

П.З.Луговий¹, В.М.Сіренко²,
В.Д.Клименко², К.Е.Котенко¹

**ДИНАМІКА ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ В ТРИШАРОВИХ
ЦИЛІНДРИЧНИХ ЕЛЕМЕНТАХ З НЕОДНОРІДНИМ ЗАПОВНЮВАЧЕМ
ПРИ КОМБІНОВАНИХ НЕСТАЦІОНАРНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ**

¹Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: plugovyy@inmtech.kiev.ua

²ДП «Конструкторське бюро «Південне»,
вул. Криворізька, 3, 49008, Дніпро, Україна; email: info@uzhnoe.com

Abstract. An effect of the distributed and localized axisymmetric impulse loads on the three-layer cylindrical shell elements of the rocket airframe is studied. The localized axisymmetric impulse of external loads, which are applied along the guide of the cylindrical shell, is an imitation of the explosion of an elongated cumulative charge of instantaneous action. The carried out finite-element modeling of the dynamics of transient processes of studied elements under such loads makes it possible to choose correctly the physical and mechanical parameters of the cylindrical rocket airframe. The studies carried out in this work demonstrate a significant effect of the nature of dynamic loads on the transient processes in the three-layer cylindrical elements.

Key words: dynamics, three-layer cylindrical element, transient process, internal distributed non-stationary load, local external impulse load, finite element method, mechanical phenomenon.

Вступ.

Циліндричні оболонки з різними технічними особливостями широко застосовуються в авіа-, ракето-, суднобудуванні і багатьох інших галузях техніки і будівництва. Тому розвитку теорії і методів розрахунку динаміки і статички таких циліндричних елементів конструкцій приділяється велика увага [1 – 3, 8, 20]. В роботах [10 – 12, 21] аналітичними методами досліджено поведінку циліндричних оболонок з різними технічними особливостями. В статтях [15, 16] проаналізовано динамічну поведінку циліндричного адаптера на пружній основі при локальних навантаженнях. В роботі [17] розроблено методику дослідження перехідного процесу вимушених коливань поздовжньо та поперечно армованої циліндричної оболонки під дією навантаження зі змінною в часі частотою та амплітудою.

Вимоги щодо міцності і ваги, що ставляться до сучасних конструкцій, постійно підвищуються, а умови експлуатації виробу стають все більш жорсткими. Необхідність одночасного виконання цілого ряду інколи суперечливих вимог призводить до ідеї розробки багатошарових конструкцій, в яких кожен шар виконує тільки одну або краще кілька функцій. При цьому шари можуть відрізнятися як за товщиною, так і за фізико-механічними властивостями, тобто пакет може бути істотно неоднорідним.

Останнім часом створення нових технологій, об'єктів спеціального призначення і т.д. часто призводить до необхідності розробки конструктивних тришарових оболонок елементів із заповнювачем ускладненої геометричної структури. При цьому

зазначені елементи піддаються динамічним навантаженням різного виду, в тому числі нестационарним навантаженням. Для таких оболонок проблеми динамічної поведінки вивчені недостатньо [7, 14]. В монографії [4] досліджено динамічні процеси в конструктивно неоднорідних оболонкових структурах складної геометрії. Велика увага приділяється використанню та розвитку аналітичних, скінченно-різницевих і скінченно-елементних методів розв'язання поставлених задач. Проведені дослідження дозволяють правильно вибрати вид рівнянь і методів їх розв'язання при описі динаміки оболонок з конструктивними особливостями і тришарових оболонок з неоднорідним заповнювачем.

При значній відмінності фізико-механічних параметрів шарів доцільно застосовувати теорії оболонок з використанням незалежних гіпотез для кожного з шарів. В результаті використання легкого заповнювача утворюється спеціальна тришарова структура з досить великою жорсткістю на згин при вигідному співвідношенні міцності і ваги. У даній роботі розглядається відповідальний елемент у вигляді тришарової циліндричної оболонки симетричної структури з дискретно-симетричним легким армованим ребрами заповнювачем при комбінованих нестационарних навантаженнях. Армуючі елементи розташовані на відстанях, які значно перевищують розміри поперечних перерізів армуючих ребер. Властивості матеріалів суміжних шарів достатньо різні, тому для розрахунків таких оболонкових структур доцільно застосовувати метод скінченних елементів. Дослідження динамічних процесів в таких складних тришарових структурах при значній зміні їх геометричних і фізичних параметрів представляє значний інтерес для конструкторських розробок.

§1. Постановка задачі.

Тришаровий циліндричний елемент з легким заповнювачем, армованим дискретними ребрами, являє собою пружну структуру, яка складається з внутрішньої (індекс 1), зовнішньої (індекс 2) несучих оболонок, легкого заповнювача (індекс t) і набору дискретних ребер (індекс j), жорстко з'єднаних з зазначеними несучими оболонками. Елемент має постійну загальну товщину h з гладкою серединною поверхнею в ортогональній системі координат x, z . Координатна лінія x на серединній поверхні оболонки при $z = 0$ збігається з осью лінійною; координатна лінія z є прямою, ортогональною до серединної поверхні. Будемо вважати величину z додатною, якщо точка перебуває з боку опуклості серединної поверхні (рис. 1).

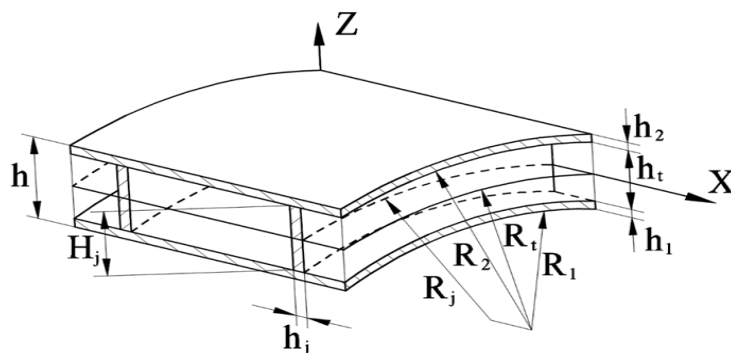


Рис. 1

Наявність легкого пружного матеріалу в порожнинах між ребрами і несучими оболонками створює дискретну неоднорідність ребристого заповнювача. Напружено-деформований стан внутрішньої і зовнішньої несучих оболонок може бути визначений через компоненти узагальненого вектора переміщень $\bar{U}_1 = (u_1^1, u_3^1, \varphi_1^1)^T$ і $\bar{U}_2 =$

$= (u_1^2, u_3^2, \varphi_1^2)^T$ [6]. Поля переміщень для легкого заповнювача визначаються узагальненим вектором переміщень $\overline{U}_t = (u_{1t}, u_{3t}, \varphi_{1t})^T$ згідно моделі, розробленої в роботі [9]. Деформований стан армуючих ребер, спрямованих вздовж колової координати, будемо визначати узагальненим вектором переміщень $\overline{U}_J = (u_1^j, u_3^j, \varphi_1^j)^T$.

Використовуючи зсувну теорію оболонок [6], переміщення u_1^i і u_3^i в несучих оболонках в напрямку x (поздовжній), z (товщина) і t (час) за малих лінійних переміщень виражаються через наступні залежності:

$$u_1^i(x, z, t) = u_{01}^i(x, t) + z_i \varphi_1^i(x, t); \quad (1.1)$$

$$u_3^i(x, z, t) = u_{03}^i(x, t) \quad (i = 1, 2),$$

де z_i – вертикальна координата кожної несучої оболонки і вимірюється вгору від серединної поверхні кожної несучої оболонки; φ_1^i – кут повороту нормалі до серединної поверхні несучих оболонок.

Кінематичні залежності для несучих оболонок при малих деформаціях записуються наступним чином:

$$\varepsilon_{11}^i = \varepsilon_{011}^i + z_i k_{11}^i; \quad \varepsilon_{22}^i = \frac{u_{03}^i}{R_i}; \quad 2\varepsilon_{13}^i = \varepsilon_{013}^i \quad (i = 1, 2), \quad (1.2)$$

де

$$\varepsilon_{011}^i = \frac{\partial u_{01}^i}{\partial x}; \quad \varepsilon_{022}^i = \frac{u_{03}^i}{R_i}; \quad \varepsilon_{013}^i = \frac{\partial u_{03}^i}{\partial x} + \varphi_1^i; \quad k_{11}^i = \frac{\partial \varphi_1^i}{\partial x} \quad (i = 1, 2). \quad (1.3)$$

Тут позначено: ε_{011}^i , ε_{022}^i , ε_{013}^i – компоненти деформацій серединних поверхонь несучих оболонок.

Умови жорсткого з'єднання армуючих ребер з циліндричними несучими оболонками записуються по лініях контакту центрів тяжіння ребер з несучими оболонками [18, 19]

$$u_1^j = u_1^{jk}(x_j) \mp \frac{H_j}{2} \varphi_1^{jk}(x_j); \quad (1.4)$$

$$u_3^j = u_3^{jk}(x_j); \quad \varphi_1^j = \varphi_1^{jk}(x_j) \quad (k = 1, 2),$$

де x_j – координата лінії множин точок проєкцій центрів тяжіння поперечних перерізів j -го ребра на відповідну серединну поверхню несучої оболонки; $h_j^i = 0,5h_i + \frac{H_i}{2}$; h_i ($i = 1, 2$) – товщини циліндричних несучих оболонок; $H_j/2$ – відстань від осі j -го ребра до поверхні гладких оболонок; товщина легкого заповнювача $h_t = H_j$.

Переміщення легкого заповнювача записуються згідно моделі, наведеної в роботі [9]:

$$u_1^t(x, z, t) = \left(1 + \frac{z_t}{R_t}\right) u_{01}^t(x, t) + z_t u_1^t(x, t); \quad (1.5)$$

$$u_3^t(x, z, t) = u_{03}^t(x, t).$$

За малих деформацій кінематичні залежності для легкого заповнювача для шаруватих оболонок приймемо у вигляді:

$$\varepsilon_{11}^t = \frac{\partial u_0^t}{\partial x} + z \frac{u_1^t}{\partial x}; \quad \varepsilon_{22}^t = \frac{u_{03}^t}{R_t + z_t}; \quad 2\varepsilon_{13}^t = \left(\frac{\partial u_{03}^t}{\partial x} \right) + u_1^t, \quad (1.6)$$

де u_0^t , u_1^t , u_{03}^t – компоненти узагальненого вектора переміщень легкого заповнювача.

Модель, яка передбачає ідеальне сполучення між заповнювачем і несучими оболонками без відриву і проковзування, описується наступним чином [13]:

$$\begin{cases} u_1^t(z = z_t^1) = u_0^t + \frac{1}{2}(-1)^k h_t \varphi_1^i & \text{для } i = 1 \rightarrow (k = 0; z_t^1 = -h_t/2); \\ u_{03}^t = u_{03}^i & \text{для } i = 2 \rightarrow (k = 1; z_t^2 = h_t/2). \end{cases} \quad (1.7)$$

Приймаючи до уваги вирази для поля переміщень для несучих оболонок (1.1), легкого заповнювача (1.5) і умови міжшарової неперервності переміщень (1.7) виведемо спрощені умови сумісності:

$$\begin{aligned} u_0^t &= \frac{u_0^1 + u_0^2}{2} - \frac{1}{4}(h_2 \varphi_1^2 - h_1 \varphi_1^1); \quad u_1^t = \frac{u_0^1 - u_0^2}{h_t} - \frac{1}{2h_t}(h_2 \varphi_1^2 + h_1 \varphi_1^1); \\ u_{03}^t &= \frac{1}{2}(u_{03}^1 + u_{03}^2). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Для армуючих ребер заповнювача зусилля і моменти обчислюються за формулами:

$$T_{11j} = \int_{F_j} \sigma_{11j} dF_j; \quad Q_{13j} = \int_{F_j} \sigma_{13j} dF_j; \quad M_{11j} = \int_{F_j} z_j \sigma_{11j} dF_j. \quad (1.9)$$

Рівняння руху для несучих оболонок і ребристого легкого заповнювача виводяться згідно варіаційного принципу стаціонарності Гамільтона – Остроградського, згідно якого:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (K - \Pi + A) dt = 0, \quad (1.10)$$

де Π – повна потенціальна енергія пружної системи; K – повна кінетична енергія пружної системи; A – робота зовнішніх сил; t_1 і t_2 – фіксовані моменти часу. При виведенні рівнянь коливань тришарових оболонок з легким заповнювачем незалежному варіюванню підлягають: компоненти переміщень несучих оболонок і заповнювача з легкого матеріалу, а також армуючих ребер жорсткості.

Вирази для варіацій потенціальної і кінетичної енергії записуються у вигляді:

$$\delta \Pi = \delta \sum_{i=1}^2 \Pi^i + \delta \sum_{j=1}^J \Pi^j + \delta \sum_{S_t} \Pi^t; \quad \delta K = \delta \sum_{i=1}^2 K^i + \delta \sum_{j=1}^J K^j + \delta \sum_{S_t} K^t; \quad (1.11)$$

$$\delta \Pi^i = \int_S \left(T_{11}^i \delta E_{11}^i + T_{22}^i \delta E_{22}^i + T_{13}^i \delta E_{13}^i + M_{11}^i \delta \kappa_{11}^i \right) dS; \quad (1.12)$$

$$\delta \Pi^t = \int_{S_t} \left[\int_{h_t/2}^{h_t/2} \left(T_{11}^t \delta \varepsilon_{11}^t + T_{22}^t \delta \varepsilon_{22}^t + T_{13}^t \delta \varepsilon_{13}^t + M_{11}^t \delta \kappa_{11}^t \right) dz \right] dS_t; \quad (1.13)$$

$$\delta \Pi^j = \int_{L_j} T_{22}^j \delta \varepsilon_{22}^j dL_j; \quad (1.14)$$

$$\delta K^i = \int_S \left[\rho_i h_i \left(\frac{\partial^2 u_1^i}{\partial t^2} \delta u_1^i + \frac{\partial^2 u_3^i}{\partial t^2} \delta u_3^i \right) + \rho_i \frac{h_i^3}{12} \left(\frac{\partial^2 \varphi_1^i}{\partial t^2} \delta \varphi_1^i \right) \right] dS; \quad (1.15)$$

$$\delta K^t = \int_{S_i} \left[\int_{-h_i/2}^{h_i/2} \rho_t h_t \left(\frac{\partial^2 u_0^t}{\partial t^2} \delta u_0^t + \frac{\partial^2 u_1^t}{\partial t^2} \delta u_1^t + \frac{h_t^2}{12} \frac{\partial^2 u_{03}^t}{\partial t^2} \delta u_{03}^t \right) dz_t \right] dS_i; \quad (1.16)$$

$$\delta K^j = \int_{L_j} \left[\rho_j F^j \left(\frac{\partial^2 u_1^j}{\partial t^2} \delta u_1^j + \frac{\partial^2 u_3^j}{\partial t^2} \delta u_3^j \right) + \rho_j \left(I_{kr}^j \frac{\partial^2 \varphi_1^j}{\partial t^2} \delta \varphi_1^j \right) \right] dL_j. \quad (1.17)$$

В рівняннях (1.15) – (1.17) величини F^j, I_{kr}^j відповідають геометричним характеристикам поперечних армуючих ребер; ρ_j – густина матеріалу армуючого ребра; $\rho_i (i=1,2)$, ρ_t – густини матеріалів несучих оболонок і легкого заповнювача, відповідно.

Слід зазначити, що при розрахунку потенціальної і кінетичної енергії для легкого заповнювача в виразах δP^t та δK^t інтегрування проводиться за об'ємом, величина якого збільшена на величину обсягу армуючих ребер. Але цей факт практично не впливає на загальну похибку теорії оболонок, оскільки вміст армуючих ребер в складі об'єму легкого заповнювача для тришарових оболонок обертання не перевищує 2 – 5%. Відзначимо, що метод скінченних елементів добре зарекомендував себе при розрахунках конструкцій з матеріалів, які мають різні фізико-механічні властивості.

При виведенні рівнянь коливань тришарових елементів з легким заповнювачем незалежному варіюванню підлягають: компоненти переміщень несучих оболонок, армуючих ребер і заповнювача з легкого матеріалу.

Після стандартних перетворень у варіаційному рівнянні (1.10), з урахуванням співвідношень (1.11) – (1.17), отримаємо дві системи гіперболічних рівнянь руху дев'ятого порядку для тришарового циліндричного елемента з легким ребристим заповнювачем при осесиметричному імпульсному навантаженні і відповідні природні граничні і початкові умови:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}^i}{\partial x} - \frac{1}{R_i} N_{13}^t &= \left(\rho_i h_i + \frac{\rho_t h_t}{3} \right) \frac{\partial^2 u_1^i}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial T_{13}^i}{\partial x} - \frac{T_{11}^i}{R_{1i}} - \frac{1}{R_{1i} h_i} M_{11}^t + \frac{1}{h_i} \frac{\partial M_{13}^t}{\partial x} - P_2 \delta(x-a) - \left(1 \pm \frac{h_i}{2R_{1i}} \right) P_1 &= \rho_i h_i \frac{\partial^2 u_{03}^t}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial M_{11}^i}{\partial x} - T_{13}^i - N_{13}^t &= \rho_i \frac{h_i^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1^i}{\partial t^2} \quad (i=1,2); \\ \frac{\partial T_{11}^t}{\partial x} - \frac{1}{R_t} T_{13}^t &= \rho_t h_t \frac{\partial^2 u_0^t}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial T_{13}^t}{\partial x} = \rho_t h_t \frac{\partial^2 w_0^t}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial M_{11}^t}{\partial x} - T_{13}^t = \rho_t \frac{h_t^3}{12} \frac{\partial^2 u_1^t}{\partial t^2}; \\ \left[T_{11}^{i\pm} \right]_j &= \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{1j}}{\partial t^2}; \quad \left[T_{13}^{i\pm} \right]_j = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial t^2}; \quad \left[M_{11}^{i\pm} \mp h_j T_{11}^{i\pm} \right]_j = \rho_j I_{krj} \frac{\partial^2 \varphi_{1j}}{\partial t^2} \quad (i=1,2), \quad (j=\overline{1,J}). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Ці системи рівнянь утворюються за рахунок врахування розривних коефіцієнтів «несучі оболонки-армуючі ребра».

На лініях розривів в рівняннях коливань (1.18) величини $\left[T_{11}^{i\pm} \right]_j$; $\left[T_{13}^{i\pm} \right]_j$; $\left[M_{11}^{i\pm} \right]_j$

відповідають зусиллям і моментам, які діють на j -й дискретний елемент з боку несучих оболонок.

Вважається, що тришарова циліндрична структура навантажена внутрішнім осесиметричним розподілом нестационарним нормальним навантаженням $P_1(x, t)$ і осесиметричним зовнішнім зосередженим ударом по направляючій $P_2\delta(x - x_i)$, де s і t – просторова і часова координати.

Зусилля і моменти для несучих оболонок можна записати наступним чином:

$$T_{11}^i = \int_{-h_i/2}^{h_i/2} \sigma_{11}^i dz_i; \quad T_{22}^i = \int_{-h_i/2}^{h_i/2} \sigma_{22}^i dz_i; \quad M_{11}^i = \int_{-h_i/2}^{h_i/2} z_i \sigma_{11}^i dz_i; \quad T_{13}^i = k_s \int_{-h_i/2}^{h_i/2} \sigma_{13}^i dz_i, \quad (1.19)$$

а зусилля і моменти для легкого заповнювача представимо в такому вигляді:

$$T_{11}^t = \int_{-h_i/2}^{h_i/2} \left(1 + \frac{z_t}{R_t}\right) \sigma_{11}^t dz_t; \quad M_{11}^t = \int_{-h_i/2}^{h_i/2} z_t \left(1 + \frac{z_t}{R_t}\right) \sigma_{11}^t dz_t; \quad T_{13}^t = \int_{-h_i/2}^{h_i/2} \sigma_{13}^t dz_t. \quad (1.20)$$

Для дискретних армуючих елементів заповнювача зусилля і моменти обраховуються за такими формулами:

$$T_{11}^j = \int_{F_j} \sigma_{11}^j dF_j; \quad T_{13}^j = \int_{F_j} \sigma_{13}^j dF_j; \quad M_{11}^j = \int_{F_j} z_j \sigma_{11}^j dF_j. \quad (1.21)$$

Відзначимо, що однією зі складностей задач коливань неоднорідних пружних структур з урахуванням дискретності ребер, армуючого легкого заповнювача, є наявність розривних коефіцієнтів в трьох останніх рівняннях коливань (1.18). Виходячи з цього, створюються численні алгоритми в гладкій області і «склеюються» на лініях розривів з урахуванням кінематичних умов з'єднання [18, 19]. Але, наявність сучасних обчислювальних скінченно-елементних комплексів дозволяє отримувати числові рішення подібних задач [4].

§2. Числові результати.

Розв'язано задачу динамічного деформування тришарового циліндричного елемента з неоднорідним заповнювачем при комбінованому нестационарному навантаженні.

Проведено дослідження дії внутрішнього імпульсу тиску

$$P_1 = A \cdot \sin \frac{\pi t}{T} [\eta(t) - \eta(t - T)], \quad (2.1)$$

де A – амплітуда навантаження; T – тривалість імпульсу навантаження; $T = R/c$ (c – швидкість звуку в металі несучих оболонок); $\eta(t)$ – функція Хевісайда.

При цьому одночасно діє зосереджений зовнішній локальний осесиметричний зовнішній удар по направляючій тришарової циліндричної оболонки (імітація вибуху подовженого кумулятивного заряду миттєвої дії):

$$P_2\delta(x - x_i) = \begin{cases} A \left(1 - \frac{t}{T}\right), & 0 \leq t \leq T \\ 0, & t > 0 \end{cases} \quad \text{при } x = x_i \text{ і } 0 \text{ при } x \neq x_i, \quad (2.2)$$

де $A = 10^6$ Па; $T = 50 \cdot 10^{-6}$ с.

Обидва навантаження починають діяти одночасно при $t = 0$. При таких амплітудно-часових параметрах нестационарних навантажень можна дослідити динаміку перехідних процесів в тришарових циліндричних елементах в залежності від механічних властивостей заповнювача.

Розглянуто задачу динамічного деформування тришарового циліндричного елемента з жорстко зашкеленими торцями. Граничні умови при $x = x_0$, $x = x_N$ для несучих оболонок мають вигляд:

$$u_1^i = u_3^i = \varphi_1^i = 0 \quad (i=1, 2); \quad (2.3)$$

початкові умови нульові для несучих оболонок при $t = 0$:

$$u_1^i = u_3^i = \varphi_1^i = 0; \quad \frac{\partial u_1^i}{\partial t} = \frac{\partial u_3^i}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1^i}{\partial t} = 0 \quad (i=1, 2). \quad (2.4)$$

Відповідна початково-крайова задача (1.18), (2.1) – (2.4) розв'язується за допомогою скінченно-елементного методу. Створена адекватна скінченно-елементна модель тришарової циліндричної оболонки (рис. 2) складається із: a – зовнішнього несучого шару; b – внутрішнього несучого шару; $в$ – армуючих ребер і $г$ – легкого заповнювача. Модель відображає взаємозв'язок потенціальної енергії деформацій в тілі з потенціалом прикладених сил відповідно системі рівнянь (1.18).

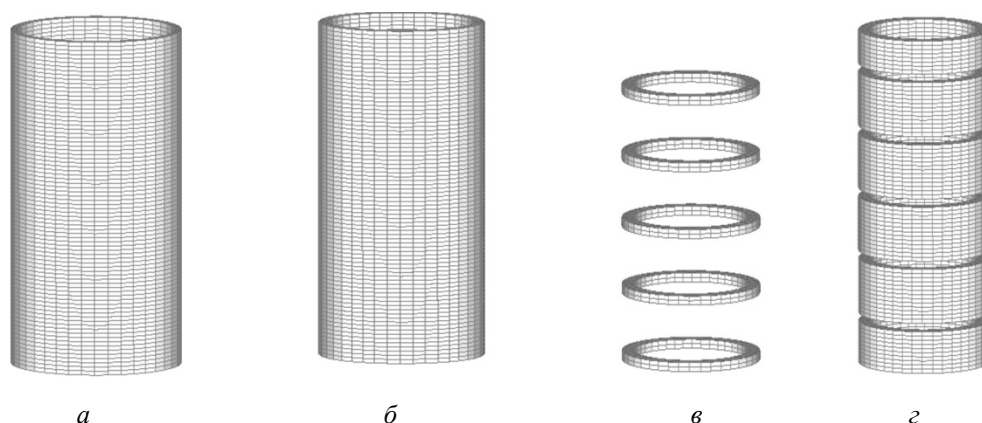


Рис. 2

Скінченно-елементна модель створювалася з використанням тривимірного об'ємного скінченного елемента типу Solid, який по деформативним якостям звуження, викривлення та іншим показникам відповідав вимогам забезпечення розрахункової сітки на скінченно-елементному рівні [5]. У варіанті тришарової циліндричної структури без полімерного заповнювача кількість скінченних елементів складала у внутрішній несучій оболонці 9600 елементів, зовнішній – 9600, а в армуючих ребрах – 1200. Кількість скінченних елементів легкого заповнювача (пінопласту) дорівнювала 8400. Загальна кількість скінченних елементів у моделі без пінопласту складала 20400 елементів і 27280 вузлів. А при використанні пінопласту ці величини становлять: 28800 елементів і 32400 вузлів.

При такій розбивці скінченно-елементної моделі на елементи і вузли забезпечується практична збіжність результатів розрахунків [5].

$$\Pi = E - W, \quad (2.5)$$

де E – потенціальна енергія деформацій, а W – потенціал прикладених сил.

Після розбивки суцільної області на окремі елементи залежність (2.5) матиме наступний вигляд:

$$\Pi = \sum_{e=1}^E (E^{(e)} - W^{(e)}) = \sum_{e=1}^E \pi^{(e)}. \quad (2.6)$$

Глобальна матриця жорсткості і глобальний вектор-стовпець в матричному рівнянні:

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad (2.7)$$

записуються наступним чином:

$$[K] = \sum_{e=1}^E [k^{(e)}]; \quad \{F\} = - \sum_{e=1}^E \{f^{(e)}\}.$$

Розглянуто симетричний тришаровий циліндричний елемент з дискретно-симетричним легким заповнювачем, армованим ребрами жорсткості. Задача розв'язана методом скінченних елементів, хід якого наведений вище.

В цьому випадку несучі оболонки мають однакову товщину і виготовлені з однакових матеріалів. Дослідження напружено-деформованого стану зазначеного тришарового елемента розглянуто при наступних геометричних і фізико-механічних параметрах:

$$\frac{L}{h_1} = 40; \quad h_1 = h_2 = 0,01 \text{ м}; \quad \frac{R_1}{h_1} = 10; \quad \frac{H_j}{h_1} = 2; \quad F_j = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$E_1^1 = E_1^2 = E_j = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па}; \quad \nu_1^1 = \nu_1^2 = \nu_j = 0,3; \quad \rho_1 = \rho_2 = \rho_j = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

Наведені дані тришарового циліндричного елемента відповідають сплаву АМГ-6.

Розглянуто два випадки для модуля пружності легкого заповнювача E_1^t відношення $E_1^1/E_1^t = 50$; $E_1^1/E_1^t = 500$; густина $\rho_t = 25 \text{ кг/м}^3$, коефіцієнт Пуассона $\nu_t = 0,27$. Армуючі елементи розташовані в точках $x_j = [11 + 15(k-1)]\Delta x$; $k = 1 \div 5$; $\Delta x = L/80$. В подальших розрахунках приймалось $k = 5$.

Задача розв'язана методом скінченних елементів, схема використання якого наведена вище.

Отримані числові результати дозволяють проводити аналіз напружено-деформованого стану симетричної тришарової пружної структури циліндричного типу в будь-який момент часу (розрахунки проводилися при $0 \leq t \leq 40T$).

Розглянуто три варіанти дії комбінованих нестационарних навантажень.

1. На тришаровий циліндричний елемент діють наступні нестационарні навантаження: осесиметричний зосереджений зовнішній удар по направляючій в центрі циліндричного елемента в (2.2) $x_i = 0,2$; осесиметричне розподілене внутрішнє імпульсне навантаження.

На графіках рис. 3, а показано залежності максимальних величин нормальних прогинів $u_3^1(1)$ і $u_3^2(2)$ в серединних поверхнях несучих оболонок симетричного тришарового циліндричного елемента від поздовжньої координати x . Тут і в подальших графіках крива 1 відповідає величині u_3^1 внутрішньої несучої оболонки симетричного циліндричного елемента, а крива 2 – величині u_3^2 зовнішній несучій оболонці симетричної циліндричної структури в момент часу $t = 5,75T$ (час досягнення максимального значення величин $u_3^1(1)$ і $u_3^2(2)$). Легкий заповнювач відсутній. На даному графіку і в подальших рисунках точки з'єднання кривих 1 і 2 вказують на розташування дискретних ребер. З представленого графічного матеріалу можна візуально визначити антисиметричність розподілу величин $u_3^1(1)$ і $u_3^2(2)$ за просторовою координатою. Перші п'ять власних частот конструкції становлять: 1. – 2571,663 Гц; 2. – 2571,663 Гц; 3. – 2645,195 Гц; 4. – 2645,198 Гц; 5. – 3751,644 Гц.

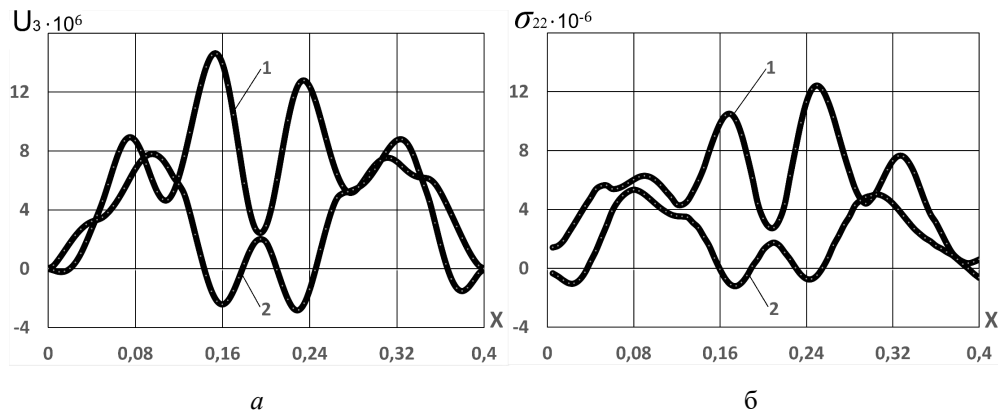


Рис. 3

На рис. 3, б відображено залежності максимальних величин нормальних напружень σ_{22}^1 (1) і σ_{22}^2 (2) в серединних поверхнях несучих оболонок від координати x . Крива 1 відповідає величині σ_{22}^1 внутрішньої несучої оболонки симетричного циліндричного елемента, а крива 2 – величині σ_{22}^2 зовнішньої несучої оболонки симетричного циліндричного елемента в момент часу $t = 5,75T$ (час досягнення максимального значення величин σ_{22}^1 (1) і σ_{22}^2 (2)). Легкий заповнювач відсутній.

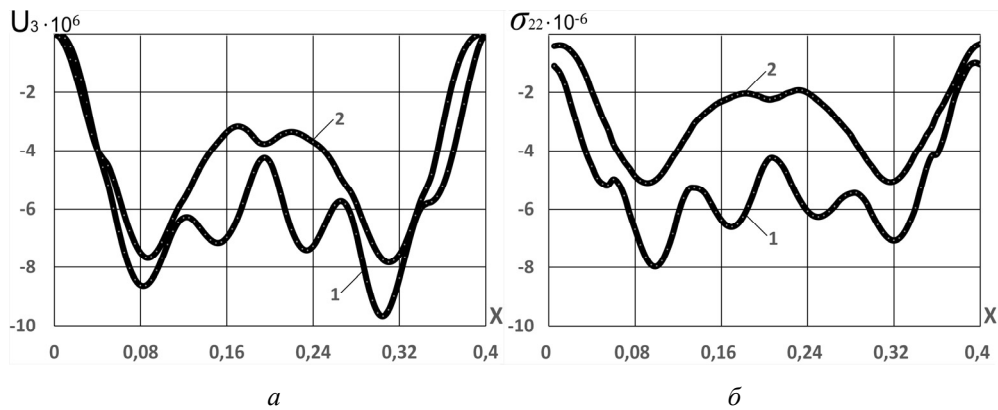


Рис. 4

На рис. 4, а показано залежності максимальних величин нормальних прогинів u_3^1 (1) і u_3^2 (2) в серединних поверхнях несучих оболонок симетричного тришарового циліндричного елемента від позовжньої координати x в момент часу $t = 2,3T$. Легкий заповнювач $-E_1^1/E_1^t = 50$. З представленого графічного матеріалу можна візуально визначити антисиметричність розподілу величин u_3^1 (1) і u_3^2 (2) за просторовою координатою x . Перші п'ять власних частот конструкції становлять: 1. – 2634,372 Гц; 2. – 2634,372 Гц; 3. – 2875,796 Гц; 4. – 2875,802 Гц; 5. – 3776,126 Гц.

На рис. 4, б показано залежності максимальних величин нормальних напружень σ_{22}^1 (1) і σ_{22}^2 (2) в серединних поверхнях несучих оболонок від координати x в момент часу $t = 2,3T$. Легкий заповнювач $-E_1^1/E_1^t = 50$.

На рис. 5, а показано залежності максимальних величин нормальних прогинів u_3^1 (1) і u_3^2 (2) в серединних поверхнях несучих оболонок симетричного тришарового циліндричного елемента від поздовжньої координати x в момент часу $t = 3,3 T$. Легкий заповнювач $-E_1^1/E_1^t = 500$. З представленого графічного матеріалу можна візуально визначити антисиметричність розподілу величин u_3^1 (1) і u_3^2 за просторовою координатою x . Перші п'ять власних частот конструкції становлять: 1. $-2570,74$ Гц; 2. $-2570,74$ Гц; 3. $-2667,214$ Гц; 4. $-2667,218$ Гц; 5. $-3742,788$ Гц.

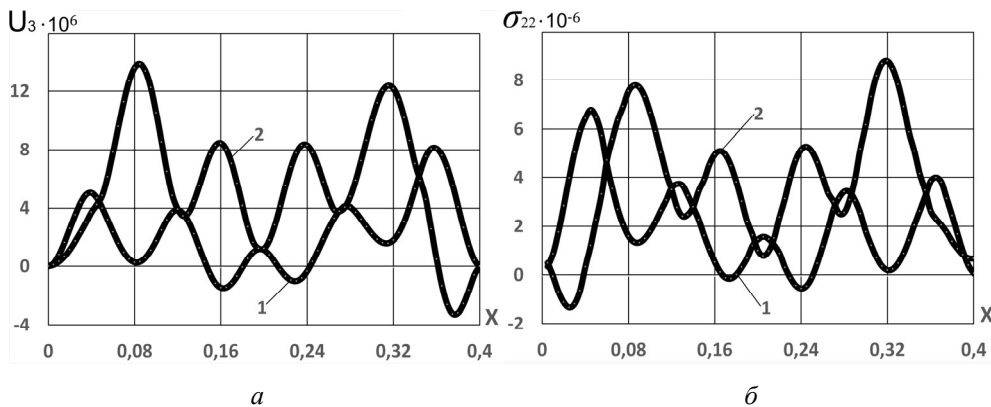


Рис. 5

На рис. 5, б показано залежності максимальних величин нормальних напружень σ_{22}^1 (1) і σ_{22}^2 (2) в серединних поверхнях несучих оболонок від координати x в момент часу $t = 3,3 T$. Легкий заповнювач $-E_1^1/E_1^t = 500$.

Враховуючи, що вихідна задача є багатопараметричною (в різні моменти часу t кінематичні та силові параметри приймають різні значення по координаті x) в подальшому розглядатимемо залежності вихідних величин в моменти часу досягнення ними максимальних значень по модулю.

Аналіз отриманих результатів показує, що використання легкого заповнювача (пінопласту) $E_1^1/E_1^t = 50$ в 1,67 рази зменшує максимальне нормальне переміщення u_3^1 і в 1,14 рази – максимальне нормальне переміщення u_3^2 , відповідно зменшує максимальну величину нормальних напружень σ_{22}^1 в 1,51 рази, а величини σ_{22}^2 залишаються незмінними. Треті власні частоти збільшились приблизно на 9%.

Аналіз графіків на рис. 5 показує, що використання легкого заповнювача (пінопласту) $-E_1^1/E_1^t = 500$ в 1,87 рази зменшує максимальне нормальне переміщення u_3^1 і в 1,75 рази збільшує максимальне нормальне переміщення u_3^2 , відповідно зменшує максимальну величину нормальних напружень σ_{22}^1 в 1,78 рази, а величину σ_{22}^2 збільшує в 1,6 рази.

2. На тришаровий циліндричний елемент діють наступні нестационарні навантаження: осесиметричний зосереджений зовнішній удар по направляючій по місцю установки другого ребра в циліндричному елементі в (2.2) $x_i = 0,12$; осесиметричне розподілене внутрішнє імпульсне навантаження.

На графіках рис. 6, а показано залежності максимальних величин нормальних прогинів u_3^1 (1) і u_3^2 (2) в серединних поверхнях несучих оболонок симетричного три-

шарового циліндричного елемента від поздовжньої координати x в момент часу $t = 5,75 T$. Легкий заповнювач відсутній. З усіх графіків можна візуально визначити антисиметричність розподілу величин u_3^1 (1) і u_3^2 (2) за просторовою координатою. Перші п'ять власних частот конструкції становлять: 1. – 2571,663 Гц; 2. – 2571,663 Гц; 3. – 2645,195 Гц; 4. – 2645,198 Гц; 5. – 3751,644 Гц.

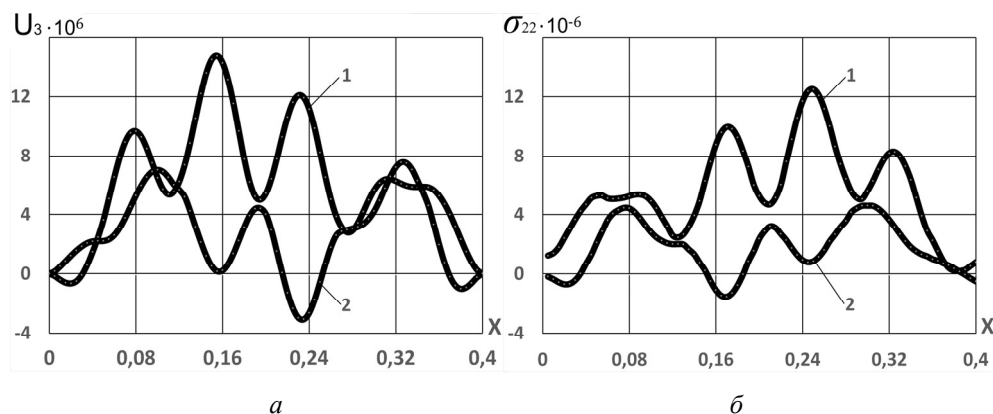


Рис. 6

На рис. 6, б показано залежності максимальних величин нормальних напружень σ_{22}^1 (1) і σ_{22}^2 (2) в серединних поверхнях несучих оболонок від координати x в момент часу $t = 5,75 T$. Легкий заповнювач відсутній.

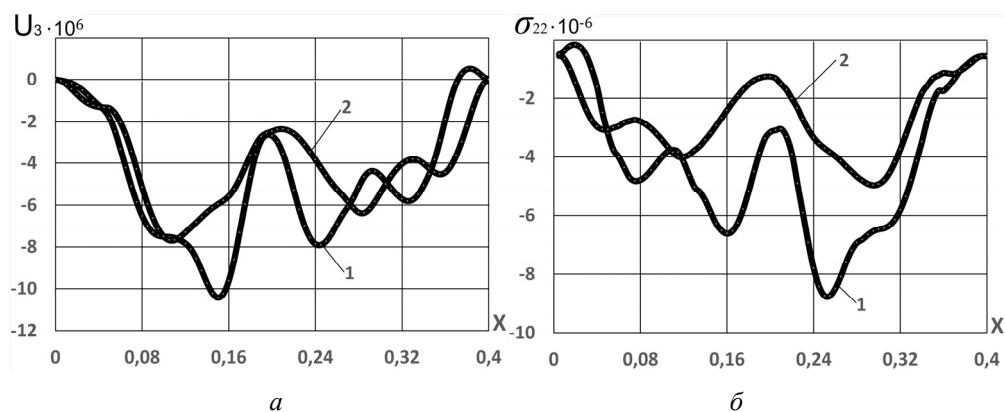


Рис. 7

На рис. 7, а показано залежності максимальних величин нормальних прогинів u_3^1 (1) і u_3^2 (2) в серединних поверхнях несучих оболонок симетричного тришарового циліндричного елемента від поздовжньої координати x в момент часу $t = 4,6 T$. Легкий заповнювач $-E_1^1/E_1^t = 50$. Перші п'ять власних частот конструкції становлять: 1. – 2634,372 Гц; 2. – 2634,372 Гц; 3. – 2875,796 Гц; 4. – 2875,802 Гц; 5. – 3776,126 Гц.

На рис. 7, б показано залежності максимальних величин нормальних напружень σ_{22}^1 (1) і σ_{22}^2 (2) в серединних поверхнях несучих оболонок від координати x в момент часу $t = 4,6 T$. Легкий заповнювач $-E_1^1/E_1^t = 50$.

На рис. 8, а показано залежності максимальних величин нормальних прогинів u_3^1 (1) і u_3^2 (2) в серединних поверхнях несучих оболонок симетричного тришарового циліндричного елемента від поздовжньої координати x в момент часу $t = 3,3 T$. Легкий заповнювач $-E_1^1/E_1^t = 500$. Перші п'ять власних частот конструкції становлять: 1. $-2570,74$ Гц; 2. $-2570,74$ Гц; 3. $-2667,214$ Гц; 4. $-2667,218$ Гц; 5. $-3742,788$ Гц.

На рис. 8, б показано залежності максимальних величин нормальних напружень σ_{22}^1 (1) і σ_{22}^2 (2) в серединних поверхнях несучих оболонок від координати x в момент часу $t = 2,35 T$. Легкий заповнювач $-E_1^1/E_1^t = 500$.

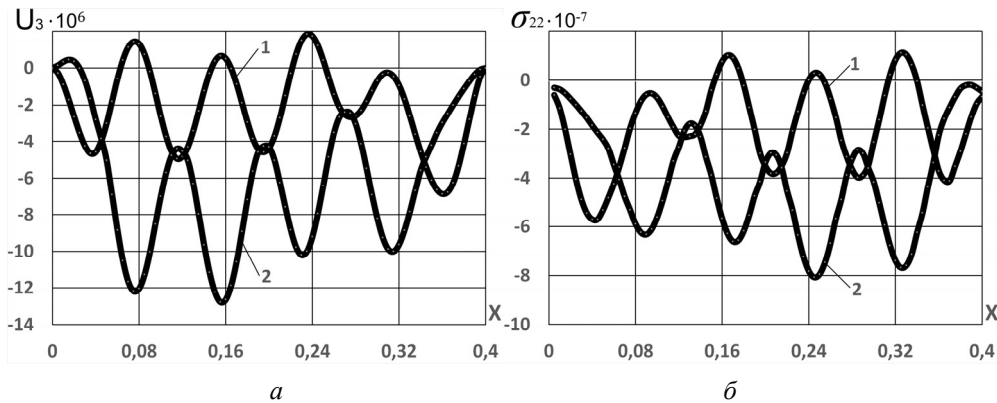


Рис. 8

Аналіз отриманих результатів (рис. 7) показує, що використання легкого заповнювача (пінопласту) $-E_1^1/E_1^t = 50$ в 1,6 рази зменшує максимальне нормальне переміщення u_3^1 і в 1,13 рази максимальне нормальне переміщення u_3^2 , відповідно зменшує максимальну величину нормальних напружень σ_{22}^1 в 1,45 рази, а величини σ_{22}^2 збільшуються в 1,04 рази. Треті власні частоти збільшились приблизно на 9%.

Аналіз графіків на рис. 8 показує, що використання легкого заповнювача (пінопласту) $E_1^1/E_1^t = 500$ в 3,3 рази зменшує максимальне нормальне переміщення u_3^1 і в 1,63 рази збільшує максимальне нормальне переміщення u_3^2 , відповідно зменшує максимальну величину нормальних напружень σ_{22}^1 в 2,6 рази, а величину σ_{22}^2 збільшує в 1,78 рази.

3. На тришаровий циліндричний елемент діють наступні нестационарні навантаження: осесиметричний зосереджений зовнішній удар по направляючій між 3 та 4 ребрами оболонки; в (2.2) $x_i = 0,24$; осесиметричне розподілене внутрішнє імпульсне навантаження.

На графіках рис. 9, а показано залежності максимальних величин нормальних прогинів u_3^1 (1) і u_3^2 (2) в серединних поверхнях несучих оболонок симетричного тришарового циліндричного елемента від поздовжньої координати x в момент часу $t = 5,8 T$. Легкий заповнювач відсутній. Перші п'ять власних частот конструкції ста-

новлять: 1. – 2571,663 Гц; 2. – 2571,663 Гц; 3. – 2645,195 Гц; 4. – 2645,198 Гц; 5. – 3751,644 Гц.

На рис. 9, б показано залежності максимальних величин нормальних напружень σ_{22}^1 (1) і σ_{22}^2 (2) в серединних поверхнях несучих оболонок від координати x в момент часу $t = 5,8 T$. Легкий заповнювач відсутній.

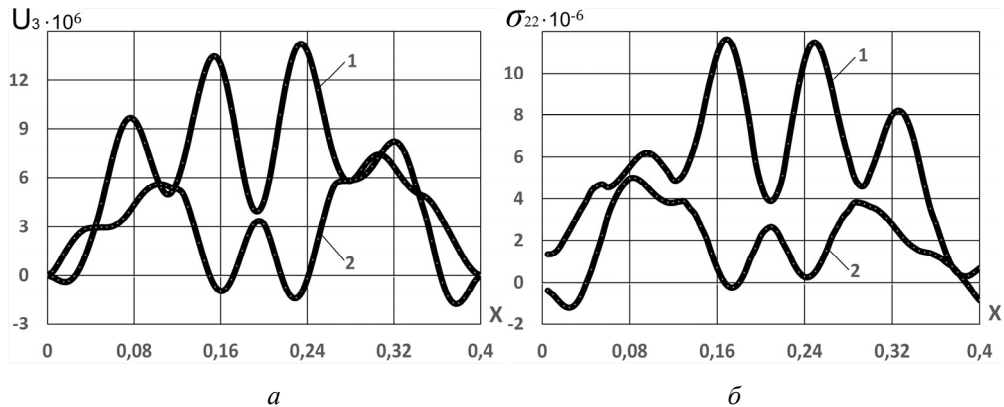


Рис. 9

На графіках рис. 10, а показано залежності максимальних величин нормальних прогинів u_3^1 (1) і u_3^2 (2) в серединних поверхнях несучих оболонок симетричного тришарового циліндричного елемента від поздовжньої координати x в момент часу $t = 8,95 T$. Легкий заповнювач $-E_{1,2}/E_t = 50$. Перші п'ять власних частот конструкції становлять: 1. – 2634,372 Гц; 2. – 2634,372 Гц; 3. – 2667,214 Гц; 4. – 2667,218 Гц; 5. – 3776,126 Гц.

На рис. 10, б показано залежності максимальних величин нормальних напружень σ_{22}^1 (1) і σ_{22}^2 (2) в серединних поверхнях несучих оболонок від координати x в момент часу $t = 8,95 T$. Легкий заповнювач $-E_{1,2}/E_t = 50$.

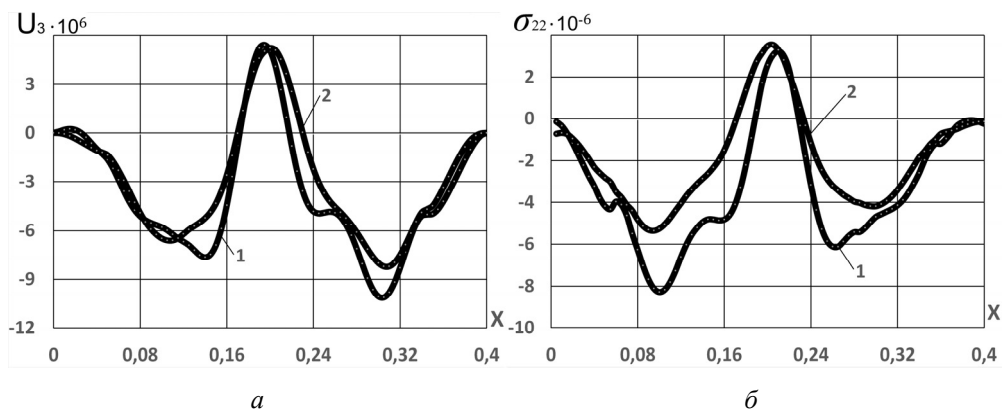


Рис. 10

Аналіз отриманих результатів показує, що використання легкого заповнювача (пінопласту) $E_1^1/E_1^t = 50$ в 0,71 рази зменшує максимальне нормальне переміщення u_3^1 і в 0,8 рази максимальне нормальне переміщення u_3^2 , відповідно зменшує максимальну

величину нормальних напружень σ_{22}^1 в 0,71 рази, а величини σ_{22}^2 збільшилися в 1,1 рази. Власні частоти практично не змінилися.

Висновки.

Проведені скінченно-елементні розрахунки динаміки перехідних процесів в симетричних тришарових циліндричних елементах з дискретно-симетричним легким армованим ребрами заповнювачем при дії комбінованих нестационарних навантажень показали можливість оцінки формування коливальних процесів в тришарових структурах в залежності від якості легкого заповнювача. Числові експерименти підтвердили, що збільшення маси симетричних елементів за рахунок легкого компонента заповнювача в межах 2% – 5% суттєво, часом в декілька разів, змінюють максимальні параметри напружено-деформованого стану в циліндричних структурах при нестационарних навантаженнях. Таким чином, можна стверджувати, що підбором матеріалів тришарового пакету симетричних тришарових циліндричних елементів можна створити конструкцію з прогнозованою динамічною поведінкою при нестационарному навантаженні.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано у цій статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Досліджено вплив дії розподілених і локальних осесиметричних імпульсних навантажень на тришарові циліндричні оболонкові елементи корпусів ракет. Локальні осесиметричні імпульсні зовнішні навантаження, які прикладені по направляючій циліндричної оболонки, є імітацією вибуху подовженого кумулятивного заряду миттєвої дії. Проведено скінченно-елементне моделювання динаміки перехідних процесів тришарових циліндричних елементів з дискретно-симетричним легким армованим ребрами заповнювачем при таких навантаженнях дає можливість правильно вибрати фізико-механічні параметри циліндричних корпусів ракет. Виконані дослідження демонструють значний вплив характеру динамічних навантажень на перехідні процеси в тришарових циліндричних елементах.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: динаміка, тришаровий циліндричний елемент, перехідні процеси, внутрішнє розподілене нестационарне навантаження, локальне зовнішнє імпульсне навантаження, скінченно-елементний метод, механічні явища.

1. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. – Москва: Наука, 1974. – 448 с.
2. Григоренко Я.М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости. – Киев: Наук. думка, 1973. – 288 с.
3. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – Москва: Наука, 1977. – 416 с.
4. Луговой П.З., Мейш В.Ф., Мейш Ю.А. Динаміка конструктивно-неоднорідних структур (під ред. Гузя О.М.). – Київ: Видавництво Ліра, 2022. – 326 с.
5. Рычков С.П. Моделирование конструкций в среде Femap with NX Nastran. – Москва: ДМК Пресс, 2013. – 784 с.
6. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. – Москва: Наука, 1966. – 636 с.
7. Успехи механики (под общей редакцией Гузя А.Н.): в 6-ти томах. Т. 3. Пискунов В.Г., Рассказов А.О. Развитие теории слоистых пластин и оболочек. – Киев: «А.С.К.», 2007. – С. 141 – 175.
8. Carrera E. On the use of the Murakami's zig-zag function in the modeling of layered plates and shells // Computers and Struct. – 2004. – **82**, N 7-8. – P. 541 – 554.
9. Frostig Y., Thomsen O.T. Higher-order free vibration of sandwich panels with a flexible core // Int. J. Solids Struct. – 2004. – **41**. – P. 1697 – 1724.
10. Grigorenko A.Ya. Numerical Analysis of Stationary Dynamic Processes in Anisotropic Inhomogeneous Cylinders // Int. App. Mech. – 2005. – **41**, N 8. – P. 3 – 40.

11. Grigorenko Ya.M., Grigorenko A.Ya., Vlaiikov G.G. Problems of mechanics for anisotropic inhomogeneous shells on the basis different models. – Kyiv: Akadempriodika. – 2009. – 550 p.
12. Grigorenko A.Ya., Yaremchenko S.N. Refined Design of Longitudinally Corrugated Cylindrical Shells // Int. App. Mech. – 2012. – **48**, N 2. – P. 205 – 212.
13. Kheirikhah M.M., Khalili S.M.R., Malekzadeh Fard K. Biaxial buckling analysis of soft-core composite andwich plates using improved high-order theory // European J. of Mechanics A/Solids. – 2011. – **31**. – P. 54 – 66.
14. Kumar P., Srinivasa C.V. On buckling and free vibration studies of sandwich plates and cylindrical shells: A review // J. of Thermoplastic Composite Materials. – 2018. – **33**, N 5. – P. 591 – 598.
15. Lugovoi P.Z., Sirenko V.N., Skosarenko Yu.V., Battutina T.Ya. Mathematical Modeling of Cylindrical Adapter Dynamics under Local Pulse Loading // Sci. and Innovation – 2016. – N 3. – C. 35 – 42.
16. Lugovoi P.Z., Sirenko V.N., Skosarenko Yu.V., Batutina T.Ya. Dynamics of a Discretely Reinforced Cylindrical Shell under a Local Impulsive Load // Int. Appl.Mech. – 2017. – **53**, N 2. – P. 173 – 180.
17. Lugovoi P.Z., Sirenko V.N., Prokopenko N.Ya., Klimenko K.V. Influence of the Parameters of a Non-Constant Disturbing Load on the Transient Process of Vibrations of a Ribbed Cylindrical Shell // Int. Appl.Mech. – 2017. – **53**, N 6. – P. 680 – 687.
18. Meish V.F., Shtantsel S.E. Dynamic Problems in the Theory of Sandwich Shells of Revolution with a Discrete Core under Nonstationary Loads // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, N 12. – P. 1501 – 1507.
19. Meish V.F., Meish Yu.A., Arnaut N.V. Numerical Analysis of Nonstationary Vibrations of Discretely Reinforced Multilayer Shells of Different Geometry // Int. Appl. Mech. – 2019. – **46**, N 2. – P. 426 – 433.
20. Mueller W., Grigorenko Y.M., Grigorenko A.Ya., Vlaiikov G.G. Mechanics of Anisotropic Heterogeneous Shells: Fundamental Relations for Different Models. From the book «Recent Developments in Anisotropic Heterogeneous Shell Theory: General Theory and Applications of Classical Theory». Volume 1. (electronic resource). – Singapore: Springer, 2016. – 116 p.
21. Pourmoayed A.R., Malekzadeh Fard K., Shahravi M. Vibration Analysis of a Cylindrical Sandwich Panel with Flexible Core Using an Improved Higher-Order Theory // Lat. Am. J. Solids Struct. – 2017. – **14**, N 4. – P. 714 – 742.

Надійшла 31.01.2023

Затверджена до друку 27.06.2023