

Є. А. Сторожук

**НЕЛІНІЙНЕ ДЕФОРМУВАННЯ І СТІЙКІСТЬ ПІДДАТЛИВИХ
НА ПОПЕРЕЧНИЙ ЗСУВ ДОВГИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ПАНЕЛЕЙ
НЕКРУГОВОГО ПЕРЕРІЗУ**

*Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,
вул. Гесстєрова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: stevan@ukr.net*

Abstract. The statement is given and an analytical-numerical technics is developed for solving a geometrically nonlinear problem for a long cylindrical panel of non-circular cross-section that is compliant with the transverse shear under the action of a normal surface load. The basic equations are written following the geometrically nonlinear theory of shallow shells in the quadratic approximation, Timoshenko hypothesis, and Hooke law for transversely isotropic materials. For a shell with hinged longitudinal edges, the analytical expressions for the components of the stress-strain state are obtained, and the limiting values of the generalized geometric parameter are determined. The numerical results are obtained for the long open cylindrical shells of elliptical and oval cross-sections under the action of uniform normal pressure.

Key words: long cylindrical shell, non-circular cross-section, geometric nonlinearity, stability, transverse shear, surface load, analytical-numerical solution.

Вступ.

Довгі, короткі та середньої довжини композитні циліндричні оболонки некругового поперечного перерізу (еліптичного, овального, параболічного, тощо) як елементи сучасних конструкцій знаходять широке застосування в авіа- та суднобудуванні, космічній техніці, цивільному будівництві, радіоелектроніці та інших галузях промисловості. При розрахунку оболонкових елементів конструкцій, виготовлених з композитних матеріалів, необхідно враховувати як дійсні умови експлуатації, так і особливості їх деформування, зокрема, деформації поперечного зсуву і великі (скінченні) прогини.

Врахування зміни кривизни поперечного перерізу і зазначених вище факторів призводить до значних математичних труднощів при розв'язанні задач даного класу. Тому значну кількість результатів з розрахунку некругових циліндричних оболонок отримано за допомогою чисельних і наближених аналітичних методів [2 – 4, 6, 8, 9, 12 – 16, 20, 22 – 24].

Точні аналітичні розв'язки лінійних і нелінійних крайових задач для некругових циліндричних оболонок отримано тільки для деяких видів поперечного перерізу. Так, в роботі [21] для довгої непологої циліндричної оболонки овального поперечного перерізу з неперервним і східчато-змінним радіусами кривизни наведено точні розв'язки лінійно-пружних задач статки за дії нормальних поверхневих і погонних сил, які рівномірно розподілені вздовж твірних.

В більшості робіт, присвячених аналітичному дослідженню нелінійного деформування циліндричної оболонки, отримано точні розв'язки геометрично нелінійних задач для нескінченно довгої пологої оболонки кругового поперечного перерізу [5, 11, 18, 25].

Точним розв'язкам нелінійних крайових задач для некругових оболонок присвячені лише окремі роботи, в яких розглянуто два види поперечного перерізу оболонок.

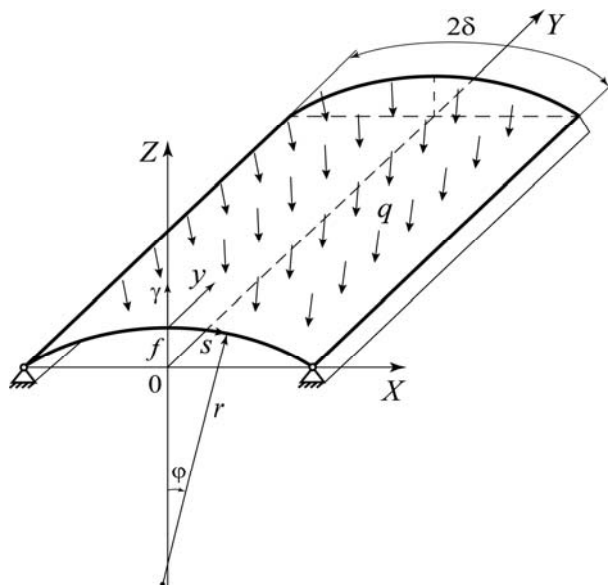
Так, автори робіт [1, 10] на основі геометрично нелінійної теорії пологих оболонок у квадратичному наближенні аналітично дослідили нелінійне деформування і стійкість довгої циліндричної оболонки некругового поперечного перерізу, кривизна якого змінюється за квадратичним законом. В роботі [17] одержано аналітичний (точний) розв'язок геометрично нелінійної задачі статки для піддатливої на поперечний зсув нескінченно довгої пологої циліндричної оболонки овального поперечного перерізу й наведено конкретні числові результати для незамкненої оболонки з шарнірно закріпленими поздовжніми краями під дією прикладеного з боку опуклості оболонки рівномірного тиску.

Зазначимо, що в роботі [20] запропоновано ефективний аналітично-чисельний підхід до дослідження лінійного напружено-деформованого стану (НДС) довгих некругових циліндричних оболонок змінної товщини та представлено числові результати для замкненої оболонки еліптичного перерізу за дії внутрішнього поверхневого навантаження.

Нижче дано постановку геометрично нелінійних задач статки для піддатливих на поперечний зсув нескінченно довгих пологих циліндричних оболонок довільного поперечного перерізу, розроблено аналітично-чисельну методику розв'язання задач даного класу та досліджено нелінійне деформування і стійкість довгих циліндричних панелей еліптичного і овального поперечного перерізу під дією рівномірного зовнішнього тиску.

§1. Постановка задачі і основні співвідношення.

Розглянемо незамкнену нескінченно довгу пологу циліндричну оболонку некругового (еліптичного, овального, параболічного, тощо) поперечного перерізу, виготовлену із трансверсально-ізотропного матеріалу. Геометрію оболонки опишемо в декартовій системі координат (X, Y, Z) , вісь OY якої розташована в площині поздовжніх країв на однаковій відстані від них (рисунок). Площину поперечного перерізу віднесемо до системи координат (X, Z) , а серединну поверхню оболонки – до криволінійної ортогональної системи координат (s, y) , де s, y – довжини дуг напрямної і твірної ($-\delta \leq s \leq \delta$; $0 \leq y \leq l$). Прямолінійну координату γ направимо по нормалі до серединної поверхні. Приймемо, що оболонка має сталі характеристики жорсткості й знаходиться під дією нормального поверхневого навантаження інтенсивності q , яке прикладене з боку опуклості оболонки і може змінюватися тільки вздовж напрямної.



Закони зміни навантаження і кривизни поперечного перерізу вздовж напрямної представимо у вигляді

$$q = q_0 p(\eta); \quad k = k_0 \alpha(\eta); \quad \eta = s/\delta, \quad (1.1)$$

де q_0, k_0 – параметри навантаження q і кривизни k ; $p(\eta), \alpha(\eta)$ – парні функції безрозмірної координати η ($-1 \leq \eta \leq 1$), які можуть бути задані аналітичним або табличним способом.

Нехай при підвищених рівнях діючого навантаження в оболонці виникають великі (скінченні) прогини, порівняні з товщиною h . Для дослідження НДС даного класу гнучких циліндричних оболонок скористаємося рівняннями геометрично нелінійної теорії пологих оболонок у квадратичному наближенні, яка базується на гіпотезі прямої лінії (враховуються деформації поперечного зсуву). У цьому випадку для компонентів деформації оболонки ε, ψ, μ маємо вирази [1, 15]:

$$\varepsilon = \frac{du}{ds} + kw + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{ds} \right)^2; \quad \psi = \vartheta + \frac{dw}{ds}; \quad \mu = \frac{d\vartheta}{ds}, \quad (1.2)$$

де u, w – тангенціальне переміщення і прогин точок серединної поверхні оболонки; ϑ – кут повороту нормалі.

Зв'язок внутрішніх зусиль і момента з компонентами деформації оболонки запишемо згідно із законом Гука у вигляді:

$$N = D_N \varepsilon; \quad D_N = \frac{Eh}{1-\nu^2}; \quad Q = D_Q \psi; \quad D_Q = m G_{sy} h; \quad (1.3)$$

$$M = D_M \mu; \quad D_M = D_N h^2 / 12.$$

У співвідношеннях (1.3) позначено: N, Q – тангенціальне і перерізує зусилля; M – згинальний момент; D_N, D_M, D_Q – характеристики жорсткості оболонки; E, ν – модуль пружності й коефіцієнт Пуассона матеріалу оболонки в площині ізотропії; G_{sy} – модуль зсуву в площині поперечного перерізу; m – коефіцієнт, який залежить від характеру розподілу зсуву за товщиною.

Рівняння рівноваги мають такий вигляд:

$$\frac{dN}{ds} = 0; \quad \frac{dQ^*}{ds} - kN - q = 0; \quad \frac{dM}{ds} - Q = 0, \quad (1.4)$$

де $Q^* = Q + N \frac{dw}{ds}$.

На підставі (1.2) – (1.4) приходимо до системи розв'язувальних рівнянь у переміщеннях

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left\{ D_N \left[\frac{du}{ds} + kw + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{ds} \right)^2 \right] \right\} &= 0; \\ D_Q \left(\frac{d\vartheta}{ds} + \frac{d^2 w}{ds^2} \right) + \frac{d}{ds} \left\{ D_N \left[\frac{du}{ds} + kw + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{ds} \right)^2 \right] \frac{dw}{ds} \right\} - \\ &- k D_N \left[\frac{du}{ds} + kw + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{ds} \right)^2 \right] = q; \\ D_M \frac{d^2 \vartheta}{ds^2} - D_Q \left(\vartheta + \frac{dw}{ds} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

При розв'язанні конкретних крайових задач до системи рівнянь (1.5) потрібно приєднати відповідні граничні умови.

Наведемо граничні умови для випадку, коли поздовжні краї оболонки шарнірно закріплені:

$$w(\pm\delta) = 0; \quad \left. \frac{dg}{ds} \right|_{s=\pm\delta} = 0; \quad u(\pm\delta) = 0. \quad (1.6)$$

Останню з умов (1.6) на одному краї можна замінити еквівалентною умовою

$$\Delta = \int_{-\delta}^{\delta} \frac{du}{ds} ds = 0, \quad (1.7)$$

яка означає, що зближення між краями відсутнє.

§2. Аналітично-чисельний розв'язок геометрично нелінійної задачі для довгої некругової циліндричної панелі.

Оскільки поверхнєве навантаження прикладене з боку опуклості оболонки, то тангенціальне зусилля N є нерозтягуючим ($N \leq 0$).

Інтегруючи перше рівняння системи (1.5), отримуємо, що тангенціальне зусилля не змінюється вздовж напрямної, тобто

$$N = D_N \left[\frac{du}{ds} + kw + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{ds} \right)^2 \right] = C_0 = \text{const}. \quad (2.1)$$

Введемо безрозмірні величини [10, 17]:

$$\begin{aligned} \tilde{w} &= \frac{w}{k_0 \delta^2}; \quad \tilde{u} = \frac{u}{k_0^2 \delta^3}; \quad \tilde{g} = \frac{g}{k_0 \delta}; \quad \tilde{k} = \frac{\delta^2 k_0}{h}; \quad \tilde{k}_0 = 2\delta k_0; \\ \tilde{\Delta} &= \frac{\Delta}{k_0^2 \delta^3}; \quad \tilde{q}_0 = \frac{q_0 \delta^2}{k_0 D_M}; \quad \beta = \frac{D_M}{D_Q \delta^2}; \\ \tilde{N} &= \frac{N \delta^2}{D_M}; \quad \tilde{Q} = \frac{Q \delta}{D_M k_0}; \quad \tilde{M} = \frac{M}{D_M k_0}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Зазначимо, що безрозмірна координата $\eta = s/\delta$ введена вище (1.1).

Крайова задача (1.5) – (1.7) у безрозмірних величинах запишеться наступним чином:

$$\frac{d\tilde{u}}{d\eta} + \alpha \tilde{w} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\tilde{w}}{d\eta} \right)^2 = \frac{\tilde{N}}{12\tilde{k}^2}; \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} (1 + \beta \tilde{N}) \frac{d^2 \tilde{w}}{d\eta^2} + \frac{d\tilde{g}}{d\eta} &= \alpha \beta \tilde{N} + \tilde{q}_0 \beta p; \\ \beta \frac{d^2 \tilde{g}}{d\eta^2} - \tilde{g} - \frac{d\tilde{w}}{d\eta} &= 0; \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\tilde{w}(\pm 1) = 0; \quad \left. \frac{d\tilde{g}}{d\eta} \right|_{\eta=\pm 1} = 0; \quad \tilde{u}(\pm 1) = 0; \quad (2.5)$$

$$\tilde{\Delta} = \int_{-1}^1 \frac{d\tilde{u}}{d\eta} d\eta = 0. \quad (2.6)$$

Система (2.4) є системою лінійних звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами відносно безрозмірних прогину $\tilde{w}$ і кута повороту $\tilde{\vartheta}$.

У випадку, коли $-\beta^{-1} < \tilde{N} < 0$, загальний розв'язок однорідної системи, яка відповідає системі (2.4), має вигляд

$$\begin{aligned}\tilde{w}^* &= C_1 + C_2\eta + C_3 \cos \lambda\eta + C_4 \sin \lambda\eta; \\ \tilde{\vartheta}^* &= -C_2 + \lambda(1 + \beta\tilde{N})(C_3 \sin \lambda\eta - C_4 \cos \lambda\eta),\end{aligned}\quad (2.7)$$

де C_i ($i = \overline{1,4}$) – сталі інтегрування; $\lambda^2 = -\tilde{N}/(1 + \beta\tilde{N}) > 0$.

Для визначення частинного розв'язку $\tilde{w}^{**}, \tilde{\vartheta}^{**}$ неоднорідної системи (2.4) застосуємо метод варіації довільних сталих. Шукаємо частинний розв'язок системи (2.4) у вигляді формул (2.7), вважаючи, що величини C_i ($i = \overline{1,4}$) є функціями від змінної η .

Шукані функції $C_i(\eta)$ ($i = \overline{1,4}$) задовольняють такій системі рівнянь:

$$\begin{aligned}C_1'(\eta) + C_2'(\eta)\eta + C_3'(\eta)\cos \lambda\eta + C_4'(\eta)\sin \lambda\eta &= 0; \\ -C_2'(\eta) + \lambda(1 + \tilde{N}\beta)[C_3'(\eta)\sin \lambda\eta - C_4'(\eta)\cos \lambda\eta] &= 0; \\ C_2'(\eta) - C_3'(\eta)\lambda \sin \lambda\eta + C_4'(\eta)\lambda \cos \lambda\eta &= -\alpha\beta\lambda^2 + \tilde{q}_0\beta(1 + \beta\lambda^2)p; \\ -C_3'(\eta)\tilde{N}\cos \lambda\eta - C_4'(\eta)\tilde{N}\sin \lambda\eta &= 0.\end{aligned}\quad (2.8)$$

Звідки знаходимо похідні цих функцій

$$C_i'(\eta) = \frac{W_{3i}(\eta)[- \beta\lambda^2\alpha(\eta) + \tilde{q}_0\beta(1 + \beta\lambda^2)p(\eta)]}{\det W(\eta)} \quad (i = \overline{1,4}), \quad (2.9)$$

де $\det W(\eta)$ – визначник системи (2.8) (визначник Вронського частинних розв'язків однорідної системи); $W_{3i}(\eta)$ – алгебраїчні доповнення елементів третього рядка визначника Вронського.

Підставивши у співвідношення (2.9) значення величин $\det W(\eta)$ і $W_{3i}(\eta)$ та виконавши інтегрування, отримаємо для функцій $C_i(\eta)$ наступні вирази:

$$C_i(\eta) = C_i^0(\eta) + \tilde{q}_0 C_i^q(\eta) \quad (i = \overline{1,4}). \quad (2.10)$$

Праві частини формул (2.10) записані з використанням позначень:

$$\begin{aligned}C_1^0(\eta) &= -\int_0^\eta \eta \alpha(\eta) d\eta; \quad C_1^q(\eta) = \lambda^{-2}(1 + \beta\lambda^2) \int_0^\eta \eta p(\eta) d\eta; \\ C_2^0(\eta) &= \int_0^\eta \alpha(\eta) d\eta; \quad C_2^q(\eta) = -\lambda^{-2}(1 + \beta\lambda^2) \int_0^\eta p(\eta) d\eta; \\ C_3^0(\eta) &= \lambda^{-1}(1 + \beta\lambda^2) \int_0^\eta \alpha(\eta) \sin \lambda\eta d\eta; \quad C_3^q(\eta) = -\lambda^{-3}(1 + \beta\lambda^2)^2 \int_0^\eta p(\eta) \sin \lambda\eta d\eta; \\ C_4^0(\eta) &= -\lambda^{-1}(1 + \beta\lambda^2) \int_0^\eta \alpha(\eta) \cos \lambda\eta d\eta; \quad C_4^q(\eta) = \lambda^{-3}(1 + \beta\lambda^2)^2 \int_0^\eta p(\eta) \cos \lambda\eta d\eta.\end{aligned}\quad (2.11)$$

Із співвідношень (2.10), (2.11) випливає, що функції $C_1(\eta), C_3(\eta)$ – парні, а $C_2(\eta), C_4(\eta)$ – непарні.

Загальний розв'язок системи (2.4) має вигляд

$$\begin{aligned}\tilde{w} &= C_1 + C_1(\eta) + [C_2 + C_2(\eta)]\eta + [C_3 + C_3(\eta)]\cos \lambda \eta + [C_4 + C_4(\eta)]\sin \lambda \eta; \\ \tilde{g} &= -C_2 - C_2(\eta) + \lambda(1 + \beta\tilde{N})\{[C_3 + C_3(\eta)]\sin \lambda \eta - [C_4 + C_4(\eta)]\cos \lambda \eta\}.\end{aligned}\quad (2.12)$$

Визначимо сталі інтегрування $C_i (i = \overline{1,4})$ з перших чотирьох граничних умов (2.5) на поздовжніх краях оболонки.

При $\sin \lambda \neq 0$ і $\cos \lambda \neq 0$ одержимо такі значення сталих інтегрування:

$$C_1 = -C_1(1) - C_2(1); \quad C_2 = 0; \quad C_3 = -C_3(1) - C_4(1)\operatorname{tg} \lambda; \quad C_4 = 0. \quad (2.13)$$

Отже, в цьому випадку розв'язок системи (2.4) має вигляд

$$\begin{aligned}\tilde{w} &= -C_1^0(1) - C_2^0(1) + C_1^0(\eta) + C_2^0(\eta)\eta + [-C_3^0(1) - C_4^0(1)\operatorname{tg} \lambda + C_3^0(\eta)]\cos \lambda \eta + \\ &\quad + C_4^0(\eta)\sin \lambda \eta + \tilde{q}_0\{-C_1^q(1) - C_2^q(1) + C_1^q(\eta) + C_2^q(\eta)\eta + \\ &\quad + [-C_3^q(1) - C_4^q(1)\operatorname{tg} \lambda + C_3^q(\eta)]\cos \lambda \eta + C_4^q(\eta)\sin \lambda \eta\}; \\ \tilde{g} &= -C_2^0(\eta) + \lambda(1 + \beta\tilde{N})\{[-C_3^0(1) - C_4^0(1)\operatorname{tg} \lambda + C_3^0(\eta)]\sin \lambda \eta - C_4^0(\eta)\cos \lambda \eta\} - \\ &\quad - \tilde{q}_0 C_2^q(\eta) + \tilde{q}_0 \lambda(1 + \beta\tilde{N})\{[-C_3^q(1) - C_4^q(1)\operatorname{tg} \lambda + C_3^q(\eta)]\sin \lambda \eta - C_4^q(\eta)\cos \lambda \eta\}.\end{aligned}\quad (2.14)$$

Якщо $\cos \lambda = 0$ ($\lambda_n = \pi/2 + \pi n$; $n = 0, 1, 2, \dots$), то отримаємо: $C_1 = -C_1(1) - C_2(1)$; $C_2 = 0$; $C_4 = 0$; C_3 – довільне дійсне число. Тому при $\lambda = \lambda_n$ розв'язок системи (2.4) визначається неоднозначно (з точністю до множника C_3 при тригонометричних функціях $\cos \lambda \eta$ і $\sin \lambda \eta$). Неоднозначність розв'язку можна усунути, якщо дослідити границі виразів для прогину і кута повороту при $\lambda \rightarrow \lambda_n$.

У випадку, коли $\sin \lambda = 0$, тобто $\lambda = \pi, 2\pi, \dots$, значення сталих інтегрування дорівнюють: $C_1 = -C_1(1) - C_2(1)$; $C_2 = 0$; $C_3 = -C_3(1) - C_4(1)\operatorname{tg} \lambda$; C_4 – довільне дійсне число. При досягненні параметром внутрішнього зусилля значення $\lambda = \pi$ симетрична відносно лінії $\eta = 0$ форма рівноваги оболонки вперше стає нестійкою та з'являється несиметрична складова прогину. Зазначимо, що в цьому випадку сталу інтегрування C_4 можна визначити з граничної умови (2.6).

З (2.14) при значенні координати $\eta = 0$ отримаємо вираз для стріли прогину панелі:

$$\tilde{w}(0) = -[C_1^0(1) + C_2^0(1) + C_3^0(1) + C_4^0(1)\operatorname{tg} \lambda] - \tilde{q}_0[C_1^q(1) + C_2^q(1) + C_3^q(1) + C_4^q(1)\operatorname{tg} \lambda]. \quad (2.15)$$

Безрозмірні внутрішні силові фактори визначаються за формулами:

$$\begin{aligned}\tilde{N} &= -\lambda^2/(1 + \beta\lambda^2); \quad \tilde{Q} = \lambda\tilde{N}\{[C_3^0(\eta) - C_3^0(1) - C_4^0(1)\operatorname{tg} \lambda]\sin \lambda \eta - \\ &\quad - C_4^0(\eta)\cos \lambda \eta\} + \tilde{q}_0\lambda\tilde{N}\{[C_3^q(\eta) - C_3^q(1) - C_4^q(1)\operatorname{tg} \lambda]\sin \lambda \eta - C_4^q(\eta)\cos \lambda \eta\}; \\ \tilde{M} &= \tilde{N}\{[C_3^0(1) + C_4^0(1)\operatorname{tg} \lambda - C_3^0(\eta)]\cos \lambda \eta - C_4^0(\eta)\sin \lambda \eta\} + \\ &\quad + \tilde{q}_0\tilde{N}\{[C_3^q(1) + C_4^q(1)\operatorname{tg} \lambda - C_3^q(\eta)]\cos \lambda \eta - C_4^q(\eta)\sin \lambda \eta\}.\end{aligned}\quad (2.16)$$

Вирази для нормального напруження $\tilde{\sigma}^{\pm}$ ($\tilde{\sigma} = h\delta^2\sigma/D_M$) на зовнішній і внутрішній поверхнях оболонки ($\tilde{\gamma} = \gamma/h = \pm 0,5$) мають вигляд

$$\tilde{\sigma}^{\pm} = \tilde{N} \pm 6\tilde{k}\tilde{M}. \quad (2.17)$$

Задовольняючи граничну умову (2.6), отримаємо зв'язок між безрозмірними параметрами навантаження й тангенціального зусилля у вигляді квадратного рівняння відносно $\tilde{q}_0$

$$R_1\tilde{q}_0^2 + R_2\tilde{q}_0 + R_3 = 0. \quad (2.18)$$

Коефіцієнти рівняння (2.18) обчислюються за формулами:

$$\begin{aligned} R_i &= r_{i1} \sin^2 \lambda + r_{i2} \cos^2 \lambda + r_{i3} \sin \lambda \cos \lambda \quad (i = 1, 2, 3); \\ r_{11} &= -\frac{\lambda^2 [C_4^q(1)]^2 A}{2}; \quad r_{12} = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 [C_4^q(\eta)]^2 d\eta - \frac{\lambda^2 [C_3^q(1)]^2 A}{2} + \\ &+ \lambda^2 C_3^q(1) \int_{-1}^1 C_3^q(\eta) \sin^2 \lambda \eta d\eta - \frac{\lambda^2}{2} \int_{-1}^1 [C_3^q(\eta) \sin \lambda \eta]^2 d\eta - \frac{\lambda^2}{2} \int_{-1}^1 [C_4^q(\eta) \cos \lambda \eta]^2 d\eta - \\ &- \lambda C_3^q(1) \int_{-1}^1 C_2^q(\eta) \sin \lambda \eta d\eta + \lambda \int_{-1}^1 C_2^q(\eta) C_3^q(\eta) \sin \lambda \eta d\eta - \lambda \int_{-1}^1 C_2^q(\eta) C_4^q(\eta) \cos \lambda \eta d\eta - \\ &- \lambda^2 C_3^q(1) \int_{-1}^1 C_4^q(\eta) \sin \lambda \eta \cos \lambda \eta d\eta + \lambda^2 \int_{-1}^1 C_3^q(\eta) C_4^q(\eta) \sin \lambda \eta \cos \lambda \eta d\eta; \\ r_{13} &= -\lambda^2 C_3^q(1) C_4^q(1) A + \lambda^2 C_4^q(1) \int_{-1}^1 C_3^q(\eta) \sin^2 \lambda \eta d\eta - \\ &- \lambda C_4^q(1) \int_{-1}^1 C_2^q(\eta) \sin \lambda \eta d\eta - \lambda^2 C_4^q(1) \int_{-1}^1 C_4^q(\eta) \sin \lambda \eta \cos \lambda \eta d\eta; \\ r_{21} &= -\lambda^2 C_4^0(1) C_4^q(1) A; \quad r_{22} = [C_1^q(1) + C_2^q(1)] \int_{-1}^1 \alpha(\eta) d\eta - \int_{-1}^1 \alpha(\eta) C_1^q(\eta) d\eta - \\ &- \int_{-1}^1 \alpha(\eta) C_2^q(\eta) \eta d\eta + C_3^q(1) \int_{-1}^1 \alpha(\eta) \cos \lambda \eta d\eta - \int_{-1}^1 \alpha(\eta) C_3^q(\eta) \cos \lambda \eta d\eta - \\ &- \int_{-1}^1 \alpha(\eta) C_4^q(\eta) \sin \lambda \eta d\eta - \int_{-1}^1 C_2^0(\eta) C_2^q(\eta) d\eta + \lambda^2 C_3^0(1) \int_{-1}^1 C_3^q(\eta) \sin^2 \lambda \eta d\eta - \\ &- \lambda^2 C_3^0(1) C_3^q(1) A + \lambda^2 C_3^q(1) \int_{-1}^1 C_3^0(\eta) \sin^2 \lambda \eta d\eta - \lambda^2 \int_{-1}^1 C_3^0(\eta) C_3^q(\eta) \sin^2 \lambda \eta d\eta - \\ &- \lambda^2 \int_{-1}^1 C_4^0(\eta) C_4^q(\eta) \cos^2 \lambda \eta d\eta - \lambda C_3^q(1) \int_{-1}^1 C_2^0(\eta) \sin \lambda \eta d\eta - \lambda C_3^0(1) \int_{-1}^1 C_2^q(\eta) \sin \lambda \eta d\eta + \\ &+ \lambda \int_{-1}^1 [C_2^0(\eta) C_3^q(\eta) + C_2^q(\eta) C_3^0(\eta)] \sin \lambda \eta d\eta - \lambda^2 C_3^q(1) \int_{-1}^1 C_4^0(\eta) \sin \lambda \eta \cos \lambda \eta d\eta - \\ &- \lambda \int_{-1}^1 [C_2^0(\eta) C_4^q(\eta) + C_2^q(\eta) C_4^0(\eta)] \cos \lambda \eta d\eta - \lambda^2 C_3^0(1) \int_{-1}^1 C_4^q(\eta) \sin \lambda \eta \cos \lambda \eta d\eta + \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned}
& + \lambda^2 \int_{-1}^1 \left[C_3^q(\eta) C_4^0(\eta) + C_3^0(\eta) C_4^q(\eta) \right] \sin \lambda \eta \cos \lambda \eta d\eta; \\
r_{23} = & C_4^q(1) \int_{-1}^1 \alpha(\eta) \cos \lambda \eta d\eta - \lambda^2 \left[C_3^0(1) C_4^q(1) + C_3^q(1) C_4^0(1) \right] A + \\
& + \lambda^2 C_4^0(1) \int_{-1}^1 C_3^q(\eta) \sin^2 \lambda \eta d\eta + \lambda^2 C_4^q(1) \int_{-1}^1 C_3^0(\eta) \sin^2 \lambda \eta d\eta - \lambda C_4^q(1) \int_{-1}^1 C_2^0(\eta) \sin \lambda \eta d\eta - \\
& - \lambda C_4^0(1) \int_{-1}^1 C_2^q(\eta) \sin \lambda \eta d\eta - \lambda^2 C_4^q(1) \int_{-1}^1 C_4^0(\eta) \sin \lambda \eta \cos \lambda \eta d\eta - \\
& - \lambda^2 C_4^0(1) \int_{-1}^1 C_4^q(\eta) \sin \lambda \eta \cos \lambda \eta d\eta; \\
r_{31} = & - \frac{\lambda^2 \left[C_4^0(1) \right]^2 A}{2}; \quad r_{32} = \frac{\tilde{N}}{6k^2} + r_{32}^*; \quad r_{32}^* = \left[C_1^0(1) + C_2^0(1) \right] \int_{-1}^1 \alpha(\eta) d\eta - \\
& - \int_{-1}^1 \alpha(\eta) C_1^0(\eta) d\eta - \int_{-1}^1 \alpha(\eta) C_2^0(\eta) \eta d\eta + C_3^0(1) \int_{-1}^1 \alpha(\eta) \cos \lambda \eta d\eta - \\
& - \int_{-1}^1 \alpha(\eta) C_3^0(\eta) \cos \lambda \eta d\eta - \int_{-1}^1 \alpha(\eta) C_4^0(\eta) \sin \lambda \eta d\eta - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left[C_2^0(\eta) \right]^2 d\eta - \frac{\lambda^2 \left[C_3^0(1) \right]^2 A}{2} + \\
& + \lambda^2 C_3^0(1) \int_{-1}^1 C_3^0(\eta) \sin^2 \lambda \eta d\eta - \frac{\lambda^2}{2} \int_{-1}^1 \left[C_3^0(\eta) \right]^2 \sin^2 \lambda \eta d\eta - \frac{\lambda^2}{2} \int_{-1}^1 \left[C_4^0(\eta) \right]^2 \cos^2 \lambda \eta d\eta - \\
& - \lambda C_3^0(1) \int_{-1}^1 C_2^0(\eta) \sin \lambda \eta d\eta + \lambda \int_{-1}^1 C_2^0(\eta) C_3^0(\eta) \sin \lambda \eta d\eta - \lambda \int_{-1}^1 C_2^0(\eta) C_4^0(\eta) \cos \lambda \eta d\eta - \\
& - \lambda^2 C_3^0(1) \int_{-1}^1 C_4^0(\eta) \sin \lambda \eta \cos \lambda \eta d\eta + \lambda^2 \int_{-1}^1 C_3^0(\eta) C_4^0(\eta) \sin \lambda \eta \cos \lambda \eta d\eta; \\
r_{33} = & C_4^0(1) \int_{-1}^1 \alpha(\eta) \cos \lambda \eta d\eta - \lambda^2 C_3^0(1) C_4^0(1) A + \lambda^2 C_4^0(1) \int_{-1}^1 C_3^0(\eta) \sin^2 \lambda \eta d\eta - \\
& - \lambda C_4^0(1) \int_{-1}^1 C_2^0(\eta) \sin \lambda \eta d\eta - \lambda^2 C_4^0(1) \int_{-1}^1 C_4^0(\eta) \sin \lambda \eta \cos \lambda \eta d\eta.
\end{aligned}$$

Тут $A = \int_{-1}^1 \sin^2 \lambda \eta d\eta = 1 - \frac{\sin 2\lambda}{2\lambda}$.

Оскільки підінтегральні функції у формулах (2.11), (2.19) є неперервними, то інтеграли в цих формулах існують, але для більшості поперечних перерізів циліндричної оболонки первісні підінтегральних функцій не виражаються через елементарні функції. Тому в розробленій методиці відзначені інтеграли обчислюються чисельно з використанням формули трапецій. Враховуючи, що підінтегральні вирази у формулах (2.11), (2.19) є парними функціями, чисельне інтегрування в цих формулах виконуємо на відрізку $[0; 1]$.

Квадратне рівняння (2.18) має дійсні розв'язки при невід'ємних значеннях його дискримінанта:

$$D = (r_{21}^2 - 4r_{11}r_{31})\sin^4 \lambda + (r_{23}^2 + 2r_{21}r_{22} - 4r_{13}r_{33} - 4r_{11}r_{32} - 4r_{12}r_{31})\sin^2 \lambda \cos^2 \lambda + \\ + (r_{22}^2 - 4r_{12}r_{32})\cos^4 \lambda + 2(r_{21}r_{23} - 2r_{11}r_{33} - 2r_{31}r_{13})\sin^3 \lambda \cos \lambda + \\ + 2(r_{22}r_{23} - 2r_{12}r_{33} - 2r_{32}r_{13})\sin \lambda \cos^3 \lambda = \tilde{D} \cos^2 \lambda \geq 0; \quad (2.20)$$

$$\tilde{D} = (r_{23}^2 + 2r_{21}r_{22} - 4r_{13}r_{33} - 4r_{11}r_{32} - 4r_{12}r_{31})\sin^2 \lambda + (r_{22}^2 - 4r_{12}r_{32})\cos^2 \lambda + \\ + 2(r_{22}r_{23} - 2r_{12}r_{33} - 2r_{32}r_{13})\sin \lambda \cos \lambda \geq 0,$$

де враховано, що $r_{21}^2 - 4r_{11}r_{31} = 0$ і $r_{21}r_{23} - 2r_{11}r_{33} - 2r_{31}r_{13} = 0$.

Таким чином, точний розв'язок нелінійної крайової задачі (2.3) – (2.6) отримано в параметричній формі з величиною λ в якості параметра.

§3. Граничні значення узагальненого геометричного параметра.

Чисельний аналіз виразу $\tilde{D}$ свідчить про те, що для кожного значення узагальненого геометричного параметра $\tilde{k}$ існує певне значення параметра внутрішнього зусилля $\lambda_{\max}$, для якого $\tilde{D}(\lambda) > 0$ при $\lambda < \lambda_{\max}$, $\tilde{D}(\lambda_{\max}) = 0$ і $\tilde{D}(\lambda) < 0$ при $\lambda > \lambda_{\max}$.

Значення параметра $\tilde{k}$, для якого $\lambda_{\max} = \pi/2$, позначається $\tilde{k}_{\pi/2} = \tilde{k}|_{\lambda=\pi/2}$ і знаходиться з умови $\tilde{D}|_{\lambda=\pi/2} = 0$.

Звідки отримаємо

$$\tilde{k}_{\pi/2} = \sqrt{\frac{2r_{11}\tilde{N}}{3(r_{23}^2 + 2r_{21}r_{22} - 4r_{13}r_{33} - 4r_{12}r_{31} - 4r_{11}r_{32}^*)}} \Big|_{\lambda=\pi/2}. \quad (3.1)$$

Аналогічно з умови $\tilde{D}|_{\lambda=\pi} = 0$ визначаємо величину узагальненого геометричного параметра $\tilde{k}_{\pi}$, для якої $\lambda_{\max} = \pi$:

$$\tilde{k}_{\pi} = \sqrt{\frac{2r_{12}\tilde{N}}{3(r_{22}^2 - 4r_{12}r_{32}^*)}} \Big|_{\lambda=\pi}. \quad (3.2)$$

Отримані граничні значення узагальненого геометричного параметра розбивають область зміни $\tilde{k}$ на три проміжки.

1) $0 < \tilde{k} < \tilde{k}_{\pi/2}$ ($0 < \lambda_{\max} < \pi/2$). В цьому проміжку залежність прогину у вершині оболонки від навантаження $\tilde{w}|_{\eta=0}(\tilde{q})$ є монотонно зростаючою та існує тільки одна стійка симетрична форма рівноваги оболонки (втрати стійкості немає).

2) $\tilde{k}_{\pi/2} \leq \tilde{k} < \tilde{k}_{\pi}$ ($\pi/2 \leq \lambda_{\max} < \pi$). В цьому діапазоні залежність $\tilde{w}|_{\eta=0}(\tilde{q})$ має точки максимуму і мінімуму (верхнє і нижнє критичні значення навантаження) та існують дві різні форми стійкої рівноваги оболонки, перехід між якими відбувається за рахунок хлопка.

3) $\tilde{k} \geq \tilde{k}_{\pi}$ ($\lambda_{\max} \geq \pi$). В цьому випадку можлива втрата стійкості оболонки за рахунок біфуркації з переходом до несиметричної форми рівноваги.

§4. Апробація аналітично-чисельного підходу.

Ефективність розробленої методики показана на прикладі розв'язання тестової задачі і порівняння отриманих результатів з даними точного розв'язку. Як тестовий приклад розглянута геометрично нелінійна задача про деформування і стійкість піддатливої на поперечний зсув довгої овальної незамкненої циліндричної оболонки з шарнірно закріпленими поздовжніми краями за дії рівномірного нормального тиску, прикладеного з боку опуклості оболонки.

Поперечний переріз незамкненої циліндричної оболонки має форму дуги овалу, кривизна якого змінюється за законом [6, 13]:

$$k = k_0(1 - \xi \cos 2k_0 s) = k_0(1 - \xi \cos \tilde{k}_0 \eta), \quad (4.1)$$

де $k_0 = 1/r_0$; r_0 – радіус кола, довжина якого дорівнює довжині овалу; ξ – параметр, який є мірою відхилення овалу від кола ($-1 \leq \xi \leq 1$).

Відношення півосей овалу (a/b), що відповідає заданому значенню його параметра ξ , обчислюється за формулою:

$$a/b = \int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\tilde{s} / \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\tilde{s}, \quad (4.2)$$

де $\tilde{s} = s/r_0$; φ – кут між нормаллю до серединної поверхні і вертикальною віссю:

$$\varphi = \int_0^s k ds = k_0 s - 0,5\xi \sin 2k_0 s = \tilde{s} - 0,5\xi \sin 2\tilde{s}.$$

Розрахунки виконані для оболонки з параметрами:

$$\tilde{k}_0 = 0,5; \quad \xi = 0,5; \quad \beta = 0,08.$$

В цьому випадку граничні значення узагальненого геометричного параметра і відношення півосей овалу дорівнюють:

$$\tilde{k}_{\pi/2} = 1,999; \quad \tilde{k}_{\pi} = 3,401; \quad a/b = 1,405.$$

У табл. 1 для величини узагальненого геометричного параметра $\tilde{k} = 3$ наведено верхнє і нижнє критичні значення навантаження $\tilde{q}_u$ і $\tilde{q}_l$, при досягненні яких відбувається втрата стійкості за рахунок хлопка ($\tilde{k}_{\pi/2} < \tilde{k} < \tilde{k}_{\pi}$), та відповідні цим наванта-

Таблиця 1

НДС	АЧР							ТР
	$n = 5$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 80$	$n = 160$	$n = 320$	
$\tilde{q}_u \cdot 10$	14,1078	14,2064	14,2309	14,2370	14,2385	14,2389	14,2390	14,2391
$-\tilde{w}_u \cdot 10$	1,51294	1,51740	1,51839	1,51904	1,51880	1,51874	1,51872	1,51872
$-\tilde{\sigma}_u^+$	9,50662	9,59034	9,61056	9,61788	9,61747	9,61737	9,61734	9,61733
$\tilde{\sigma}_u^-$	2,13857	2,16548	2,17207	2,17485	2,17444	2,17433	2,17431	2,17430
$\tilde{q}_l \cdot 10$	6,99441	6,98609	6,98466	6,98435	6,98427	6,98425	6,98425	6,98425
$-\tilde{w}_l \cdot 10$	3,79271	3,82586	3,83373	3,83587	3,83641	3,83654	3,83658	3,83659
$-\tilde{\sigma}_l^+$	18,1560	18,3683	18,4202	18,4334	18,4367	18,4376	18,4378	18,4378
$\tilde{\sigma}_l^-$	10,8289	11,0344	11,0840	11,0972	11,1005	11,1013	11,1016	11,1016
$\Delta_{\max}, \%$	2,4564	0,6053	0,1585	0,0396	0,0099	0,0027	0,0007	0

женням значення у вершині панелі прогинів $\tilde{w}_u, \tilde{w}_l$ і нормальних напружень $\tilde{\sigma}_u^{\pm}, \tilde{\sigma}_l^{\pm}$ на зовнішній і внутрішній поверхнях. Дані отримані з використанням розробленої методики (аналітично-чисельного розв'язку – АЧР) для ряду значень кількості частин n , на які розбивається відрізок інтегрування $[0; 1]$, і точного розв'язку (ТР) [17]. Тут же наведені значення максимальних похибок ($\Delta_{\max}$) АЧР в залежності від кількості розбиттів відрізка інтегрування.

Для панелі з узагальненим геометричним параметром $\tilde{k} = 4$ у табл. 2 представлено значення критичного навантаження $\tilde{q}_u^*$, при досягненні якого оболонка може втратити стійкість за рахунок біфуркації з переходом до несиметричної форми рівноваги ($\tilde{k} > \tilde{k}_\pi$). Також в цій таблиці наведено відповідні навантаженню $\tilde{q}_u^*$ значення прогину $\tilde{w}_u^*$ і нормальних напружень $(\tilde{\sigma}_u^{\pm})^*$ у вершині панелі.

Таблиця 2

НДС	АЧР							ТР
	$n = 5$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 80$	$n = 160$	$n = 320$	
$\tilde{q}_u^* \cdot 10$	20,0671	20,1803	20,2078	20,2146	20,2163	20,2167	20,2168	20,2169
$-\tilde{w}_u^* \cdot 10$	1,27077	1,26967	1,26945	1,26940	1,26938	1,26938	1,26938	1,26938
$-(\tilde{\sigma}_u^+)^*$	12,6686	12,7697	12,7947	12,8009	12,8024	12,8028	12,8029	12,8029
$(\tilde{\sigma}_u^-)^*$	1,63849	1,73954	1,76450	1,77072	1,77227	1,77266	1,77276	1,77279
$\Delta_{\max}, \%$	7,5756	1,8756	0,4676	0,1168	0,0293	0,0073	0,0017	0

Аналіз даних, представлених у табл. 1, 2, свідчить про те, що при розбитті відрізка інтегрування на 5, 10, 20, 40, 80, 160 і 320 частин найбільша відмінність ($\Delta_{\max}$) результатів аналітично-чисельного розв'язку даної задачі від її точного розв'язку не перевищує, відповідно, 2,4564; 0,6053; 0,1585; 0,0396; 0,0099; 0,0027; 0,0007(%) для панелі з узагальненим геометричним параметром $\tilde{k} = 3$ та 7,5756; 1,8756; 0,4676; 0,1168; 0,0293; 0,0073; 0,0017(%) для випадку, коли $\tilde{k} = 4$.

Таким чином, розроблена аналітично-чисельна методика може бути застосована для дослідження нелінійного деформування і стійкості нескінченно довгих пологих некругових циліндричних оболонок з врахуванням деформацій поперечного зсуву.

§5. Числові результати і їх аналіз.

На основі отриманого аналітично-чисельного розв'язку геометрично нелінійної задачі (2.3) – (2.6) дослідимо НДС і стійкість піддатливих на поперечний зсув довгих еліптичних і овальних циліндричних панелей з шарнірно закріпленими поздовжніми краями за дії рівномірно розподіленого нормального поверхневого навантаження інтенсивності q .

5.1. Нелінійне деформування еліптичної циліндричної панелі під дією критичного навантаження. Представимо результати розрахунків для нескінченно довгої незамкнутої циліндричної оболонки з еліптичним поперечним перерізом.

Параметричні рівняння контуру поперечного перерізу оболонки запишемо у вигляді

$$X = \frac{a^2 \sin \varphi}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{1/2}}; \quad Z = \frac{b^2 \cos \varphi}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{1/2}} - z_N, \quad (5.1)$$

де a, b – півосі еліпса; $z_N = b^2 \cos \varphi_N / (a^2 \sin^2 \varphi_N + b^2 \cos^2 \varphi_N)^{1/2}$; $-\varphi_N \leq \varphi \leq \varphi_N$.

Кривизна еліпса в цьому випадку обчислюється за формулою:

$$k = \frac{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{3/2}}{a^2 b^2} = k_0 \chi(\varphi), \quad (5.2)$$

де $\chi(\varphi) = \frac{(1 - 2g \cos 2\varphi + g^2)^{3/2}}{(1 - g^2)^2} t$; $t = \frac{2(1 - g^2)^2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1 - 2g \cos 2\varphi + g^2)^{3/2}}$; $g = \frac{a - b}{a + b} = (a/b - 1)/(a/b + 1)$; $k_0 = 1/r_0$; $r_0 = (a + b)t/2$ – радіус кола, довжина якого дорівнює довжині еліпса.

Для виконання чисельного інтегрування за правилом трапецій у формулах (2.11), (2.19) необхідно відрізок інтегрування $\eta \in [0; 1]$ розбити на n рівних частин і обчислити значення підінтегральних функцій у вузлах інтегрування i (зокрема, функції кривизни $\alpha(\eta_i)$). З порівняння виразів для кривизни (1.1) і (5.2) випливає, що $\alpha(\eta_i) = \chi(\varphi_i)$, де η_i, φ_i – значення координат η, φ в i -му вузлі. Зазначимо, що вузли розташовані рівномірно за безрозмірною координатою довжини дуги еліпса η і нерівномірно – за кутом φ .

Значення кута φ у вузлах обчислюємо за допомогою такого рекурентного співвідношення:

$$\varphi_i = \varphi_{i-1} + \frac{\tilde{k}_0 \chi(\varphi_{i-1})}{2K}, \quad (5.3)$$

де $i = 2, 3, \dots, K + 1$; $K = n_0 n$; $\varphi_1 = 0$.

Для збільшення точності розрахунків за формулою (5.3) кожна частина відрізка інтегрування величиною $1/n$ розбивалася додатково на n_0 рівних частин. Вузлами інтегрування у формулі (5.3) відповідають вузли з номерами 1, $n_0 + 1$, $2n_0 + 1$, ..., $K + 1$.

Відношення стріли підйому до відстані між поздовжніми краями панелі обчислюється за формулою:

$$\tilde{f} = \int_0^\delta \sin \varphi ds \left/ 2 \int_0^\delta \cos \varphi ds \right. = \int_0^1 \sin \varphi d\eta \left/ 2 \int_0^1 \cos \varphi d\eta \right., \quad (5.4)$$

де кут φ у вузлах чисельного інтегрування для еліптичної панелі визначається за допомогою співвідношення (5.3).

Залежність величини $\tilde{f}$ від параметра $\tilde{k}_0$ та відношення a/b наведена в табл. 3.

Таблиця 3

$\tilde{f}$								
a/b	$\tilde{k}_0$							
	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	2,00	2,50
1/3	0,186	0,335	0,460	0,571	0,676	0,778	0,981	1,195
1/2	0,095	0,184	0,265	0,341	0,414	0,485	0,628	0,779
2/3	0,059	0,117	0,174	0,229	0,284	0,338	0,450	0,570
1	0,031	0,063	0,095	0,128	0,162	0,197	0,273	0,361
3/2	0,018	0,035	0,054	0,072	0,092	0,113	0,162	0,222
2	0,012	0,024	0,037	0,050	0,063	0,078	0,112	0,156
3	0,007	0,015	0,023	0,030	0,039	0,048	0,068	0,095

Зазначимо, що панель вважається пологою, коли $\tilde{f} \leq 0,2$.

З використанням розробленої аналітично-чисельної методики для ряду значень параметрів a/b , β , $\tilde{k}_0$, $\tilde{k}$ отримано граничні значення узагальненого геометричного параметра $\tilde{k}_{\pi/2}$ і $\tilde{k}_\pi$, верхнє і нижнє критичні значення навантаження $\tilde{q}_u$ і $\tilde{q}_l$, при досягненні яких відбувається втрата стійкості за рахунок хлопка, критичне навантаження $\tilde{q}_u^*$, при досягненні якого оболонка може втратити стійкість за рахунок біфуркації, та навантаження $\tilde{q}_l^*$, яке є нижньою межею для $\tilde{q}$ при несиметричній формі втрати стійкості. Також були обчислені відповідні цим навантаженням значення прогинів і напружень на зовнішній і внутрішній поверхнях у вершині панелі $\tilde{w}_u$, $\tilde{w}_l$, $\tilde{w}_u^*$, $\tilde{w}_l^*$, $\tilde{\sigma}_u^\pm$, $\tilde{\sigma}_l^\pm$, $(\tilde{\sigma}_u^\pm)^*$, $(\tilde{\sigma}_l^\pm)^*$. В табл. 4, 6 наведено результати розрахунків для моделі Тимошенка ($\beta \neq 0$), а в табл. 5, 7 – для моделі Кірхгофа – Лява ($\beta = 0$). В цих таблицях величини навантажень, прогинів і напружень, що розміщені у рядках, значення параметра $\tilde{k}$ в яких позначені зірочкою зверху, відповідають несиметричній формі втрати стійкості, тобто величинам $\tilde{q}_u^*$, $\tilde{q}_l^*$, $\tilde{w}_u^*$, $\tilde{w}_l^*$, $(\tilde{\sigma}_u^\pm)^*$, $(\tilde{\sigma}_l^\pm)^*$.

Таблиця 4

$\beta = 0,08; \tilde{k}_0 = 0,25$										
a/b	$\tilde{k}_{\pi/2}; \tilde{k}_\pi$	$\tilde{k}$	$\tilde{q}_u$	$\tilde{q}_l$	$-\tilde{w}_u$	$-\tilde{w}_l$	$-\tilde{\sigma}_u^+$	$\tilde{\sigma}_u^-$	$-\tilde{\sigma}_l^+$	$\tilde{\sigma}_l^-$
0,50	0,341; 0,571	0,43	7,007	5,338	1,003	2,094	8,216	2,502	14,09	8,391
		0,50	8,132	4,253	0,895	2,218	9,238	2,022	17,63	10,48
		0,90*	14,26	-1,179	0,338	2,754	9,364	-1,666	39,61	28,58
0,60	0,459; 0,772	0,50	4,714	4,459	0,887	1,412	7,802	3,176	11,06	6,437
		0,70	6,321	2,909	0,651	1,672	9,643	1,974	18,74	11,18
		0,90*	8,694	1,087	0,555	1,745	12,33	1,305	27,23	16,20
0,70	0,589; 0,992	0,70	3,883	3,276	0,617	1,180	8,006	2,762	12,91	7,677
		0,90	4,945	2,258	0,508	1,306	9,696	1,999	18,85	11,26
		1,20*	7,066	0,583	0,391	1,405	11,97	0,941	28,90	17,87
0,85	0,799; 1,348	0,90	2,762	2,514	0,485	0,837	7,857	3,005	11,80	6,946
		1,20	3,572	1,733	0,378	0,958	9,550	2,066	18,38	11,00
		1,60*	5,107	0,540	0,305	1,019	12,28	1,249	22,18	17,15
1,00	1,022; 1,726	1,20	2,216	1,907	0,361	0,674	7,974	2,828	12,65	7,511
		1,60	2,926	1,231	0,289	0,758	9,951	1,975	19,53	11,70
		2,60*	4,681	-0,266	0,130	0,904	10,23	-0,799	38,22	27,19
1,20	1,334; 2,253	1,60	1,725	1,435	0,270	0,523	8,056	2,746	13,11	7,809
		2,10	2,257	0,929	0,221	0,582	10,02	1,969	19,70	11,81
		2,60*	2,957	0,428	0,199	0,594	12,71	1,680	27,02	15,99
1,50	1,819; 3,072	2,10	1,232	1,086	0,207	0,375	7,921	2,898	12,31	7,292
		2,90	1,681	0,659	0,161	0,429	10,15	1,942	20,08	12,04
		3,50*	2,132	0,352	0,152	0,430	12,91	1,881	26,47	15,44
2,00	2,647; 4,471	2,90	0,821	0,771	0,153	0,247	7,828	3,163	11,22	6,552
		4,10	1,116	0,488	0,112	0,292	9,855	2,009	19,24	11,53
		6,80*	1,815	-0,108	0,049	0,350	10,21	-0,818	38,67	27,64

Таблиця 5

$\beta = 0; \quad \tilde{k}_0 = 0,25$										
a/b	$\tilde{k}_{\pi/2}; \tilde{k}_{\pi}$	$\tilde{k}$	$\tilde{q}_u$	$\tilde{q}_l$	$-\tilde{w}_u$	$-\tilde{w}_l$	$-\tilde{\sigma}_u^+$	$\tilde{\sigma}_u^-$	$-\tilde{\sigma}_l^+$	$\tilde{\sigma}_l^-$
0,5	0,374; 0,753	0,50	8,873	5,904	0,953	2,141	10,87	3,348	19,82	12,30
		0,65	12,07	2,749	0,817	2,288	13,89	2,336	28,72	17,23
		0,90*	19,63	-4,393	0,701	2,411	20,17	0,429	46,46	26,72
1,0	1,119; 2,260	1,2	2,519	2,416	0,409	0,624	9,997	4,568	13,83	8,401
		1,6	3,174	1,766	0,304	0,731	11,54	3,188	21,90	13,56
		2,6*	6,172	1,058	0,263	0,778	21,56	1,819	44,41	24,68
2,0	2,897; 5,852	4,1	1,212	0,695	0,118	0,282	11,45	3,231	21,591	13,39
		5,3	1,669	0,248	0,104	0,298	14,91	2,338	31,04	18,56
		6,8*	2,426	-0,450	0,099	0,303	21,37	1,626	45,15	25,41

Таблиця 6

$\beta = 0,08; \quad \tilde{k}_0 = 0,50$										
a/b	$\tilde{k}_{\pi/2}; \tilde{k}_{\pi}$	$\tilde{k}$	$\tilde{q}_u$	$\tilde{q}_l$	$-\tilde{w}_u$	$-\tilde{w}_l$	$-\tilde{\sigma}_u^+$	$\tilde{\sigma}_u^-$	$-\tilde{\sigma}_l^+$	$\tilde{\sigma}_l^-$
0,50	0,367; 0,606	0,43	6,155	5,308	0,998	1,864	7,797	2,660	12,43	7,302
		0,50	7,007	4,468	0,866	2,002	8,497	2,040	15,66	9,220
		0,90*	12,91	-1,033	0,339	2,520	8,558	-2,472	35,86	24,83
0,60	0,477; 0,793	0,50	4,466	4,365	0,911	1,296	7,799	3,405	10,18	5,786
		0,70	5,843	3,020	0,638	1,587	9,189	1,930	17,63	10,43
		0,90*	8,045	1,255	0,574	1,636	12,23	1,200	25,53	14,50
0,70	0,600; 1,005	0,70	3,759	3,262	0,617	1,142	7,907	2,804	12,48	7,384
		0,90	4,753	2,303	0,502	1,272	9,458	1,967	18,27	10,87
		1,20*	6,832	0,623	0,394	1,365	11,84	0,813	28,05	17,02
0,85	0,804; 1,353	0,90	2,736	2,508	0,486	0,829	7,840	3,026	11,67	6,860
		1,20	3,529	1,743	0,377	0,950	9,478	2,056	18,21	10,88
		1,60*	5,054	0,549	0,305	1,010	12,24	1,208	27,92	16,89
1,00	1,022; 1,726	1,20	2,216	1,907	0,361	0,674	7,974	2,828	12,65	7,511
		1,60	2,926	1,231	0,289	0,758	9,951	1,975	19,53	11,70
		2,60*	4,681	-0,266	0,130	0,904	10,23	-0,799	38,22	27,19
1,20	1,330; 2,248	1,60	1,735	1,436	0,270	0,526	8,075	2,740	13,18	7,861
		2,10	2,273	0,926	0,221	0,585	10,06	1,978	19,81	11,89
		2,60*	2,976	0,424	0,198	0,597	12,73	1,702	27,17	16,14
1,50	1,810; 3,062	2,10	1,242	1,087	0,207	0,378	7,950	2,888	12,43	7,373
		2,90	1,700	0,654	0,161	0,432	10,23	1,962	20,25	12,17
		3,50*	2,154	0,347	0,151	0,434	12,94	1,911	26,70	15,67
2,00	2,632; 4,454	2,90	0,828	0,773	0,152	0,250	7,842	3,138	11,35	6,646
		4,10	1,130	0,485	0,113	0,294	9,934	2,025	19,43	11,66
		6,80*	1,829	-0,108	0,050	0,353	10,31	-0,718	38,97	27,94

Таблиця 7

$\beta = 0; \quad \tilde{k}_0 = 0,50$										
a/b	$\tilde{k}_{\pi/2}; \tilde{k}_{\pi}$	$\tilde{k}$	$\tilde{q}_u$	$\tilde{q}_l$	$-\tilde{w}_u$	$-\tilde{w}_l$	$-\tilde{\sigma}_u^+$	$\tilde{\sigma}_u^-$	$-\tilde{\sigma}_l^+$	$\tilde{\sigma}_l^-$
0,5	0,402; 0,807	0,50	7,717	6,008	0,940	1,928	10,23	3,501	17,62	10,90
		0,65	10,20	3,538	0,782	2,091	12,54	2,308	25,61	15,41
		0,90*	16,07	-2,054	0,795	2,085	20,61	0,869	40,44	20,70
1,0	1,119; 2,260	1,2	2,519	2,416	0,409	0,624	9,997	4,568	13,83	8,401
		1,6	3,174	1,766	0,304	0,731	11,54	3,188	21,90	13,56
		2,6*	6,172	1,058	0,263	0,778	21,56	1,819	44,41	24,68
2,0	2,879; 5,820	4,1	1,227	0,692	0,118	0,284	11,52	3,230	21,79	13,51
		5,3	1,693	0,237	0,104	0,300	15,06	2,360	31,35	18,75
		6,8*	2,463	-0,473	0,098	0,307	21,36	1,620	45,64	25,89

З аналізу даних, наведених в табл. 4 – 7, випливає, що при фіксованих параметрах $\beta, \tilde{k}_0$ зі зростанням відношення півосей еліпса a/b , тобто для більш пологих панелей, граничні значення узагальненого геометричного параметра $\tilde{k}_{\pi/2}, \tilde{k}_{\pi}$ також зростають.

Оскільки $\tilde{k} = \delta^2 k_0 / h = \tilde{k}_0 \delta / 2h$, то це означає, що при фіксованому $\tilde{k}_0$ зростає відношення δ/h , тобто втрата стійкості стає можливою для більш тонких панелей. Для значень параметра $\tilde{k} > \tilde{k}_{\pi/2}$ зі зростанням відношення a/b величини верхніх критичних значень навантажень хлопка і біфуркації та максимальних прогинів і напружень у вершині панелі спадають. Так, для панелі з параметрами $\beta = 0,08$; $\tilde{k}_0 = 0,25$ при зростанні відношення a/b від 0,5 до 0,6 спадання відповідних величин становить: 42% для верхнього критичного навантаження хлопка та 36,3% і 36,3% для відповідних йому максимальних прогинів і напружень у вершині панелі при $\tilde{k} = 0,5$; 39% для верхнього критичного навантаження біфуркації та 36,6% і 31,0% для відповідних йому максимальних прогинів і напружень у вершині при $\tilde{k} = 0,9$. Варто зазначити, що в цьому випадку різниця між верхніми і нижніми критичними значеннями навантаження зменшується, тобто відбувається звуження діапазонів зміни параметра навантаження $\tilde{q}_0$, в яких рівновага оболонки є нестійкою. При спаданні відношення a/b значення узагальненого геометричного параметра $\tilde{k}_{\pi/2}$ також спадають, що призводить до звуження області докритичного деформування. З представлених в табл. 4 – 7 даних випливає, що волокна поблизу зовнішньої поверхні панелі при всіх наведених значеннях навантаження та параметрів a/b і $\tilde{k}$ завжди стиснуті, а поблизу внутрішньої поверхні панелі – майже завжди розтягнуті. При цьому найбільші напруження у вершині панелі є стискаючими та виникають на зовнішній поверхні під дією нижніх критичних значень навантаження.

Зростання параметра $\tilde{k}_0$ призводить до зростання граничних значень узагальненого геометричного параметра при $a/b < 1$ та до їх спадання – при $a/b > 1$, до спадання верхніх критичних значень навантаження і відповідних їм максимальних значень напруження у вершині панелі при $a/b < 1$ та до їх зростання – при $a/b > 1$. Зазначимо, що ці зміни є незначними при $a/b \geq 0,85$. У випадку панелі кругового перерізу ($a/b = 1$) зміна параметра $\tilde{k}_0$ не впливає на граничні значення узагальненого геометричного параметра, на критичні навантаження і НДС оболонки.

Врахування деформацій поперечного зсуву ($\beta \neq 0$) призводить до зменшення значень всіх видів критичного навантаження і відповідних їм максимальних напружень у вершині панелі та до збільшення відповідних максимальних прогинів у вершині панелі в порівнянні з даними розрахунків для моделі Кірхгофа–Лява ($\beta = 0$). Так, на основі даних табл. 6, 7 для панелі з параметрами $a/b = 0,5$; $\tilde{k}_0 = 0,5$; $\beta = 0,08$ зменшення становить: 9,2% і 25,6% для верхніх і нижніх критичних навантажень хлопка та 16,9% і 11,1% для відповідних їм максимальних напружень у вершині панелі при $\tilde{k} = 0,5$; 19,7% для навантаження біфуркації та 58,5% для відповідного йому максимального напруження у вершині панелі при $\tilde{k} = 0,9$. При цьому збільшення максимальних прогинів у вершині панелі, які відповідають зазначеним вище навантаженням, складає: 3,8% при $\tilde{k} = 0,5$ і 20,9% при $\tilde{k} = 0,9$.

5.2. Порівняння результатів розрахунків на стійкість овальної та еліптичної циліндричних панелей. Спочатку дослідимо стійкість довгої овальної циліндричної панелі, кривизна якої задається співвідношенням (4.1).

Конкретні числові результати отримано для панелі з такими параметрами:

$$\tilde{k}_0 = 0,75; \quad \beta = 0,08; \quad \xi = \pm 0,1; \pm 0,2; \pm 0,4; \pm 0,6; \pm 0,8.$$

Значення відношення півосей овалу обчислюються за формулою (4.2) і для зростаючих значень параметра ξ дорівнюють:

$$a/b = 0,5707; 0,6628; 0,7635; 0,8748; 0,9355; 1,0690; 1,1431; 1,3098; 1,5087; 1,7523.$$

В табл. 8 представлено граничні значення узагальненого геометричного параметра, критичні значення навантаження, відповідні їм прогини і напруження на зовнішній і внутрішній поверхнях у вершині довгої циліндричної панелі овального перерізу.

Таблиця 8

Овальна циліндрична панель ($\beta = 0,08; \tilde{k}_0 = 0,75$)										
ξ	$\tilde{k}_{\pi/2}; \tilde{k}_{\pi}$	$\tilde{k}$	$\tilde{q}_u$	$\tilde{q}_l$	$-\tilde{w}_u$	$-\tilde{w}_l$	$-\tilde{\sigma}_u^+$	$\tilde{\sigma}_u^-$	$-\tilde{\sigma}_l^+$	$\tilde{\sigma}_l^-$
-0,8	0,581; 0,974	0,70	3,970	3,279	0,616	1,202	8,028	2,681	13,15	7,811
		1,15*	6,965	0,736	0,421	1,396	12,02	0,993	27,61	16,58
-0,6	0,652; 1,093	0,85	3,788	2,685	0,510	1,115	8,431	2,407	14,89	8,882
		1,35*	6,505	0,375	0,331	1,290	11,53	0,503	29,54	18,51
-0,4	0,741; 1,245	0,95	3,277	2,412	0,455	0,973	8,339	2,476	14,51	8,660
		1,45*	5,378	0,680	0,345	1,080	12,33	1,307	27,16	16,13
-0,2	0,859; 1,446	1,15	2,941	1,970	0,380	0,855	8,616	2,358	15,49	9,262
		1,65*	4,517	0,720	0,318	0,912	12,73	1,704	26,37	15,34
-0,1	0,934; 1,574	1,30	2,815	1,710	0,340	0,799	8,904	2,256	16,43	9,832
		1,90*	4,445	0,381	0,248	0,884	12,03	1,002	28,83	17,80
0,1	1,130; 1,910	1,50	2,221	1,517	0,291	0,649	8,603	2,423	15,35	9,200
		2,25*	3,581	0,424	0,222	0,715	12,50	1,475	27,96	16,93
0,2	1,262; 2,139	1,70	2,015	1,332	0,258	0,585	8,715	2,402	15,70	9,422
		2,50*	3,178	0,417	0,203	0,635	12,72	1,691	27,74	16,71
0,4	1,648; 2,815	2,00	1,409	1,151	0,217	0,427	8,165	2,769	13,42	8,037
		3,25*	2,399	0,374	0,163	0,480	13,23	2,196	27,55	16,52
0,6	2,375; 4,127	2,70	0,935	0,843	0,163	0,285	8,000	3,091	12,11	7,208
		4,50*	1,527	0,424	0,138	0,310	14,81	3,781	25,61	14,58
0,8	4,253; 7,856	5,00	0,535	0,462	0,088	0,164	8,280	3,159	13,00	7,886
		8,40*	0,822	0,308	0,086	0,167	17,24	6,213	26,65	15,62

Далі виконаємо розрахунки на стійкість еліптичних циліндричних панелей з тими самими значеннями довжини $2\pi r_0$ та відношення півосей a/b , що й у відповідних циліндричних панелях овального перерізу (табл. 8).

В табл. 9 наведені характеристики стійкості та НДС еліптичних циліндричних панелей, які аналогічні відповідним характеристикам для овальних панелей (табл. 8).

Таблиця 9

Еліптична циліндрична панель ($\beta = 0,08; \tilde{k}_0 = 0,75$)										
a/b	$\tilde{k}_{\pi/2}; \tilde{k}_{\pi}$	$\tilde{k}$	$\tilde{q}_u$	$\tilde{q}_l$	$-\tilde{w}_u$	$-\tilde{w}_l$	$-\tilde{\sigma}_u^+$	$\tilde{\sigma}_u^-$	$-\tilde{\sigma}_l^+$	$\tilde{\sigma}_l^-$
0,5707	0,472; 0,775	0,70	5,993	2,955	0,633	1,601	9,036	1,613	17,68	10,29
		1,15*	10,03	-0,840	0,262	1,962	8,259	-2,771	35,46	24,43
0,6628	0,573; 0,950	0,85	4,920	2,453	0,526	1,322	9,215	1,826	17,83	10,51
		1,35*	8,112	-0,420	0,251	1,586	9,438	-1,592	34,50	23,47
0,7635	0,697; 1,164	0,95	3,697	2,360	0,460	1,061	8,682	2,226	15,87	9,445
		1,45*	6,125	0,277	0,300	1,215	11,21	0,181	29,66	18,63
0,8748	0,845; 1,420	1,15	3,042	1,955	0,381	0,875	8,719	2,294	15,88	9,484
		1,65*	4,706	0,613	0,305	0,946	12,39	1,365	27,09	16,06
0,9355	0,930; 1,566	1,30	2,840	1,705	0,340	0,804	8,934	2,240	16,54	9,893
		1,90*	4,485	0,360	0,246	0,891	11,96	0,929	29,01	17,98
1,0690	1,124; 1,900	1,50	2,242	1,514	0,291	0,654	8,630	2,404	15,46	9,262
		2,25*	3,620	0,403	0,219	0,722	12,42	1,388	28,17	17,14
1,1431	1,235; 2,091	1,70	2,102	1,318	0,259	0,602	8,855	2,331	16,19	9,708
		2,50*	3,329	0,337	0,194	0,662	12,36	1,327	28,63	17,60
1,3098	1,493; 2,531	2,00	1,695	1,135	0,219	0,493	8,677	2,416	15,57	9,348
		3,25*	2,934	1,047	0,133	0,576	11,69	0,656	31,70	20,67
1,5087	1,808; 3,068	2,70	1,567	0,779	0,168	0,423	9,551	2,155	18,29	10,99
		4,50*	2,617	-0,105	0,080	0,506	10,73	-0,305	37,37	26,34
1,7523	2,201; 3,738	5,00*	2,046	0,018	0,082	0,399	11,42	0,385	33,48	22,45
		8,40*	2,399	-0,335	0,027	0,454	8,969	-2,061	58,95	47,92

Аналіз наведених в табл. 8, 9 результатів свідчить про те, що для всіх значень параметра ξ граничні значення узагальненого геометричного параметра $\tilde{k}_{\pi/2}, \tilde{k}_{\pi}$ овальної панелі більші від відповідних величин для еліптичної панелі. Звідси отримаємо два наслідки: 1) області докритичного деформування овальної циліндричної панелі ширші від відповідних областей для еліптичної панелі; 2) оскільки значення параметра $\tilde{k}_0$ для обох панелей є однаковими, то втрата стійкості для овальної циліндричної панелі стає можливою для більш тонких панелей, ніж для еліптичної панелі.

Для циліндричної панелі еліптичного перерізу при всіх значеннях параметра a/b верхні критичні значення навантаження більші, а нижні – менші від відповідних величин для овальної панелі. Це означає, що діапазони зміни параметра навантаження, в яких рівновага панелі є нестійкою, для еліптичної панелі є ширшими від відповідних діапазонів для овальної панелі.

З представлених в табл. 8, 9 даних випливає, що для всіх пар значень параметрів ξ і a/b максимальні прогини і напруження еліптичної циліндричної панелі перевищують відповідні характеристики овальної панелі. Найменша відмінність між результатами розрахунків НДС і стійкості овальної та еліптичної циліндричних панелей має місце при $\xi = -0,1$ ($a/b = 0,9355$) і $\xi = 0,1$ ($a/b = 1,0690$), а найбільша – при $\xi = -0,8$ ($a/b = 0,5707$) і $\xi = 0,8$ ($a/b = 1,7523$).

Висновки.

В роботі отримано аналітично-чисельний розв'язок крайової задачі для нескінченно довгої трансверсально-ізотропної незамкненої циліндричної оболонки некругового поперечного перерізу з врахуванням геометричної нелінійності та деформацій поперечного зсуву. Інтегрування в запропонованій методиці виконується аналітично та чисельно з використанням формули трапецій. Ефективність розробленої методики перевірена шляхом розв'язання тестової задачі для довгої овальної незамкненої циліндричної оболонки і порівняння отриманих результатів з даними точного розв'язку [21]. Побудований розв'язок дозволяє обчислити з високою (майже аналітичною) точністю значення внутрішніх силових факторів і узагальнених переміщень некругової оболонки, оцінити її міцність, жорсткість і стійкість за дії статичного поверхневого навантаження. Як частинні випадки, з наведеного розв'язку впливають відповідні результати для моделі Кірхгофа – Лява та оболонки кругового поперечного перерізу. Також одержано вирази для граничних значень узагальненого геометричного параметра, які визначають області стійкої та нестійкої рівноваги циліндричної оболонки довільного поперечного перерізу. Досліджено НДС і стійкість еліптичної та овальної циліндричних оболонок з шарнірно закріпленими поздовжніми краями, які знаходяться під дією рівномірного поверхневого навантаження. Отримані результати також можуть бути еталонними для наближених і чисельних методів. В подальшому представляє інтерес розробка методики та дослідження закономірностей НДС і стійкості композитних циліндричних оболонок некругового поперечного перерізу з врахуванням як особливостей деформування, так і нелінійних властивостей матеріалів [7, 19].

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за рахунок бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Дано постановку та розроблено аналітично-чисельну методику розв'язання геометрично нелінійної задачі для піддатливої на поперечний зсув довгої циліндричної панелі некругового поперечного перерізу за дії нормального поверхневого навантаження. Основні рівняння записано згідно з геометрично нелінійною теорією пологих оболонок у квадратичному наближенні, з гіпотезою Тимошенка і законом Гука для трансверсально-ізотропних матеріалів. Для оболонки з шарнірно закріпленими поздовжніми краями одержано аналітичні вирази для компонентів напружено-деформованого стану, визначено граничні значення узагальненого геометричного параметра. Числові результати отримано для довгих незамкнених циліндричних оболонок еліптичного та овального поперечних перерізів за дії рівномірного нормального тиску.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: довга циліндрична оболонка, некруговий поперечний переріз, геометрична нелінійність, стійкість, поперечний зсув, поверхневе навантаження, аналітично-чисельний розв'язок.

1. Марчук М.В., Тучапский Р.И., Пакош В.С. Исследование деформирования гибких длинных пологих некруговых цилиндрических панелей с защемленными продольными краями на основе уточненной теории // Механика машин, механизмов и материалов. – 2015. – № 4 (33). – С. 59 – 69.
2. Abrosov Yu.Yu., Maximyuk V.A., Chernyshenko I.S. Physically Nonlinear Deformation of a Long Orthotropic Cylindrical Shell with Elliptic Cross-Section // Int. Appl. Mech. – 2021. – 57, N 3. – P. 282 – 289.
3. Akgün G., Kurtaran H. Large displacement transient analysis of FGM super-elliptic shells using GDQ method // Thin-Walled Struct. – 2019. – 141. – P. 133 – 152.
4. Boule A., Dubé M., Gosselin F.P. Parametric study of an elliptical fuselage made of a sandwich composite structure // Mech. Res. Comm. – 2015. – 69. – P. 129 – 135.
5. Carper D.M., Hyer M.W., Johnson E.R. Large deformation behavior of long shallow cylindrical composite panels. Report No. VPI-E-83-37. – Blacksburg: Virginia Polytechnic Inst. and State Univ., 1983. – 171 p.
6. Chen Y.N., Kempner J. Buckling of oval cylindrical shell under compression and asymmetric bending // AIAA J. – 1976. – 14, N 9. – P. 1235 – 1240.
7. Chernyshenko I.S., Storozhuk E.A. Inelastic Deformation of Flexible Cylindrical Shells with a Curvilinear Hole // Int. Appl. Mech. – 2006. – 42, N 12. – P. 1414 – 1420.
8. Coman C.D. Oval cylindrical shells under asymmetric bending: a singular-perturbation solution // ZAMP. – 2018. – 69. – P. 1 – 16.
9. Firer M., Sheinman I. Nonlinear analysis of laminated non-circular cylindrical shells // Int. J. Solids Struct. – 1995. – 32, N 10. – P. 1405–1416.
10. Grigorenko Ya.M., Kharitonova L.V. To Determination of Critical Values of the Load under Deformation of Flexible Non-Circular Cylindrical Shells with Rigidly Fixed Edges // Int. Appl. Mech. – 2005. – 41, N 11. – P. 1278 – 1287.
11. Kerr A.D., Soifer M.T. The linearization of the prebuckling state and its effect on the determined instability loads // ASME J. Appl. Mech. – 1969. – 36, N 4. – P. 775 – 783.
12. Kiseleva T.A., Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P. Comparison of scalar and vector FEM forms in the case of an elliptic cylinder // J. Comput. Math. Math. Phys. – 2015. – 55, N 3. – P. 422 – 431.
13. Marguerre K. Stability of the cylindrical shell of variable curvature. NASA Technical Memorandum 1302. – Washington, 1951. – 64 p.
14. Meyer C.A., Hyer M.W. Response of elliptical composite cylinders to axial compression loading // Mech. Comp. Mater. Struct. – 1999. – 6, N 2. – P. 169 – 194.
15. Soldatos K.P. Mechanics of cylindrical shells with non-circular cross-section: a survey // Appl. Mech. Rev. – 1999. – 52, N 8. – P. 237 – 274.
16. Soldatos K.P., Tzivanidis G.J. Buckling and vibration of cross-ply laminated noncircular cylindrical shells // J. Sound Vib. – 1982. – 82, N 3. – P. 425 – 434.
17. Storozhuk E.A. Exact Solution of a Geometrically Nonlinear Problem for a Shear-Compliant Oval Cylindrical Shell // Int. Appl. Mech. – 2022. – 58, N 6. – P. 653 – 672.
18. Storozhuk E.A. Stress-Strain State and Stability of Flexible Circular Cylindrical Shell with Allowance for Deformations of Transverse Shear // Int. Appl. Mech. – 2021. – 57, N 5. – P. 554 – 567.
19. Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S. Stress Distribution in Physically and Geometrically Nonlinear Thin Cylindrical Shells with Two Holes // Int. Appl. Mech. – 2005. – 41, N 11. – P. 1280 – 1287.
20. Storozhuk E.A., Yatsura, A.V. Analytical-Numerical Solution of Static Problems for Noncircular Cylindrical Shells of Variable Thickness // Int. Appl. Mech. – 2017. – 53, N 3. – P. 313 – 325.
21. Storozhuk E.A., Yatsura, A.V. Exact Solutions of Boundary-Value Problems for Noncircular Cylindrical Shells // Int. Appl. Mech. – 2016. – 52, N 4. – P. 386 – 397.
22. Tang S.C., Chu C.C., Yeung K.S. Collapse of long non-circular cylindrical shells under pure bending // Comput. Struct. – 1985. – 21, N 6. – P. 1345 – 1353.
23. Timoshenko S. Strength of materials. Part II: Advanced theory and problems. 2nd ed. – New York: D. Van Nostrand Company, 1941. – 510 p.
24. Tornabene F., Fantuzzi N., Baccocchi M., Dimitri R. Free vibrations of composite oval and elliptic cylinders by the generalized differential quadrature method // Thin-Walled Struct. – 2015. – 97. – P. 114 – 129.
25. Yang J.L., Zhang Y., Zhang Z.M. Nonlinear stability analysis of infinitely long laminated cylindrical shallow shells including shear deformation under lateral pressure // Int. J. Mech. Sci. – 1992. – 34, N 5. – P. 345 – 354.

Надійшла 08.07.2022

Затверджена до друку 27.06.2023