

Н.Д.Вайсфельд¹, К.Д.Мисов²

**ХВИЛЬОВЕ ПОЛЕ ДВІЧІ-ЗРІЗАНОГО СФЕРИЧНО ШАРУВАТОГО
КОНУСА ПІД ДІСЮ КРУТИЛЬНОГО НАВАНТАЖЕННЯ**

¹ King's College London,

Strand str., WC2R 2LS, London, United Kingdom; e-mail: natalya.vaysfeld@kcl.ac.uk

²Одеський національний університет імені І.І. Мечникова,

вул. Дворянська, 2, 65082, Одеса, Україна; e-mail: kmysov2309@gmail.com

Abstract. An exact solution of the dynamic torsion problem of an elastic spherically layered twice-truncated cone is obtained. The dynamical rotation moment is applied through the rigid thin overlay to the cone bottom face. The cone top face is fixed, and lateral surface is stress free. On the layers boundaries, the conditions of ideal contact are satisfied. A solution of the problem is constructed by application of the integral transform to the rotation equation. To determine the unknown constants of the general solution, the recurrent scheme is proposed. This allows to find the explicit formulae for the displacement and stress for the arbitrary number of layers. The proposed scheme can be used to simulate the cone functionally graded material by increasing the number of layers with the monotonically changing mechanical characteristics.

Key words: steady state oscillations, twice-truncated cone, layered cone, eigen frequencies.

Вступ.

Велика кількість застосувань функціонально градієнтних матеріалів (ФГМ) стимулює розробку різноманітних математичних моделей для дослідження їх напруженого стану. Це сприяло появі багатьох робіт, присвячених розробці математичних методів розв'язання задач не тільки для чисто ФГМ, але й для шаруватих матеріалів з дискретними пружними властивостями.

Багато нещодавніх праць присвячено числовим методам аналізу напруженого стану шаруватих тіл [5, 8 – 10, 14, 20]. Незважаючи на їх ефективність отримати повну якісну картину механічних процесів не є можливим. Через це розробка аналітичних методів розв'язання такого роду задач залишається актуальною. Наведено стислий аналіз деяких праць. В [11] продемонстровано підхід до оцінки термопружного стану багатшарових порожнистих довгих термочутливих циліндрів на основі використання підстановки Кірхгофа, узагальнених функцій та функцій Гріна. Задачу інтенсифікації динамічних напружень внаслідок тріщини дископодібної форми у тришаровому пружному твердому тілі розв'язано в [13] за допомогою вдосконаленого методу граничних інтегральних рівнянь. У [24] досліджено особливості поширення поздовжніх і поперечних плоских хвиль вздовж шарів нанокompозитів періодичної структури з використанням теорії скінченних деформацій і пружного потенціалу типу Мурнагана. Сучасні праці, що пропонують різні нові аналітичні методи розв'язання для шаруватих тіл, включають [3, 12, 16, 19, 21 – 23] серед інших.

Потрібно відзначити, що кількість задач, де розглянуто шаруваті тіла конічної форми, є досить обмеженою. Це пов'язано зі складністю використання сферичної системи координат та відповідних інтегральних перетворень. Аналіз пружності 2D-FG зрізаного порожнистого конусу скінченної довжини описано у [4]. В [18] точний

розв'язок задачі кручення було знайдено для кінечно шаруватого нескінченного пружного конусу. В запропонованій роботі авторами проведено дослідження хвильового поля динамічної задачі кручення пружного двічі-зрізаного сферичними поверхнями шаруватого конусу.

§1. Постановка задачі.

Задачу розглянуто для випадку сталих коливань в осесиметричній постановці. Зображення усіх механічних характеристик розшукуються у вигляді $\tilde{f}(r, \theta, \varphi, t) = e^{i\omega t} f(r, \theta, \varphi)$, де ω – частота сталих коливань. Надалі множник $e^{i\omega t}$ опущено у всіх наступних формулах.

Двічі-зрізаний пружний шаруватий конус розглядається в сферичній системі координат $a_0 \leq r \leq a_n$, $-\psi \leq \theta \leq \psi$ з шарами, поділеними сферичними поверхнями $r = a_j$, $-\psi \leq \theta \leq \psi$, $j = \overline{1, n-1}$, де $n \geq 1$ – номер шару (рис. 1).

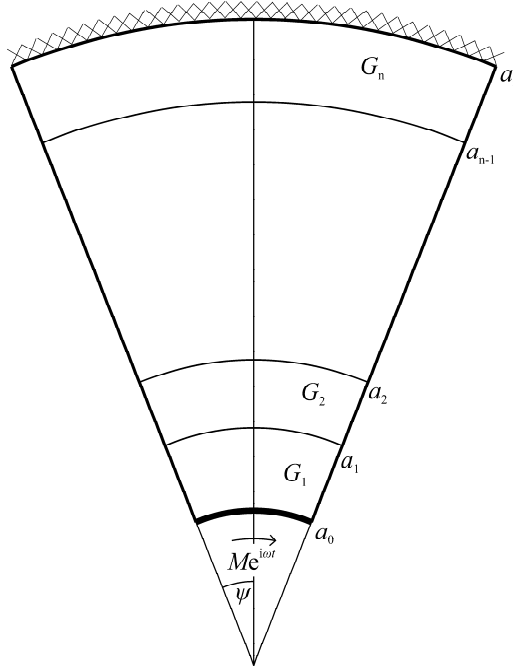


Рис. 1

Крутильний момент прикладено до конусу через абсолютно жорстку накладку, яка прикріплена до нижньої сферичної поверхні $r = a_0$, $-\psi \leq \theta \leq \psi$ конусу

$$w^{(1)}(r, \theta) \Big|_{r=a_0} = \alpha l F(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \psi. \quad (1.1)$$

Тут $w^{(j)}(r, \theta) = u_{\varphi}^{(j)}(r, \theta)$ – переміщення j -го шару, $j = \overline{1, n}$; $l = a_n - a_0$; $F(\theta)$ – довільна відома неперервна функція та α – невідомий кут повороту конусу, який знаходиться з рівняння кручення накладки

$$2\pi a_0^3 \int_0^{\psi} \sin^2 \theta \tau^{(1)}(a_0, \theta) d\theta + M + \omega^2 \alpha J = 0, \quad (1.2)$$

де M – крутильний момент, прикладений до накладки; J – момент інерції руху накладки.

Верхня сферична поверхня конусу $r = a_n$, $-\psi \leq \theta \leq \psi$ зафіксована

$$w^{(n)}(r, \theta) \Big|_{r=a_n} = 0, \quad 0 \leq \theta \leq \psi. \quad (1.3)$$

Бокова поверхня конусу $a_{j-1} \leq r \leq a_j$, $\theta = \psi$, $j = \overline{1, n}$ вільна від напружень

$$\tilde{\tau}^{(j)}(r, \theta) \Big|_{\theta=\psi} = G^{(j)} r^{-1} \left(\frac{w^{(j)}(r, \theta)}{\partial \theta} - w^{(j)}(r, \theta) \cot \theta \right) \Big|_{\theta=\psi} = 0, \quad a_{j-1} \leq r \leq a_j, \quad (1.4)$$

де $\tilde{\tau}^{(j)}(r, \theta) = \tau_{\theta\varphi}^{(j)}(r, \theta)$, $j = \overline{1, n}$ та $G^{(j)}$ – модуль пружності відповідного шару.

На границях шарів діють умови ідеального контакту

$$\begin{cases} w^{(j)}(a_j, \theta) = w^{(j+1)}(a_j, \theta); \\ \tilde{\tau}^{(j)}(a_j, \theta) = \tilde{\tau}^{(j+1)}(a_j, \theta), \end{cases} \quad j = \overline{1, n-1}, \quad 0 \leq \theta \leq \psi, \quad (1.5)$$

$$\text{де } \tau^{(j)}(r, \theta) = \tau_{r\varphi}^{(j)}(r, \theta) = G^{(j)} \left(\frac{\partial w^{(j)}(r, \theta)}{\partial r} - r^{-1} w^{(j)}(r, \theta) \right), \quad j = \overline{1, n}.$$

Потрібно знайти розв'язок, що задовольняє умови (1.1) – (1.5) і рівняння кручення [15]

$$\left(r^2 \left(w^{(j)}(r, \theta) \right)' \right)' + \frac{\left(\sin \theta \left(w^{(j)}(r, \theta) \right)' \right)' \cdot}{\sin \theta} - \frac{w^{(j)}(r, \theta)}{\sin^2 \theta} = - \left(r q^{(j)} \right)^2 w^{(j)}(r, \theta), \quad (1.6)$$

$$a_{j-1} \leq r \leq a_j, \quad 0 \leq \theta \leq \psi,$$

тут $f^\bullet = \frac{\partial f(r, \theta)}{\partial \theta}$; $f' = \frac{\partial f(r, \theta)}{\partial r}$; $q^{(j)} = \frac{\omega}{c^{(j)}}$ – хвильове число; $c^{(j)} = \sqrt{G^{(j)} / \rho^{(j)}}$ –

швидкість зсувної хвилі; $\rho^{(j)}$ – густина та $j = \overline{1, n}$ – кількість шарів.

На основі отриманого розв'язку потрібно провести аналіз хвильового поля конусу та власних частот в залежності від пружних властивостей шарів.

§2. Розв'язання задачі.

Для розв'язання задачі запропоновано метод інтегральних перетворень. Інтегральне перетворення Г.Я. Попова за змінною θ [17]

$$w_k^{(j)}(r) = \int_0^\psi \sin \theta w^{(j)}(r, \theta) P_{\nu_k}^1(\cos \theta) d\theta; \quad w^{(j)}(r, \theta) = \sum_{k=0}^\infty \frac{w_k^{(j)}(r) P_{\nu_k}^1(\cos \theta)}{\left\| P_{\nu_k}^1(\cos \theta) \right\|^2} \quad (2.1)$$

застосовано до крайової задачі (1.1) – (1.6). Тут $P_\nu^m(x)$ – це приєднані функції Лежандра [6]; $\left\| P_\nu^m(x) \right\|^2$ – норма приєднаних функцій Лежандра; параметр ν_k задовольняє рівняння [17]

$$\left(\cot \psi P_{\nu_k}^1(\cos \psi) - \left(P_{\nu_k}^1(\cos \psi) \right)' \right) = 0.$$

Після використання перетворення (2.1) задача (1.1) – (1.6) приймає вигляд

$$\left(r^2 \left(w_k^{(j)}(r) \right)' \right)' + \left(r^2 \left(q^{(j)} \right)^2 - \nu_k \left(\nu_k + 1 \right) \right) w_k^{(j)}(r) = 0, \quad a_{j-1} \leq r \leq a_j, \quad j = \overline{1, n}; \quad (2.2)$$

$$w_k^{(1)}(a_0) = \alpha l^{(1)} F_k; \quad w_k^{(n)}(a_n) = 0; \quad (2.3)$$

$$w_k^{(j)}(a_j, \theta) = w_k^{(j+1)}(a_j, \theta); \quad \tau_k^{(j)}(a_j, \theta) = \tau_k^{(j+1)}(a_j, \theta), \quad j = \overline{1, n-1}. \quad (2.4)$$

Для розв'язання задачі в просторі трансформант потрібно побудувати фундаментальну систему розв'язків $\{ {}_1\Phi_k^{(j)}(r), {}_2\Phi_k^{(j)}(r) \}$, $a_{j-1} \leq r \leq a_j$, $j = \overline{1, n}$ рівняння (2.2).

Для цього введено нову функцію $\widetilde{w_k^{(j)}}(r) = r^{-\frac{1}{2}} w_k^{(j)}(r)$, $j = \overline{1, n}$. Після проведення заміни отримано рівняння Бесселя

$$r \left(r \left(\widetilde{w_k^{(j)}}(r) \right)' \right)' + \left(r^2 \left(q^{(j)} \right)^2 - \left(\nu_k^{(j)} + \frac{1}{2} \right)^2 \right) \widetilde{w_k^{(j)}}(r) = 0, \quad a_{j-1} \leq r \leq a_j, \quad j = \overline{1, n}.$$

Розв'язки цього рівняння з урахуванням проведеної заміни мають вигляд [7]

$${}_1\Phi_k^{(j)}(r) = r^{-\frac{1}{2}} J_{\nu_k+1/2}(q^{(j)}r); \quad {}_2\Phi_k^{(j)}(r) = r^{-\frac{1}{2}} Y_{\nu_k+1/2}(q^{(j)}r),$$

де $J_k(x)$ та $Y_k(x)$ – функції Бесселя першого та другого роду, відповідно.

Загальний розв'язок рівняння (2.2) записано у вигляді

$$w_k^{(j)}(r) = {}_1\Phi_k^{(j)}(r) {}_1C_k^{(j)} + {}_2\Phi_k^{(j)}(r) {}_2C_k^{(j)}, \quad a_{j-1} \leq r \leq a_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (2.5)$$

де ${}_1C_k^{(j)}, {}_2C_k^{(j)}, j = \overline{1, n}$ – невідомі константи. Для їх знаходження потрібно задовольнити крайові умови (2.3)

$$\begin{cases} w_k^{(1)}(a_0) = \alpha l^{(1)} F_k; \\ w_k^{(n)}(a_n) = 0 \end{cases}$$

та умови на границях шарів (2.4)

$$\begin{cases} w_k^{(j)}(a_j, \theta) = w_k^{(j+1)}(a_j, \theta); \\ \tau_k^{(j)}(a_j, \theta) = \tau_k^{(j+1)}(a_j, \theta), \end{cases} \quad j = \overline{1, n-1}.$$

Розв'язок системи запишемо у вигляді

$$\begin{cases} {}_1C_k^{(j)} = \alpha l^{(1)} F_k {}_1A_k^{(j)} \left({}_1\Phi_k^{(1)}(a_0) {}_1A_k^{(1)} + {}_2\Phi_k^{(1)}(a_0) {}_2A_k^{(1)} \right)^{-1}; \\ {}_2C_k^{(j)} = \alpha l^{(1)} F_k {}_2A_k^{(j)} \left({}_1\Phi_k^{(1)}(a_0) {}_1A_k^{(1)} + {}_2\Phi_k^{(1)}(a_0) {}_2A_k^{(1)} \right)^{-1}, \end{cases} \quad j = \overline{1, n}, \quad (2.6)$$

де $\{ {}_1A_k^{(j)}, {}_2A_k^{(j)} \}$, $j = \overline{1, n}$ знайдено за рекурентними формулами

$$\begin{cases} {}_1A_k^{(j)} = \left(\frac{{}_1\Phi_k^{(j+1)}(a_j)}{{}_1\Phi_k^{(j)}(a_j)} - \frac{{}_2\Phi_k^{(j)}(a_j)}{{}_1\Phi_k^{(j)}(a_j)} {}_1B_k^{(j)} \right) {}_1A_k^{(j+1)} + \left(\frac{{}_2\Phi_k^{(j+1)}(a_j)}{{}_1\Phi_k^{(j)}(a_j)} - \frac{{}_2\Phi_k^{(j)}(a_j)}{{}_1\Phi_k^{(j)}(a_j)} {}_2B_k^{(j)} \right) {}_2A_k^{(j+1)}; \\ {}_2A_k^{(j)} = {}_1B_k^{(j)} {}_1A_k^{(j+1)} + {}_2B_k^{(j)} {}_2A_k^{(j+1)}; \end{cases}$$

$${}_1A_k^{(n)} = -\frac{{}_2\Phi_k^{(n)}(a_n)}{{}_1\Phi_k^{(n)}(a_n)}; \quad {}_2A_k^{(n)} = 1$$

та

$${}_1B_k^{(j)} = \frac{\left(\frac{\partial {}_1\Phi_k^{(j+1)}(r)}{\partial r} - \frac{{}_1\Phi_k^{(j+1)}(r)}{r} \right)_{r=a_j} - \frac{{}_1\Phi_k^{(j+1)}(a_j)}{{}_1\Phi_k^{(j)}(a_j)} \left(\frac{\partial {}_1\Phi_k^{(j)}(r)}{\partial r} - \frac{{}_1\Phi_k^{(j)}(r)}{r} \right)_{r=a_j}}{\Delta^{(j)}};$$

$${}_2B_k^{(j)} = \frac{\left(\frac{\partial {}_2\Phi_k^{(j+1)}(a_j)}{\partial r} - \frac{{}_2\Phi_k^{(j+1)}(r)}{r} \right)_{r=a_j} - \frac{{}_2\Phi_k^{(j+1)}(a_j)}{{}_1\Phi_k^{(j)}(a_j)} \left(\frac{\partial {}_1\Phi_k^{(j)}(r)}{\partial r} - \frac{{}_1\Phi_k^{(j)}(r)}{r} \right)_{r=a_j}}{\Delta^{(j)}},$$

де

$$\Delta^{(j)} = \frac{G^{(j)}}{G^{(j+1)}} \left(\left(\frac{\partial {}_2\Phi_k^{(j)}(r)}{\partial r} \right)_{r=a_j} - \frac{{}_2\Phi_k^{(j)}(a_j)}{{}_1\Phi_k^{(j)}(a_j)} \left(\frac{\partial {}_1\Phi_k^{(j)}(r)}{\partial r} \right)_{r=a_j} \right)$$

Константи ${}_1C_k^{(j)}, {}_2C_k^{(j)}, j = \overline{1, n}$ підставлено до представлення трансформанти переміщення (2.5). Застосування оберненого інтегрального перетворення Г.Я. Попова (2.1) завершує побудову розв'язку вихідної задачі

$$w^{(j)}(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_{\nu_k}^1(\cos \theta)}{\|P_{\nu_k}^1(\cos \theta)\|^2} \left({}_1\Phi_k^{(j)}(r) {}_1C_k^{(j)} + {}_2\Phi_k^{(j)}(r) {}_2C_k^{(j)} \right), \quad j = \overline{1, n}. \quad (2.7)$$

За отриманою формулою переміщень побудовано зображення напружень $\tau^{(j)}(r, \theta)$, $\tilde{\tau}^{(j)}(r, \theta)$ та невідомого кута повороту конуса α .

Розв'язок (2.7) співпадає з розв'язком поставленої задачі для випадку суцільного конусу, якщо взяти у поданні (2.7) кількість шарів $n = 1$. В цьому можна впевнитись, якщо порівняти отриману формулу з результатами роботи [2].

§3. Числові результати.

На основі отриманого зображення переміщень та напружень проведено числовий аналіз хвильового поля конусу.

Розглянуто шаруватий конус з n шарами з характеристиками конусу та навантаження $\tilde{G}^{(1)} = 1$; $\tilde{\rho}^{(1)} = 1$; $\tilde{a}_0 = 1$; $\tilde{a}_n = 3\tilde{a}_0$; $\psi = \frac{\pi}{3}$; $F(\theta) = \theta$; $M = 10\tilde{G}^{(1)}$; $\tilde{V} = 0,1$; $\rho = 7$.

Розрахунки виконано для безрозмірних величин, нормалізованих характеристиками першого шару $\tilde{G}^{(j)} = \frac{G^{(j)}}{G^{(1)}}$, $j = \overline{1, n}$; $\tilde{\rho}^{(j)} = \frac{\rho^{(j)}}{\rho^{(1)}}$, $j = \overline{1, n}$; $\tilde{c}^{(j)} = \sqrt{\tilde{G}^{(j)} / \tilde{\rho}^{(j)}}$,

$$j = \overline{1, n} \text{ та } \tilde{a}_j = \frac{a_j}{a_0}, \quad j = \overline{0, n}; \quad \tilde{M} = \frac{M}{G^{(1)}}; \quad \tilde{r} = \frac{r}{a_0}; \quad \tilde{J} = \frac{\tilde{V}}{2} \frac{\rho}{\rho^{(1)}} \left(\tilde{a}^{(0)} \sin \psi \right)^2.$$

Навантаження прикладено до першого шару ($r = a_0, -\psi \leq \theta \leq \psi$). Дві основні схеми розглянуто при налаштуванні шарів. Перша схема описує збільшення жорсткості від нижнього шару, до якого прикладене крутильне навантаження, до останнього верх-

нього шару. Друга схема відповідає випадку, в якому навантаження прикладено до найжорсткішого нижнього шару, а останній верхній шар є найм'якішим. Модуль зсуву та густина першого та останнього шарів фіксовані. В конусі, поділеному на n пружних шарів, модуль пружності та густина змінюються за схемою $\tilde{G}^{(j)} = \tilde{G}^{(1)} + (j-1) \left[\left(\tilde{G}^{(n)} - \tilde{G}^{(1)} \right) / (n-1) \right]$, $j = \overline{1, n}$. Значення величини $h = \tilde{G}^{(n)} / \tilde{G}^{(1)}$, частоти коливань ω та кількості шарів n позначено для кожного випадку окремо.

Було проведено аналіз власних частот для знаходження резонансних частот, небезпечних для стійкості конусу. Резонансні частоти знайдено чисельно за методикою, описаною в [1]. На рис. 2 та 3 представлено графіки залежності напружень $\tau_{rp}^{(j)}(a_n, \psi)$ від частоти коливань ω . На рис. 2 можна побачити розподіл інтервалів перших власних частот, коли навантаження прикладено до першого шару та модуль пружності зростає від першого шару до останнього. Аналогічний розподіл частот наведено на рис. 4 у випадку, коли модуль пружності зменшується з першого до останнього шару. Кількість шарів у приведених розрахунках $n = 20$. Результати показують, що збільшення величини відношення модулів зсуву призводить до збільшення величин перших власних частот. Так, на рис. 2 величини власних частот є більшими, ніж величини відповідних власних частот на рис. 3.

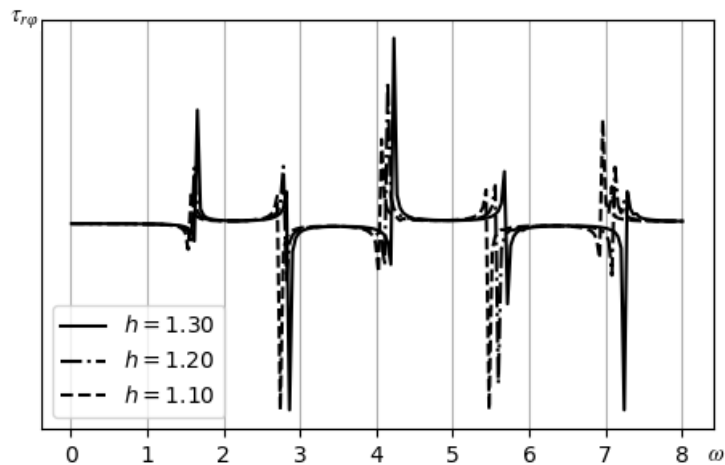


Рис. 2

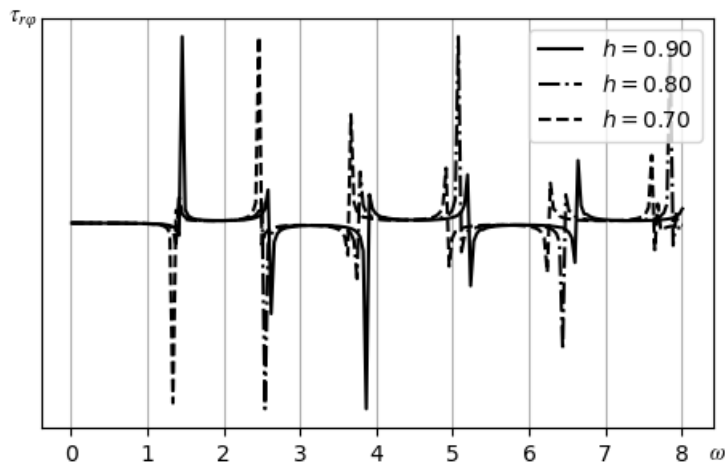


Рис. 3

На рис. 4 показані значення напруження $\tau_{\theta\varphi}^{(j)}(r, \psi)$, $a_{j-1} \leq r \leq a_j$, $j = \overline{1, n}$ на боковій поверхні конуса ($\tilde{a}_0 \leq \tilde{r} \leq \tilde{a}_n$, $\theta = \psi$) у випадку, коли крутильне навантаження прикладено до найм'якшого (рис. 4, а) та найжорсткішого (рис 4, б) шарів. Тут кількість шарів $n = 20$ та частота сталих коливань дорівнює $\omega = 1$. На рис. 5 можна побачити аналогічні напруження при тій же конфігурації, але при більшій частоті коливань $\omega = 3,3$. При низькій частоті коливань збільшення величини h призводить до несуттєвого зменшення абсолютних значень напруження $\tau^{(j)}$ на боковій поверхні конусу. Аналіз графіків на рис 4. та 5 призводить до висновку, що чим більша жорсткість шару, до якого прикладено крутильне навантаження, тим вищі абсолютні значення напружень $\tau_{\theta\varphi}^{(j)}$ спостерігаються біля нижньої сферичної поверхні.

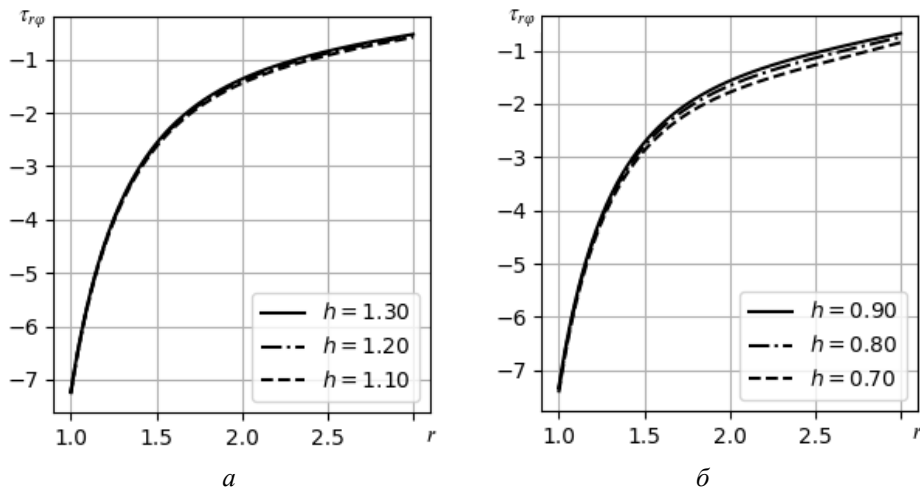


Рис. 4

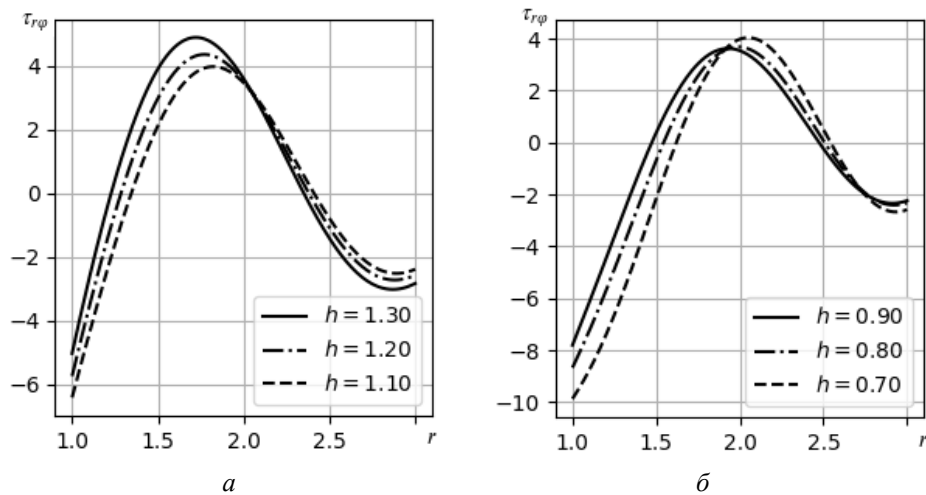


Рис. 5

Для встановлення ефективності методу було досліджено точність розрахунків у випадку збільшення кількості шарів при збереженні інших параметрів незмінними. Рис. 6 показує значення напруження $\tau_{\theta\varphi}^{(j)}$ на боковій поверхні конусу у випадку

$h = 1,3$ та $\omega = 3,3$, коли кількість шарів змінюється від 5 до 50. Розрахунки показали, що починаючи з кількості шарів $n = 30$, значення стабілізуються та подальше збільшення кількості шарів незначно змінює величину напружень. Це дозволяє моделювати конус, утворений з функціонально градієнтних матеріалів, пакетом шарів з дискретно змінними механічними характеристиками. Розбиття при цьому може бути збільшене для досягнення необхідної точності. Також розрахунки були перевірені для випадку $n = 1$, що відповідає випадку цільного конусу [2]. Розрахунки показали збіг з точністю до 10^{-6} .

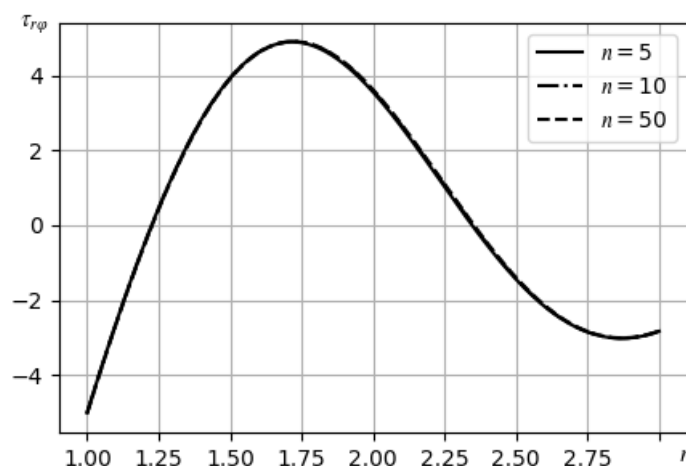


Рис. 6

Висновок.

У запропонованій роботі отримано точний розв'язок динамічної задачі кручення пружного сферично-шаруватого двічі-зрізаного конуса. Явні формули переміщення та напружень використано для аналізу хвильового поля конуса та значень власних частот в залежності від характеру зміни модуля пружності шарів. Запропонований підхід до розв'язання задачі дозволяє моделювати функціонально градієнтний матеріал конуса пакетом шарів з дискретно змінними механічними характеристиками. При цьому кількість шарів у цьому пакеті можна збільшувати до досягнення заданої точності розрахунку. Цей метод може бути використаний для розв'язання більш складної задачі, коли конус ослаблений міжфазною тріщиною на межі розділу шарів.

РЕЗЮМЕ. Отримано точний розв'язок динамічної задачі кручення пружного сферично-шаруватого двічі-зрізаного конуса. Момент кручення прикладається до нижньої поверхні конуса через жорстку тонку накладку. Верхня сферична поверхня конуса закріплена, а бічна поверхня вільна від напружень. На границях шарів виконуються умови ідеального контакту. Розв'язок задачі будується із застосуванням інтегрального перетворення до рівняння кручення. Для визначення невідомих констант загального розв'язку запропоновано рекурентну схему. Це дозволяє знайти явні формули для переміщень і напружень для довільної кількості шарів. Запропонована схема може бути використана для моделювання функціонально градієнтного матеріалу конуса шляхом збільшення кількості шарів з монотонно змінними механічними характеристиками.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: сталі коливання, двічі-зрізаний конус, шаруватий конус, власні частоти.

1. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наук. Думка, 1981. – 284 р.
2. Мисов К.Д., Вайсфельд Н.Д. Встановлені крутильні коливання двічі-зрізаного пружного конусу // Наук. журнал «Молодий вчений». – 2018 – Вип. 62. – С. 119 – 121.

3. *Altukhov A.V., Fomenko M.V.* Elastic Vibrations of Sandwich Plates with Diaphragms at the Edges // *Int. Appl. Mech.* – 2014. – **50**, N 10. – P. 179 – 186.
4. *Asemi K., Salehi M., Akhlaghi M.* Elastic solution of a two-dimensional functionally graded thick truncated cone with finite length under hydrostatic combined loads // *Acta Mech.* – 2011. – **217**. – P. 119 – 134.
5. *Awrejcewicz J., Kurpa L., Osetrov A.* Investigation of the stress-strain state of the laminated shallow shells by R-functions method combined with spline-approximation // *Z. Angew. Math. Mech.* – 2011. – **91**, N 6. – P. 458 – 467.
6. *Bateman H., Erdelyi A.* Higher Transcendental Functions. Vol. 1 – New York: McGraw-Hill, 1953. – 316 p.
7. *Bateman H., Erdelyi A.* Higher Transcendental Functions. Vol. 2 – New York: McGraw-Hill, 1955. – 416 p.
8. *Birk C., Behnke R.* A modified scaled boundary finite element method for three-dimensional dynamic soil-structure interaction in layered soil // *Int. J. Numer. Methods Engng.* – 2012. – **89**, N 3. – P. 371 – 402.
9. *Carrera E., Nali P.* Multilayered plate elements for the analysis of multifield problems // *Finite Elements in Analysis and Design.* – 2010. – **46**, N 9. – P. 732 – 742.
10. *Kurpa L.V., Shmatko T.V.* Investigation of Free Vibrations and Stability of Functionally Graded Three-Layer Plates by Using the R-Functions Theory and Variational Methods // *J. Math. Sci.* – 2020. – **249**. – P. 496 – 520.
11. *Kushnir R.M., Protsyuk B.V., Synyuta V.M.* Quasistatic temperature stresses in a multilayer thermally sensitive cylinder // *Mater. Sci.* – 2004. – **40**, N 4. – P. 433 – 445.
12. *Marchuk M.V., Pakosh V.S., Kharchenko V.M.* Natural Frequencies of Layered Composite Plates-Strips with Components Compliant to Transverse Shear and Compression // *J. Math. Sci.* – 2014. – **203**. – P. 185 – 192.
13. *Mykhas'kiv V., Stankevych V.* Elastodynamic problem for a layered composite with penny-shaped crack under harmonic torsion // *Z. Angew. Math. Mech.* – 2019. – **99**, N 5. – e201800193.
14. *Nejad M. Z., Jabbari M., Ghannad M.* A Semi-analytical solution of thick truncated cones using matched asymptotic method and disk form multilayers // *Archive of Mech. Engng.* – 2014. – **61**, N 3. – P. 495 – 513.
15. *Nowacki W.* Teoria Sprezystosci. – Warszawa: Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, 1970. – 769 s.
16. *Ozturk A., Akbarov S.D.* Torsional wave dispersion relations in a pre-stressed bi-material compounded cylinder // *Z. Angew. Math. Mech.* – 2009. – **89**, N 9. – P. 754 – 766.
17. *Popov G.Ya.* The axisymmetric mixed problem in the theory of elasticity for a hallow truncated circular cone // *J. of Appl. Mathem. and Mech.* – 2000. – **64**, N 3. – P. 413 – 424.
18. *Popov G., Vaysfel'd N.* The torsion of the conical layered elastic cone // *Acta Mech.* – 2014. – **225**. – P. 67 – 76.
19. *Qu Y., Meng G.* Dynamic analysis of composite laminated and sandwich hollow bodies of revolution based on three-dimensional elasticity theory // *Composite Structures* – 2014. – **112**. – P. 378 – 396.
20. *Trach V.M.* Stability of Conical Shells Made of Composites with One Plane of Elastic Symmetry // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – **43**. – P. 662 – 669.
21. *Vitucci G., Mishuris G.* Analysis of residual stresses in thermoelastic multilayer cylinders // *J. of the European Ceramic Society* – 2016. – **36**, N 9. – P. 2411 – 2417.
22. *Yeo W.H., Purbolaksono J., Aliabadi M.H., Ramesh S., Liew H.L.* Exact solution for stresses/displacements in a multilayered hollow cylinder under thermo-mechanical loading // *Int. J. of Pressure Vessels and Piping.* – 2017. – **151**. – P. 45 – 53.
23. *Yu J.G., Lefebvre J.E.* Guided waves in multilayered hollow cylinders: The improved Legendre polynomial method // *Composite Struct.* – 2013 – **95**. – P. 419 – 429.
24. *Zhuk Y.A., Guz I.A.* Features of Plane Wave Propagation Along the Layers of a Prestrained Nanocomposite // *Int. Appl. Mech.* – 2007 – **43**, N 4. – P. 361 – 379.

Надійшла 06.03.2023

Затверджена до друку 27.06.2023