

С. М. Склепус

**МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ
ЗГИНУ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНИХ ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК
СКЛАДНОЇ ФОРМИ**

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
вул. Нестерова 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: snsklepus@ukr.net*

Abstract. A new numerical-analytical method for solving the geometrically nonlinear bending problems of thin shallow shells with a complex shape in a plane made of functionally-graded materials is developed. The method is based on the use of the R -functions method and the method of parameter continuation. The test problems for homogeneous rigidly fixed and hinged functionally gradient plates under uniformly distributed load of different intensity is solved. The results for deflections and stresses obtained by the developed method are compared with the solutions obtained by other methods. The problem of bending the functionally-graded shallow shell of a complex shape is solved. The effect of the gradient properties of the material and the geometric shape on the stress-strain state is studied.

Keywords: flexible shallow shell, functionally graded material, geometric nonlinearity, complex shape, R -functions method.

Вступ.

Функціонально-градієнтні матеріали (ФГМ) відносяться до класу композитних матеріалів, які отримують в результаті сплаву металу і кераміки. Вони характеризуються зміною складу та структури за деяким законом, що призводить до відповідних змін властивостей матеріалу. Фізико-механічні властивості ФГМ, зокрема пружні характеристики, неперервно змінюються вздовж однієї чи кількох координат. Широке використання ФГМ для виготовлення різних елементів тонкостінних конструкцій, працюючих при значних термомеханічних навантаженнях, призводить до необхідності розробки ефективних методів їх розрахунку. Достатньо повний огляд моделей деформування та методів розв'язання лінійних та нелінійних задач деформування оболонок і пластин із функціонально-градієнтних матеріалів представлений, наприклад, в роботах [11, 13, 15]. Найчастіше в дослідженнях розглядають пластини і оболонки канонічної геометричної форми. За певних умов навантаження та закріплення вдається одержати розв'язок крайової задачі в аналітичному вигляді. Якщо пластина або оболонка мають складну геометричну форму, то аналітично розв'язати крайову задачу не вдається. У цьому випадку необхідно використовувати універсальні методи, що дозволяють знаходити наближений розв'язок в областях складної форми, наприклад, метод скінченних елементів [2, 8, 12], метод R -функцій [7, 9], метод «занурення» [14]. Всі ці методи мають свої переваги та недоліки. Що стосується методу скінченних елементів, то в монографії [1] наголошується, що використання стандартного пакета методу скінченних елементів у випадку функціонально-градієнтних середовищ може бути неприйнятним і призвести до якісно неправильних результатів. Як показує аналіз літератури, кількість робіт, присвячених дослідженню геометрично нелінійного деформування функціонально-градієнтних пологих оболонок складної форми і пластин

тин є досить обмеженою і в даний час продовжується пошук ефективних методів розв'язання таких задач.

Метою роботи є розробка чисельно-аналітичного методу розв'язання задач геометрично нелінійного деформування функціонально-градієнтних пологих оболонок складної форми в плані, що базується на використанні методу R -функцій.

1. Постановка задачі та метод розв'язання.

Розглянемо в прямокутній декартовій системі координат Ox_1x_2z ізотропну тонку пологу оболонку товщиною h та довільної форми Ω в плані, виготовлену із ФГМ. Вісь Oz перпендикулярна плану оболонки. Оболонка перебуває під дією поперечного навантаження інтенсивністю $q_z^* = q_z^*(x_1, x_2)$. Стріла підйому пологої оболонки $f < 0,2a$, де a – найменший характерний розмір оболонки. Для коефіцієнтів першої квадратичної форми приймемо, що $A_i \approx 1$, ($i = 1, 2$), а головні кривизни координатної поверхні оболонки є сталими: $k_i = \text{const}$ [4].

Нехай властивості матеріалу неперервно змінюються вздовж товщини оболонки, а координатна поверхня оболонки співпадає з серединною. Зовнішня поверхня ($z = -h/2$) є металевою, а внутрішня ($z = h/2$) – керамічною. Властивості матеріалу, в тому числі пружні характеристики, залежать від об'ємного вмісту складових матеріалів і можуть бути виражені як [11, 17]

$$P(z) = P_c V_c(z) + P_m V_m(z),$$

де V_c і V_m – об'ємні вмісти армуючого керамічного матеріалу та металу, пов'язані співвідношенням $V_c + V_m = 1$. Згідно [11] припустимо, що вміст кераміки V_c змінюється по товщині за степеневим законом

$$V_c(z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^n, \quad (n \geq 0). \quad (1)$$

При $n = 0$ оболонка є однорідною керамічною, а при $n \rightarrow \infty$ – металевою.

Переміщення точок пологої оболонки вздовж осей Ox_1, Ox_2, Oz визначаються виразами [4]:

$$v_1(x_1, x_2, z) = u_1 - zw_{,1}; \quad v_2(x_1, x_2, z) = u_2 - zw_{,2}; \quad v_3(x_1, x_2, z) = w,$$

де $u_1 = u_1(x_1, x_2)$, $u_2 = u_2(x_1, x_2)$, $w = w(x_1, x_2)$ – переміщення точок координатної поверхні оболонки вздовж осей Ox_1, Ox_2, Oz , відповідно.

Якщо стрілу прогину можна порівняти з товщиною оболонки ($w_{\max} \geq 0,25h$), то для постановки задачі необхідно використовувати геометрично нелінійну теорію оболонок, що враховує великі прогини. При звичайних для тонких пологих оболонок спрощеннях і з урахуванням нелінійних членів, суттєвих у разі великого прогину і малих деформацій, деформації обчислюються через переміщення за наступними нелінійними співвідношеннями [4]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= u_{1,1} - zw_{,11} + k_1 w + 0,5w_{,1}^2; \quad \varepsilon_{22} = u_{2,2} - zw_{,22} + k_2 w + 0,5w_{,2}^2; \\ \gamma_{12} &= 2\varepsilon_{12} = u_{1,2} + u_{2,1} - 2zw_{,12} + w_{,1} w_{,2}; \quad \varepsilon_{i3} = 0, \quad (i = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (2)$$

Напруження та деформації пов'язані між собою законом Гука:

$$\sigma_{11} = \frac{E(z)}{1-\nu^2(z)} (\varepsilon_{11} + \nu(z)\varepsilon_{22}); \quad \sigma_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2(z)} (\varepsilon_{22} + \nu(z)\varepsilon_{11}); \quad \sigma_{12} = G(z)\gamma_{12}. \quad (3)$$

Тут $E(z), \nu(z)$ – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу оболонки, $G(z) = [E(z)]/[2(1 + \nu(z))]$ – модуль зсуву.

Для лінеаризації та постановки задачі геометрично нелінійного деформування функціонально-градієнтних пологих оболонок будемо використовувати метод продовження за параметром [5]. У нашому випадку природно пов'язати цей параметр із зовнішнім навантаженням. Введемо до розгляду зростаючий параметр $t \in [t_0, t_*]$, що характеризує процес навантаження оболонки. Тут t_0 є значенням параметра, при якому прогини є малими і, відповідно, задача деформування є геометрично лінійною, а t_* відповідає заданому рівню навантаження оболонки $q_z(t_*) = q_z^*$. Для зовнішнього поперечного навантаження приймемо лінійний закон

$$q_z(t) = q_{z0} + tq_{z1}, \quad (4)$$

де $t \in [0, t_*]$.

Оскільки розв'язується пружна задача, то кінцевий результат не залежить від шляху навантаження і можуть бути прийняті інші закони.

Продиференціювавши співвідношення (2) за параметром t , отримаємо формули, що пов'язують похідні деформацій та переміщень за t :

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{11} &= \dot{u}_{1,1} - z\dot{w}_{,11} + k_1\dot{w} + w_{,1}\dot{w}_{,1}; & \dot{\epsilon}_{22} &= \dot{u}_{2,2} - z\dot{w}_{,22} + k_1\dot{w} + w_{,2}\dot{w}_{,2}; \\ \dot{\gamma}_{12} &= 2\dot{\epsilon}_{12} = \dot{u}_{1,2} + \dot{u}_{2,1} - 2z\dot{w}_{,12} + w_{,1}\dot{w}_{,2} + w_{,2}\dot{w}_{,1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Тут крапка над символами позначає повну похідну функції $d(...)/dt$ за аргументом t .

Далі, по тексту статті, похідні за t будемо називати швидкостями. Якщо вважати кути повороту $w_{,i}$ заданими функціями, то співвідношення (5) є лінійними.

Продиференціювавши закон Гука (3) за t і врахувавши (5), для швидкостей напружень отримаємо:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{11} &= \frac{E(z)}{1 - \nu^2(z)} (\dot{u}_{1,1} + \nu \dot{u}_{2,2} - z(\dot{w}_{,11} + \nu(z)\dot{w}_{,22}) + (k_1 + \nu(z)k_2)\dot{w} + w_{,1}\dot{w}_{,1} + \nu(z)w_{,2}\dot{w}_{,2}); \\ \dot{\sigma}_{22} &= \frac{E(z)}{1 - \nu^2(z)} (\dot{u}_{2,2} + \nu \dot{u}_{1,1} - z(\dot{w}_{,22} + \nu(z)\dot{w}_{,11}) + (k_2 + \nu(z)k_1)\dot{w} + w_{,2}\dot{w}_{,2} + \nu(z)w_{,1}\dot{w}_{,1}); \\ \dot{\sigma}_{12} &= G(z) (\dot{u}_{1,2} + \dot{u}_{2,1} - 2z\dot{w}_{,12} + w_{,1}\dot{w}_{,2} + w_{,2}\dot{w}_{,1}). \end{aligned} \quad (6)$$

Для варіаційної постановки задачі будемо використовувати принцип віртуальної роботи для квазістатичних задач [3]. Відповідний функціонал у формі Лагранжа, записаний відносно кінематично можливих швидкостей переміщень для тривимірного тіла, має вигляд [3]

$$L(\dot{v}_i) = 0,5 \iiint_V (\dot{\sigma}_{kl}\dot{\epsilon}_{kl} + \sigma_{ij}\dot{v}_{k,i}\dot{v}_{k,j}) dV - \iint_{S_p} \dot{P}_i \dot{v}_i dS \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3). \quad (7)$$

Вважаючи, що $\dot{v}_{i,j} \sim \dot{w}_{,i}^2 \ll 1$ ($i, j = 1, 2$) (символ $\sim$ позначає еквівалентність малих величин), і нехтуючи членами вищого порядку малості у виразі (7), для гнучкої тонкої оболонки матимемо:

$$\begin{aligned} L &= 0,5 \iint_{\Omega(h)} (\dot{\sigma}_{kl}\dot{\epsilon}_{kl} + \sigma_{11}\dot{w}_{,1}^2 + \sigma_{22}\dot{w}_{,2}^2 + 2\sigma_{12}\dot{w}_{,1}\dot{w}_{,2}) dx_1 dx_2 dz - \\ &\quad - \iint_{\Omega} \dot{q}_z \dot{w} dx_1 dx_2 \quad (k, l = 1, 2). \end{aligned} \quad (8)$$

Підставивши (5), (6) у (8) та проінтегрувавши по z , отримаємо функціонал у формі Лагранжа для задачі згину гнучкої пологої оболонки

$$L = L_l + L_n, \quad (9)$$

де $L_l(\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dot{w})$, $L_n(\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dot{w})$ – «лінійна» та «нелінійна» частини функціонала, які визначаються наступними формулами:

$$\begin{aligned} L_l = 0,5 \iint_{\Omega} & \left[A_1 \left(\dot{u}_{1,1}^2 + \dot{u}_{2,2}^2 + \dot{w}^2 (k_1^2 + k_2^2) + 2k_1 \dot{w} \dot{u}_{1,1} + 2k_2 \dot{w} \dot{u}_{2,2} \right) + \right. \\ & + 2A_2 \left(\dot{u}_{1,1} \dot{u}_{2,2} + \dot{w} (k_1 \dot{u}_{2,2} + k_2 \dot{u}_{1,1}) + k_1 k_2 \dot{w}^2 \right) + A_3 (\dot{u}_{1,2} + \dot{u}_{2,1})^2 - \\ & - 2B_1 (\dot{u}_{1,1} \dot{w}_{,11} + \dot{u}_{2,2} \dot{w}_{,22} + \dot{w} (k_1 \dot{w}_{,11} + k_2 \dot{w}_{,22})) - \\ & - 2B_2 (\dot{u}_{1,1} \dot{w}_{,22} + \dot{u}_{2,2} \dot{w}_{,11} + \dot{w} (k_1 \dot{w}_{,22} + k_2 \dot{w}_{,11})) - 2B_3 \dot{w}_{,12} (\dot{u}_{1,2} + \dot{u}_{2,1}) + \\ & \left. + D_1 (\dot{w}_{,11}^2 + \dot{w}_{,22}^2) + 2D_2 \dot{w}_{,11} \dot{w}_{,22} + D_3 \dot{w}_{,12}^2 \right] dx_1 dx_2 - \iint_{\Omega} \dot{q}_z \dot{w} dx_1 dx_2; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} L_n = 0,5 \iint_{\Omega} & \left[A_1 (w_{,1}^2 \dot{w}_{,1}^2 + w_{,2}^2 \dot{w}_{,2}^2 + 2w_{,1} \dot{u}_{1,1} \dot{w}_{,1} + 2w_{,2} \dot{u}_{2,2} \dot{w}_{,2} + 2\dot{w} (k_1 w_{,1} \dot{w}_{,1} + k_2 w_{,2} \dot{w}_{,2})) + \right. \\ & + 2A_2 (w_{,1} \dot{u}_{2,2} \dot{w}_{,1} + w_{,2} \dot{u}_{1,1} \dot{w}_{,2} + \dot{w} (k_1 w_{,2} \dot{w}_{,2} + k_2 w_{,1} \dot{w}_{,1}) + w_{,1} w_{,2} \dot{w}_{,1} \dot{w}_{,2}) + \\ & + A_3 (w_{,1}^2 \dot{w}_{,2}^2 + w_{,2}^2 \dot{w}_{,1}^2 + 2(w_{,1} \dot{w}_{,2} + w_{,2} \dot{w}_{,1}) (\dot{u}_{1,2} + \dot{u}_{2,1}) + 2w_{,1} w_{,2} \dot{w}_{,1} \dot{w}_{,2}) - \\ & - 2B_1 (w_{,1} \dot{w}_{,1} \dot{w}_{,11} + w_{,2} \dot{w}_{,2} \dot{w}_{,22}) - 2B_2 (w_{,1} \dot{w}_{,1} \dot{w}_{,22} + w_{,2} \dot{w}_{,2} \dot{w}_{,11}) - \\ & \left. - 2B_3 \dot{w}_{,12} (w_{,1} \dot{w}_{,2} + w_{,2} \dot{w}_{,1}) + f_{11} \dot{w}_{,1}^2 + f_{22} \dot{w}_{,2}^2 + 2f_{12} \dot{w}_{,1} \dot{w}_{,2} \right] dx_1 dx_2, \end{aligned} \quad (11)$$

де Ω – область, в якій відшукується наближений розв'язок задачі;

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{1-\nu^2(z)} dz; \quad A_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)\nu(z)}{1-\nu^2(z)} dz; \quad A_3 = \int_{-h/2}^{h/2} G(z) dz; \\ B_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)z}{1-\nu^2(z)} dz; \quad B_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)\nu(z)z}{1-\nu^2(z)} dz; \quad B_3 = 2 \int_{-h/2}^{h/2} G(z)z dz; \\ D_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)z^2}{1-\nu^2(z)} dz; \quad D_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)\nu(z)z^2}{1-\nu^2(z)} dz; \quad D_3 = 4 \int_{-h/2}^{h/2} G(z)z^2 dz; \\ f_{11} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} dz; \quad f_{22} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} dz; \quad f_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} dz. \end{aligned}$$

У формулі (11) повороти $w_{,1}$, $w_{,2}$ та «фіктивні» сили f_{11} , f_{22} , f_{12} вважаються заданими для кожного фіксованого значення параметра t і не варіюються.

Розв'язок варіаційного рівняння $\delta L = 0$ дає розподіл полів швидкостей переміщень у будь-якій точці оболонки для значень параметра $t > 0$. Основні невідомі задачі нелінійного згину оболонки можуть бути знайдені шляхом інтегрування відповідних полів швидкостей із розв'язання задачі Коші за параметром t для системи звичайних диференціальних рівнянь, яку запишемо у символічній формі

$$\frac{dG_k}{dt} = F_k(G_l) \quad (k = \overline{1, 11}), \quad (12)$$

де $\mathbf{G} = \{G_k\} = \{u_i, w, w_{,i}, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}\}, (i, j = 1, 2)$. Праві частини рівнянь (12) мають вигляд: $F_1 = \dot{u}_1$; $F_2 = \dot{u}_2$; $F_3 = \dot{w}$; $F_4 = \dot{w}_{,1}$; $F_5 = \dot{w}_{,2}$; F_k ($k = 6, 7, 8$) визначаються формулами (5); F_k ($k = 9, 10, 11$) – формулами (6).

Початкові умови для рівнянь (12) знаходяться із розв'язку задачі лінійного деформування при $q_z(0) = q_{z0}$. Для її розв'язання можна використовувати функціонал у формі (10), замінивши в ньому швидкості функцій самими функціями.

Початкову задачу для системи рівнянь (12) будемо розв'язувати методом Рунге – Кутти – Мерсона (РКМ) з автоматичним вибором кроку [6]. Праві частини рівнянь при фіксованих значеннях $t \neq 0$, що відповідають схемі РКМ, знаходимо із розв'язку варіаційної задачі для функціонала (9). Варіаційні задачі будемо розв'язувати методом Рітца у поєднанні із методом R -функцій [7]. Метод R -функцій дозволяє точно врахувати геометричну інформацію про крайову задачу і подати наближений розв'язок у вигляді формули – структури розв'язку, яка точно задовольняє всім (загальна структура) або частині (часткова структура) граничних умов.

2. Числові дослідження.

Для перевірки розробленого методу та алгоритму розрахунку розв'яжемо тестові задачі.

Спочатку розглянемо згин однорідної квадратної жорстко закріпленої пластини [16]. Пластина знаходиться під дією рівномірно розподіленого навантаження. Геометричні розміри: довжина сторони $2a = 7,62$ м, товщина $h = 0,0762$ м. Пружні характеристики матеріалу: $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0,316$.

Граничні умови для жорсткого закріплення мають вигляд

$$\dot{w} = 0; \quad \dot{w}_{,n} = 0; \quad \dot{u}_1 = 0; \quad \dot{u}_2 = 0,$$

а відповідна структура розв'язку

$$\dot{w} = \omega^2 \Phi_1; \quad \dot{u}_1 = \omega \Phi_2; \quad \dot{u}_2 = \omega \Phi_3.$$

Тут Φ_1, Φ_2, Φ_3 – невизначені компоненти структури розв'язку; функція $\omega = \omega(x_1, x_2)$ будується за допомогою теорії R -функцій і задовольняє умовам: $\omega = 0$, $\omega_{,n} = -1$ на межі $\partial\Omega$, $\omega > 0$ всередині Ω ($\mathbf{n}$ – зовнішня нормаль до контуру $\partial\Omega$) [7]. Вимога нормалізованості функції ω до першого порядку ($\omega_{,n} = -1$) в деяких випадках не є обов'язковою.

У випадку квадратної пластини функція ω має вигляд

$$\omega = \omega_1 \wedge_0 \omega_2,$$

де $\omega_1 = \frac{1}{2a}(a^2 - x_2^2)$; $\omega_2 = \frac{1}{2a}(a^2 - x_1^2)$, а символ $\wedge_0$ позначає R -кон'юнкцію [7]:

$$f_1 \wedge_0 f_2 = f_1 + f_2 - \sqrt{f_1^2 + f_2^2}.$$

При чисельній реалізації невизначені компоненти структури розв'язку представлялися у вигляді скінченних рядів $\Phi_i(x_1, x_2, t) = \sum_n C_n^{(i)}(t) f_n^{(i)}(x_1, x_2)$, ($i = 1, 2, 3$), де

$C_n^{(i)}(t)$ – невизначені коефіцієнти, які на кожному кроці знаходилися методом Рітца; t

– фіксоване значення параметру навантаження; $\{f_n^{(i)}\}$ – системи лінійно незалежних функцій. Як $\{f_n^{(i)}\}$ можна взяти звичайні степеневі поліноми, поліноми Чебишева, сплайни та ін. [7]. В даній роботі як $\{f_n^{(i)}\}$ використовувалися степеневі поліноми виду $x_1^k x_2^l$ (ступінь полінома визначається як $P = k + l$).

При розв’язанні задач згину методом R -функцій враховувалася симетрія розв’язку.

У табл. 1, 2 наведено результати розрахунку безрозмірних прогинів $\bar{w} = w/h$ та нормальних напружень $\bar{\sigma}_{11} = (4\sigma_{11}a^2)/(Eh^2)$ в центрі на нижній поверхні пластини при $z = 0,5h$ в залежності від значення безрозмірного навантаження $\bar{q} = (16q_z a^4)/(Eh^4)$. Тут представлено результати аналітичного розв’язку (Analytical) [10], дані, отримані методом скінченних елементів (FEM) у поєднанні з методом Н’ютона – Рафсона [16] та методом R -функцій (RFM). Результати FEM та Analytical отримані на основі уточненої теорії першого порядку (first-order shear deformation theory, FSDT).

Таблиця 1

$\bar{q}$	Analytical	FEM	RFM
17,8	0,237	0,2392	0,2356
38,3	0,471	0,4738	0,4676
63,4	0,695	0,6965	0,6903
95,0	0,912	0,9087	0,9042
134,9	1,121	1,1130	1,1110
184,0	1,323	1,3080	1,3090
245,0	1,521	1,5010	1,5040
318,0	1,714	1,6880	1,6930
402,0	1,902	1,8860	1,8720

Таблиця 2

$\bar{q}$	Analytical	FEM	RFM
17,8	2,6	2,414	2,530
38,3	5,2	5,022	5,212
63,4	8,0	7,649	7,893
95,0	11,1	10,254	10,535
134,9	13,3	12,850	13,155
184,0	15,9	15,420	15,754
245,0	19,2	18,060	18,440
318,0	21,9	20,741	21,197
402,0	25,1	23,423	24,0

Максимальні ступені поліномів в невизначених компонентах структури розв’язку: $P_1 = 10$; $P_2 = P_3 = 9$. У формулі (4) для зовнішнього навантаження приймалося: $q_{z0} = q_{z1} = 10^{-3}$ МПа.

Як наступний тестовий приклад розглянемо задачу згину квадратної шарнірно опертої пластини із функціонально-градієнтного матеріалу Ti-6Al-4V/aluminum oxide [17]. Довжина сторони $2a = 0,2$ м, товщина $h = 0,01$ м. Пружні характеристики тита-

нового сплаву (Ti-6Al-4V) – $E_m = 1,057 \cdot 10^5$ МПа ; $\nu_m = 0,298$; керамічного матеріалу (оксид алюмінію) – $E_c = 3,202 \cdot 10^5$ МПа ; $\nu_c = 0,26$.

Кінематичні граничні умови для швидкостей переміщень мають вигляд:

$$\dot{w} = 0; \quad \dot{u}_\tau = 0, \quad (13)$$

де $\dot{u}_\tau = \dot{u}_2 n_1 - \dot{u}_1 n_2$; n_1, n_2 – напрямні косинуси зовнішньої нормалі $\mathbf{n}$ до контуру пластини $\partial\Omega$.

Структура розв’язку, що задовольняє умовам (13), може бути записана як

$$\dot{w} = \omega \Phi_1; \quad \dot{u}_1 = \omega_{,1} \Phi_2 + \omega \Phi_3; \quad \dot{u}_2 = \omega_{,2} \Phi_2 + \omega \Phi_4 .$$

Розрахунки були виконані для двох значень показника ступеня в законі (1): $n = 0$ – однорідна керамічна пластина; $n = 0,5$ – пластина із функціонально-градієнтного матеріалу. На рис. 1, 2 штриховими лініями позначені результати, отримані в рамках FSDT за допомогою однієї з модифікацій методу Рітца (element-free kernel particle Ritz method або коротко kp-Ritz method) у поєднанні з методом Н’ютона – Рафсона [17], а суцільними лініями – методом R -функцій. На рис. 1 представлені графіки безрозмірних прогинів $\bar{w}$ у центрі пластини в залежності від безрозмірного навантаження

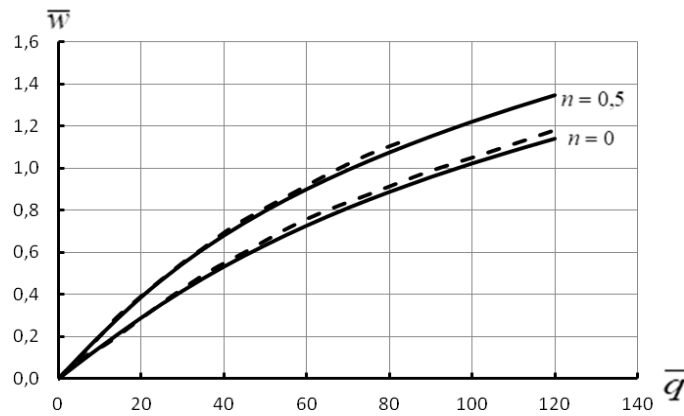


Рис. 1

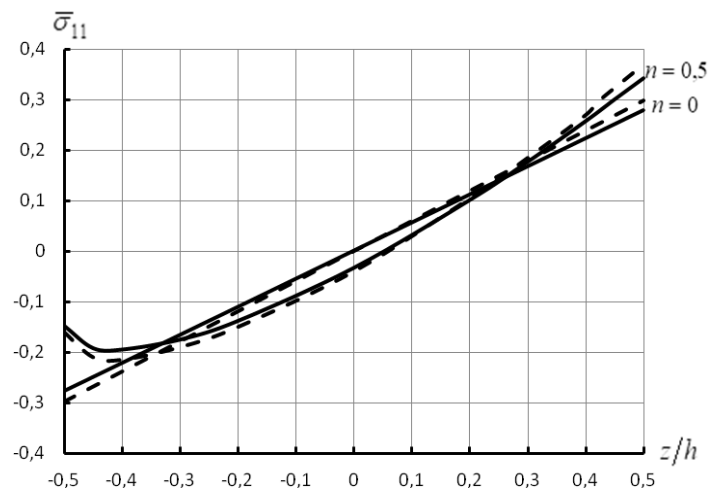


Рис. 2

$\bar{q} = (16q_z a^4)/(E_m h^4)$. На рис. 2 показано розподіл безрозмірних нормальних напружень $\bar{\sigma}_{11} = (\sigma_{11} h^2)/(4q_z^* a^2)$ по товщині, в центрі пластини, при $q_z^* = 1$ МПа. У формулі (4) для зовнішнього навантаження приймалося: $q_{z0} = q_{z1} = 0,5$ МПа. Максимальні ступені поліномів в структурі розв'язку: $P_1 = P_2 = 10$; $P_3 = P_4 = 7$.

Початковий крок та задана похибка обчислень у методі РКМ в обох тестових прикладах дорівнювали: $\Delta t_0 = 10^{-3}$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

З наведених вище результатів розв'язання тестових задач видно, що метод, запропонований у статті, забезпечує близький збіг з результатами, отриманими іншими методами.

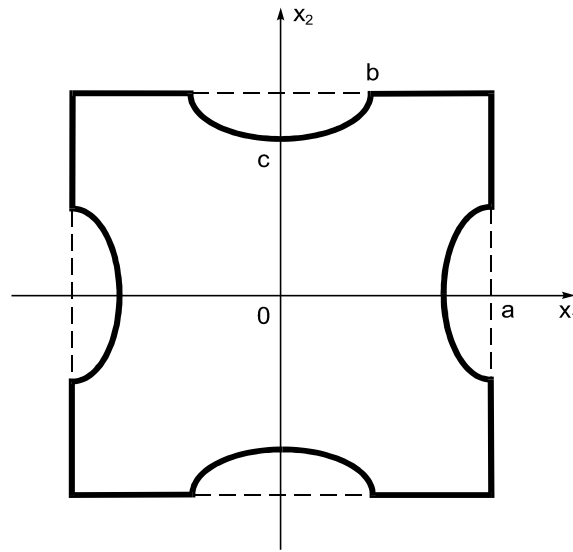


Рис. 3

Далі розглянемо згин квадратної в плані оболонки та оболонки з еліптичними вирізами із матеріалу Ti-6Al-4V/aluminum oxide (рис. 3), які знаходяться під дією рівномірно розподіленого навантаження. Геометричні розміри: $a = 0,2$ м; $b = 0,1$ м; $c = 0,15$ м; $h = 0,008$ м. Головні кривизни: $k_1 = k_2 = 2 \cdot 10^{-1} \text{ м}^{-1}$.

Оболонки мають граничні умови, що відповідають нерухомому шарніру:

$$\dot{w} = 0; \quad \dot{u}_n = 0; \quad \dot{u}_\tau = 0, \quad (14)$$

де $\dot{u}_n = \dot{u}_1 n_1 + \dot{u}_2 n_2$.

Структура розв'язку, що задовольняє граничним умовам (14), має вигляд

$$\dot{w} = \omega \Phi_1; \quad \dot{u}_1 = \omega \Phi_2; \quad \dot{u}_2 = \omega \Phi_3. \quad (15)$$

Рівняння границі області, відображений на рис. 3, може бути записано у такий спосіб:

$$\omega = ((\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge (\omega_3 \wedge \omega_4)) \wedge (\omega_5 \wedge \omega_6).$$

Тут

$$\omega_1 = \frac{1}{2a}(a^2 - x_2^2); \quad \omega_2 = \frac{1}{2a}(a^2 - x_1^2);$$

$$\omega_3 = \frac{x_1^2}{b^2} + \frac{(x_2 - a)^2}{b_1^2} - 1; \quad \omega_4 = \frac{x_1^2}{b^2} + \frac{(x_2 + a)^2}{b_1^2} - 1;$$

$$\omega_5 = \frac{(x_1 - a)^2}{b_1^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 1; \quad \omega_6 = \frac{(x_1 + a)^2}{b_1^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 1; \quad b_1 = a - c.$$

Деякі результати розрахунків для однорідних (ceramics, metal) та функціонально-градієнтних оболонок представлено на рис. 4 – 6. Показник ступеня n в законі для об'ємного вмісту армуючого матеріалу приймав значення $n = \{0,5; 1,0; 2,0\}$, а інтенсивність навантаження збільшується від 0 до 5 МПа. На рис. 4 показано безрозмірні прогини в центрі квадратних в плані оболонок в залежності від навантаження та значення n , а на рис. 5 – безрозмірні прогини оболонок з вирізами. На рис. 6 наведено графіки для безрозмірних нормальних напружень $\bar{\sigma}_{11} = (4\sigma_{11}a^2)/(E_m h^2)$ в центрі на внутрішній поверхні оболонки для $n = 0$ та $n = 2,0$. Тут штриховими лініями позначені напруження в квадратній оболонці, а суцільними – в оболонці складної форми.

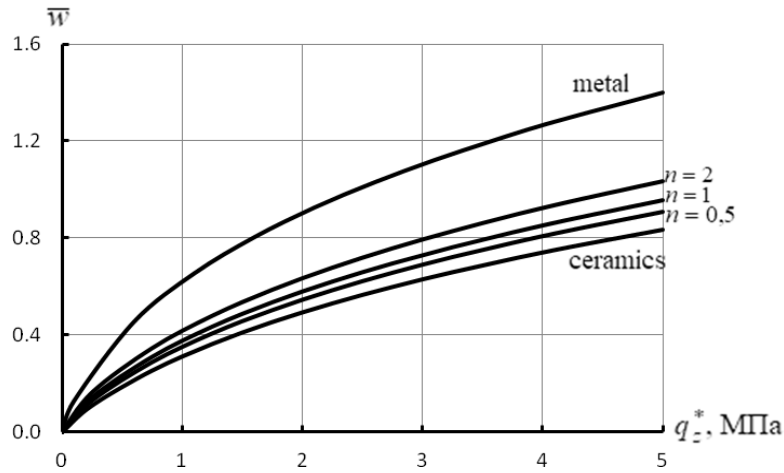


Рис. 4

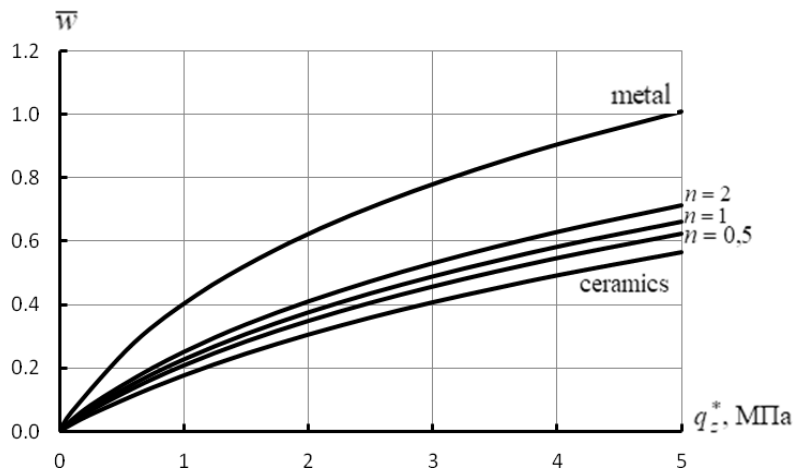


Рис. 5

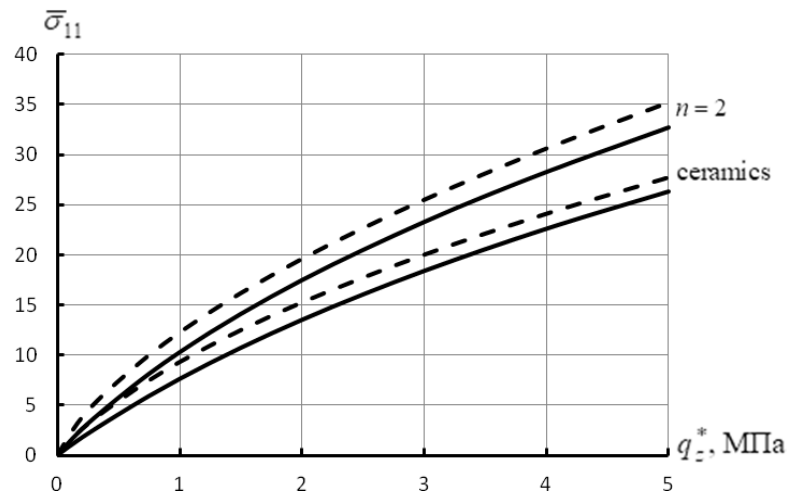


Рис. 6

Для зовнішнього навантаження приймалося: $q_{z0} = 0,25$ МПа ; $q_{z1} = 0,1$ МПа . Максимальні ступені поліномів в структурі (15): $P_1 = 14$; $P_2 = P_3 = 11$. Початковий крок та задана похибка обчислень у методі РКМ дорівнювали: $\Delta t_0 = 10^{-3}$; $\varepsilon = 10^{-3}$.

Із рисунків видно, що жорсткість оболонок зменшується, коли n зростає і, відповідно, зменшується вміст армуючих керамічних частинок в матеріалі, а наявність бокових вирізів робить оболонку більш жорсткою, зменшуючи рівень прогинів і максимальних напружень.

Висновки.

Розроблено новий чисельно-аналітичний метод розв'язання задач згину гнучких пологих оболонок складної форми в плані із функціонально-градієнтних матеріалів. Метод базується на використанні методу R -функцій та методу продовження за параметром. Розв'язано тестові задачі, показано збіг із розв'язками, отриманими іншими методами. Розв'язано задачу згину функціонально-градієнтної пологої оболонки складної форми в плані. Досліджено вплив градієнтних властивостей матеріалу та геометричної форми на напружено-деформований стан.

РЕЗЮМЕ. Розроблено новий чисельно-аналітичний метод розв'язання геометрично нелінійних задач згину тонких пологих оболонок складної форми в плані із функціонально-градієнтних матеріалів, що базується на використанні методу R -функцій та методу продовження за параметром. Розв'язано тестові задачі для однорідної жорстко закріпленої та функціонально-градієнтної шарнірно опертої пластин, що перебувають під дією рівномірно розподіленого навантаження різної інтенсивності. Результати для прогинів та напружень, отримані за допомогою розробленого методу, порівняно із розв'язками, отриманими іншими методами. Розв'язано задачу згину функціонально-градієнтної пологої оболонки складної форми. Досліджено вплив градієнтних властивостей матеріалу та геометричної форми на напружено-деформований стан.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: гнучка полого оболонка, функціонально-градієнтний матеріал, геометрична нелінійність, складна форма, метод R -функцій.

1. Айзикович С.М., Александров В.М., Васильев А.С., Кренев Л.И., Трубочик И.С. Аналитические решения смешанных осесимметричных задач для функционально-градиентных сред. – Москва: Физматлит, 2011. – 192 с.

2. Батэ К., Вильсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. – Москва: Книга по Требованию, 2012. – 445 с.
3. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – Москва: Мир, 1987. – 542 с.
4. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. – Москва: Гостеориздат, 1956. – 420 с.
5. Григолюк Э.И., Шалашилин В.И. Метод продолжения по параметру в задачах нелинейного деформирования стержней, пластин и оболочек // Исслед. по теор. пластин и оболочек. – 1984. – Вып. 17, ч. 1. – С. 3 – 58.
6. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы. – Москва: Наука, 1977. – 399 с.
7. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. Думка, 1982. – 552 с.
8. Bucalemi M.L., Bathe K.J. Finite Element Analysis of Shell Structures // Archives of Computational Methods in Engng. – 1997. – 4, N 1. – P. 3 – 61.
9. Kurpa L.V., Lyubitskaya E.I., Morachkovskaya I.O. The R-Function Method Used to Solve Nonlinear Bending Problems for Orthotropic Shallow Shells on an Elastic Foundation // Int. Appl. Mech. – 2010. – 46, N 6. – P. 660 – 668.
10. Levy S. Square plate with clamped edges under normal pressure producing large deflections. – Tech. Report, National Advisory Committee for Aeronautics, 1942. – 30 p.
11. Reddy J.N. Analysis of functionally graded plates // Int. J. Numerical Methods in Engng. – 2000. – 47. – P. 663 – 684.
12. Sabir A.B., Djoudi M.S. Shallow shell finite element for the large deflection geometrically nonlinear analysis of shells and plates // Thin-Walled Struct. – 1995. – N 3. – P. 253 – 267.
13. Shen H.S. Functionally Graded Materials. Nonlinear Analysis of Plates and Shells. – Boca Raton: CRC Press, 2009. – 266 p.
14. Smetankina N., Merkulova A., Merkulov D., Postnyi O. Dynamic response of laminate composite shells with complex shape under low-velocity impact. In: Nechyporuk M., Pavlikov V., Kritskiy D. (eds.) Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering-2020. ICTM 2020. Lecture Notes in Networks and Systems. – Cham: Springer, 2021. – 188. – P. 267 – 276.
15. Thai H-T., Kim S-E. A review of theories for the modeling and analysis of functionally graded plates and shells // Composite Struct. – 2015. – 128. – P. 70 – 86.
16. Urthaler Y., Reddy J.N. A Mixed Finite Element for a Nonlinear Bending Analysis of Laminated Composite Plates Based on FSDT // Mechanics of Advanced Materials and Struct. – 2008. – 15. – P. 335 – 354.
17. Zhao X., Liew K.M. Geometrically nonlinear analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method // Comput. Methods Appl. Mech. Engng. – 2009. – 198. – P. 2796 – 2811.

Надійшла 02.11.2022

Затверджена до друку 27.06.2023