

Я.Я.Рушицький, С.В.Сінчило, В.М.Юрчук

**НОВІ НЕЛІНІЙНІ ХВИЛЬОВІ РІВНЯННЯ В АНАЛІЗІ КРУТИЛЬНИХ
ПРУЖНИХ ХВИЛЬ І МОДЕЛЮВАННЯ ЕВОЛЮЦІЇ ЦИХ ХВИЛЬ**

*Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: rushch@inmech.kiev.ua*

Abstract. The torsional waves as one type of the nonlinear elastic cylindrical waves of displacement are analyzed theoretically within the framework of the five-constant Murnaghan model. This analysis is based on tools of the nonlinear theory of elasticity. Two variants of new nonlinear wave equations for the torsional waves are derived by taking into account the nonlinear summands of the cubic order. The difference among these variants is in a different allowance for the nonlinearities in the wave equation. The simpler variant is used and the evolution of torsional waves is analyzed theoretically and numerically. A special attention is paid to the boundary conditions and the classical for torsional waves transcend equation.

Key words: torsional wave, five-constant Murnaghan potential, new nonlinear wave equations in displacements, boundary condition, approximate approach, evolution in time and with distance.

Вступ.

Каталог хвильових рівнянь постійно поповнюється новими рівняннями, в основному, нелінійними ([6, 30, 34] в області нелінійних диференціальних рівнянь, [4, 7, 8, 21, 28, 32] в області нелінійних механічних хвиль, [9, 16, 27] в області квантової механіки, [11] в області геофізики, [12, 33] в області акустики, [14, 31] в області астрофізики, [29] в області медицини, [6] в області метаматеріалів). Ці рівняння не тільки описують фізичні явища, але і хімічні, економічні та інші. Тобто, нові рівняння описують хвилі різної природи. Спосеред класичних хвиль механічні хвилі є одними з найбільш вивчених. Однак і тут трапляються невивчені фрагменти. До одного з таких фрагментів належать як лінійні, так і нелінійні крутильні хвилі.

Задача про поширення крутильних хвиль вздовж осі симетрії кругового циліндра в лінійній постановці є класичною в теорії пружності [1 – 3, 5, 10, 13, 17, 18, 20, 22]. Нелінійна постановка задачі про циліндричні хвилі в рамках п'ятиконстантної нелінійної моделі пружного деформування Мернагана [19] описана в ряді статей, вказаних в монографії [22]. Однак в цих публікаціях варіант конфігурації, яка стосується крутильних хвиль, досліджений побіжно. Тому при проведенні повного аналізу крутильних хвиль виникає потреба в більш загальних хвильових рівняннях, отриманих послідовно і строго.

Примітка 1. Незважаючи на те, що крутильні хвилі є одним з класичних типів хвиль (плоских, циліндричних і у їх числі крутильних, сферичних, поверхневих), вони не описані як в дуже відомих, так і в менш відомих книгах з теорії пружності. Практично, тільки книги [5, 20, 22] дають послідовний опис цих хвиль в рамках лінійної теорії пружності.

1. Класична задача лінійної теорії пружності про поширення крутильних хвиль.

В будь-якій задачі про поширення біжучих пружних гармонічних хвиль негласно приймається, що такі хвилі збуджуються гармонічним у часі імпульсом. Наприклад,

плоска поздовжня хвиля зміщення в напрямку осі Ox збуджується гармонічним імпульсом заданої амплітуди і частоти $u_x(t) = u_x^0 e^{i\omega t}$, прикладеним до площини $x = 0$. Аналогічно, гармонічна крутильна хвиля в напрямку осі симетрії циліндра Oz збуджується імпульсом $u_g(t) = u_g^0 e^{i\omega t}$, прикладеним до поперечного перетину циліндра (круга) $z = 0$. Тоді в циліндрі виникає крутильна хвиля, яка поширюється вздовж його осі.

Для опису крутильної хвилі в пружному циліндрі кругового поперечного перерізу використовуються циліндричні координати (r, ϑ, z) і додаткові умови щодо осьової симетрії деформівного стану та відсутності радіального і осьового зміщень [5, 20, 22]

$$u_r(r, z, t) = u_z(r, z, t) = 0. \quad (1)$$

Тоді система з трьох рівнянь руху циліндра спрощується до одного рівняння

$$u_{g,rr} + (1/r)u_{g,r} - (1/r^2)u_g + u_{g,zz} - (1/v_T^2)u_{g,tt} = 0, \quad (2)$$

де $v_T = \sqrt{\mu/\rho}$ є фазовою швидкістю зсувної чи плоскої поперечної хвилі в лінійно пружному матеріалі; μ – модулем зсуву і ρ – густиною цього матеріалу.

Якщо припустити, що колове зміщення u_θ є гармонічним у часі і просторі (тобто, розглядається розв'язок у вигляді хвилі)

$$u_g(r, z, t) = \tilde{u}_g(r) e^{i(k_z z - \omega t)}, \quad (3)$$

то такий розв'язок вважають гармонічною крутильною хвилею, оскільки кожен поперечний переріз циліндра здійснює гармонічне коливання у коловому напрямку з заданою частотою ω у часі і за просторовою координатою z рухається хвиля з довжиною $\lambda = (2\pi/k_z)$ та хвильовим числом k_z . При цьому циліндр піддається деформації кручення і тому хвилю називають крутильною.

Як впливає з представлення хвилі (3), амплітуда хвилі змінюється зі зміною радіуса. Ця амплітуда визначається з рівняння

$$u_{g,rr}^0 + (1/r)u_{g,r}^0 + \left[k_z^2 - k_T^2 - (1/r^2) \right] u_g^0 = 0. \quad (4)$$

Розв'язок рівняння (4) виражається через циліндричну функцію (функцію Бесселя першого роду і першого індексу)

$$\tilde{u}_g(r) = \tilde{u}^0 J_1(\beta r), \quad \beta = \sqrt{k_T^2 - k_z^2}. \quad (5)$$

Отже, розв'язок у вигляді крутильної хвилі є таким

$$u_g(r, z, t) = \tilde{u}^0 J_1(\beta r) e^{i(k_z z - \omega t)}. \quad (6)$$

Примітка 2. Функція Бесселя $J_1(\beta r)$ має такі особливості: вона є спадною і $J_1(0) = 0$. Тому зміщення у центрі циліндра є нульовими, що відповідає фізичному сенсу задачі.

Хвильове число k_z і відповідна фазова швидкість $v_z = (\omega/k_z)$ визначається з умови відсутності напружень на бічній поверхні циліндра $r = r^0$

$$\sigma_{rr}(r^0, z, t) = \sigma_{rg}(r^0, z, t) = \sigma_{rz}(r^0, z, t) = 0. \quad (7)$$

Якщо врахувати співвідношення

$$\sigma_{rr} = 2\mu\epsilon_{rr} + \lambda e; \quad \sigma_{rg} = 2\mu\epsilon_{rg}; \quad \sigma_{rz} = 2\mu\epsilon_{rz};$$

$$\varepsilon_{rr} = 0; \varepsilon_{r\vartheta} = (1/2)[u_{\vartheta,r} - (1/r)u_{\vartheta}]; \varepsilon_{rz} = 0; e = 0 \quad (8)$$

і підставити розв'язок (6) у граничні умови (7), то для знаходження k_z отримується трансцендентне рівняння

$$\beta r^o J_0(\beta r^o) = 2J_1(\beta r^o). \quad (9)$$

Рівняння (9) має нескінченну кількість коренів $\beta_k r^o$ ($k = 1, 2, \dots$). Відповідно, крутильна хвиля має нескінченну кількість мод з відмінними між собою фазовими швидкостями

$$(v_z)_k = v_T \sqrt{1 + \beta^2 (k_z)_k^2}. \quad (10)$$

Примітка 3. Крутильним хвилям зміщення $u_{\vartheta}(r, z, t)$ (6) відповідають крутильні хвилі напруження

$$\sigma_{r\vartheta}(r, z, t) = \tilde{u}^o [2J_1(\beta r) - \beta r J_0(\beta r)] e^{i(k_z z - \omega t)}. \quad (11)$$

2. Побудова нових нелінійних хвильових рівнянь, які описують поширення пружних крутильних хвиль.

Побудова вказаних у назві параграфу хвильових рівнянь потребує використання інструментів нелінійної теорії пружності. Перш за все, слід використовувати циліндричну ортогональну систему координат $\theta^1 = r$, $\theta^2 = \vartheta$, $\theta^3 = z$. У цій системі довжина вектора обчислюється за формулою [2, 3, 22]

$$(ds)^2 = g_{ik} d\theta^i d\theta^k = (dr)^2 + r^2 (d\vartheta)^2 + (dz)^2, \quad (12)$$

метричні тензори мають компоненти

$$\|g_{ik}\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad \|g^{ik}\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (13)$$

базисні вектори $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, $(\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3)$ $\delta_n^k = \vec{e}^k \cdot \vec{e}_n$ мають довжини

$$|\vec{e}_1| = 1; |\vec{e}_2| = r; |\vec{e}_3| = 1; |\vec{e}^1| = 1; |\vec{e}^2| = (1/r); |\vec{e}^3| = 1, \quad (14)$$

лише три символи Крістоффеля першого роду Γ_{ki}^m нерівні нулеві

$$\Gamma_{22}^1 = -r; \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = (1/r). \quad (15)$$

Далі необхідно вибрати конфігурацію (стан) нелінійно пружного середовища. Таких станів при описі деформування в циліндричних координатах може бути чотири [22]. Для опису крутильних хвиль слід вибрати конфігурацію, яка відповідає постановці задачі про крутильні хвилі в лінійному наближенні (1). Це є осесиметрична конфігурація з віссю симетрії Oz , яка залежить від координат r, z і не залежить від координати ϑ . У цій конфігурації стосовно крутильних хвиль (1) компоненти вектора зміщень є такими:

$$\vec{u}(r, \vartheta, z, t) = \{u_r = 0, u_{\vartheta} = u_{\vartheta}(r, z, t), u_z = 0\} = \{u^r = 0, u^{\vartheta} = u^{\vartheta}(r, z, t), u^z = 0\}. \quad (16)$$

Компоненти нелінійного тензора деформацій Коші – Гріна обчислюються за допомогою похідних ко- і контраваріантних компонентів вектора зміщень (закреслені доданки є нульовими внаслідок врахування вибору конкретної конфігурації і представлення (16))

загальна формула:

$$\begin{aligned}
\nabla_i u^k &= \frac{\partial u^k}{\partial \theta^i} + u^j \Gamma_{ji}^k; \quad \nabla_i u_j = \frac{\partial u_j}{\partial \theta^i} - u_k \Gamma_{ji}^k; \quad \nabla_1 u^1 = \cancel{u_{,1}^1} + u^1 \cancel{\Gamma_{11}^1} + u^2 \cancel{\Gamma_{21}^1} + u^3 \cancel{\Gamma_{31}^1} = 0; \\
\nabla_i u_1 &= \cancel{u_{,1}^1} - u_1 \cancel{\Gamma_{11}^1} - u_2 \cancel{\Gamma_{11}^2} - u_3 \cancel{\Gamma_{11}^3} = 0; \quad \nabla_1 u_2 = u_{2,1} - u_1 \cancel{\Gamma_{21}^1} - u_2 \Gamma_{21}^2 - u_3 \cancel{\Gamma_{21}^3} = u_{2,1} - \frac{1}{r} u_2; \\
\nabla_1 u^2 &= u_{,1}^2 + u^1 \cancel{\Gamma_{11}^2} + u^2 \Gamma_{21}^2 + u^3 \cancel{\Gamma_{31}^2} = u_{,1}^2 + \frac{1}{r} u^2; \\
\nabla_1 u^3 &= \frac{\partial u^3}{\partial \theta^1} + u^j \cancel{\Gamma_{j1}^3} = 0; \quad \nabla_1 u_3 = \frac{\partial u_3}{\partial \theta^1} - u_k \cancel{\Gamma_{31}^k} = 0; \\
\nabla_2 u^1 &= \frac{\partial u^1}{\partial \theta^2} + u^1 \cancel{\Gamma_{12}^1} + u^2 \Gamma_{22}^1 + u^3 \cancel{\Gamma_{32}^1} = -ru^2; \\
\nabla_2 u_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial \theta^2} - u_1 \cancel{\Gamma_{12}^1} - u_2 \Gamma_{12}^2 - u_3 \cancel{\Gamma_{12}^3} = -\frac{1}{r} u_2; \\
\nabla_2 u^2 &= \frac{\partial u^2}{\partial \theta^2} + u^1 \cancel{\Gamma_{12}^2} + u^2 \Gamma_{22}^2 + u^3 \cancel{\Gamma_{32}^2} = 0; \quad \nabla_2 u_2 = \frac{\partial u_2}{\partial \theta^2} - u_1 \cancel{\Gamma_{22}^1} - u_2 \Gamma_{22}^2 - u_3 \cancel{\Gamma_{22}^3} = 0; \\
\nabla_2 u^3 &= \frac{\partial u^3}{\partial \theta^2} + u^j \cancel{\Gamma_{j2}^3} = 0; \quad \nabla_2 u_3 = \frac{\partial u_3}{\partial \theta^2} - u_k \cancel{\Gamma_{32}^k} = 0; \\
\nabla_3 u^1 &= \frac{\partial u^1}{\partial \theta^3} + u^j \cancel{\Gamma_{j3}^1} = 0; \quad \nabla_3 u_1 = \frac{\partial u_1}{\partial \theta^3} - u_k \cancel{\Gamma_{13}^k} = 0; \\
\nabla_3 u^2 &= \frac{\partial u^2}{\partial \theta^3} + u^j \cancel{\Gamma_{j3}^2} = u_{,3}^2; \quad \nabla_3 u_2 = \frac{\partial u_2}{\partial \theta^3} - u_k \cancel{\Gamma_{23}^k} = u_{2,3}; \\
\nabla_3 u^3 &= \frac{\partial u^3}{\partial \theta^3} + u^j \cancel{\Gamma_{j3}^3} = 0; \quad \nabla_3 u_3 = \frac{\partial u_3}{\partial \theta^3} - u_k \cancel{\Gamma_{33}^k} = 0
\end{aligned}$$

і за умови (16) мають вигляд
загальна формула:

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{ij} &= \frac{1}{2} (\nabla_i u^j + \nabla_j u^i + \nabla_i u^k \nabla_j u_k); \\
\varepsilon^{11} &= \cancel{\nabla_1 u^1} + \frac{1}{2} (\cancel{\nabla_1 u_1 \nabla_1 u^1}) + \frac{1}{2} (\nabla_1 u_2 \nabla_1 u^2) + \frac{1}{2} (\cancel{\nabla_1 u_3 \nabla_1 u^3}) = \frac{1}{2} \left(u_{2,1} - \frac{1}{r} u_2 \right) \left(u_{,1}^2 + \frac{1}{r} u^2 \right)^2; \\
\varepsilon^{22} &= \cancel{\nabla_2 u^2} + \frac{1}{2} (\nabla_2 u_1 \nabla_2 u^1) + \frac{1}{2} (\cancel{\nabla_2 u_2 \nabla_2 u^2}) + \frac{1}{2} (\cancel{\nabla_2 u_3 \nabla_2 u^3}) = \frac{1}{2} u^2 u_2; \quad (17) \\
\varepsilon^{33} &= \cancel{\nabla_3 u^3} + \frac{1}{2} (\cancel{\nabla_3 u_1 \nabla_3 u^1} + \nabla_3 u_2 \nabla_3 u^2 + \cancel{\nabla_3 u_3 \nabla_3 u^3}) = \frac{1}{2} u_{,3}^2 u_{2,3}; \\
\varepsilon^{12} &= \frac{1}{2} (\nabla_1 u^2 + \cancel{\nabla_2 u^1} + \cancel{\nabla_1 u_1 \nabla_2 u^1} + \cancel{\nabla_1 u_2 \nabla_2 u^2} + \cancel{\nabla_1 u_3 \nabla_2 u^3}) = \frac{1}{2} \left(u_{,1}^2 + \frac{1}{r} u^2 \right); \\
\varepsilon^{23} &= \frac{1}{2} (\cancel{\nabla_2 u^3} + \nabla_3 u^2 + \cancel{\nabla_2 u_1 \nabla_3 u^1} + \cancel{\nabla_2 u_2 \nabla_3 u^2} + \cancel{\nabla_2 u_3 \nabla_3 u^3}) = \frac{1}{2} u_{,3}^2;
\end{aligned}$$

$$\varepsilon^{13} = \frac{1}{2} \left(\cancel{\nabla_1 u_3} + \cancel{\nabla_3 u_1} + \cancel{\nabla_1 u_1 \nabla_3 u^1} + \nabla_1 u_2 \nabla_3 u^2 + \cancel{\nabla_1 u_3 \nabla_3 u^3} \right) = \left(u_{2,1} - \frac{1}{r} u_2 \right) u_{,3}^2$$

або у випадку крутильних хвиль в слабко нелінійному пружному матеріалі

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{2} \left[\left(u_{,g,r} \right)^2 - \frac{1}{r^2} (u_g)^2 \right]; \quad \varepsilon_{gg} = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} (u_g)^2; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{1}{2} (u_{,g,z})^2;$$

$$\varepsilon_{rg} = \frac{1}{2} \left(u_{,g,r} + \frac{1}{r} u_g \right); \quad \varepsilon_{gz} = \frac{1}{2} u_{,g,z}; \quad \varepsilon_{rz} = \left(u_{,g,r} - \frac{1}{r} u_g \right) u_{,g,z}.$$

Примітка 4. В рамках вибраної конфігурації два компоненти ε_{rg} , ε_{gz} тензора деформації є лінійними, а решта компонентів не має лінійних доданків і є лише квадратично нелінійними.

Нелінійні рівняння руху в записі через тензор напружень Лягранжа σ^{kl} є такими:

$$\nabla_k \left[\sigma^{ki} \left(\delta_i^n + \nabla_i u^n \right) \right] = \rho \ddot{u}^i. \quad (18)$$

У ряді випадків виявляється доцільним аналізувати рівняння руху лише як рівняння щодо зміщень. Тоді компоненти тензора напружень треба спочатку обчислювати за формулою $\sigma^{ik} = \left(\partial W / \partial \varepsilon^{ik} \right)$, де слід знати внутрішню енергію W як нелінійну функцію компонентів тензора деформації. Далі треба використати формули (17).

Наступний крок пов'язаний з вибором типу пружного матеріалу (середовища). У проведеному дослідженні вибрано гіперпружний матеріал і посеред моделей деформування такого матеріалу вибрано п'ятиконстантну модель Мернагана, яка задається кубічно нелінійним пружним потенціалом [19]

$$W(I_1, I_2, I_3) = \frac{1}{2} \lambda I_1^2 + \mu I_2 + \frac{1}{3} A I_3 + B I_1 I_2 + \frac{1}{3} C I_1^3 \quad (19)$$

зі стандартними представленнями перших трьох інваріантів тензора деформації

$$I_1(\varepsilon^{ik}) = \varepsilon^{11} + \varepsilon^{22} + \varepsilon^{33}; \quad I_2(\varepsilon^{ik}) = \varepsilon^{ik} \varepsilon^{ik} = (\varepsilon^{11})^2 + (\varepsilon^{22})^2 + (\varepsilon^{33})^2 +$$

$$+ (\varepsilon^{12})^2 + (\varepsilon^{13})^2 + (\varepsilon^{23})^2 + (\varepsilon^{21})^2 + (\varepsilon^{31})^2 + (\varepsilon^{32})^2; \quad (20)$$

$$I_3(\varepsilon^{ik}) = \det \varepsilon^{ik} = \varepsilon^{11} \varepsilon^{22} \varepsilon^{33} + \varepsilon^{13} \varepsilon^{21} \varepsilon^{32} + \varepsilon^{31} \varepsilon^{12} \varepsilon^{23} - \varepsilon^{13} \varepsilon^{22} \varepsilon^{31} - \varepsilon^{11} \varepsilon^{23} \varepsilon^{32} - \varepsilon^{12} \varepsilon^{21} \varepsilon^{33}.$$

На даному етапі аналізу немає потреби вираховувати всі компоненти тензора напружень σ^{ik} через деформації і зміщення, оскільки не всі ці компоненти потрібні для запису рівнянь руху (18) через зміщення (у даному випадку вони ж і хвильові рівняння). Особливістю конфігурації (1) є те, що з трьох рівнянь руху нетотожним є лише друге рівняння – рівняння щодо зміщення u^2

$$\nabla_k \left[\sigma^{k2} \left(\delta_2^n + \nabla_2 u^n \right) \right] = \rho \ddot{u}^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \nabla_1 \left[\sigma^{12} \left(\delta_2^n + \nabla_2 u^n \right) \right] + \cancel{\nabla_2 \left[\sigma^{22} \left(\delta_2^n + \nabla_2 u^n \right) \right]} + \nabla_3 \left[\sigma^{32} \left(\delta_2^n + \nabla_2 u^n \right) \right] = \rho \ddot{u}^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \nabla_1 \sigma^{12} + \nabla_3 \sigma^{32} = \rho \ddot{u}^2. \quad (21)$$

Таким чином, потрібен тільки запис дотичних напружень σ^{12} , σ^{23}

$$\begin{aligned}\sigma^{12} &= \cancel{\lambda I_1 \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon^{12}}} + \mu \frac{\partial I_2}{\partial \varepsilon^{12}} + \frac{1}{3} A \frac{\partial I_3}{\partial \varepsilon^{12}} + B \left(I_1 \frac{\partial I_2}{\partial \varepsilon^{12}} + I_2 \cancel{\frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon^{12}}} \right) + C I_1^2 \cancel{\frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon^{12}}} = \\ &= 2\mu \varepsilon^{12} + \frac{1}{3} A \left(\varepsilon^{13} \varepsilon^{23} - \varepsilon^{12} \varepsilon^{33} \right) + 2B \varepsilon^{12} \left(\varepsilon^{11} + \varepsilon^{22} + \varepsilon^{33} \right); \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned}\sigma^{23} &= \cancel{\lambda I_1 \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon^{23}}} + \mu \frac{\partial I_2}{\partial \varepsilon^{23}} + \frac{1}{3} A \frac{\partial I_3}{\partial \varepsilon^{23}} + B \left(I_1 \frac{\partial I_2}{\partial \varepsilon^{23}} + I_2 \cancel{\frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon^{23}}} \right) + C I_1^2 \cancel{\frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon^{23}}} = \\ &= 2\mu \varepsilon^{23} + \frac{1}{3} A \left[2\varepsilon^{13} \varepsilon^{12} - 2\varepsilon^{11} \varepsilon^{23} \right] + 2B \varepsilon^{23} \left[\varepsilon^{11} + \varepsilon^{22} + \varepsilon^{33} \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

Рівняння руху (21) з врахуванням представлень (22), (23) має вигляд

$$\begin{aligned}2\mu \left(\varepsilon^{12}_{,1} + \varepsilon^{23}_{,3} \right) + \frac{1}{3} A \left[\begin{aligned} &\varepsilon^{13}_{,1} \varepsilon^{23} + \varepsilon^{13} \varepsilon^{23}_{,1} - \varepsilon^{12}_{,1} \varepsilon^{33} + \\ &+ \varepsilon^{12}_{,3} \left(\varepsilon^{13} - \varepsilon^{11} \right) + \varepsilon^{12} \left(\varepsilon^{13}_{,3} - \varepsilon^{33}_{,1} - \varepsilon^{11}_{,3} \right) \end{aligned} \right] + \\ + 2B \left[\begin{aligned} &\left(\varepsilon^{12}_{,1} + \varepsilon^{23}_{,3} \right) \left(\varepsilon^{11} + \varepsilon^{22} + \varepsilon^{33} \right) + \\ &+ \varepsilon^{12} \left(\varepsilon^{11}_{,1} + \varepsilon^{22}_{,1} + \varepsilon^{33}_{,1} \right) + \varepsilon^{23} \left(\varepsilon^{11}_{,3} + \varepsilon^{22}_{,3} + \varepsilon^{33}_{,3} \right) \end{aligned} \right] = \rho \ddot{u}^2. \end{aligned} \quad (24)$$

Тепер можна врахувати формули (17) і записати рівняння (24) через зміщення

$$\begin{aligned}\mu \left[Lu_g \equiv \left(u_{g,rr} + (1/r) u_{g,1r} - (1/r^2) u_g + u_{g,zz} \right) \right] - \rho u_{g,tt} = \\ = \boxed{Lu_g (1/2) B \left[\left(u_{g,r} \right)^2 + \frac{1}{r} u_{g,r} u_g + \frac{2}{r^2} u_g^2 + \left(u_{g,z} \right)^2 \right]} - \\ - (1/6) (A - 9B) \left[u_{g,r} \left(u_{g,z} \right)^2 + \frac{2}{r} u_g \left(u_{g,z} \right)^2 \right] + \\ + (1/3) A \left[\begin{aligned} &ru_{g,r} u_{g,z} u_{g,rz} - (1/2) r \left(u_{g,z} \right)^2 u_{g,rr} + (1/2) r \left(u_{g,r} \right)^2 u_{g,zz} + \\ &+ (3/2) u_g u_{g,r} u_{g,zz} + 2u_g u_{g,z} u_{g,rz} + \left(1/2r^2 \right) \left(u_g \right)^2 u_{g,z} + (1/2r) \left(u_g \right)^2 u_{g,zz} \end{aligned} \right] + \\ + B \left\{ \begin{aligned} &r \left(u_{g,z} \right)^2 u_{g,zz} + 2r \left(u_{g,r} \right)^2 u_{g,rr} + r^2 \left(u_{g,r} \right)^2 u_{g,rz} + \\ &+ (1/2) r \left(u_{g,r} \right)^2 u_{g,rr} + 4 \left(1/r^2 \right) u_g \left(u_{g,r} \right)^2 + \\ &+ (3/2) \left(u_{g,r} \right)^3 + (5/2) r^2 \left(u_g \right)^2 u_{g,r} + (5/2) u_g u_{g,z} u_{g,rz} + 2u_g u_{g,r} u_{g,rr} + (1/2r) u_g^2 u_{g,rr} \end{aligned} \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

Рівняння (25) являє собою нове нелінійне хвильове рівняння, яке у лівій частині повністю співпадає з лінійним хвильовим рівнянням (4), а у правій частині містить доданки, які є кубічно нелінійними щодо зміщення. Отже, квадратична нелінійність, яка характерна, наприклад, для деяких циліндричних хвиль [22], не присутня в рівнянні (25) і крутильні хвилі є виключно кубічно нелінійними в рамках реалізованого підходу.

Окрім вказаної вище особливості нового нелінійного хвильового рівняння, слід вказати ще на декілька інших особливостей.

Права нелінійна частина рівняння (25) містить багато нелінійних доданків. Подібна ситуація виникала і раніше при вивченні плоских і циліндричних хвиль [22, 23]. При застосуванні трьох різних підходів до знаходження наближених розв'язків такого роду нелінійного хвильового рівняння було виявлено [22], що рядом нелінійних доданків можна знехтувати і враховувати лише доданок, подібний до лінійної частини хвильового рівняння. Отже, присутність в рівнянні багатьох нелінійних доданків у ряді випадків не створює великих перепон в знаходженні наближеного розв'язку.

Також звичайно в теорії пружності розрізняють два типи нелінійностей в основних рівняннях – геометричну та фізичну. Геометрична виникає, коли в записі тензора деформації враховуються квадратично нелінійні доданки. Тоді у загальному випадку при записі хвильових рівнянь у цих рівняннях виникають нелінійні доданки з множниками у вигляді пружних постійних Ляме μ, λ . Як свідчить хвильове рівняння (25), в рамках прийнятої постановки задачі про крутильні хвилі такі доданки відсутні. Присутні лише нелінійні доданки з множниками у вигляді пружних постійних Мернагана A, B , що свідчить про врахування у рівнянні (25) лише фізичної нелінійності. Отже, ця ситуація не є наслідком нехтування геометричної нелінійності, а наслідком специфіки загальної для теорії пружності постановки задачі про крутильні хвилі.

Ще одна особливість рівняння (25) пов'язана з виразом у правій частині, який поміщений у рамку. Він містить лінійний оператор L . Якщо знехтувати всіма іншими нелінійними доданками і врахувати лише вказаний вище вираз, то можна застосувати до аналізу наближених розв'язків рівняння (25) методи повільно змінних амплітуд, послідовних наближень, обмеження на градієнт зміщення [15, 22 – 26]. У цьому випадку рівняння (25) спрощується до вигляду лінійного хвильового рівняння з нелінійною змінною швидкістю гармонічної за часом хвилі $u_g(r, z, t) = \tilde{u}_g(r, z)e^{i\omega t}$

$$\left\{ \left[\mu - (1/2)B \right] \left[(u_{g,r})^2 + \frac{1}{r} u_{g,r} u_g + \frac{2}{r^2} u_g^2 + (u_{g,z})^2 \right] \right\} \times$$

$$\times \left(u_{g,rr} + (1/r) u_{g,r} - (1/r^2) u_g + u_{g,zz} \right) - \rho u_{g,tt} = 0$$

або

$$\left\{ (v_T)^2 \left[1 - (1/2)B/\mu \right] \left[(\tilde{u}_{g,r})^2 + \frac{1}{r} \tilde{u}_{g,r} \tilde{u}_g + \frac{2}{r^2} \tilde{u}_g^2 + (\tilde{u}_{g,z})^2 \right] \right\} \times$$

$$\times \left(\tilde{u}_{g,rr} + (1/r) \tilde{u}_{g,r} - (1/r^2) \tilde{u}_g + \omega^2 \tilde{u}_g + \tilde{u}_{g,zz} \right) = 0.$$

3. Новий наближений метод побудови розв'язку нелінійного рівняння (5).

Цьому методу присвячена публікація [4], де було вибрано найпростіший варіант рівняння (5)

$$\mu \left[Lu_g \equiv \left(u_{g,rr} + (1/r) u_{g,r} - (1/r^2) u_g + u_{g,zz} \right) \right] - \rho u_{g,tt} =$$

$$= \left[Lu_g (1/2) B \left[(u_{g,1})^2 + \frac{1}{r} u_{g,1} u_g + \frac{2}{r^2} u_g^2 + (u_{g,3})^2 \right] \right]$$

або

$$(c_T)^2 \left\{ 1 - \frac{B}{2\mu} \left[(u_{g,r})^2 + \frac{1}{r} u_{g,r} u_g + \frac{2}{r^2} u_g^2 + (u_{g,z})^2 \right] \right\} \times$$

$$\times \left[u_{g,rr} + (1/r) u_{g,r} - (1/r^2) u_g + u_{g,zz} \right] - u_{g,tt} = 0.$$

Розв'язок рівняння (28) представляється у вигляді хвилі з невідомим хвильовим числом і невідомою амплітудою

$$u_g(r, z, t) = \tilde{u}_g(r) e^{i(k_z z - \omega t)}. \quad (29)$$

В результаті нелінійне хвильове рівняння (28) перетворюється на якби лінійне рівняння зі змінною швидкістю хвилі v_K

$$(v_K)^2 \left[u_{g,rr} + (1/r) u_{g,r} + \left((k_z)^2 - (1/r^2) \right) u_g \right] - \omega^2 u_g = 0$$

або

$$u_{g,rr} + (1/r) u_{g,r} + \left((k_z)^2 - (k_K)^2 - (1/r^2) \right) u_g = 0, \quad (30)$$

де

$$k_K = (\omega/v_K); \quad v_K = c_T \sqrt{1 - \frac{B}{2\mu} \left[(u_{g,r})^2 + \frac{1}{r} u_{g,r} u_g + \frac{2}{r^2} u_g^2 + (u_{g,z})^2 \right]}. \quad (31)$$

Примітка 5. Раніше [22 – 26] автори застосовували до нелінійного хвильового рівняння типу (30)

$$u_{1,rr} - \left\{ (v_L)^2 + (N_1/\rho) u_{1,1} \right\} u_{1,11} = 0 \quad (32)$$

щодо плоскої поздовжньої хвилі метод обмеження на градієнт зміщення. Згідно з цим методом, рівняння (31) далі перетворювалось у якби лінійне рівняння $u_{1,rr} - v^2 u_{1,11} = 0$ зі змінною швидкістю хвилі $v = \sqrt{1 + \alpha u_{1,1}} v_L$, $\alpha = [N_1/(\lambda + 2\mu)]$. Далі накладалося обмеження на невелику зміну швидкості

$$\alpha u_{1,1} \ll 1 \quad (33)$$

(на невелику зміну градієнта зміщення). Метод отримав назву методу обмеження на градієнт зміщення.

За новим методом потрібно ввести обмеження на змінну швидкість (31)

$$\frac{B}{2\mu} M(u_g) \ll 1, \quad M(u_g) = \left[(u_{g,r})^2 + \frac{1}{r} u_{g,r} u_g + \frac{2}{r^2} u_g^2 + (u_{g,z})^2 \right]. \quad (34)$$

Примітка 6. Зважаючи на порядок множника перед $M(u_g)$, обмеження (34) включає обмеження на пройдений хвилею шлях від поверхні циліндра до центру циліндра, зміщення і два компоненти градієнта зміщення. Тому новий метод можна б назвати методом обмеження на змінну швидкість хвилі – зміна повинна бути малою порівняно з одиницею. Оскільки обмежуються добутки, то умова (34) є дуже відмінною від умови (33). Наприклад, умова на квадрат градієнта є значно слабшою умови на сам градієнт (величина градієнта 10^{-2} і величина його квадрату 10^{-4}). Звичайно величина зміщення в конструкційних пружних матеріалах 10^{-4} і тоді, відповідно, його квадрату 10^{-8} . Отже, в реальних числових розрахунках кожен з чотирьох доданків в $M(u_g)$ повинен оцінюватися окремо.

Наступний крок у методі полягає в використанні розв'язку (29) і його формальному записі через функцію Бесселя

$$u_g(r, z, t) = \tilde{u}^o J_1(\beta_K r) e^{i(k_z z - \omega t)}; \quad \beta_K = \sqrt{k_K^2 - k_z^2}. \quad (35)$$

Зазначимо, що особливістю наближеного представлення хвилі (35) є те, що воно вже включає постійну швидкість хвилі $c_z = (\omega/k_z)$, яка відповідає лінійному наближенню, але швидкість хвилі залежить від невідомого зміщення, його похідних і пройденої хвилею відстані в перетині циліндра.

Далі метод використовує ще одне обмеження

$$\delta = r \frac{Bk_z^2}{4\mu} M(u_g) \quad (36)$$

і наближене представлення функції Бесселя $J_1(\sqrt{k_k^2 - k_z^2}r)$, в результаті чого з (35) отримується наближений розв'язок в такому вигляді:

$$\tilde{u}(r) = \tilde{u}_g^o J_1\left(r\sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) - r\tilde{u}_g^o \frac{Bk_T^2}{8\mu} M(u_g) \left[J_0\left(r\sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) - J_2\left(r\sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) \right]. \quad (37)$$

Нарешті, в (37) дещо перетворюється вираз $M(u_g)$ і остаточно представлення розв'язку у вигляді двох наближень – лінійного (першого) і другого (певної нелінійної добавки) – має вигляд

$$\begin{aligned} u_g(r, z, t) = & \tilde{u}_g^o e^{i(k_z z - \omega t)} \left\{ J_1\left(r\sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) - \right. \\ & - r\left(\tilde{u}_g^o\right)^3 \frac{Bk_T^2}{8\mu} \left[r^2\left(k_T^2 - k_z^2\right) + r\sqrt{k_T^2 - k_z^2} + 2 - (k_z)^2 \right] \times \\ & \left. \times \left[J_0\left(r\sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) - J_2\left(r\sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) \right] \left[J_1\left(r\sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) \right]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (38)$$

Звичайно, в наближеному аналізі плоских та циліндричних хвиль друге наближення вносить спотворення в початковий профіль хвилі, тому що вплив нелінійної добавки збільшується зі збільшенням відстані, яку проходить хвиля. В проведеному аналізі крутильної хвилі це не так. Тут відбуваються два види спотворення. Одне показує еволюцію хвилі при зміні відстані від центру до поверхні циліндра (добавка містить як множник). Друге спотворення пов'язане з тим, що на поверхні циліндра лінійна гармонічна хвиля (перша гармоніка) отримує постійну добавку у вигляді третьої гармоніки, тобто, хвиля спотворюється до вигляду модульованої хвилі, але ця добавка не змінюється з відстанню поширення хвилі в осьовому напрямку. Можна вважати, що реалізований наближений підхід не описує еволюцію хвилі, а лише одно-моментно переводить гармонічну хвилю у модульовану хвилю. Поступового переходу першої гармоніки у третю цей підхід не описує.

4. Граничні умови в нелінійній задачі про крутильні хвилі.

Як і в лінійній задачі, тут хвильове число k_z і швидкість хвилі $v_z = (\omega/k_z)$ визначаються з умови відсутності напружень на бічній поверхні циліндра $r = r^o$

$$\sigma_{rr}(r^o, z, t) = \sigma_{rg}(r^o, z, t) = \sigma_{rz}(r^o, z, t) = 0. \quad (39)$$

Далі слід вираховувати напруження з (39) через деформації і далі зміщення. Формула для нормального напруження σ_{rr} через зміщення не показана нижче з тих міркувань, що в ній немає доданків першого порядку (лінійних доданків) але є доданки другого і четвертого порядків. Формули для дотичних напружень є такими:

$$\begin{aligned} \sigma_{rg} = & \mu \left(u_{g,1} + \frac{u_g}{r} \right) + \left(\frac{1}{12} A + \frac{1}{2} B \right) (u_{g,r})^3 - \\ & - \left(\frac{1}{4} A - B \right) \frac{u_g}{r} (u_{g,z})^2 + \frac{1}{2} B \left[u_{g,r} (u_{g,z})^2 + \frac{u_g}{r} (u_{g,r})^2 \right] \end{aligned} \quad (40)$$

(формула (40) включає лінійну частину, яка відповідає лінійному класичному підходу, і чотири доданки, які є кубічно нелінійними)

$$\sigma_{rz} = \left(2\mu + \frac{1}{12}A \right) u_{g,r} u_{g,z} + \left(2\mu - \frac{1}{12}A \right) \frac{1}{r} u_g u_{g,z} - \frac{1}{6}A \left(\frac{1}{r^2} (u_g)^2 u_{g,r} u_{g,z} - \frac{1}{r^3} (u_g)^3 u_{g,z} \right) + \frac{1}{2}B \left[\left((u_{g,r})^3 u_{g,z} - \frac{1}{r} u_g u_{g,z} (u_{g,r})^2 \right) + \left(u_{g,r} (u_{g,z})^3 - \frac{1}{r} u_g (u_{g,z})^3 \right) \right].$$

Це напруження включає два доданки другого порядку нелінійності та шість доданків четвертого порядку.

Отже, всі три напруження на поверхні циліндра включають нелінійні доданки і не можуть прирівнюватись до нуля, оскільки у такому випадку для знаходження однієї невідомої величини – хвильового числа – задаються три рівняння. Тоді задача стає переозначеною. Виникає питання загального порядку про перехід від лінійної задачі до спорідненої з нею нелінійної. У лінійній постановці вийшло вдало, бо два напруження з граничних умов є нульовими завжди і всюди (не лише на граничній поверхні циліндра). Характерне для багатьох задач збереження граничних умов при переході від лінійної постановки до нелінійної у задачі про нелінійні крутильні хвилі не виглядає коректним.

Тому раціонально зберегти в граничних умовах нелінійної задачі одну граничну умову щодо дотичного напруження $\sigma_{r,g}$, характерного для крутильної хвилі. Саме воно у лінійній постановці трансформується в трансцендентне рівняння для знаходження хвильового числа. Щодо нормального напруження та дотичного напруження на поверхні циліндра в нелінійній постановці треба вважати, що вони не будуть нульовими і можуть бути враховані при відомому хвильовому числі.

Оскільки функції Бесселя вбудовані в більшість комп'ютерних пакетів (наприклад, в Mathematica), то ускладнень з комп'ютерним аналізом еволюції крутильної хвилі не передбачається. Однак, достовірність наближеного представлення (20) регулюється певними обмеженнями – перш за все, це обмеження на профіль хвилі (відношення максимальної амплітуди до довжини хвилі) та на відстань поширення хвилі; крім того, в обмеження входять вибір початкового амплітудного множника, частоти хвилі і матеріалу. Практика комп'ютерного аналізу еволюції хвилі [22] показує, що такий аналіз вносить корективи в розуміння обмежень в наближеному аналізі хвилі.

Загальні висновки.

Більш повно описана процедура отримання нового нелінійного хвильового рівняння стосовно крутильної хвилі зміщення, яке стисло описане в недавній публікації одного з авторів цієї статті. За допомогою інструментів нелінійної теорії пружності виведені два варіанти нелінійного хвильового рівняння (повне і вкорочене), що описує поширення крутильних хвиль в круговому циліндрі вздовж його осі симетрії. Отримані рівняння мають класичну лінійну частину, є кубічно нелінійними та мають ряд особливостей. Цікаво, що вкорочене рівняння включає лише одну з трьох пружних констант Мернагана і обидва рівняння не враховують вплив третього інваріанта тензора деформацій. Проаналізовано наближено вкорочене рівняння, для чого узагальнено метод обмеження на градієнт зміщення. Метод обмежує зміну швидкості крутильної хвилі і містить не лише обмеження на градієнт зміщення. Особливість методу полягає у врахуванні нелінійності в записі амплітуди хвилі. При переході до нелінійної постановки задачі спостережено нестандартну ситуацію з використанням граничних умов, яку прокоментовано. Також спостережено чутливість амплітуди хвилі на поверхні циліндра від радіуса циліндра, яка теж прокоментована. Тут існує можливість нульової амплітуди на поверхні циліндра і піків амплітуд всередині циліндра, що спричинено особливістю графіка функції Бесселя.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано у цій статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Теоретично в рамках п'ятиконстантної моделі Мернагана проаналізовано пружну крутильну хвилю як один з типів пружних циліндричних хвиль. Цей аналіз використовує інструменти нелінійної теорії хвиль. Отримано два варіанти нових нелінійних хвильових рівнянь, які містять крім лінійних лише кубічно нелінійні доданки. Відмінність між варіантами полягає у різному врахуванні нелінійних доданків у хвильовому рівнянні. Проаналізовано простіший варіант і вивчена теоретично і чисельно еволюція крутильних хвиль. Особлива увага приділена граничним умовам та класичному для крутильних хвиль трансцендентному рівнянню.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: нелінійно пружна крутильна хвиля, п'ятиконстантний потенціал Мернагана, нове нелінійне рівняння в зміщеннях, граничні умови, наближений підхід, еволюція з часом і відстанню.

1. *Бабич В.М., Киселев А.П.* Упругие волны. Высокочастотная теория. – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2014. – 320 с.
2. *Гузь А.* Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями: в 2-х частях. Ч. 1. Общие вопросы. Волны в бесконечных телах и поверхностные волны. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. – 501 с.
3. *Гузь А.* Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями: в 2-х частях. Ч. 2. Волны в частичноограниченных телах. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. – 505 с.
4. *Руцицький Я.Я.* Пружна крутильна хвиля і відповідне нове нелінійне хвильове рівняння // Доп. НАН України. – 2022. – № 2. – С. 54 – 63.
5. *Achenbach I.D.* Wave Propagation in Elastic Solids. – Amsterdam: North Holland, 1973. – 436p.
6. *Altayeb Y.* New scenario of decay rate for system of three nonlinear wave equations with visco-elasticities // AIMS Mathematics. (Special Issue: New trends in mathematical analysis of solitary wave solutions to nonlinear partial differential equations (including fractional PDE)). – 2021. – 6, N 7. – P. 7251 – 7265.
7. *Altenbach H., Eremeyev V.A., Pavlov I.S., Porubov A.V.* Nonlinear Wave Dynamics of Materials and Structures. – Cham: Springer, 2020. – 681 p.
8. *Andrianov I.V., Awrejcewicz J., Danishevskyy V.* Linear and Nonlinear Waves in Microstructured Solids: Homogenization and Asymptotic Approaches. – Boca Raton: CRC Press, 2021. – 250 p.
9. *Arbab I.A.* A New Wave Equation of the Electron // J. Modern Physics. – 2011. – 2, N 9. – P. 1012 – 1016.
10. *Bedford A., Drumheller D.* Introduction to Elastic Wave Propagation. – New York: John Wiley, 1994. – 300 p.
11. *Cox G.A., Livermore P.W., Mound J.E.* The observational signature of modelled torsional waves and comparison to geomagnetic jerks // Physics of the Earth and Planetary Interiors. – 2016. – 255. – P. 50 – 65.
12. *Du X., Fletcher R.P., Fowler P.J.* A New Pseudo-acoustic Wave Equation for VTI Media // Conf. Proc., 70th EAGE Conf. and Exhibition incorporating SPE EUROPEC 2008. (Jun 2008). – cp-40-00234.
13. *Engelbrecht J.* Questions about Elastic Waves. – Berlin: Springer, 2015. – 148 p.
14. *Farahani S.V., Ghanbari E., Ghaffari G., Safari H.* Torsional wave propagation in solar tornadoes // Astronomy and Astrophysics. – 2017. – 599, N A19. – P. 1 – 6.
15. *Guz I.A., Rushchitsky J.J.* Comparing the Evolution Characteristics of Waves in Nonlinearly Elastic Micro- and Nanocomposites with Carbon Fillers // Int. Appl. Mech. – 2004. – 40, N 7. – P. 785 – 793.
16. *Haug E.G.* Deeper insight on Existing and New Wave Equations in Quantum Mechanics // Norwegian University of Life Sciences, Norway. – 2020. – 9 p. <https://vixra.org>
17. *Hetnarski R., Ignaczak J.* Mathematical Theory of Elasticity. 2nd ed. – Boca Raton: CRC Press 2018. – 837 p.
18. *Lempriere B.* Ultrasound and Elastic Waves: Frequently Asked Questions. – New York: Academic Press, 2002. – 154 p.

19. *Murnaghan F.* Finite Deformation in an Elastic Solid. 3rd ed. Gloucester. – MA, USA: Peter Smith Publisher Inc, 1985. – 140 p.
20. *Nowacki W.* Theory of Elasticity. – Warszawa: PWN, 1970. – 780 p.
21. *Rushchitsky J.J.* Certain class of nonlinear hyperelastic waves: classical and novel models, wave equations, wave effects // *Int. J. Appl. Math. Mech.* – 2012. – **8**, N 6. – P. 400 – 443.
22. *Rushchitsky J.J.* Nonlinear Elastic Waves in Materials. – Heidelberg: Springer, 2014. – 455 p.
23. *Rushchitsky J.J.* Plane Nonlinear Elastic Waves: Approximate Approaches to Analysis of Evolution. Chapter in the book “Understanding Plane Waves” Ed. Cooper W.A. – London: Nova Science Publishers, 2019. – 300 p. – P. 201 – 220.
24. *Rushchitsky J.J.* Foundations of Mechanics of Materials. – Copenhagen: Ventus Publishing ApS, 2021. – 276 p.
25. *Rushchitsky J.J.* Scenarios of Evolution of Some Types of Simple Waves in Nonlinear Elastic Materials // *Archive of Appl. Mech.* – 2021. – **91**, N 7. – P. 3151 – 3170.
26. *Rushchitsky J.J., Yurchuk V.M.* Effect of the Third Approximation in the Analysis of the Evolution of a Nonlinear Elastic P-wave. Part 2 // *Int. Appl. Mech.* – 2020. – **56**, N6. – P. 666 – 673.
27. *Shu H., Dong L., Li S., Liu W., Liu S., Wang W., Shi D., Zhao D.* Propagation of torsional waves in a thin circular plate of generalized phononic crystals // *J. Phys. D: Appl. Phys.* – 2014. – **47**. – P. 295501 – 295512.
28. *Tomar S., Kaur N.* Role of sliding contact interface on torsional waves // *The Mathematics Student.* – 2019. – **88**, N 3 – 4. – P. 171 – 177.
29. *Torres J., Faris I.H., Callejas A., Reyes-Ortega F., Melchor J., Gonzalez-Andrades M., Rus G.* Torsional wave elastography to assess the mechanical properties of the cornea // *Nature. Scientific Reports.* – 2022. – **12**, N 8354. – P. 1 – 11.
30. *Ueda H.* A new example of the dissipative wave equations with the total energy decay // *Hiroshima Math. J.* – 2016. – **46**, N 2. – P. 187 – 193.
31. *Vasheghani Farahani S., Ghanbari E., Ghaffari G., Safari H.* Torsional wave propagation in solar tornadoes // *Astronomy and Astrophysics.* – 2017. – **599**, N A19. – P. 7 – 12.
32. *Wu Z., Alkhalifah T.* A New Wave Equation Based Source Location Method with Full-waveform Inversion // *Conference Proc., 79th EAGE Conf. and Exhibition 2017.* (Jun 2017). – P. 1 – 5.
33. *Yang J., Zhu H.* A new time-domain wave equation for viscoacoustic modeling and imaging // *Proc. of the 2018 SEG Int. Exposition and Annual Meeting, Anaheim.* (California, USA, October 2018). – Paper Number: SEG-2018-2974332.
34. *Zakia Tebba, Boulaaras, Salah Degaichia, Hakima Allahem, Ali.* Existence and blow-up of a new class of nonlinear damped wave equation // *J. Intelligent and Fuzzy Systems. “Mathematical Modelling in Computational and Life Sciences”.* – 2020. – **38**, N 3 – P. 2649 – 2660.

Надійшла 28.12.2022

Затверджена до друку 27.06.2023