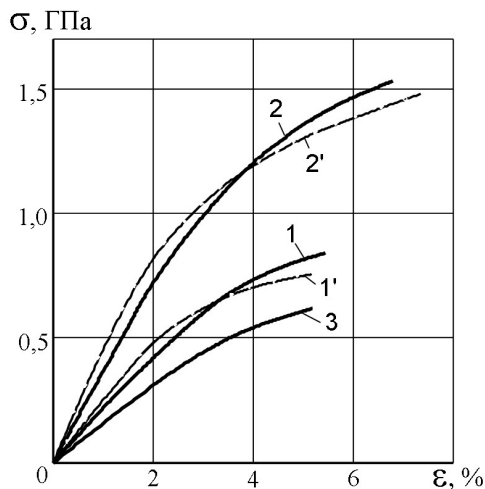


Рис. 15

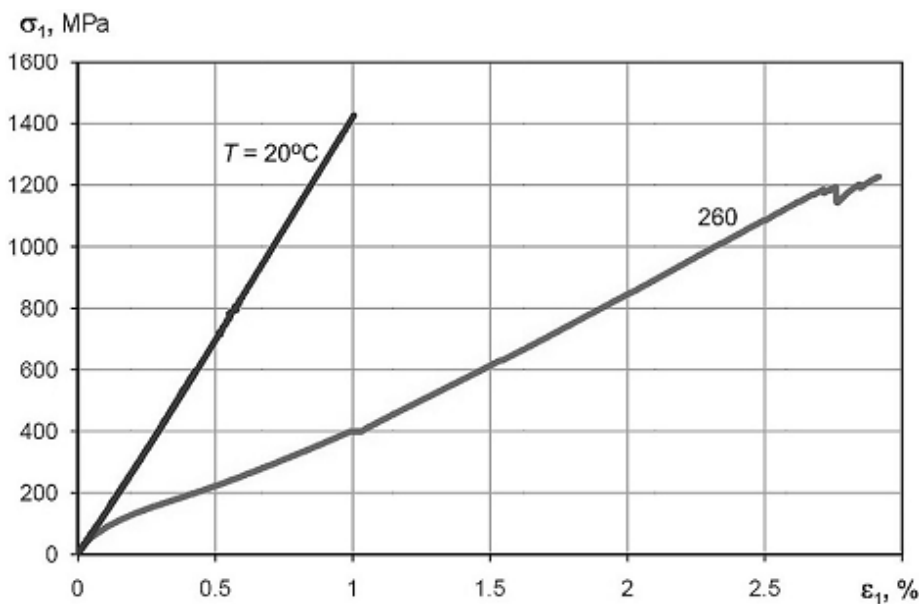


Рис. 16

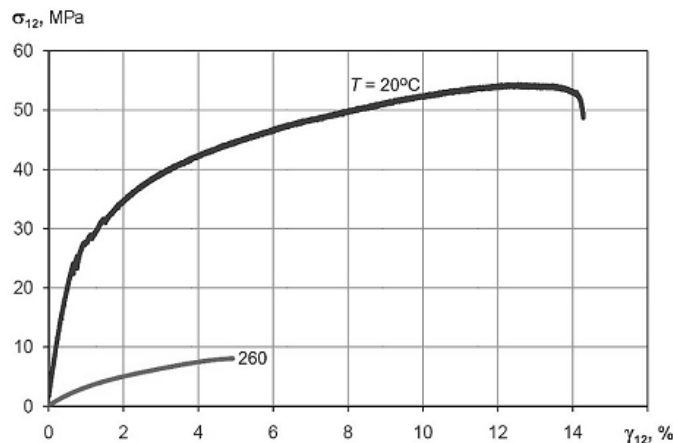


Рис. 17

Такі особливості властивостей даного вуглепластика з погляду лінійності-нелінійності не проявляться при осесиметричному навантаженні конструкцій у вигляді оболонок обертання, але у випадку неосесиметричних навантажень можуть виникнути значні розбіжності між результатами теоретичних розрахунків і реальною поведінкою конструкції.

§3. Теоретичне описання нелінійних залежностей між напруженнями й деформаціями ортотропного КМ.

До теоретичного опису нелінійних властивостей анізотропних КМ є два основних підходи: структурний і феноменологічний. У першому з них (структурному) характеристики КМ розраховуються на основі характеристик його складових компонентів (волокно, матриця), які беруть участь у механічному процесі. У другому (феноменологічному) нелінійність розглядається як явище, властиве матеріалу в цілому, не вдаючись у його структуру й ігноруючи локальні ефекти, а характеристики КМ визначаються експериментально. Звичайно, щодо шаруватих матеріалів може бути застосованим ще й так званий структурно-феноменологічний підхід, коли враховується механічна взаємодія окремих, розглянутих як ціле, композитних шарів.

Щодо механіки елементів конструкцій доцільно, на наш погляд, використовувати феноменологічний підхід, який дозволяє досить просто моделювати деформування конструкцій у цілому з достатньою вірогідністю. Тим більше, що нелінійність КМ може бути обумовлена не тільки нелінійністю компонентів, але й, наприклад, зміною під навантаженням кута між армувальними компонентами 2D КМ. У цьому випадку говорять про структурну нелінійність [32], яка не є проблемою у феноменологічному підході, на відміну від структурного.

3.1. Основи теорії пластичності анізотропних середовищ Ломакіна [6, 23, 24]. Перші теорії нелінійного деформування анізотропних матеріалів викладені в праці Мізеса [33] початку минулого століття. Подальший розвиток теорій стосовно переважно анізотропних металів і їх класифікація дано в монографії [15]. Експериментальні дослідження нелінійних властивостей КМ почалися набагато пізніше. Надалі Ломакіним була побудована феноменологічна теорія пластичності анізотропних середовищ [6], дано їй експериментальне обґрунтування й запропонована методика визначення наявних у теорії нелінійних функцій і констант [24].

У працях співробітників Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України ця теорія знайшла подальший розвиток стосовно плоского напруженого стану та методики визначення параметрів і функцій, що входять у теорію, стосовно ортотропних КМ [8, 13, 25] та ортотропних і трансверсально-ізотропних металів [12, 28]. Принагідно відзначимо праці співробітників, в яких розвиваються і застосовуються альтернативні тензорно-лінійна [22] та тензорно-нелінійна [21] теорії нелінійного деформування анізотропних тіл.

Теорія пластичності анізотропних середовищ [6] є теорією типу течії і збігається, в основному, з положеннями Мізеса [33] про квадратичну відносно напружень форму умови пластичності і про наявність пластичного потенціалу, але враховує стисливість і зміцнення. Вводяться два тензори матеріальних констант, один з яких визначається пружними, а другий – пластичними властивостями матеріалу, що спрощує введення в теорію необхідних експериментальних даних. Умова пластичності анізотропного середовища подається у вигляді

$$f = \frac{1}{2} q_{iklm} \sigma_{ik} \sigma_{lm} = k^2, \quad (3.1)$$

де f – квадратична функція напружень; q_{iklm} – компоненти деякого сталого відносно напруженого стану тензора; σ_{ik} – компоненти тензора напружень; k^2 – деяка додатна матеріальна константа.

З рівняння (3.1) і симетрії тензора напружень $\sigma_{ki} = \sigma_{ik}$ випливає

$$q_{iklm} = q_{ikml} = q_{kilm} = q_{klmi}; \quad q_{lmik} = q_{iklm}. \quad (3.2)$$

З вимоги незмінності f при додаванні до напружень всестороннього нормального тиску встановлюється додаткова умова

$$q_{iklm} \delta_{ik} = 0 \quad (3.3)$$

для компонентів тензора q .

Повні деформації подаються як сума пружних та пластичних деформацій

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ik}^e + \varepsilon_{ik}^p, \quad (3.4)$$

де

$$\varepsilon_{ik}^e = S_{iklm} \sigma_{lm}, \quad (3.5)$$

S – тензор пружних сталей.

Прирости пластичних деформацій згідно з гіпотезою пластичного потенціалу Мізеса, яка є наслідком постулату Дракера [17], визначаються так званим асоційованим законом течії

$$d\varepsilon_{ik}^p = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ik}} d\mu, \quad (3.6)$$

де $d\mu > 0$ – скалярний множник.

Приймається, що матеріал зміцнюється тільки тоді, коли виконується пластична робота

$$W_p = \int_0^{\varepsilon_{ik}^p} \sigma_{ik} d\varepsilon_{ik}^p, \quad (3.7)$$

тобто

$$\mu = \mu(W_p). \quad (3.8)$$

Звідси, враховуючи закон (3.6) і означення (3.1), встановлюється зміст множника $d\mu$

$$dW_p = \sigma_{ik} d\varepsilon_{ik}^p = \sigma_{ik} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ik}} d\mu = q_{iklm} \sigma_{ik} \sigma_{lm} d\mu = 2f d\mu \quad (3.9)$$

і форма закону зміцнення

$$f = f(W_p); \quad W_p = W_p(f). \quad (3.10)$$

З рівнянь (3.9), (3.10) знаходиться множник

$$d\mu = W_p'(f) \frac{df}{2f}. \quad (3.11)$$

Підставляючи диференціали пружних (3.5) та пластичних (3.6) деформацій в вираз (3.4) в диференціальній формі, враховуючи (3.11), остаточно встановлюються залежності між приростами напружень і деформацій пружно-пластичного анізотропного середовища

$$d\varepsilon_{ik} = S_{iklm}d\sigma_{lm} + W'_p(f)\frac{df}{2f}q_{iklm}\sigma_{lm}. \quad (3.12)$$

Якщо враховується розвантаження, то вважається, що

$$W_p = 0 \text{ при } df \leq 0. \quad (3.13)$$

На підставі припущення про інваріантність f до гідростатичного тиску (3.3) із закону (3.6) випливає

$$d\varepsilon_{ik}^p \delta_{ik} = d\mu q_{iklm} \delta_{ik} \sigma_{lm} = 0,$$

тобто пластичні деформації не змінюють об'єм.

3.2. Інтегрування інкрементальних фізичних співвідношень за простого навантаження. За простого навантаження, коли напруження змінюються пропорційно одному параметру λ

$$\sigma_{ij} = \lambda(t) \sigma_{ij}^0,$$

рівняння (3.12) після очевидних заміन

$$d\sigma_{lm} = \sigma_{lm}^0 d\lambda; \quad f = \frac{1}{2} q_{iklm} \sigma_{ik}^0 \sigma_{lm}^0 \lambda^2 = f^0 \lambda^2; \quad df = f^0 2\lambda d\lambda$$

інтегруються [24]

$$\varepsilon_{ik} = S_{iklm} \sigma_{lm} + \Psi q_{iklm} \sigma_{lm}. \quad (3.14)$$

Функцію $\Psi(f)$ в (3.14) після інтегрування (3.12) нам вдалося [8] подати формулою

$$\Psi = \frac{1}{2\sqrt{f}} \int_{f_s}^f \frac{W'_p}{\sqrt{f}} df, \quad (3.15)$$

де W'_p – похідна функції зміцнення (3.7) за квадратичною функцією напружень f (3.1).

Для ортотропного тіла за плоского напруженого стану рівняння (3.14) набувають вигляду

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= S_{1111}\sigma_{11} + S_{1122}\sigma_{22} + \Psi(q_{1111}\sigma_{11} + q_{1122}\sigma_{22}); \\ \varepsilon_{22} &= S_{2211}\sigma_{11} + S_{2222}\sigma_{22} + \Psi(q_{2211}\sigma_{11} + q_{2222}\sigma_{22}); \\ \varepsilon_{33} &= S_{3311}\sigma_{11} + S_{3322}\sigma_{22} + \Psi(q_{3311}\sigma_{11} + q_{3322}\sigma_{22}); \\ \varepsilon_{12} &= 2S_{1212}\sigma_{12} + 2\Psi q_{1212}\sigma_{12}; \quad \varepsilon_{13} = 2S_{1313}\sigma_{13} + 2\Psi q_{1313}\sigma_{13}; \\ \varepsilon_{23} &= 2S_{2323}\sigma_{23} + 2\Psi q_{2323}\sigma_{23}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

3.3. Методика визначення функції зміцнення й параметрів анізотронії. Методика побудови функції зміцнення $W_p(f)$ й визначення компонентів тензора q на основі експериментів описана в [24]. Виконується серія дослідів на одноосовий розтяг зразків, вирізаних під кутом φ до основи. Тоді для ортотропного матеріалу за умови плоского напруженого стану квадратична функція напружень буде мати вигляд

$$f = \left[\frac{1}{2} q_{1111} \cos^4 \varphi + \frac{1}{2} q_{2222} \sin^4 \varphi + (q_{1122} + 2q_{1212}) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \right] \sigma^2. \quad (3.17)$$

На підставі нелінійних діаграм деформування $\sigma(\varepsilon)$ при $\varphi = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ (наприклад, рис. 12) шляхом чисельного інтегрування у формулі (3.7) будуються залежності $W_p(\sigma)$. Згідно з теорією ці залежності у формі $W_p(\sigma^2)$ повинні бути подібними (рис. 18), тобто для будь-якого значення W_p відповідні значення напружень $\sigma_0, \sigma_{90}, \sigma_{45}$ для трьох кутів, враховуючи (3.17), мають задовольняти співвідношенням

$$f = \frac{1}{2} q_{1111} \sigma_0^2 = \frac{1}{2} q_{2222} \sigma_{90}^2 = \frac{1}{4} (q_{1122} + 2q_{1212}) \sigma_{45}^2. \quad (3.18)$$

Внаслідок незалежності виразу $W'_p(f) \frac{df}{2f} q_{iklm} \sigma_{lm}$ в рівняннях (3.12) від загально-го множника параметрів q_{iklm} один з них q_{1111} або q_{2222} приймається рівним 2, тоді інші параметри визначаються зі співвідношень (3.18). На підставі залежностей $W_p(\sigma)$, використовуючи формулу (3.14) з відомими параметрами $q_{1111}, q_{2222}, q_{1122} + 2q_{1212}$, будуються залежності $W_p(f)$. Вони можуть відрізнятися для різних кутів φ через відмінність реальних властивостей матеріалів від прийнятої моделі. У розрахунках використовується усереднена залежність.

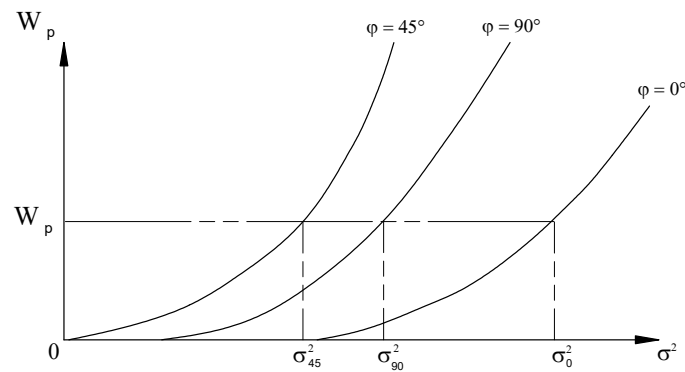


Рис. 18

Результати побудови функції $W_p(f)$ для трьох кутів φ для склопластика ПН-1 наведено на рис. 19 [24].

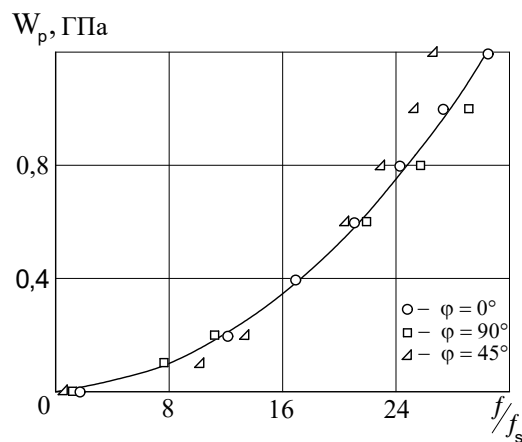


Рис. 19

Усереднена залежність (суцільна лінія) апроксимується функцією

$$W_p = \begin{cases} 0, & f/f_s \leq 1; \\ a \left[(f/f_s)^n - 1 \right], & f/f_s > 1 \end{cases} \quad (3.19)$$

з параметрами $a = 1460$ Па; $n = 1,97$; $f_s = 1560$ (МПа)². Крім того встановлюються такі значення технічних сталей і компонентів тензора q :

$$\begin{aligned} E_{11} &= 15 \text{ ГПа}; \quad E_{22} = 12 \text{ ГПа}; \quad G_{12} = 2,33 \text{ ГПа}; \quad \nu_{21} = 0,12; \\ q_{1111} &= 2; \quad q_{2222} = 3,14; \quad q_{1122} + q_{1212} = 37,74; \quad q_{1122} = -0,24. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Функцію $\Psi(f)$ у випадку апроксимації (3.19) подамо [8] формулою

$$\Psi = \frac{an}{(2n-1)f_s} \left[\left(\frac{f}{f_s} \right)^{n-1} - \sqrt{\frac{f_s}{f}} \right]. \quad (3.21)$$

Викладений, по суті графічний, спосіб визначення з експерименту вхідних у теорію констант не дозволяє встановити значення параметрів q_{1122} і q_{1212} окремо. Тому нами був запропонований чисельний алгоритм на основі методу найменших квадратів з додатковим виміром поперечної деформації в одноосових експериментах.

Виконується серія дослідів $i = \overline{1, N_\varphi}$ на одноосовий розтяг зразків, вирізаних під кутом φ до основи. Для заданого напруження σ_φ^i вимірюються деформації ε_φ^i та $\varepsilon_{\varphi+90}^i$. Матимемо експериментальні дані в вигляді шести табличних залежностей:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0^i(\sigma_0^i); \quad \varepsilon_{90}^i(\sigma_0^i), \quad i = \overline{1, N_0}; \quad \varepsilon_{90}^i(\sigma_{90}^i); \quad \varepsilon_0^i(\sigma_{90}^i), \quad i = \overline{1, N_{90}}; \\ \varepsilon_{45}^i(\sigma_{45}^i); \quad \varepsilon_{135}^i(\sigma_{45}^i), \quad i = \overline{1, N_{45}}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Згідно (3.16) їм відповідають теоретичні співвідношення

$$\begin{aligned} \sigma_0^i + E_{11}\Psi(\sigma_0^i)q_{1111}\sigma_0^i - E_{11}\varepsilon_0^i &= 0; \\ -\nu_{21}\sigma_0^i + E_{11}\Psi(\sigma_0^i)q_{1122}\sigma_0^i - E_{11}\varepsilon_{90}^i &= 0; \\ \sigma_{90}^i + E_{22}\Psi(\sigma_{90}^i)q_{2222}\sigma_{90}^i - E_{22}\varepsilon_{90}^i &= 0; \\ -\nu_{12}\sigma_{90}^i + E_{22}\Psi(\sigma_{90}^i)q_{1122}\sigma_{90}^i - E_{22}\varepsilon_0^i &= 0; \\ \frac{1}{2}\sigma_{45}^i + 2G_{12}\Psi(f)q_{1212}\sigma_{45}^i - G_{12}(\varepsilon_{45}^i - \varepsilon_{135}^i) &= 0; \quad i = \overline{1, N_{45}}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Введемо позначення

$$y_1^i = \Psi(\sigma_0^i)q_{1111}; \quad y_2^i = \Psi(\sigma_0^i)q_{1122}; \quad y_3^i = \Psi(\sigma_{90}^i)q_{2222}; \quad y_4^i = \Psi(\sigma_{90}^i)q_{1122}.$$

Описуючи експериментальні дані (3.22) теоретичними співвідношеннями (3.23) за допомогою методу найменших квадратів, знайдемо співвідношення між компонентами тензора q

$$q_{1122} = q_{1111} \sum_{i=1}^{N_0} y_1^i y_2^i / \sum_{i=1}^{N_0} y_1^{i2}; \quad q_{2222} = q_{1122} \sum_{i=1}^{N_{90}} y_3^i y_4^i / \sum_{i=1}^{N_{90}} y_4^{i2}, \quad (3.24)$$

які дозволяють визначити параметри q_{1122} і q_{1212} окремо й побудувати табличну залежність $\Psi(f)$. При цьому, оскільки теорія побудована так, що в рівняннях (3.16) добуток виду Ψq_{ijkl} не залежить від загального множника компонентів q_{ijkl} , то один з них покладається рівним двійці для сумісності f із квадратом інтенсивності напружень σ_i^2 для ізотропних матеріалів.

Наведемо результати обробки наших експериментальних досліджень [8, 13] нелінійних властивостей двох ортотропних органопластиків. На основі діаграм деформування (рис. 15) за методикою (3.22) – (3.24) побудовано (рис. 20, пунктирна лінія – 4 шари, суцільна – 8 шарів) функції зміцнення (3.7) й визначені параметри органопластиків, що характеризують лінійно-пружну (табл. 1) і нелінійно-пружну (табл. 2) стадії деформування. Зазначимо, що варіант КМ (8 шарів) може використовуватися тільки для осесиметричних оболонок обертання.

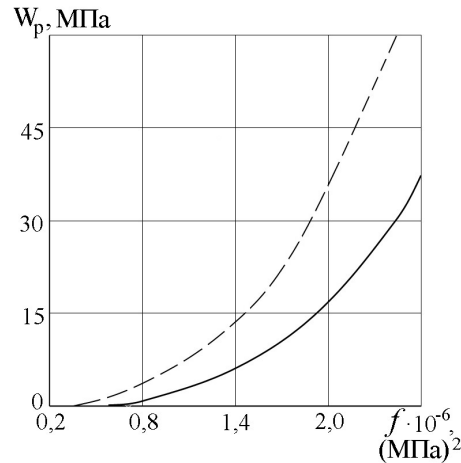


Рис. 20

Таблиця 1

Параметр	8 шарів	4 шари
E_{11} , ГПа	25,3	26,8
E_{22} , ГПа	38,4	46,5
E_{33} , ГПа	5,1	–
G_{12} , ГПа	7,6	–
G_{23} , ГПа	2,0	–
G_{13} , ГПа	2,4	–
ν_{21}	0,157	0,166
ν_{31}	0,17	–
ν_{32}	0,11	–

Таблиця 2

Параметр	8 шарів	4 шари
a , МПа	0,137	0,333
n	3,0	2,5
f_s , (МПа) ²	$0,4 \cdot 10^6$	$0,3 \cdot 10^6$
q_{1111}	4,20	4,32
q_{2222}	2,0	2,0
q_{1122}	-0,33	-0,64
q_{1212}	13,0	–

3.4. Чисельне обернення нелінійних фізичних співвідношень. Для розв'язування нелінійних задач методом послідовних наближень у формі, наприклад, методу додаткових напружень, необхідно мати фізичні співвідношення, які дозволяють обчислити напруження за відомими деформаціями.

Зазначимо, що при розв'язуванні нелінійних задач методом додаткових напружень для пружно-пластичних оболонок на основі деформаційної теорії пластичності [20] вдається записати вирази для нелінійних складових напружень в явній формі, що спрощує подальшу побудову алгоритму. А в теорії пластичності анізотропних середовищ повні деформації за простого навантаження виражаються через напруження такими складними неалгебраїчними функціями (3.16), які не допускають аналітичного обернення фізичних співвідношень. Це не дозволяє записати явно нелінійні складові напружень. Проте, проблема легко розв'язується шляхом чисельного обернення [25].

Для цього подамо нелінійні фізичні співвідношення (3.16) у вигляді

$$F_i(\{\sigma\}, \{\varepsilon\}) = 0 \quad (i = \overline{1, 3}), \quad (3.25)$$

де $\{\sigma\} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}\}^T$; $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}\}^T$. Нелінійну систему рівнянь (3.25) розв'яжемо чисельно методом Ньютона

$$\{\sigma^{j+1}\} = \{\sigma^j\} + \{\Delta\sigma^j\}, \quad (3.26)$$

де прирости $\{\Delta\sigma^j\}$ на j – тому кроці знаходимо з розв’язку лінійної алгебраїчної системи рівнянь

$$F_i + \frac{\partial F_i}{\partial \{\sigma^j\}} \{\sigma^j\} = 0, \quad (3.27)$$

вибираючи за початкове наближення напруження $\{\sigma^1\} = \{\sigma^o\}$ для лінійно-пружного тіла. Ітераційний процес (3.25) – (3.26) триває до збігу максимальних за абсолютною величиною компонентів напружень у двох послідовних ітераціях із заданою відносною точністю.

§4. Розрахункові схеми й методи розрахунків оболонок з отворами.

На основі розглянутих вище способів виготовлення композитних елементів ракетної техніки можна окреслити кілька розрахункових схем стосовно до оболонок з отворами. Причому отвори можуть бути сформовані в процесі створення конструкції із КМ або отримані шляхом вирізання в готовій конструкції.

Перший варіант стосується, як правило, оболонок обертання, у яких головні лінії анізотропії КМ збігаються з лініями кривизни оболонки, що в основному, призводить до осесиметричних задач. У другому варіанті мають місце так звані бічні отвори. Лінія контуру отвору може не збігатися ні з лініями кривизни оболонки, ні з головними лініями анізотропії КМ, що призводить до неосесиметричних задач.

Геометрія, тип і рівень навантажень конструкції, характер деформування, властивості КМ висувають певні вимоги до чисельного методу розрахунків НДС оболонок. Ці питання достатньо вивчені. Проте, виявляється [25], що деякі властивості сучасних КМ, які стосуються співвідношення поперечної зсувної жорсткості та жорсткості на розтяг-стиск, а також деякі особливості деформування оболонки можуть призвести до сповільнення збіжності чисельних методів у класичному підході. Такі обчислювальні явища отримали назву «замикання».

У традиційному підході до вибору розрахункових схем передбачалося, що для розрахунків тонких оболонок з металів або КМ з немалою зсувною жорсткістю цілком прийнятними є гіпотези Кірхгофа – Лява, а для оболонок середньої товщини із КМ із малою зсувною жорсткістю – зсувні моделі, подібні гіпотезам Тимошенка для балки. Але може виявитися, що за середніх значень зсувної жорсткості або за значної її зміни на поверхні оболонки жодна з гіпотез не буде прийнятною внаслідок так званого зсувного замикання. Крім того, такий характер деформування, коли за малих мембранних деформацій виникають значні згини, призводить до мембранного замикання [25]. Останнє частіше зустрічається у двовимірних задачах.

Існує ще й суб’єктивна причина замикання, не пов’язана з об’єктом дослідження. Вона викликана прагненням до універсалізації чисельних методів. Відомо, що системі різницевих рівнянь у МСР отримують на основі рівнянь рівноваги елемента оболонки, а гіпотези Кірхгофа – Лява реалізуються шляхом підстановки відповідних співвідношень у формули для розподілу переміщень вздовж товщини оболонки, тобто аналітично. Такий спосіб у цьому випадку ніяких ускладнень не викликає.

Навпаки, систему розв’язувальних рівнянь із застосуванням ВРМ і МСЕ одержують із умови екстремуму деякого функціонала. Застосування аналітичного способу реалізації гіпотез Кірхгофа – Лява веде у цих випадках до появи у функціоналах похідних від переміщень вище першого порядку. Відзначимо, що у випадку ВРМ ускладнення обмежуються тільки громіздкішими рівняннями й власне процесом їх виведення, оскільки ВРМ не пред’являє особливих вимог до гладкості підінтегральних виразів і функцій. Щодо МСЕ, зазначимо, що цей метод висуває певні вимоги до гладкості координатних функцій і за наявності вищих похідних у підінтегральних виразах ускладнюється побудова самого елемента.

Ці обставини призвели до пошуку інших способів реалізації гіпотез Кірхгофа – Лява, зокрема таких, у результаті яких у підінтегральних виразах були б похідні не вище першого порядку.

Традиційний підхід полягає в застосуванні зсувних моделей для розрахунків тонких оболонок з відмовою від гіпотез Кірхгофа – Лява або частковому їхньому врахуванні. Саме така спроба прямого застосування зсувних моделей МСЕ до тонкостінних конструкцій може призвести до проблеми зсувного замикання.

В Інституті механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України були запропоновані й розроблені альтернативні підходи для подолання небажаних обчислювальних ефектів і прискорення збіжності чисельних методів. Це підходи, що базуються на: змішаних функціоналах, методі множників Лагранжа, векторних співвідношеннях для деформацій, використанні точок надзбіжності, подвійній апроксимації деформацій [25]. Досвід застосування цих методів свідчить про достатню ефективність МСР із аналітичним способом застосування гіпотез Кірхгофа – Лява для розрахунків осесиметричного НДС тонких оболонок. А для розрахунків двовимірного НДС бажано застосовувати модифіковані варіанти МСЕ.

§5. Розрахунки НДС днища паливного бака з нелінійно-пружного КМ.

Паливний бак ракети носія «Циклон-4М» виготовляється з алюмінієвого сплаву [9]. Поряд з цим, для зменшення ваги та збільшення міцності й жорсткості елементів ракетно-космічної техніки широко використовуються композитні матеріали. Нижче досліджено НДС верхнього сферичного днища бака, якби воно було б виготовлене з нелінійно-пружного ПКМ. Паливний бак має вигляд тонкої циліндричної оболонки з двома сферичними днищами (рис. 21) [9].

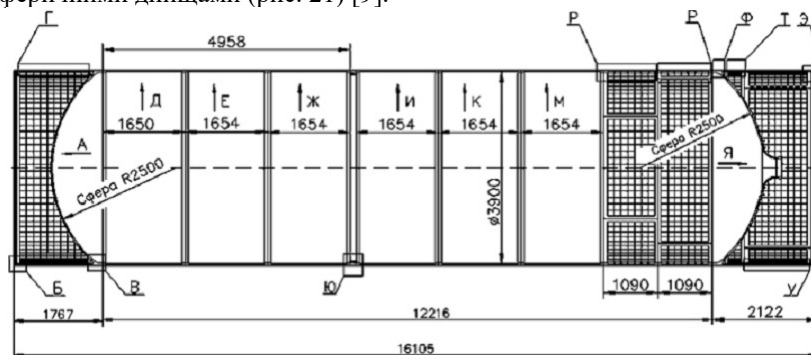


Рис. 21

Конструкція бака через наявність підкріплювальних елементів та вафельну поверхню не є осесиметричною, проте сферичні днища можна розглядати як осесиметричні оболонки. Причому верхнє днище фактично є сферичною оболонкою з підкріпленим отвором, який спричиняє концентрацію напружень.

Вважаємо, що процес навантаження під дією поверхневих і крайових сил відбувається при сталій температурі та є активним і простим. Осі ортотропії ПКМ збігаються з лініями головних кривизн оболонки. За певних величин діючих навантажень в оболонці проявляються нелінійні властивості КМ, але прогини й деформації залишаються малими. Зазначені передумови дозволяють скористатися геометрично лінійною теорією оболонок з аналітичною реалізацією гіпотез Кірхгофа – Лява [8] і теорією пластичності анізотропних середовищ [24].

Тоді геометричні співвідношення в напівгеодезичній системі координат (s, γ) матимуть вигляд [3]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_s &= u' + k_s w; \quad \varepsilon_\theta = B^* u + k_\theta w; \\ \kappa_s &= k'_s u - k_s^2 w - w''; \quad \kappa_\theta = k'_\theta u - k_\theta^2 w - B^* w', \end{aligned} \quad (5.1)$$

де u, w – компоненти вектора переміщень у напрямку осей (s, γ) , відповідно; $\theta = k_s u - w'$ – кут повороту нормалі навколо осі θ ; k_ρ ($\rho = s, \theta$) – головні кривизни; $B^* = B'/B$; $B = r$ – радіус паралельного кола; знак $(')$ відповідає диференціюванню за координатою s .

Оболонка перебуває під дією внутрішнього тиску p , який за допомогою кришки призводить до дії перерізуючого зусилля $Q_0 = pr_0/2$ на фланець отвору радіусом r_0 (рис. 22). Прийmemo, що фланець є пружним кільцем прямокутного поперечного перерізу висотою a й шириною b .

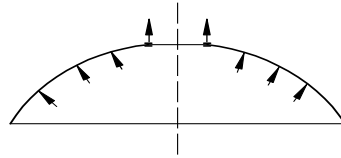


Рис. 22.

Тоді в перерізі з'єднання кільця з оболонкою ($r = r_0, s = 0$) будуть мати місце крайові умови [7, 8]

$$Q_s \sin \varphi + T_s \cos \varphi - \frac{F_0 E_0}{r_0^2} (w \sin \varphi + u \cos \varphi) = 0;$$

$$Q_s \cos \varphi - T_s \sin \varphi = -Q_0; \quad M_s + Q_s r_1 + T_s r_2 + \frac{J_0 E_0}{12 r_0^2} \vartheta = 0,$$

де φ – кут між нормаллю до оболонки й віссю обертання у вузлі з'єднання; r_1, r_2 – координати центру поперечного перерізу кільця в системі (s, γ) ; E_0 – модуль пружності матеріалу кільця; $F_0 = ab$ і $J_0 = a^3 b/12$ – площа й момент інерції його поперечного перерізу. На зовнішньому ($r = r_k$) краї оболонки прийmemo умови рухливого в радіальному напрямку шарнірного обпирання

$$u = 0; \quad Q_s = 0; \quad M_s = 0.$$

Розрахунки МСР виконано для тонкої сферичної оболонки радіуса $R = 2,5$ м і постійної товщини $h = 2,8$ мм. Діаметр верхнього центрального люка $d = 0,69$ м, діаметр нижньої частини, з'єднаної з циліндричним корпусом $D = 3,9$ м. Тоді геометричні параметри оболонки будуть такими: $r_0 = 0,345$ м; $r_k = 1,95$ м; $0 \leq s \leq 1,89$ м.

Щоб показати можливий ефект від врахування нелінійності ПКМ прийmemo, що паливний бак виготовлений з ортотропного нелінійно-пружного 8-шарового органічного пластику, нелінійні властивості якого добре досліджені (табл. 1 і 2). Основні параметри цього КМ такі: $E_{ss} = 26,8$ ГПа; $E_{\theta\theta} = 46,5$ ГПа; $\nu_{\theta s} = 0,166$.

З метою пошуку раціональних розмірів a і b поперечного перерізу кільця досліджено в лінійній постановці НДС біля отвору для $r_1 = r_2 = 0$; $p = 1$ МПа. У табл. 3 наведено значення меридіональних і колових напружень на зовнішній ($\tilde{\gamma} = \gamma/h = 0,5$) і внутрішній ($\tilde{\gamma} = -0,5$) поверхнях оболонки біля отвору ($s = 0$) для ряду варіантів (N) розрахунків. Меридіан оболонки розбивався на 640 вузлових точок.

Таблиця 3

N	a , мм	b , мм	E_0 , ГПа	$\tilde{\gamma}$	σ_s , МПа	σ_θ , МПа
1	Відсутнє кільце			0,5	8	6898
				-0,5	8	5038
2	10	10	67	0,5	715	2374
				-0,5	-121	1699
3	10	60	67	0,5	576	649
				-0,5	276	537
4	20	40	67	0,5	540	519
				-0,5	333	457
5	20	60	67	0,5	437	376
				-0,5	467	385
6	20	60	46,5	0,5	529	503
				-0,5	348	448
7	30	60	46,5	0,5	413	351
				-0,5	493	363
8	Абсолютно жорстке кільце			0,5	178	51
				-0,5	796	229

Збільшення жорсткості кільця, від його відсутності (варіант 1) аж до абсолютно жорсткого (варіант 8), призводить до перерозподілу максимальних напружень із зовнішньої (σ_θ) на внутрішню (σ_s) поверхню. Можна вважати, що кільця перерізом 20 мм × 60 мм, $E_0 = 67$ ГПа (варіант 5) і 30 мм × 60 мм, $E_0 = 46,5$ ГПа (варіант 7) є близькими до оптимальних, оскільки в цьому випадку відбувається вирівнювання меридіональних і колових напружень на зовнішній і на внутрішній поверхнях оболонки, тобто має місце практично безмоментний НДС.

Вплив фізичної нелінійності покажемо (табл. 4) у випадку кільця перерізом $a = 20$ мм і $b = 60$ мм, $E_0 = 46,5$ ГПа (варіант 6). Розрахунки в нелінійній постановці виконано з відносною похибкою в процесі послідовних наближень за максимальними деформаціями $\varepsilon = 0,01$.

Таблиця 4

r , м	$\tilde{\gamma}$	Лінійна задача		Нелінійна задача	
		σ_s , МПа	σ_θ , МПа	σ_s , МПа	σ_θ , МПа
0,345	0,5	529	503	494	457
	-0,5	348	448	382	447
0,356	0,5	503	504	480	466
	-0,5	376	457	399	453
0,368	0,5	483	501	468	470
	-0,5	399	462	414	455
0,391	0,5	454	488	451	470
	-0,5	432	462	434	453
0,461	0,5	435	454	438	453
	-0,5	457	448	451	443
0,804	0,5	445	447	443	446
	-0,5	447	448	445	443
1,23	0,5	445	446	444	445
	-0,5	447	446	445	444
1,95	0,5	446	446	444	444
	-0,5	446	446	444	444

Врахування нелінійності в цьому випадку призводить до незначного (на 7%) зменшення максимальних (σ_s , $\tilde{\gamma} = 0,5$) напружень біля отвору.

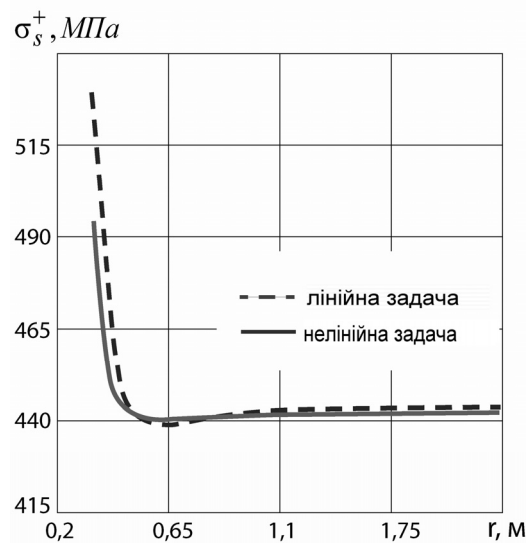


Рис. 23

Розподіл меридіональних напружень на зовнішній поверхні оболонки (σ_s^+) уздовж її меридіана (залежно від параметра $0,345 \text{ м} \leq r \leq 1,95 \text{ м}$), отриманих у лінійній (пунктир) і нелінійній (суцільна) постановках, показано на рис. 23.

Висновок.

Насамперед відзначимо, що ПКМ на відміну від авіаційних алюмінієвих сплавів [1] притаманне лінійно-пружне деформування в ширшому діапазоні деформацій [8] аж до розтягів уздовж волокон на 1–2 % (рис. 15). При цьому напруження можуть досягати 1 – 2 ГПа. Разом з тим, за розтягу під кутом 45° до осей армування межа лінійності є значно нижчою (0,5 %). Щойно зазначене, а також виконані розрахунки та накопичений досвід [8, 13, 14, 25, 26, 29] дозволяють сформулювати висновки практичного характеру.

1. За осесиметричного навантаження композитних конструкцій у вигляді замкнутих оболонок обертання фізична нелінійність, як правило, проявляється незначно. Наявність центрального отвору внаслідок концентрації напружень може збільшити вплив нелінійних факторів. Підкріплення отвору фланцем або накладкою певної жорсткості знижує концентрацію напружень.

2. За несиметричного деформування оболонок обертання під дією неосесиметричного навантаження або за наявності бокових отворів необхідність врахування нелінійно-пружних властивостей КМ зростає в порівнянні з випадком осесиметричного деформування.

3. Осесиметричне деформування оболонок обертання двоякої кривизни внаслідок, очевидно, властивому їм самопідкріплювальному ефекту відбувається, в основному так, що в класичних чисельних методах не проявляється так зване мембранне замикання. У цьому випадку доцільно використовувати прості сіткові методи без застосування спеціальних засобів для подолання замикання.

4. Несиметричне деформування оболонок обертання нульової гаусової кривизни (конічних, циліндричних) може відбуватися за значних згинів, але за малих мембранних деформацій. Це може призвести до сповільненої збіжності класичних чисельних методів, тобто до мембранного замикання. Тоді необхідно застосувати спеціальні засоби для подолання замикання.

5. Для розрахунків тонких оболонок з металів або КМ з немалою зсувною жорсткістю цілком прийнятними є гіпотези Кірхгофа – Лява, а для оболонок середньої тов-

щини із КМ з малою зсувною жорсткістю – гіпотези, подібні гіпотезам Тимошенка для балки.

6. Підкріплення отвору фланцем оптимальної жорсткості може зменшити меридіональні й колові напруження на зовнішній і на внутрішній поверхнях оболонки біля отвору. Збільшення жорсткості фланця призводить до перерозподілу максимальних напружень із зовнішньої на внутрішню поверхню.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. На основі аналізу технології виготовлення та властивостей композитних матеріалів дано постановку та розроблено методику чисельного розв'язування фізично нелінійних задач статичного стосовно оболонкових елементів конструкцій ракетної техніки з криволінійними отворами. Розрахункові схеми тонкостінних композитних елементів ракетної техніки з отворами базуються на гіпотезі прямої нормалі, на врахуванні нелінійного деформування ортотропних полімерних композитних матеріалів із застосуванням методу скінченних різниць. Досліджено нелінійно-пружний стан ортотропних композитних сферичних оболонок з отвором, підкріпленим фланцем. Показано розподіл і концентрацію напружень біля фланця люка на прикладі днища паливного бака ракети носія «Циклон-4М» у випадку виготовлення його з нелінійно-пружного полімерного композитного матеріалу.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: «Циклон-4М», паливний бак, нелінійно-пружні композити, концентрація напружень.

1. *Авиационные материалы*: справочник в 9-ти томах (под общ. ред. Р.Е. Шалина). Т. 4: Алюминиевые и бериллиевые сплавы. Ч. 1: Деформируемые алюминиевые сплавы и сплавы на основе бериллия, Кн. 1. – Москва: ОНТИ ВИАМ, 1982. – 628 с.
2. *Васильев В.В., Протасов В.Д., Болотин В.В. и др.* Композиционные материалы: Справочник. – Москва: Машиностроение, 1990. – 512 с.
3. *Гузь А.Н., Макаренков А.Г., Чернышенко И.С.* Прочность конструкций РДТТ. – Москва: Машиностроение, 1980. – 244с.
4. *Дегтярев А.В. Коваленко В.А., Потапов А.М.* Применение композиционных материалов при создании перспективных образцов ракетной техники // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2012. – №2. – С. 34 – 38.
5. *Кизимчук О.П.* Текстильні матеріали з від'ємним коефіцієнтом Пуассона. – Киев: Кафедра, 2015. – 248 с.
6. *Ломакин В.А.* О теории пластичности анизотропных сред // *Вестн. Моск. ун-та. Математика и механика*. – 1964. – № 4. – С. 49 – 53.
7. *Методы расчета оболочек* (под общей ред. Гузя А.Н.): в 5-и томах. Т.1. *Гузь А.Н., Чернышенко И.С., Чехов Вал.Н., Чехов Вик.Н., Шнеренко К.И.* Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями. – Киев: Наук. думка, 1980. – 636 с.
8. *Механика композитов* (под общей ред. Гузя А.Н.): в 12-и томах. Т. 7. *Гузь А.Н., Космодамианский А.С., Шевченко В.П. и др.* Концентрация напряжений. – Киев: «А.С.К.», 1998. – 387 с.
9. *Наука для космічної промисловості.* Інформаційний бюлетень координаційної ради з організації спільних робіт ДП «КБ «Південне» і наукових установ НАН України. – 2020. – № 1 – 2. – 58 с.
10. *Потапов А.М.* Композиты: перспективы использования в ракетно-космической технике // *Космична наука і технологія*. – 2015. – 21, № 5. – С. 69 – 74.
11. *Aviation Maintenance Technician Handbook—Airframe. Vol. 1 / by U.S. Department of Transportation, Federal Aviation Administration.* – Newcastle, WA: Aviation Supplies & Academics, 2012. – 588 p. – (FAA-H-8083-31, FAA Handbooks series).
12. *Galishin A.Z., Shevchenko Y.N.* Axisymmetric Physically Nonlinear State of Orthotropic Shells // *Int. Appl. Mech.* – 2013. – 49, N 4. – P. 456 – 461.
13. *Guz A.N., Chernyshenko I.S., Georgievskii V.P., Maksimuk V. A.* The Stress State of Thin-Walled Elements of Structures Fabricated from Nonlinearly Elastic Orthotropic Composite Materials // *Sov. Appl. Mech.* – 1988. – 24, N 4. – P. 337 – 343.
14. *Guz A.N., Maksimuk V.A., Chernyshenko I.S.* Numerical Stress-Strain Analysis of Shells Including the Nonlinear and Shear Properties of Composites // *Int. Appl. Mech.* – 2002. – 38, N 10. – P. 1220 – 1228.

15. Banabic D., Bunge H.J., Pöhlandt K., Tekkaya A.E. Formability of Metallic Materials (Plastic Anisotropy, Formability Testing and Forming Limits) (Ed. Banabic D.). – Heidelberg: Springer Verlag, 2000. – 358 p.
16. Danil'Chuk E.L., Kucher N.K., Kushnarev A.P., Potapov A.M., Rudnitskii N.P., Samusenko A.A., Filatov V.E. Deformation and strength of unidirectional carbon-fiber-reinforced plastics at elevated temperatures // *Strength of Materials*. – 2015. – **47**. – P. 573 – 578.
17. Drucker D.C., Prager W. Soil Mechanics and Plastic Analysis or Limit Design // *Quart. Appl. Mathematics*. – 1952. – **10**, N 2. – P. 157 – 165.
18. Fallahi H., Taheri-Behrooz F., Asadi A. Nonlinear Mechanical Response of Polymer Matrix Composites: A Review // *Polymer Reviews*. – 2020. – **60**, N 1. – P. 42 – 85.
19. Jones R.M. *Mechanics of Composite Materials*, 2nd Ed. – Philadelphia, PA: Taylor and Francis, 1999. – 538 p.
20. Jones R.M. *Deformation Theory of Plasticity*. – Blacksburg, VA: Bull Ridge Corporation, 2009. – 641 p.
21. Kaminsky A.O., Kurchakov E.E. Tensor-Nonlinear Constitutive Equations for an Elastic Body with Primary Anisotropy // *Int. Appl. Mech.* – 2022. – **58**, N 2. – P. 154 – 159.
22. Kaminsky A.O., Kurchakov E.E., Chornoivan Y.O. Boundary-Value Problems of Fracture Mechanics for a Nonlinear Anisotropic Body // *Int. Appl. Mech.* – 2022. – **58**, N 3. – P. 243 – 279.
23. Lomakin V.A., Ogibalov P.M., Teters G.A. Problems of the theory of deformation of polymeric materials // *Polymer Mechanics*. – 1972. – **8**, N 3. – P. 377 – 385.
24. Lomakin V.A., Yumasheva M.A. Stress-strain relationships with nonlinear deformation of orthotropic glass-reinforced plastics // *Polymer Mechanics*. – 1965. – **1**, N 4. – P. 15 – 18.
25. Maksimuk V.A., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S. Using Mesh-Based Methods to Solve Nonlinear Problems of Statics for Thin Shells // *Int. Appl. Mech.* – 2009. – **45**, N 1. – P. 32 – 56.
26. Maksimuk V.A., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S. Stress-Strain State of Flexible Orthotropic Cylindrical Shells with a Reinforced Circular Hole // *Int. Appl. Mech.* – 2015. – **51**, N 4. – P. 425 – 433.
27. Prisnyakov V.F. Development of Mechanics in Support of Rocket Technology in Ukraine // *Int. Appl. Mech.* – 2003. – **39**, N 6. – P. 656 – 678.
28. Shevchenko Y.N., Galishin A.Z. Particularizing the Constitutive Equations of Elastoplasticity of a Transversely Isotropic Material // *Int. Appl. Mech.* – 2011. – **47**, № 6. – P. 662 – 669.
29. Storozhuk E.A., Maksimuk V.A., Chernyshenko I.S. Nonlinear Elastic State of a Composite Cylindrical Shell with a Rectangular Hole // *Int. Appl. Mech.* – 2019. – **55**, N 5. – P. 504 – 514.
30. Tarnopol'skii Y.M., Zhigun I.G., Polyakov V.A. *Spatially Reinforced Composites*. – Lancaster: Technomic, 1992. – 341 p.
31. Tong L., Mouritz A.P., Bannister M.K. *3D Fibre Reinforced Polymer Composites*. – Oxford: Elsevier Science Ltd, 2002. – 247 p.
32. Vasiliev V.V., Morozov E.V. *Advanced Mechanics of Composite Materials and Structural Elements*. 3rd edition. – Oxford: Elsevier, 2013. – 832 p.
33. Von Mises R. Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen // *Z. Angew. Math. und Mech.* – 1928. – **8**. – S. 161 – 185.

Надійшла 28.12.2022

Затверджена до друку 27.06.2023