

П.З.Луговий¹, В.В.Гайдайчук²,
С.П.Орленко¹, К.Е.Котенко²

**ЗОСЕРЕДЖЕНИЙ УДАР ПО ВЕРШИНІ
ТРИШАРОВОЇ НАПІВСФЕРИНОЇ ОБОЛОНКИ
З НЕСИМЕТРИЧНОЮ КОНСТРУКЦІЄЮ ЗА ТОВЩИНОЮ**

¹Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
вул. Нестерова, 3, 03057, м. Київ, Україна; e-mail: plugovyy@inmtech.kiev.ua

²Київський національний університет будівництва і архітектури,
просп. Повітрофлотський, 31, 03037, м. Київ, Україна;
e-mail: viktor_gaydaychuk@ukr.net

Abstract. The dynamics of an asymmetric three-layer hemispherical shell with a discrete-symmetric lightweight rib-reinforced structure under a concentrated impact on its top is studied. In an analysis of the elements of elastic structure, the Timoshenko model of the theory of shells and rods is used under independent static and kinematic hypotheses for each layer. According to the Hamilton-Ostrogradsky variational principle, the equations of motion are obtained. An appropriate finite element model of the shell was created, which reflects the relationship between the potential energy of deformations in the shell and the potential of applied forces. The numerical results of studying the dynamics of a three-layer elastic structure with asymmetric thickness are obtained using the finite element method. The effect of the geometrical and physical-mechanical parameters of the asymmetric layers of the shell on its dynamic behavior during a concentrated impact on its top is studied and new mechanical effects are discovered.

Key words: dynamics, asymmetric three-layer hemispherical shell, discrete-symmetric lightweight structure, reinforcing rib, concentrated impact, stress-strain state, mechanical effects.

Вступ.

Шаруваті конструкції мають ряд суттєвих переваг у порівнянні з однорідними й тому широко застосовуються в різних галузях машинобудування, будівництва і спецтехніки. Їх використання дає можливість зменшити матеріалоємність конструкцій нової техніки при одночасному покращенні функціональних характеристик і підвищенні їх надійності. Розрахунок параметрів динамічного відгуку при ударному навантаженні є важливим напрямком дослідження коливань шаруватих конструкцій.

Питання динамічної поведінки несиметричних тришарових сферичних оболонок при нестационарних навантаженнях вивчені недостатньо. В даний час розробка сучасних технологій, об'єктів спеціального призначення та ін. часто призводить до необхідності створення шаруватих конструктивних оболонкових елементів з заповнювачем ускладненої геометричної структури. За своїми властивостями і конструкцією тришарові сферичні оболонки поділяються на симетричні і несиметричні. Динамічні процеси в симетричних тришарових сферичних оболонках досліджені традиційними методами математичної фізики та чисельного аналізу порівняно докладно [1, 2, 8, 10, 16, 17, 19 – 21, 23, 24]. Досить розповсюджене застосування в техніці знайшли тришарові сферичні конструкції з неоднорідним заповнювачем різної структури. Початок

дослідженню динаміки симетричних тришарових оболонок обертання з дискретно-симетричним заповнювачем було покладено в роботах [15, 18, 22] і продовжується в наш час [2, 3, 13] за допомогою скінченно-різницевого і скінченно-елементних методів [2, 12, 14]. Динамічна поведінка тришарових сферичних оболонок з несиметричною структурою пакету шарів вивчена недостатньо [5, 7]. Разом з тим, такі оболонки часто є відповідальними елементами конструкцій і їх дослідження має теоретичний і практичний інтерес.

В даній роботі розглядаються несиметричні тришарові напівсферичні оболонки з дискретно-симетричним легким армованим ребрами заповнювачем. Несиметрія цих оболонок зумовлена тим, що їх несучі шари виготовлені з різних матеріалів. Армуючі ребра розташовані по лініях головних кривизн і з'єднують несучі шари. Відстані між армуючими ребрами значно більші від розмірів їх поперечних перетинів. В такому випадку доцільно застосовувати теорії шаруватих оболонок з використанням незалежних гіпотез для кожного із шарів [2, 7]. Такий підхід підвищує загальний порядок системи рівнянь, але дозволяє детальніше вивчити динамічну поведінку несиметричної тришарової структури при вимушених динамічних навантаженнях. Властивості легкого заповнювача, розташованого між несучими шарами і армуючими ребрами, суттєво відрізняються від властивостей несучих шарів, що значно ускладнює задачу. Тому доцільно застосовувати скінченно-елементний метод до тіл, складених з декількох матеріалів [2, 12, 14].

Для розв'язання задачі використано модель Тимошенка оболонок і стержнів із застосуванням незалежних статичних і кінематичних гіпотез до кожного шару. Для виведення рівнянь коливань несиметричної тришарової неоднорідної за товщиною структури використовується варіаційний принцип стаціонарності Гамільтона – Остроградського. Це дозволяє створити адекватну скінченно-елементну модель для проведення числового аналізу впливу несиметрії тришарових сферичних оболонок з дискретно-симетричним легким армованим ребрами заповнювачем на їх динамічну поведінку. Наведено числові результати розв'язування конкретної задачі про зосереджений удар по вершині тришарової напівсферичної оболонки з несиметричною конструкцією за товщиною і виявлено нові механічні ефекти.

§1. Постановка задачі. Основні рівняння.

Тришарова напівсферична оболонка з легким заповнювачем, армованим дискретно симетричними ребрами, являє собою пружну структуру, яка складається з внутрішнього (індекс 1), зовнішнього (індекс 2) несучих шарів, легкого заповнювача (індекс t) і набору дискретних ребер (індекс j), жорстко з'єднаних з несучими шарами. Несучі шари напівсферичної оболонки виготовлено з різних матеріалів. Оболонка має постійну загальну товщину h і віднесена до координат α, z . Координатна лінія $R\alpha$ на серединній поверхні оболонки при $z=0$ збігається з твірною лінією; координатна лінія z є прямою, ортогональною до серединних поверхонь. Вважатимемо величину z додатною, якщо точка перебуває з боку опуклості серединної поверхні. Оболонки жорстко з'єднані між собою дискретними ребрами і легким заповнювачем. Вид деформованого стану внутрішнього і зовнішнього несучих шарів може бути визначений через компоненти узагальненого вектора переміщень $\overline{U}_1 = (u_s^1, u_3^1, \varphi_1^1)^T$ і $\overline{U}_2 = (u_s^2, u_3^2, \varphi_1^2)^T$ [6]. Поля переміщень для легкого ребристого заповнювача визначаються узагальненим вектором переміщення $\overline{U}_t = (u_s^t, u_3^t, \varphi_1^t)^T$ згідно з моделлю, запропонованою в [9]. Коефіцієнти першої квадратичної форми і кривизни координатної поверхні несучих шарів записуються наступним чином: $A_1 = A_2 = R_i$; $k_1 = k_2 = 1/R_i$.

Деформований стан армуючого ребра, спрямованого вздовж колової координати, визначаються узагальненим вектором переміщень $\overline{U}_j = (u_1^j, u_3^j, \varphi_1^j)^T$. Виходячи з припущень жорсткого з'єднання армуючих ребер із сферичними несучими шарами, записуються умови контакту центрів ваги ребер з несучими шарами [15, 18, 22]

$$u_1^j = u_1^{jk}(s_j) \mp \frac{H_j}{2} \varphi_1^{jk}(s_j); \quad u_3^j = u_3^{jk}(s_j); \quad \varphi_1^j = \varphi_1^{jk}(s_j) \quad (k = 1, 2), \quad (1.1)$$

де $s_j = R\alpha_j$ – координата лінії множин точок проєкцій центрів тяжіння поперечних перерізів j -го ребра на відповідну серединну поверхню несучого шару; $h_i = H_j$ – товщина легкого заповнювача. При цьому: $h_j^i = 0,5h_i + H_i/2$, $h_i (i=1, 2)$ – товщини сферичних несучих шарів; $H_i/2$ – відстань від осі j -го ребра до поверхні гладких оболонок.

На основі теорії деформації зсуву в оболонках [6] переміщення u_1^i і u_3^i в несучих шарах в напрямку α (поздовжній), z (товщина) і t (час) при малих лінійних переміщеннях виражаються через наступні залежності:

$$\begin{aligned} u_1^i(s, z, t) &= u_0^i(s, t) + z_t \varphi_1^i(s, t); \\ u_3^i(s, z, t) &= u_{03}^i(s, t) \quad (i = 1, 2), \end{aligned} \quad (1.2)$$

де φ_1^i – кут повороту нормалі до серединної поверхні несучих шарів.

При цьому зв'язок деформацій і переміщень визначається із співвідношення для несучих шарів і j -го ребра:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^i &= \frac{\partial u_0^i}{\partial s_i} + \frac{u_{03}^i}{R_i}; \quad \varepsilon_{22}^i = \frac{u_0^i}{R_i} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{u_{03}^i}{R_i}; \quad \varepsilon_{13}^i = \varphi_1^i; \\ \kappa_{11}^i &= \frac{\partial \varphi_1^i}{\partial s_i}; \quad \kappa_{22}^i = \frac{\varphi_1^i}{R_i} \operatorname{ctg} \alpha; \quad \varepsilon_{22j} = \frac{u_{3j}}{R_j}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Вирази для переміщень легкого заповнювача записуються згідно з моделлю [9]:

$$\begin{aligned} u_1^t(s, z, t) &= \left(1 + \frac{z_t}{R_t}\right) u_0^t(s, t) + z_t u_1^t(s, t); \\ u_3^t(s, z, t) &= u_{03}^t(s, t). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Кінематичні залежності для заповнювача прийняті з врахуванням малості деформацій:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^t &= \frac{1}{(1 + z_t / R_t)} \left(\frac{\partial u_0^t}{\partial s} + \frac{u_{03}^t}{R_t} \right); \quad \varepsilon_{22}^t = \frac{u_3^t}{R_t + z_t}; \\ 2\varepsilon_{13}^t &= \frac{1}{(1 + z_t / R_t)} \left(\frac{\partial u_{03}^t}{\partial s} - \frac{u_0^t}{R_t} \right) + u_1^t. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Умови сумісності, які передбачають ідеальне сполучення між заповнювачем і несучими шарами без відриву і проковзування, представимо в наступному вигляді [11]:

$$\begin{cases} u_1^t(z = z_t^1) = u_0^i + \frac{1}{2}(-1)^k h_i \varphi_1^i & \text{для } i = 1 \rightarrow (k = 0; z_t^1 = -h_i/2); \\ u_{03}^t = u_{03}^i & \text{для } i = 2 \rightarrow (k = 1; z_t^2 = h_i/2). \end{cases} \quad (1.6)$$

Використовуючи вирази для поля переміщень для несучих шарів (1.1), легкого заповнювача (1.3) і умов міжшарової неперервності переміщень (1.5), виведемо спрощені умови сумісності

$$\begin{aligned}
u_0^t &= \frac{u_0^1 + u_0^2}{2} - \frac{1}{4}(h_2\varphi_1^2 - h_1\varphi_1^1); \\
u_1^t &= \frac{u_0^1 - u_0^2}{h_t} - \frac{1}{2h_t}(h_2\varphi_1^2 + h_1\varphi_1^1); \\
u_{03}^t &= \frac{1}{2}(u_{03}^1 + u_{03}^2).
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Рівняння руху для несучих шарів, ребер і легкого заповнювача виводяться згідно варіаційного принципу стаціонарності Гамільтона – Остроградського, який можна записати наступним чином

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (K - \Pi + A) dt = 0, \tag{1.8}$$

де Π – повна потенціальна енергія пружної системи; K – повна кінетична енергія пружної системи; A – робота зовнішніх сил; t_1 і t_2 – фіксовані моменти часу. При виведенні рівнянь коливань тришарових оболонок з легким заповнювачем незалежному варіюванню підлягають: компоненти переміщень несучих шарів, армуючих ребер і заповнювача з легкого матеріалу.

Вирази для варіацій повної потенціальної і кінетичної енергії вказаних компонентів записуються у вигляді:

$$\delta \Pi = \delta \sum_{i=1}^2 \Pi^i + \delta \sum_{j=1}^J \Pi^j + \delta \sum_{S_i} \Pi^t; \quad \delta K = \delta \sum_{i=1}^2 K^i + \delta \sum_{j=1}^J K^j + \delta \sum_{S_i} K^t; \tag{1.9}$$

де

$$\delta \Pi^i = \int_{S_i} \left[\int_{-h/2}^{h/2} \left(T_{11}^i \delta \varepsilon_{11}^i + T_{22}^i \delta \varepsilon_{22}^i + T_{13}^i \delta \varepsilon_{13}^i + M_{11}^i \delta \kappa_{11}^i + M_{22}^i \delta \kappa_{22}^i \right) dz_i \right] dS_i; \tag{1.10}$$

$$\delta \Pi^t = \int_{S_i} \left[\int_{-h_t/2}^{h_t/2} \left(T_{11}^t \delta \varepsilon_{11}^t + T_{22}^t \delta \varepsilon_{22}^t + T_{13}^t \delta \varepsilon_{13}^t + M_{11}^t \delta \kappa_{11}^t + M_{22}^t \delta \kappa_{22}^t \right) dz_t \right] dS_i; \tag{1.11}$$

$$\delta \Pi^j = \int_{L_j} \left(T_{11j} \delta \varepsilon_{11j} + T_{22j} \delta \varepsilon_{22j} + T_{13j} \delta \varepsilon_{13j} + M_{11j} \delta \kappa_{11j} \right) dL_j; \tag{1.12}$$

$$\delta K^i = \int_{S_i} \left\{ \int_{-h_i/2}^{h_i/2} \left[\rho_i h_i \left(\frac{\partial^2 u_1^i}{\partial t^2} \delta u_1^i + \frac{\partial^2 u_{03}^i}{\partial t^2} \delta u_3^i \right) + \rho_i \frac{h_i^3}{12} \left(\frac{\partial^2 \varphi_1^i}{\partial t^2} \delta \varphi_1^i \right) \right] dz_i \right\} dS_i; \tag{1.13}$$

$$\delta K^t = \int_{S_i} \left[\int_{-h_t/2}^{h_t/2} \rho_t h_t \left(\frac{\partial^2 u_0^t}{\partial t^2} \delta u_0^t + \frac{\partial^2 u_1^t}{\partial t^2} \delta u_1^t + \frac{h_t^2}{12} \frac{\partial^2 u_{03}^t}{\partial t^2} \delta u_{03}^t \right) dz_t \right] dS_i; \tag{1.14}$$

$$\delta K^j = \int_{L_j} \left[\rho_j F_j \left(\frac{\partial^2 u_1^j}{\partial t^2} \delta u_1^j + \frac{\partial^2 u_3^j}{\partial t^2} \delta u_3^j \right) + \rho_j \left(I_{kj} \frac{\partial^2 \varphi_1^j}{\partial t^2} \delta \varphi_1^j \right) \right] dL_j. \tag{1.15}$$

В рівняннях (1.10) – (1.15) величини F_j , I_{krj} відповідають геометричним характеристикам поперечних армуючих ребер; ρ_j – густина матеріалу армуючого ребра; ρ_i , ρ_t – густини матеріалів несучих шарів і легкого заповнювача, відповідно.

Вважається, що тришарова напівсферична структура навантажена зовнішнім зосередженим ударом по її вершині паралельно її осі $P_1(s, t)$, де s і t – просторова і часова координати.

Слід зазначити, що при розрахунку потенціальної і кінетичної енергії для легкого заповнювача в виразах $\delta\Pi'$ та $\delta K'$ інтегрування проводиться за об'ємом, величина якого збільшена на величину вмісту армуючих ребер. Але цей факт практично не впливає на загальну похибку теорії оболонок, оскільки обсяг армуючих ребер в складі об'єму легкого заповнювача для тришарових оболонок обертання менше 5%.

Після стандартних перетворень в варіаційному рівнянні (1.8), з урахуванням співвідношень (1.10) – (1.15), отримаємо систему гіперболічних рівнянь руху 9-го порядку для тришарової сферичної оболонки з легким заповнювачем армованим дискретними ребрами при осесиметричному імпульсному навантаженні і відповідні граничні та початкові умови:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial s_i} (\sin \alpha T_{11}^i) - \frac{1}{R_i} (\operatorname{ctg} \alpha T_{22}^i - T_{13}^i) - \frac{4}{h_i^2} M_{13}^i &= (\rho_i h_i + \frac{\rho_t h_t}{3}) \frac{\partial^2 u_1^i}{\partial t^2}; \\ \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial s_i} (\sin \alpha T_{13}^i) - \frac{1}{R_i} (T_{11}^i + T_{22}^i) - \frac{1}{R_i h_i} (M_{11}^i + M_{22}^i) + P_1 &= \rho_i h_i \frac{\partial^2 u_3^i}{\partial t^2}; \\ \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial s_i} (\sin \alpha M_{11}^i) - \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{R_i} M_{22}^i - T_{13}^i &= \frac{\rho_i h_i^3}{12} \frac{\partial^2 \phi_1^i}{\partial t^2} \quad (i = 1, 2); \\ \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial s_t} (\sin \alpha T_{11}^t) + \frac{1}{R_t} (T_{11}^t - T_{13}^t) + \frac{8}{h_t^2} M_{13}^t &= \rho_t h_t \frac{\partial^2 u_0^t}{\partial t^2}; \\ \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial s_t} (\sin \alpha M_{11}^t) - T_{13}^t + \frac{1}{R_{t1}} M_{13}^t &= \rho_t h_t \frac{\partial^2 u_1^t}{\partial t^2}; \\ \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial s_t} (\sin \alpha T_{13}^t) - \frac{1}{R_t} (T_{11}^t + T_{22}^t) &= \rho_t h_t \frac{\partial^2 u_{03}^t}{\partial t^2}; \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$\left[T_{11}^{i\pm} \right]_j = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{1j}}{\partial t^2}; \quad \left[T_{13}^{i\pm} \right]_j = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial t^2}; \quad \left[M_{11}^{i\pm} \right]_j = \rho_j I_{krj} \frac{\partial^2 \phi_{1j}}{\partial t^2}.$$

Ці рівняння коливань несиметричних тришарових пружних структур описуються двома системами гіперболічних рівнянь дев'ятого порядку, які утворюються за рахунок врахування розривних коефіцієнтів «несучі шари-армуючі елементи», «несучі шари, виготовлені з різних матеріалів».

На лініях розривів в рівняннях коливань (1.16) $\left[T_{11}^{i\pm} \right]_j$; $\left[T_{13}^{i\pm} \right]_j$; $\left[M_{11}^{i\pm} \right]_j$ – відповідають зусиллям і моментам, які діють на j -й дискретний елемент з боку несучих шарів.

Співвідношення між величинами зусиль і моментів та відповідними величинами деформацій для несучих шарів і армуючих ребер мають вигляд

$$\begin{aligned}
T_{11}^i &= \frac{E_i h_i}{1-v_i^2} (\varepsilon_{11}^i + v_i \varepsilon_{22}^i); \quad T_{22}^i = \frac{E_i h_i}{1-v_i^2} (\varepsilon_{22}^i + v_i \varepsilon_{11}^i); \quad T_{13}^i = k^2 G_{13}^i \varepsilon_{13}^i \quad (i=1, 2); \\
M_{11}^i &= \frac{E_i h_i^3}{12(1-v_i^2)} (\kappa_{11}^i + v_i \kappa_{22}^i); \quad M_{22}^i = \frac{E_i h_i^3}{12(1-v_i^2)} (\kappa_{22}^i + v_i^2 \kappa_{11}^i); \\
T_{22j} &= E_j F_j \varepsilon_{22j},
\end{aligned} \tag{1.17}$$

де E_i, G_{13}^i, v_i – фізико-механічні параметри матеріалу несучих шарів; k^2 – інтегральний коефіцієнт поперечного зсуву в теорії пластин та оболонок; E_j, F_j – модуль пружності матеріалу і площа поперечного перетину j -го ребра, відповідно.

Зусилля і моменти для легкого заповнювача можна визначити наступним чином:

$$T_{11}^t = \int_{-h_t/2}^{h_t/2} \left(1 + \frac{z_t}{R_t}\right) \sigma_{11}^t dz_t; \quad T_{13}^t = \int_{-h_t/2}^{h_t/2} \sigma_{13}^t dz_t; \quad M_{11}^t = \int_{-h_t/2}^{h_t/2} z_t \left(1 + \frac{z_t}{R_t}\right) \sigma_{11}^t dz_t. \tag{1.18}$$

Рівняння коливань (1.16) доповнюються відповідними граничними та початковими умовами.

§2. Числові результати.

Розв’язані задачі динамічного деформування тришарової напівсферичної оболонки, несиметричної за товщиною. В даному випадку задача розв’язувалася на кутовому інтервалі $[-\pi/2, \pi/2]$. В силу симетрії відносно вершини сфери при $\alpha = 0$ розглядався інтервал $[0, \pi/2]$. У вершині сфери присутня особливість, необхідність розкриття якої дозволила записати граничні умови при $\alpha = 0$ у наступному вигляді:

$$u_1^i = \varphi_1^i = 0; \quad 2 \frac{\partial T_{13}^i}{\partial s} - P_2(s_0, t) \delta_{2i} = \rho h \frac{\partial^2 u_3^i}{\partial t^2} \tag{2.1}$$

при $\alpha = \pi/2$ (жорстке защемлення):

$$u_1^i = u_3^i = \varphi_1^i = 0 \quad (i=1, 2). \tag{2.2}$$

У формулах (2.1) δ_{2i} – символ Кронекера.

Зовнішнє нестационарне навантаження $P_2(s, t)$ у вигляді зосередженого удару по вершині напівсферичної оболонки задавалося наступним чином:

$$P_2(s_0, t) = \begin{cases} A(1 - \frac{t}{T}) & (0 \leq t \leq T); \\ 0 & (t > T), \end{cases} \tag{2.3}$$

де $A = 10^6$ Па; $T = R_1/c = 5 \cdot 10^{-5}$ с.

Початкові умови нульові для несучих шарів при $t = 0$:

$$u_1^i = u_3^i = \varphi_1^i = 0; \quad \frac{\partial u_1^i}{\partial t} = \frac{\partial u_3^i}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1^i}{\partial t} = 0 \quad (i=1, 2). \tag{2.4}$$

Відповідна початково-крайова задача (1.16), (2.1) – (2.4) розв’язується за допомогою скінченно-елементного методу. Створена адекватна скінченно-елементна модель несиметричної тришарової оболонки відображає взаємозв’язок потенціальної енергії деформацій в тілі з потенціалом прикладених сил:

$$\Pi = E - W, \tag{2.5}$$

де E – потенціальна енергія деформацій, а W – потенціал прикладених сил.

Потім проводиться розбивка суцільної області на окремі об'ємні елементи, які по ступеню витягнутості, звуженню і викривленню та іншим показникам відповідають вимогам забезпечення якості скінченно-елементної сітки. Після цього залежність (2.5) набуває вигляду:

$$\Pi = \sum_{e=1}^E (E^{(e)} - W^{(e)}) = \sum_{e=1}^E \pi^{(e)}. \quad (2.6)$$

Глобальна матриця жорсткості і глобальний вектор-стовпець в матричному рівнянні

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad (2.7)$$

відповідають співвідношенням

$$[K] = \sum_{e=1}^E [k^{(e)}]; \quad \{F\} = - \sum_{e=1}^E \{f^{(e)}\}.$$

Такий підхід відповідає формі диференціальних рівнянь і виконанню закону збереження повної механічної енергії на скінченно-елементному рівні.

Отже, створено скінченно-елементну модель несиметричної тришарової півсфери з п'ятьма армуючими ребрами, які розміщувалися по паралелях в точках $\alpha_k = (\pi/12)k$ $k = \overline{1, 5}$ (рис. 1, $a - \delta$).

На всіх цих рисунках зображено поперечні перетини в площині αz . На рис. 1, a – модель зовнішнього несучого шару, на рис. 1, b – модель внутрішнього несучого шару, на рис. 1, $в$ – модель пінопласту, на рис. 1, $г$ – модель п'яти армуючих ребер.

На рис. 1, δ представлено модель півсфери з п'ятьма армуючими ребрами і пінопластом.

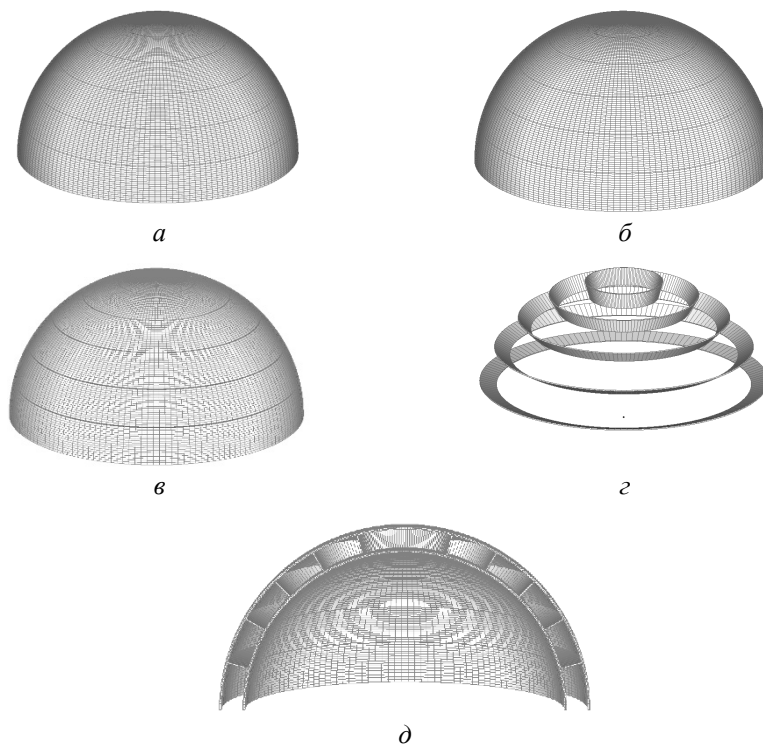


Рис. 1

При створенні скінченно-елементних моделей використовувався тривимірний об'ємний скінченний елемент типу Solid, який по ступеню витягнутості, звуженню і викривленню, а також по іншим показникам відповідав вимогам забезпечення якості скінченно-елементної сітки [4]. Кількість скінченних елементів у варіанті півсферичної структури без пінопласту становила 17960, а при його наявності – 22200. В обох варіантах скінченно-елементних моделей внутрішній і зовнішній несучі шари налічували по 8880 елементів. Кількість елементів легкого заповнювача (пінопласту) дорівнювала 4240, а армуючих ребер – 200.

Розглянуто три випадки динамічного деформування напівсферичних тришарових оболонок з дискретно-симетричним легким армованим ребрами заповнювачем при зосередженому ударі по вершині напівсферичної оболонки. Елементи і вузли, при яких забезпечується практична збіжність результатів розрахунків, вибрані згідно роботи [4].

Отримані числові результати дозволяють проводити аналіз напружено-деформованого стану тришарової пружної структури напівсферичного типу в будь який момент часу (розрахунки проводилися при $0 \leq t \leq 40T$).

Фізико-механічні параметри для легкого заповнювача наступні: $E_t = 2 \cdot 10^7$ Па; $\rho_t = 25$ кг/м³; $\nu_t = 0,33$.

Досліджено перші два випадки: 1 – без пінопласту; 2 – відношення модулів пружності несучих шарів до модуля пружності заповнювача: $E_1/E_t = 3,5 \cdot 10^3$; $E_2/E_t = 10^4$.

Розрахунки проводилися при наступних геометричних і фізико-механічних параметрах:

$$E_1 = E_j = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па}; \quad \nu_j = \nu_1 = 0,3; \quad \rho_1 = \rho_j = 2,1 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; \quad h_1 = h_2 = 0,002 \text{ м};$$

$$h_j = 0,02 \text{ м}; \quad R_2 = 0,3 \text{ м}; \quad R_1 = 0,278 \text{ м}; \quad F_j = 4 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2; \quad E_2^2 = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па};$$

$$\rho_2 = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; \quad \nu_2 = 0,3; \quad E_1/E_t = 3,5 \cdot 10^3; \quad E_2/E_t = 10^4;$$

$$\rho_t = 25 \text{ кг/м}^3; \quad \nu_t = 0,33; \quad h/R = 0,08.$$

Наведені параметри несиметричної сферичної структури показують, що внутрішній несучий шар виготовлений зі сплаву АМГ-6; а зовнішній – зі сталі, товщина пінопластового шару буде 0,02 м. Загальна маса такої сферичної конструкції дорівнює 11,69 кг, а пінопластового заповнювача – 0,26 кг (2,2% від загальної маси конструкції).

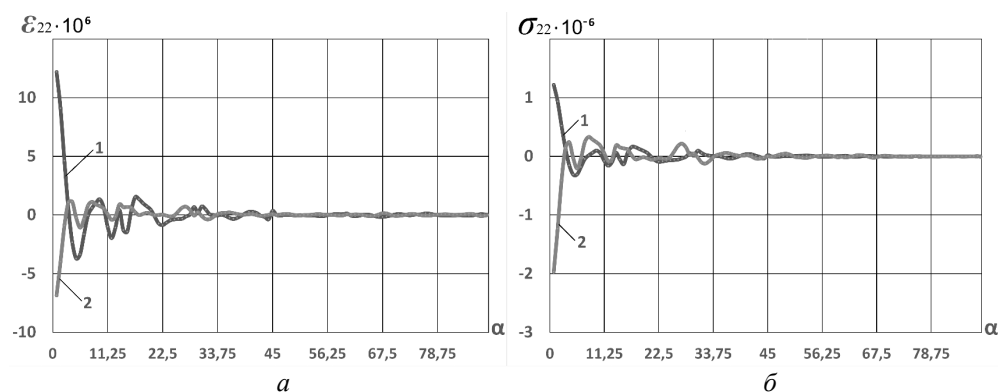


Рис. 2

На рис. 2, а показано залежності максимальних величин деформацій ε_{22}^1 (1) і ε_{22}^2 (2) в серединних поверхнях несучих шарів несиметричної тришарової напівсферичної оболонки від кутової координати α . Тут і в подальших графіках крива 1 відповідає

величині ε_{22}^1 внутрішнього несучого шару несиметричної напівсферичної оболонки, а крива 2 – величині ε_{22}^2 зовнішнього несучого шару несиметричної напівсферичної оболонки в момент часу $t = 7,8T$ (час досягнення максимального значення величин $\varepsilon_{22}^1(1)$ і $\varepsilon_{22}^2(2)$). Легкий заповнювач відсутній. З представленого графічного матеріалу можна візуально визначити вплив сферичності структури на антисиметричність розподілу величин $\varepsilon_{22}^1(1)$ і $\varepsilon_{22}^2(2)$ за просторовою координатою. Перші п'ять власних частот конструкції становлять: 1 – 1414,393 Гц; 2 – 1414,406 Гц; 3 – 1911,853 Гц; 4 – 2259,216 Гц; 5 – 2259,299 Гц.

На рис. 2, б введеному масштабі наведено залежності максимальних величин нормальних напружень $\sigma_{22}^1(1)$ і $\sigma_{22}^2(2)$ в серединних поверхнях несучих шарів від кутової координати α . Тут і в подальших графіках крива 1 відповідає величині σ_{22}^1 внутрішнього несучого шару несиметричної напівсферичної оболонки, а крива 2 – величині σ_{22}^2 зовнішнього несучого шару несиметричної напівсферичної оболонки в момент часу $t = 7,8T$ (час досягнення максимального значення величин $\sigma_{22}^1(1)$ і $\sigma_{22}^2(2)$). Легкий заповнювач відсутній.

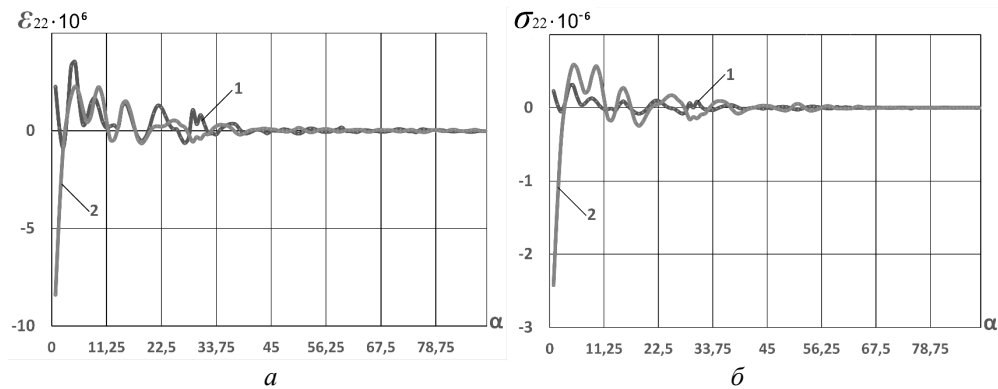


Рис. 3

На рис. 3, а показано залежності максимальних величин деформацій $\varepsilon_{22}^1(1)$ і $\varepsilon_{22}^2(2)$ в серединних поверхнях несучих шарів несиметричної тришарової напівсферичної оболонки від кутової координати α в момент часу $t = 6,6T$. Легкий заповнювач: $E_1/E_t = 3,5 \cdot 10^3$; $E_2/E_t = 10^4$. Перші п'ять власних частот конструкції становлять: 1 – 1402,138 Гц; 2 – 1402,15 Гц; 3 – 1897,886 Гц; 4 – 2246,624 Гц; 5 – 2246,702 Гц.

На рис. 3, б введеному масштабі наведено залежності максимальних величин нормальних напружень $\sigma_{22}^1(1)$ і $\sigma_{22}^2(2)$ в серединних поверхнях несучих шарів несиметричної напівсферичної оболонки від кутової координати α в момент часу $t = 6,6T$. Легкий заповнювач: $E_1/E_t = 3,5 \cdot 10^3$; $E_2/E_t = 10^4$.

На графіках рис. 4, а наведено залежності величин нормальних прогинів в серединних поверхнях внутрішнього $u_3^1(1)$ і зовнішнього $u_3^2(2)$ несучих шарів від часу у вершині несиметричної тришарової напівсферичної оболонки з дискретно-симетричним заповнювачем у її вершині при дії зосередженого удару. Легкий заповнювач – відсутній. Тут і надалі індексом 1 позначені величини прогинів внутрішнього несучого шару, індексом 2 – зовнішнього несучого шару.

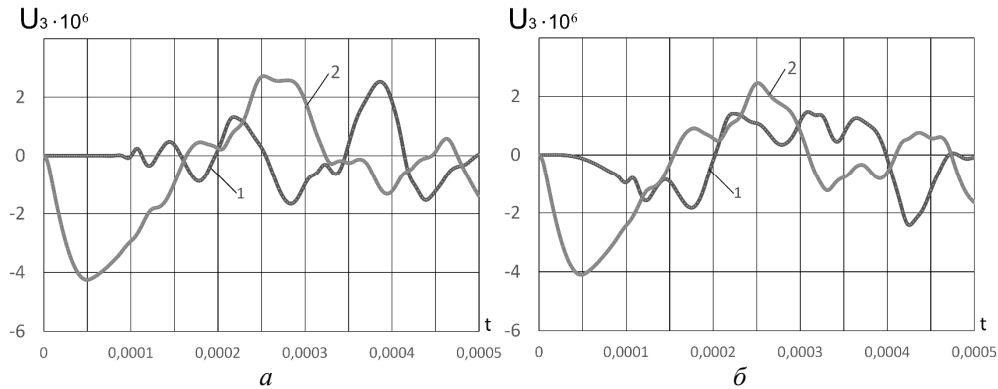


Рис. 4

На графіках рис. 4, б наведено залежності величин нормальних прогинів в серединних поверхнях внутрішнього u_3^1 (1) і зовнішнього u_3^2 (2) несучих шарів від часу у вершині несиметричної тришарової напівсферичної оболонки з дискретно-симетричним легким армованим ребрами заповнювачем у її вершині при дії зосередженого удару. Легкий заповнювач: $E_1/E_t = 3,5 \cdot 10^3$; $E_2/E_t = 10^4$.

Враховуючи, що вихідна задача є багатопараметричною (в різні моменти часу t кінематичні та силові параметри приймають різні значення за координатою α), в подальшому будемо розглядати залежності вихідних величин в моменти часу досягнення ними максимальних по модулю значень.

Аналіз отриманих результатів демонструє значний вплив пінопласту на динамічну поведінку тришарової несиметричної напівсферичної оболонки. Так, максимальні деформації ε_{22}^1 (1) зменшилися в 4,8 рази, а максимальні деформації ε_{22}^2 (2) збільшилися на 87,5%. Максимальні напруження σ_{22}^1 (1) зменшилися в 4 рази, а максимальні напруження σ_{22}^2 (2) збільшилися на 83%. Максимальні нормальні переміщення u_3^1 (1) збільшилися на 0,68%, а максимальні нормальні переміщення u_3^2 (2) – на 2%.

Досліджено другі два випадки: 1 – без пінопласту; 2 – відношення модулів пружності несучих шарів до модуля пружності заповнювача $E_{1,2}/E_t = 3,5 \cdot 10^3$.

Розрахунки проводилися при наступних геометричних і фізико-механічних параметрах:

$$\begin{aligned} E_1 = E_2 = E_j = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па}; \quad \nu_j = \nu_1 = \nu_2 = 0,3; \quad \rho_1 = \rho_2 = \rho_j = 2,1 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; \\ h_1 = h_2 = 0,002 \text{ м}; \quad h_j = 0,02 \text{ м}; \quad R_2 = 0,3 \text{ м}; \quad R_1 = 0,278 \text{ м}; \quad F_j = 4 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2; \\ E_{1,2}/E_t = 3,5 \cdot 10^3 \text{ Па}; \quad \rho_t = 25 \text{ кг/м}^3; \quad \nu_t = 0,33; \quad h/R = 0,08. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що симетрична оболонка виготовлена зі сплаву АМГ6, товщина пінопластового шару буде 0,02 м. Загальна маса такої сферичної конструкції дорівнює 5,93 кг, а пінопластового заповнювача – 0,26 кг (4,4% від загальної маси конструкції).

На рис. 5, а відображено залежності максимальних величин деформацій ε_{22}^1 (1) і ε_{22}^2 (2) в серединних поверхнях несучих шарів симетричної тришарової напівсферичної оболонки від кутової координати α в момент часу $t = 4,95T$. Легкий заповнювач відсутній. Перші п'ять власних частот конструкції становлять: 1 – 1417,104 Гц; 2 – 1417,113 Гц; 3 – 1929,182 Гц; 4 – 2263,038 Гц; 5 – 2263,075 Гц.

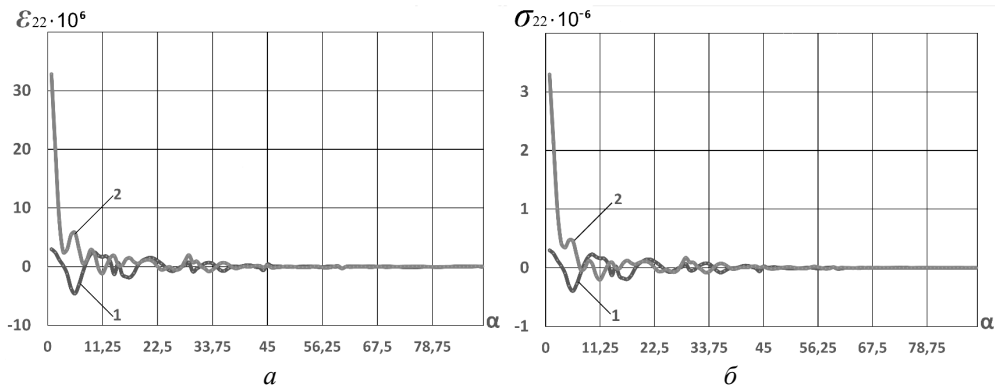


Рис. 5

На рис. 5, б в приведеному масштабі наведено залежності максимальних величин нормальних напружень $\sigma_{22}^1(1)$ і $\sigma_{22}^2(2)$ в серединних поверхнях несучих шарів симетричної напівсферичної оболонки від кутової координати α в момент часу $t = 4,95T$. Легкий заповнювач відсутній.

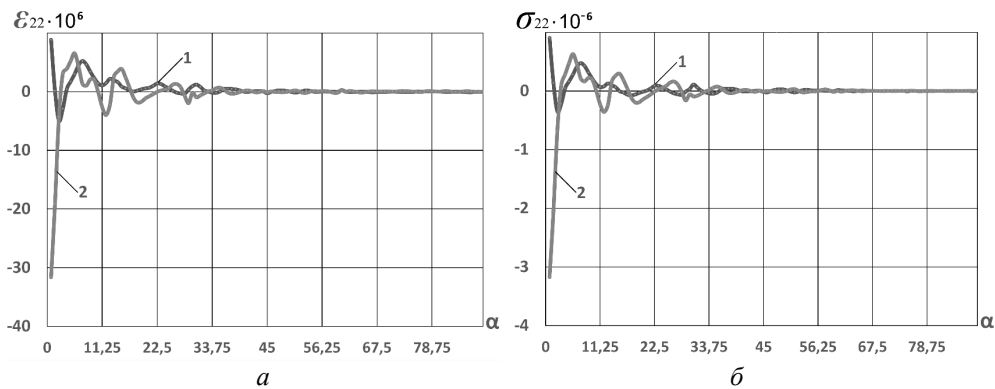


Рис. 6

На рис. 6, а показано залежності максимальних деформацій $\varepsilon_{22}^1(1)$ і $\varepsilon_{22}^2(2)$ в серединних поверхнях несучих шарів симетричної тришарової напівсферичної оболонки від кутової координати α в момент часу $t = 6,5T$. Легкий заповнювач: $E_{1,2}/E_t = 3,5 \cdot 10^3$. Перші п'ять власних частот конструкції становлять: 1 – 1394,074 Гц; 2 – 1394,083 Гц; 3 – 1903,139 Гц; 4 – 2238,779 Гц; 5 – 2238,812 Гц.

На рис. 6, б в приведеному масштабі наведено залежності максимальних величин нормальних напружень $\sigma_{22}^1(1)$ і $\sigma_{22}^2(2)$ в серединних поверхнях несучих шарів симетричної напівсферичної оболонки від кутової координати α в момент часу $t = 6,5T$. Легкий заповнювач: $E_{1,2}/E_t = 3,5 \cdot 10^3$.

На графіках рис. 7 наведено залежності величин нормальних прогинів в серединних поверхнях внутрішнього $u_3^1(1)$ і зовнішнього $u_3^2(2)$ несучих шарів від часу у вершині симетричної тришарової напівсферичної оболонки з дискретно-симетричним заповнювачем у її вершині при дії зосередженого удару. Рис. 7, а – легкий заповнювач відсутній; рис. 7, б – легкий заповнювач: $E_{1,2}/E_t = 3,5 \cdot 10^3$.

Слід зауважити, що графіки на рис. 7, а добре узгоджуються з відповідними даними, наведеними в роботі [13].

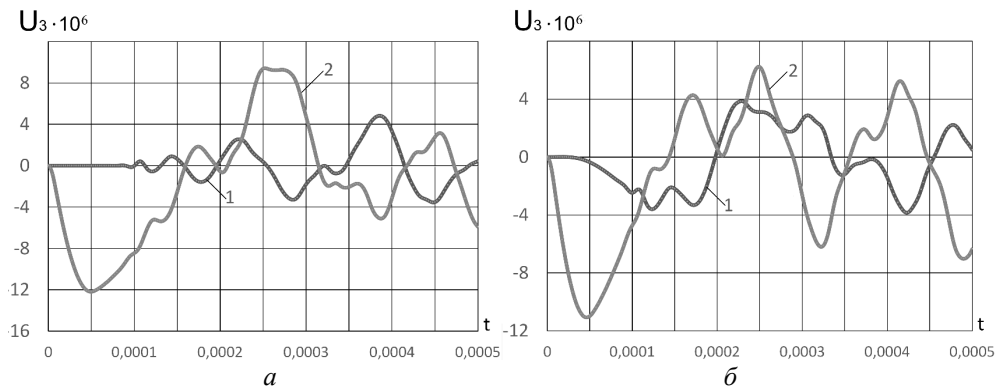


Рис. 7

Аналіз отриманих результатів (рис. 5 – рис. 7) демонструє значний вплив пінопласту на динамічну поведінку тришарової симетричної напівсферичної оболонки. Так, максимальні деформації $\varepsilon_{22}^1(1)$ збільшилися на 50%, а максимальні деформації $\varepsilon_{22}^2(2)$ зменшилися на 3%. Максимальні напруження $\sigma_{22}^1(1)$ збільшилися на 44%, а максимальні напруження $\sigma_{22}^2(2)$ зменшилися на 83%. Максимальні нормальні переміщення $u_3^1(1)$ зменшилися на 5,3%, а максимальні нормальні переміщення $u_3^2(2)$ – на 13%.

Досліджено наступні треті два випадки: 1 – без пінопласту; 2 – відношення модулів пружності несучих шарів до модуля пружності заповнювача:

$$E_1/E_t = 10^4; E_2/E_t = 3,5 \cdot 10^3; E_2 = E_j = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па}; \nu_j = \nu_2 = 0,3;$$

$$\rho_2 = \rho_j = 2,1 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; h_1 = h_2 = 0,002 \text{ м}; h_j = 0,02 \text{ м}; R_1 = 0,3 \text{ м}; R_2 = 0,322 \text{ м};$$

$$F_j = 4 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2; E_1 = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}; \rho_1 = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; E_1/E_t = 10^4; E_2/E_t = 3,5 \cdot 10^3;$$

$$\rho_t = 25 \text{ кг/м}^3; \nu_t = 0,33; h/R = 0,08.$$

Звідси випливає, що в несиметричній оболонці зовнішній несучий шар виготовлений зі сплаву АМГ6, а внутрішній – зі сталі: $E_1/E_t = 10^4; E_2/E_t = 3,5 \cdot 10^3$, товщина пінопластового шару буде 0,02 м. Загальна маса такої сферичної конструкції дорівнює 10,88 кг, а пінопластового заповнювача – 0,26 кг (2,4% від загальної маси конструкції).

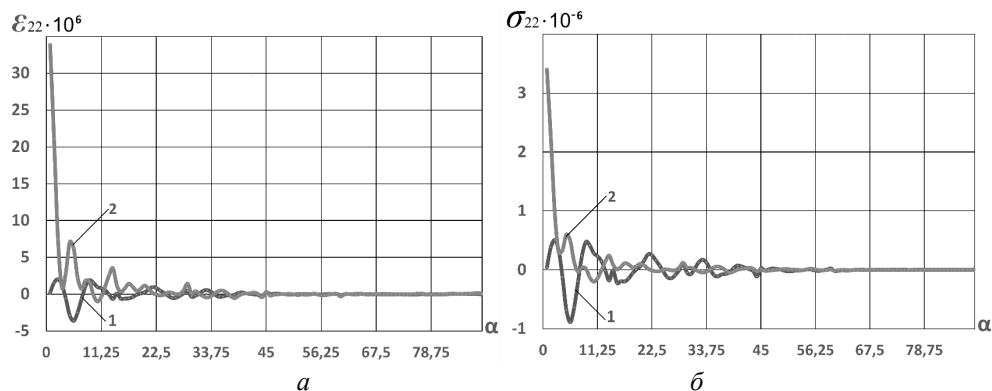


Рис. 8

На рис. 8, а показано залежності максимальних величин деформацій $\varepsilon_{22}^1(1)$ і $\varepsilon_{22}^2(2)$ в серединних поверхнях несучих шарів несиметричної тришарової напівсферичної оболонки від кутової координати α в момент часу $t = 4,9T$. Легкий заповнювач

відсутній. Перші п'ять власних частот конструкції становлять: 1 – 1462,48 Гц; 2 – 1462,485 Гц; 3 – 1975,7 Гц; 4 – 2333,968 Гц; 5 – 2334,002 Гц.

На рис. 8, б введеному масштабі наведено залежності максимальних величин нормальних напружень $\sigma_{22}^1(1)$ і $\sigma_{22}^2(2)$ в серединних поверхнях несучих шарів несиметричної напівсферичної оболонки від кутової координати α в момент часу $t = 4,9T$. Легкий заповнювач відсутній.

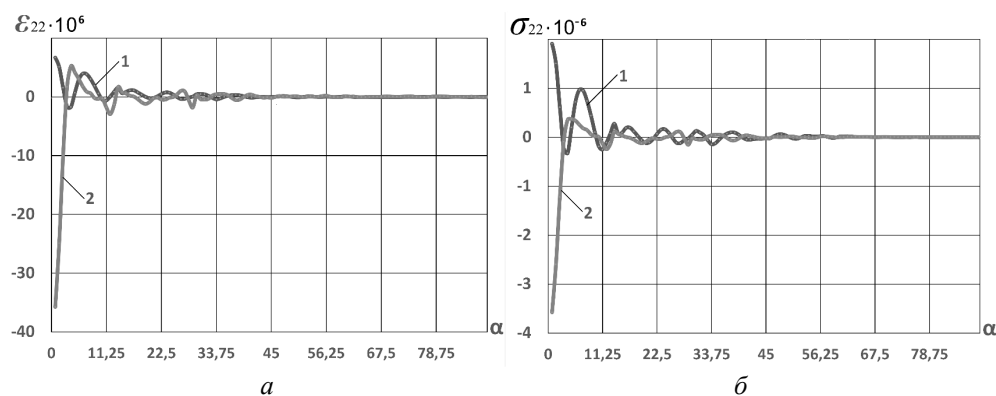


Рис. 9

На рис. 9, а відображено залежності максимальних величин деформацій $\varepsilon_{22}^1(1)$ і $\varepsilon_{22}^2(2)$ в серединних поверхнях несучих шарів несиметричної тришарової напівсферичної оболонки від кутової координати α в момент часу $t = 6,4T$. Легкий заповнювач: $E_1/E_t = 10^4$; $E_2/E_t = 3,5 \cdot 10^3$. Перші п'ять власних частот конструкції становлять: 1 – 1448,841 Гц; 2 – 1448,845 Гц; 3 – 1960,305 Гц; 4 – 2321,848 Гц; 5 – 2321,877 Гц.

На рис. 9, б введеному масштабі наведено залежності максимальних величин нормальних напружень $\sigma_{22}^1(1)$ і $\sigma_{22}^2(2)$ в серединних поверхнях несучих шарів несиметричної напівсферичної оболонки від кутової координати α в момент часу $t = 6,4T$. Легкий заповнювач: $E_1/E_t = 10^4$; $E_2/E_t = 3,5 \cdot 10^3$.

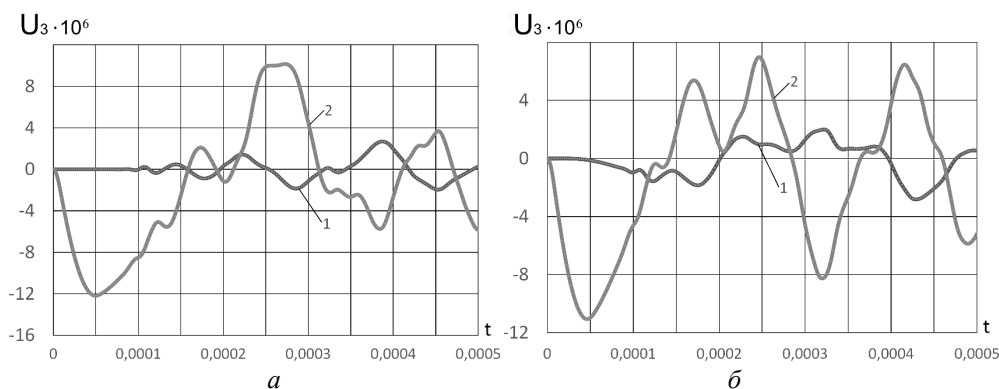


Рис. 10

На графіках рис. 10, а наведено залежності величин нормальних прогинів в серединних поверхнях внутрішнього $u_3^1(1)$ і зовнішнього $u_3^2(2)$ несучих шарів від часу у вершині несиметричної тришарової напівсферичної оболонки з дискретно-симетричним заповнювачем у її вершині при дії зосередженого удару. Легкий заповнювач відсутній.

На графіках рис. 10, б наведено аналогічні залежності для несиметричної тришарової напівсферичної оболонки з дискретно-симетричним легким армованим ребрами заповнювачем при дії зосередженого удару. Легкий заповнювач: $E_1/E_t = 10^4$; $E_2/E_t = 3,5 \cdot 10^3$.

Аналіз отриманих результатів (рис. 8 – рис. 10) демонструє значний вплив пінопласту на динамічну поведінку тришарової несиметричної напівсферичної оболонки. Так, максимальні деформації $\varepsilon_{22}^1(1)$ збільшилися в 2 рази, а максимальні деформації $\varepsilon_{22}^2(2)$ зменшилися на 6%. Максимальні напруження $\sigma_{22}^1(1)$ збільшилися в 2,2 рази, а максимальні напруження $\sigma_{22}^2(2)$ збільшилися на 6%. Максимальні нормальні переміщення $u_3^1(1)$ зменшилися на 7,1%, а максимальні нормальні переміщення $u_3^2(2)$ – на 9%.

Висновки.

З проведених розрахунків методом скінченних елементів випливає, що геометричні і фізико-механічні параметри шарів оболонки значно впливають на кількісні і якісні характеристики коливальних процесів в несиметричних тришарових напівсферичних оболонках. Числові експерименти показали, що збільшення маси несиметричних тришарових сферичних оболонок за рахунок легкого компонента заповнювача в межах 2–4 % суттєво, часом в декілька разів, зменшують максимальні деформації та напруження в тришаровій конструкції при нестационарних навантаженнях. Аналіз графіків залежності максимальних деформацій та напружень в серединних поверхнях несучих шарів несиметричних тришарових напівсферичних оболонок з пінопластом говорить про більш інтенсивний взаємозв'язок власних частот між собою, що викликає ефект конструкційного демпфування, оскільки досягнення максимумів параметрів напружено-деформованого стану в них відбувається значно пізніше.

Спостерігається явище розхитування тришарової конструкції напівсферичної оболонки і досягнення значних нормальних прогинів в момент, коли ударне навантаження вже не діє.

Таким чином, можна стверджувати, що підбором відповідних конструкційних елементів несиметричних тришарових напівсферичних оболонок можна створити конструкцію з прогнозованою динамічною поведінкою при локальному нестационарному навантаженні.

РЕЗЮМЕ. Досліджено динаміку несиметричної тришарової напівсферичної оболонки з дискретно-симетричним легким армованим ребрами заповнювачем при зосередженому ударі по її вершині. Для аналізу елементів пружної конструкції використано модель теорії оболонок і стержнів Тимошенка за незалежних статичних і кінематичних гіпотез для кожного шару. За варіаційним принципом Гамільтона – Остроградського отримано рівняння руху несиметричної структури. Створено відповідну скінченно-елементну модель оболонки, яка відображає взаємозв'язок потенціальної енергії деформацій в оболонці з потенціалом прикладених сил. Методом скінченних елементів отримано числові результати дослідження динаміки тришарової пружної структури, несиметричної за товщиною. Досліджено вплив геометричних і фізико-механічних параметрів несиметричних шарів оболонки на її динамічну поведінку при зосередженому ударі по її вершині та виявлено нові механічні ефекти.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: динаміка, несиметрична тришарова напівсферична оболонка, дискретно-симетричний легкий заповнювач, армуючі ребра, зосереджений удар, напружено-деформований стан, механічні ефекти.

1. Григоренко Я.М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости. – Киев: Наук. думка, 1973. – 288 с.
2. Луговой П.З., Мейш В.Ф., Мейш Ю.А. Динаміка конструктивно-неоднорідних структур. (під ред. О.М. Гузя). – Київ: Видавництво Ліра К., 2022. – 326 с.
3. Орленко С.П. Чисельне моделювання динаміки тришарової сферичної оболонки з дискретно неоднорідним заповнювачем // Доп. НАН України. – 2020. – № 3 – С. 19 – 27.

4. Рычков С.П. Моделирование конструкций в среде Femap with NX Nastran. – Москва: ДМК Пресс, 2013. – 784 с.
5. Сеницкий Ю.Э., Лычев С.А. Динамика трехслойных сферических оболочек несимметричной структуры // Тр. XVIII междунар. конф. по теории оболочек и пластин. Т.1.– Саратов, 1997. – С.47 – 52.
6. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. – Москва: Наука, 1966. – 636 с.
7. Успехи механики (под общей редакцией А.Н. Гузя): в 6-ти томах. Т.3. Пискунов В.Г., Рассказов А.О. Развитие теории слоистых пластин и оболочек. – Киев: «А.С.К.», 2007. – С. 141 – 175.
8. Abrate S. Blast Loading on Sandwich Structures: A Critical Assessment // IMECE. – 2011. – P. 557 – 566.
9. Frostig Y., Thomsen O.T. Higher-order free vibration of sandwich panels with a flexible core // Int. J. Solids Struct. – 2004. – **41**, N 5 – 6. – P. 1697 – 1724.
10. Hause T., Librescu L. Dynamic response of doubly-curved anisotropic sandwich panels impacted by blast loadings // Int. J. Solids Struct. – 2007. – **44**, N 20. – P. 6678 – 6700.
11. Kheirikhah M.M., Khalili S.M.R., Malekzadeh Fard K. Biaxial buckling analysis of soft-core composite sandwich plates using improved high-order theory // European J. of Mechanics A/Solids. – 2011. – **31** – P. 54 – 66.
12. Lugovyi P.Z., Orlenko S.P. Dynamics of Three-Layer Spherical Shells with a Discrete-Symmetric Light Rib-Reinforced Filler under Non-Stationary Loads // Int. Appl. Mech. – 2022. – **58**, N 5. – P. 541 – 451.
13. Lugovoi P.Z., Meish V.F., Orlenko S.P. Numerical Simulation of the Dynamics of Spherical Sandwich Shells Reinforced with Discrete Ribs Under a Shockwave// Int. Appl. Mech. – 2020. – **56**, N 5. – P. 590 – 598.
14. Lugovyi P.Z., Orlenko S.P. Effect of the Asymmetry of Cylindrical Sandwich Shells on Their Stress-Strain State under Non-Stationary Loading // Int. Appl. Mech. – 2021. – **57**, N 5. – P. 543 – 553.
15. Lugovoi P.Z., Meish V.F., Shtantsel S.E., Forced Nonstationary Vibrations of a Sandwich Cylindrical Shell with Cross-Ribbed Core // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, N 2. – P. 161 – 167.
16. Malekzadeh Fard K., Livani M., Veisi A., Gholami M. Improved high-order bending analysis of double curved sandwich panels subjected to multiple loading conditions // Latin American J. Solids Struct. – 2014. – **11**. – P. 1591 – 1614.
17. Masoumiasl S.S., Rahimi G.H. Experimental and numerical investigation of effect of shape of ribs on flexural behavior of curved composite sandwich panels with lattice core // Persian J. of Science and Technology of Composites. – 2019. – **6**, N 3. – P. 351 – 362.
18. Meish V.F., Shtantsel S E. Dynamic Problems in the Theory of Sandwich Shells of Revolution with a Discrete Core under Nonstationary Loads // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, N 12. – P. 1501 – 1507.
19. Qatu M.S. Vibration of Laminated Shells and Plates. – New York: Academic Press, 2004. – 426p.
20. Qatu M.S., Sullivan R.W., Wang W. Recent Research Advances in the Dynamic Behavior of Composite Shells: 2000 – 2009 // Composite Structures. – 2010. – **93**, N 1. – P. 14 – 31.
21. Reddy J.N. Mechanics of laminated composite plates and shells, theory and application. – Boca Raton, FL: CRC Press, 2003. – 858 p.
22. Shul'ga N.A., Meish V.F. Forced Vibration of Three-Layered Spherical and Ellipsoidal Shells under Axisymmetric Loads // Mechanics of Composite Materials. – 2003. – **39**, N 5. – P. 439 – 446.
23. Surianinov M., Yemelianova T., Shyliaiev O. Investigation of Free Vibrations of Three-Layered Circular Shell Supported by Annular Ribs of Rigidity // Materials Sci. Actual Problems of Eng. Mech. – 2019. – **968**. – P. 437 – 443.
24. Wang E., Gardner N., Shukla A. The Blast Resistance of Sandwich Composites with Stepwise Graded Cores // Int. J. Solids Struct. – 2009. – **46**, N 18 – 19. – P. 3492 – 3502.

Надійшла 20.03.2023

Затверджена до друку 27.06.2023