

В.С.Кирилюк, О.І.Левчук

**НАПРУЖЕНИЙ СТАН У П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОМУ ПРОСТОРІ ПРИ
НЕЦЕНТРАЛЬНОМУ НАВАНТАЖЕННІ ЖОРСТКОГО КРУГОВОГО ДИСКУ**

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
вул. Нестерова 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: center@inmech.kiev.ua*

Abstract. An exact solution of the electroelasticity problem on the stress state in an electroelastic transversely isotropic space when a rigid disk-shaped inclusion displacement under the action of a non-centrally applied load to the surface of the disc is obtained. The closed analytical expressions for displacements and stress distribution under the inclusion in piezoelectric material are found. The representation of the solution of the static equations of electroelasticity for a transversely isotropic body through harmonic functions and the reduction of the problem to the solution of pair integral equations is used. The expressions for estimating the stress state in a purely elastic transversely isotropic material with a non-centrally loaded surface of a disk-like inclusion follow from the obtained analytical formulas as the partial case. The numerical studies are carried out, an influence of the coupling of force and electric fields on the distribution of stresses near the rigid inclusion under non-central loading is studied.

Key words: piezoelectric space, rigid circular inclusion, non-central load, stress distribution, field coupling effect.

Вступ.

Широке використання п'єзоелектричних матеріалів при створенні перетворювачів енергії та елементів вимірювальних приладів для різних галузей промисловості обумовлює інтерес до аналізу силових і електричних полів у електропружних (п'єзоелектричних) тілах поблизу концентраторів напружень. В той же час, дослідження розподілу напружень на основі розв'язків просторових задач електропружності для анізотропних п'єзоелектричних тіл у математично строгій постановці, яка враховує зв'язаність силових і електричних полів, суттєво ускладнюється, оскільки виникає необхідність у розв'язанні граничної задачі для достатньо складної системи диференціальних рівнянь.

Відзначимо, що на цей час детальний аналіз напруженого стану у п'єзоелектричних тілах з концентраторами напружень проведено для задач електропружності у двовимірній постановці [2, 7 – 10, 18, 19, 21, 29]. Для тривимірних статичних задач електропружності у випадку п'єзоелектричного трансверсально-ізотропного тіла представлення розв'язків зв'язаної системи рівнянь стосовно силових і електричних полів через гармонічні функції отримано у роботах [22] та [27]. Ряд результатів досліджень напруженого стану у просторових електропружних тілах наведено у роботах [1, 3 – 5, 13 – 15, 16, 17, 20 – 23, 27, 28]. Зауважимо, що просторові задачі статичної електропружності для трансверсально-ізотропних та ортотропних електропружних тіл з довільно орієнтованими тріщинами та включеннями, наприклад, в роботі [14] є узагальненням підходу [11, 12] на основі потрійного перетворення Фур'є для чисто пружного ортотропного матеріалу на випадок електропружного тіла, у якому замість функції Гріна для пружного простору використовується функція Гріна для електропружного матеріалу.

Відзначимо, що задачі про переміщення та поворот жорсткого кругового диску у чисто пружному трансверсально-ізотропному просторі (при розташуванні диску у площині ізоотропії матеріалу) розглянуто у роботах [24, 25], а задачу про напружений стан у чисто пружному ізотропному матеріалі під жорстким круговим диском при нецентральному навантаженні його поверхні отримано у [26].

У даній роботі на основі математичної моделі, яка враховує зв'язаність силових і електричних полів знайдено точний розв'язок задачі про напружений стан у п'єзоелектричному матеріалі, що містить жорстке дископодібне включення, при нецентральному навантаженні поверхні включення силою P . Отримано замкнуті вирази для розподілу напружень під круговим диском та його переміщення, досліджено вплив зв'язаності силових і електричних полів на напружений стан у п'єзоелектричному матеріалі.

При постановці задачі припускається, що круговий жорсткий диск розміщено у площині ізоотропії електропружного трансверсально-ізотропного матеріалу, а також, що двостороння поверхня кругового диску є неелектродованою (не містить електродного покриття). При дослідженні використано представлення розв'язку рівнянь статички електропружності для трансверсально-ізотропного тіла через гармонічні функції і зведення задачі до розгляду парних інтегральних рівнянь. Як частинні випадки зі знайдених результатів для задачі електропружності впливають аналітичні вирази для оцінки напруженого стану під жорстким круговим диском у чисто пружному трансверсально-ізотропному та ізотропному матеріалах при дії не центрально прикладеної сили на поверхні диску.

1. Постановка задачі.

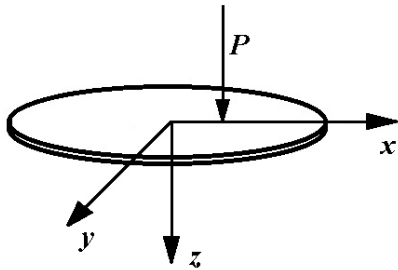


Рис. 1

Розглянемо задачу про переміщення жорсткого кругового диску, що займає область Ω у площині ізоотропії електропружного трансверсально-ізотропного матеріалу $z=0$, при не центрально прикладеній до поверхні диску силі P (рис. 1).

У випадку дії в точці x_0 (на осі $0x$) сили P задачу можна звести до дії на жорсткий диск центрально прикладеної сили P та моменту $M = Px_0$. Суперпозиція цих двох станів дає розв'язок задачі про дію сили, що прикладена до поверхні кругового диску не у його центрі. Нижче наведено граничні

умови для двох згаданих задач (осесиметричної та неосиметричної).

1.1. Осесиметрична задача (відповідає дії центрально прикладеної сили P).

$$u_z = \delta, \quad 0 \leq r \leq a, \quad z = 0^+; \quad \sigma_{zz} = 0, \quad r > a, \quad z = 0^+; \quad u_x = u_y = 0, \quad z = 0^+; \quad (1)$$

$$D_z = 0, \quad z = 0^+, \quad (2)$$

де $\Omega: x^2/a^2 + y^2/a^2 \leq 1$; δ – переміщення диску; D_z – нормальна компонента вектора електричної індукції (електричних переміщень). Умова (2) по електричному стану відповідає випадку відсутності електричного покриття на поверхні жорсткого диску та відсутності вільних зарядів в площині $z=0$.

Для випадку дії моменту M на круговий диск, розміщений у електропружному просторі, отримуємо неосесиметричну граничну задачу для півпростору $z \geq 0$.

1.2. Неосесиметрична задача (відповідає дії моменту $M = Px_0$).

$$u_z = \omega r \cos \theta, \quad 0 \leq r \leq a, \quad z = 0^+; \quad \sigma_{zz} = 0, \quad r > a, \quad z = 0; \quad u_x = u_y = 0, \quad z = 0^+; \quad (3)$$

$$D_z = 0, \quad z = 0^+, \quad (4)$$

де стала ω в умовах (3) пов'язана зі значенням моменту, прикладеного до жорсткого кругового диску.

2. Основні рівняння і співвідношення. Рівняння статки електропружності для п'єзоелектричного трансверсально-ізотропного тіла відносно компонентів вектора переміщень і електричного потенціалу Ψ приймають наступний вигляд [1, 22]:

$$\begin{aligned} & c_{11}^E u_{x,xx} + \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E) u_{x,yy} + c_{44}^E u_{x,zz} + \frac{1}{2}(c_{11}^E + c_{12}^E) u_{y,xy} + \\ & + (c_{13}^E + c_{44}^E) u_{z,xz} + (e_{31} + e_{15}) \Psi_{,xz} = 0; \\ & c_{11}^E u_{y,yy} + \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E) u_{y,xx} + c_{44}^E u_{y,zz} + \frac{1}{2}(c_{11}^E + c_{12}^E) u_{x,xy} + \\ & + (c_{13}^E + c_{44}^E) u_{z,yz} + (e_{31} + e_{15}) \Psi_{,yz} = 0; \\ & (c_{13}^E + c_{44}^E)(u_{x,xz} + u_{y,yz}) + c_{44}^E(u_{z,xx} + u_{z,yy}) + c_{33}^E u_{z,zz} + \\ & + e_{15}(\Psi_{,xx} + \Psi_{,yy}) + e_{33} \Psi_{,zz} = 0; \\ & (e_{31} + e_{15})(u_{x,xz} + u_{y,yz}) + e_{15}(u_{z,xx} + u_{z,yy}) + e_{33} u_{z,zz} - \\ & - \varepsilon_{11}^S (\Psi_{,xx} + \Psi_{,yy}) - \varepsilon_{33}^S \Psi_{,zz} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

У рівняннях (5) використано наступні позначення: $c_{11}^E, c_{12}^E, c_{13}^E, c_{33}^E, c_{44}^E$ – незалежні модулі пружності; e_{31}, e_{15}, e_{33} – п'єзомодулі; $\varepsilon_{11}^S, \varepsilon_{33}^S$ – діелектричні проникності (всього десять незалежних сталих).

Розв'язок системи рівнянь (5) згідно [22] можна отримати за допомогою чотирьох потенціальних функцій Φ_j ($j = 1, 4$)

$$u_x = \sum_{j=1}^3 \Phi_{j,x} + \Phi_{4,y}; \quad u_y = \sum_{j=1}^3 \Phi_{j,y} - \Phi_{4,x}; \quad u_z = \sum_{j=1}^3 k_j \Phi_{j,z}; \quad \Psi = \sum_{j=1}^3 l_j \Phi_{j,z}, \quad (6)$$

де k_j, l_j – деякі сталі, а функції Φ_j задовольняють рівнянням

$$\Phi_{j,xx} + \Phi_{j,yy} + \nu_j \Phi_{j,zz} = 0 \quad (j = 1, 2, 3), \quad (7)$$

$\nu_4 = 2c_{44}^E / (c_{11}^E - c_{12}^E)$, а значення ν_i ($i = 1, 2, 3$) згідно [22] є коренями алгебраїчного рівняння третього порядку

$$\begin{aligned} & \nu^3 (A_1 B_2 - C_1 D_2) + \nu^2 (A_1 B_3 + A_2 B_2 - C_1 D_3 - C_2 D_2) + \\ & + \nu (A_2 B_3 + A_3 B_2 - C_2 D_3 - C_3 D_2) + A_3 B_3 - C_3 D_3 = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Значення k_j, l_j ($j = 1, 2, 3$) у виразах (6) пов'язані зі значеннями ν_j , що входять до рівнянь (7) та визначаються з алгебраїчного рівняння (6) наступними співвідношеннями:

$$\frac{a_j + c_{13}^E k_j + e_{31} l_j}{c_{11}^E} = \frac{c_{33}^E k_j + e_{33} l_j}{c_{13}^E + a_j} = \frac{c_{33}^E k_j - \varepsilon_{33}^S l_j}{e_{31} + d_j} = \nu_j \quad (j=1, 2, 3); \quad (9)$$

$$a_j = c_{44}^E (1 + k_j) + e_{15} l_j; \quad d_j = e_{15} (1 + k_j) - \varepsilon_{11}^S l_j \quad (j=1, 2, 3, 4), \quad (10)$$

де вирази (9), (10) використовуються при подальших обчисленнях.

Зауважимо, що при введенні позначень $z_j = z \nu_j^{-1/2}$ ($j=1, 4$) функції $\Phi_1(x, y, z_1)$, $\Phi_2(x, y, z_2)$, $\Phi_3(x, y, z_3)$, $\Phi_4(x, y, z_4)$ згідно виразів (5) стають гармонічними функціями у відповідних системах координат.

3. Метод розв'язання. При розгляді задачі скористаємось системою циліндричних координат (r, θ, z) , у якій представлення компонентів переміщень та електричного потенціалу має наступний вигляд:

$$u_r = \frac{\partial}{\partial r} \left(\sum_{j=1}^3 \Phi_j(r, \theta, z_j) \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \Phi_4(r, \theta, z_4); \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sum_{j=1}^3 \Phi_j(r, \theta, z_j) \right) - \frac{\partial}{\partial r} \Phi_4(r, \theta, z_4);$$

$$u_z = \frac{\partial}{\partial z} \left(\sum_{j=1}^3 k_j \Phi_j(r, \theta, z_j) \right); \quad \Psi = \frac{\partial}{\partial z} \left(\sum_{j=1}^3 l_j \Phi_j(r, \theta, z_j) \right). \quad (11)$$

Для представлення (6) – (11) функції $\Phi_i(r, \theta, z_i)$ візьмемо у вигляді

$$\Phi_i(r, \theta, z_i) = \alpha_i f(r, \theta, z_i) \quad (i=1, 2, 3); \quad \Phi_4 \equiv 0, \quad (12)$$

де α_i – невідомі сталі; $f(r, \theta, z)$ – гармонічна функція, яка задовольняє рівнянню Лапласа у циліндричних координатах.

3.1. Осесиметрична задача (сила P прикладена до центру диску). Граничні умови для задачі у циліндричних координатах для півпростору $z \geq 0$ приймають вигляд

$$u_z = \delta, \quad 0 \leq r \leq a, \quad z = 0^+; \quad \sigma_{zz} = 0, \quad r > a, \quad z = 0^+;$$

$$u_r = u_\theta = 0, \quad z = 0^+; \quad D_z = 0, \quad z = 0^+.$$

За допомогою формул (7) – (10) отримуємо вирази компонентів переміщень u_z , напружень σ_{zz} і електричної індукції D_z в площині $z = 0$ наступним чином:

$$u_z = \sum_{j=1}^3 \alpha_j \frac{k_j}{\sqrt{\nu_j}} f_{,z} |_{z=0}; \quad \sigma_{zz} = \sum_{j=1}^3 \alpha_j \left[c_{44}^E (1 + k_j) + e_{15} l_j \right] f_{,zz} |_{z=0};$$

$$D_z = \sum_{j=1}^3 \alpha_j \left[e_{15} (1 + k_j) - \varepsilon_{11}^S l_j \right] f_{,zz} |_{z=0} = 0.$$

Представимо функцію $f(r, \theta, z_i)$ у вигляді

$$f(r, \theta, z) = F(r, z) = \frac{1}{a^2} \int_0^\infty \xi A(\xi) e^{-(\xi/a)z} J_0(\xi r/a) d\xi,$$

де J_0 – функція Бесселя нульового порядку. Невідомі значення сталих α_i у виразах потенціальних функцій (10) візьмемо з системи лінійних рівнянь

$$\sum_{j=1}^3 \alpha_j = 0; \quad \sum_{j=1}^3 \alpha_j \left[e_{15} (1 + k_j) - \varepsilon_{11}^S l_j \right] = 0; \quad \sum_{j=1}^3 \alpha_j \frac{k_j}{\sqrt{\nu_j}} = 1. \quad (13)$$

З представлень (5) – (11), обчислених на його основі виразів компонентів напружень і електричної індукції та системи (13) випливає, що виконуються граничні умови стосовно переміщень u_r, u_θ і електричної індукції D_z . З граничних умов, що залишились, для визначення невідомої функції $A(\xi)$ отримуємо систему парних інтегральних рівнянь

$$\sum_{j=1}^3 \alpha_j \frac{k_j}{\sqrt{v_j}} \frac{1}{a^3} \int_0^\infty \xi^2 A(\xi) J_0(\xi r/a) d\xi = \delta, \quad 0 \leq r \leq a;$$

$$\int_0^\infty \xi^3 A(\xi) J_0(\xi r/a) d\xi = 0, \quad r > a.$$

За допомогою заміни

$$w_0 = \delta a^3 / \left(\sum_{j=1}^3 \alpha_j \frac{k_j}{\sqrt{v_j}} \right); \quad \rho = \frac{r}{a}; \quad C(\xi) = \xi^2 A(\xi)$$

зводимо отриману систему парних рівнянь до вигляду

$$\int_0^\infty C(\xi) J_0(\xi \rho) d\xi = w_0, \quad 0 < \rho \leq 1; \quad \int_0^\infty \xi C(\xi) J_0(\xi \rho) d\xi = 0, \quad \rho \geq 1. \quad (14)$$

Використовуючи розв'язок системи парних інтегральних рівнянь для системи (14), (аналогічно [24]) знаходимо

$$C(\xi) = \frac{2w_0 \sin \xi}{\pi \xi} = \xi^2 A(\xi); \quad \sigma_{zz}|_{z=0^\pm} = \begin{cases} \mp \frac{2 \sum_{j=1}^3 \alpha_j [c_{44}^E (1+k_j) + e_{15} l_j] \delta}{\left(\sum_{j=1}^3 \alpha_j \frac{k_j}{\sqrt{v_j}} \right) \pi \sqrt{a^2 - r^2}}, & r \leq a; \\ 0, & r > a. \end{cases} \quad (15)$$

Значення сили P , що діє на дископодібне включення, пов'язане з отриманим виразом напружень (15) наступним чином:

$$P = 2\pi \int_0^a r \left[(\sigma_{zz})_{z=0^-} - (\sigma_{zz})_{z=0^+} \right] dr = 8\delta a \frac{\sum_{j=1}^3 \alpha_j [c_{44}^E (1+k_j) + e_{15} l_j]}{\sum_{j=1}^3 \alpha_j \frac{k_j}{\sqrt{v_j}}}. \quad (16)$$

Відзначимо, що при переході від електропружного до чисто пружного трансверсально-ізотропного матеріалу з формул (15), (16) впливають результати роботи [24], отримані з використанням представлення розв'язку рівнянь рівноваги чисто пружного трансверсально-ізотропного тіла.

3.2. Неосесиметрична задача (на диск діє момент ($M = P \cdot x_\theta$)). Граничні умови для задачі у циліндричних координатах для півпростору $z \geq 0$ приймають вигляд

$$u_z = \omega r \cos \theta, \quad 0 \leq r \leq a, \quad z = 0^+; \quad \sigma_{zz} = 0, \quad r > a, \quad z = 0; \quad (17)$$

$$u_r = u_\theta = 0, \quad z = 0^+;$$

$$D_z = 0, \quad z = 0^+. \quad (18)$$

Гармонічні функції $\Phi_i(r, \theta, z_i)$ для задачі з граничними умовами (17), (18) візьmemo у вигляді

$$\Phi_i(r, \theta, z_i) = \alpha_i g(r, \theta, z_i) \quad (i=1, 2, 3); \quad \Phi_4 \equiv 0, \quad (19)$$

де функцію $g(r, \theta, z_i)$ виберемо таким чином:

$$g(r, \theta, z) = \frac{1}{a^2} \int_0^\infty \xi B(\xi) e^{-(\xi/a)z} J_1(\xi r/a) d\xi \cos \theta, \quad (20)$$

а J_1 – функція Бесселя першого порядку. Невідомі значення сталих α_i у виразах потенціальних функцій (19), (20) визначимо з системи лінійних рівнянь (13). При визначенні невідомих значень α_i з цієї системи випливає, що граничні умови у переміщеннях і стосовно електричної індукції у площині $z=0$ задовольняються, а з граничних умов, що залишились, приходимо до системи парних інтегральних рівнянь

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 \alpha_j \frac{k_j}{\sqrt{v_j}} \frac{1}{a^3} \int_0^\infty \xi^2 B(\xi) J_1(\xi r/a) d\xi \cos \theta &= \omega r \cos \theta, \quad 0 \leq r \leq a; \\ \int_0^\infty \xi^3 B(\xi) J_1(\xi r/a) d\xi \cos \theta &= 0, \quad r > a. \end{aligned} \quad (21)$$

Аналогічно [25], зводячи систему парних інтегральних рівнянь до розв'язання інтегрального рівняння Абеля, знаходимо

$$B(\xi) = \frac{4\omega a^4 \sum_{j=1}^3 \alpha_j \frac{k_j}{\sqrt{v_j}}}{\pi \xi^4} [\sin \xi - \xi \cos \xi].$$

Далі отримуємо аналітичний вираз для розподілу напружень під жорстким круговим диском при його повороті у п'єзоелектричному матеріалі

$$\sigma_{zz} \big|_{z=0^\pm} = \begin{cases} \mp \frac{4\omega \left(\sum_{j=1}^3 \alpha_j [c_{44}^E (1+k_j) + e_{15} l_j] \right) r \cos \theta}{\left(\sum_{j=1}^3 \alpha_j \frac{k_j}{\sqrt{v_j}} \right) \pi \sqrt{a^2 - r^2}}, & r \leq a; \\ 0, & r > a. \end{cases} \quad (22)$$

З допомогою формули (22) отримуємо

$$\begin{aligned} M_0 = P x_0 &= \int_0^a \int_{-\pi}^\pi \left[(\sigma_{zz})_{z=0^-} - (\sigma_{zz})_{z=0^+} \right] r^2 \cos \theta dr d\theta = \\ &= (16/3) \omega a^3 \frac{\sum_{j=1}^3 \alpha_j [c_{44}^E (1+k_j) + e_{15} l_j]}{\left(\sum_{j=1}^3 \alpha_j \frac{k_j}{\sqrt{v_j}} \right)}. \end{aligned} \quad (23)$$

Зазначимо, що при граничному переході від електропружного до пружного трансверсально-ізотропного матеріалу з формул (22), (23) безпосередньо впливають результати роботи [25].

Далі, враховуючи отримані формули для напружень при дії центрально прикладеної сили та діючого моменту, що виникає за рахунок зміщення точки прикладення сили від центру дископодібного включення, знаходимо

$$\frac{u_z(r, \theta, 0)}{\left[\left(P \sum_{j=1}^3 \alpha_j \frac{k_j}{\sqrt{v_j}} \right) / \left(8a \sum_{j=1}^3 \alpha_j [c_{44}^E(1+k_j) + e_{15}l_j] \right) \right]} = \left[1 + \frac{3}{2} \left(\frac{x_0}{a} \right) \left(\frac{r}{a} \right) \cos \theta \right]; \quad (24)$$

$$\frac{\sigma_{zz}(r, \theta, 0^-)}{P/(\pi a^2)} = \frac{- \left[1 + 3 \left(\frac{x_0}{a} \right) \left(\frac{r}{a} \right) \cos \theta \right]}{4\sqrt{1 - (r/a)^2}}. \quad (25)$$

Отримані замкнуті аналітичні вирази (24), (25) дозволяють знаходити переміщення диску та розподіл напружень під ним. Видно, що при заданій силі P переміщення жорсткого диску залежать як від пружних, так і електропружних властивостей п'єзоелектричного матеріалу, а нормальні напруження під плоским диском не залежать від властивостей матеріалу (їх значення залишаються тими ж, що й для пружного ізотропного матеріалу). У випадку відомого значення переміщення жорсткого диску сила P , яка здійснює це переміщення, суттєвим чином залежить від електропружних властивостей матеріалу. Також згідно формул (25) має місце сингулярність напружень при наближенні до границі плоского дископодібного жорсткого включення. Зі знайдених виразів (24), (25) впливають вирази переміщень і напружень під диском у чисто пружному трансверсально-ізотропному просторі, які можна також отримати за допомогою використання результатів [24, 25]. Здійснивши подальший перехід до чисто пружного ізотропного матеріалу, маємо узгодження (збіг) аналітичних виразів для переміщень та напружень під диском з даними роботи [26], у якій досліджено задачу про не центральне навантаження поверхні кругового диску, розміщеного у ізотропному пружному просторі.

4. Аналіз результатів числових досліджень. За допомогою отриманих аналітичних виразів вивчимо розподіл напружень під жорстким круговим диском, а також вплив зв'язаності силових і електричних полів на переміщення диску у матеріалі при нецентральному навантаженні поверхні жорсткого диску. При розрахунках, використовуючи властивості електропружних матеріалів, наведені в роботі [13] та вирази (24), (25), знаходимо, що для переміщення жорсткого диску кругової форми на одне й те ж значення δ (вздовж осі симетрії матеріалу) для різних п'єзоелектричних матеріалів потрібно прикласти різні значення сили P . Так, сила P для матеріалів PZT-7A, BaTiO₃, PZT-5H перевищує її відповідне значення при здійсненні такого ж переміщення у матеріалі PZT-5 на 26,02 %, 46,37 %, 36,81 %.

На рис. 2, 3 відображено розподіл напружень під жорстким круговим включенням. Використано наступні позначення $p_0 = P/(\pi a^2)$, де P значення прикладеної сили.

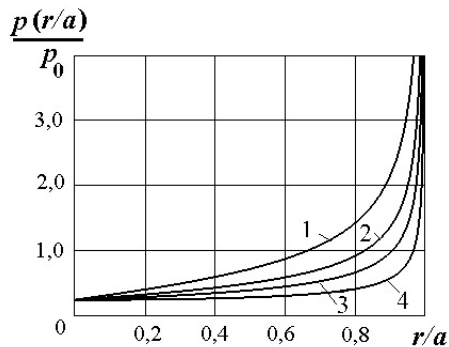


Рис. 2

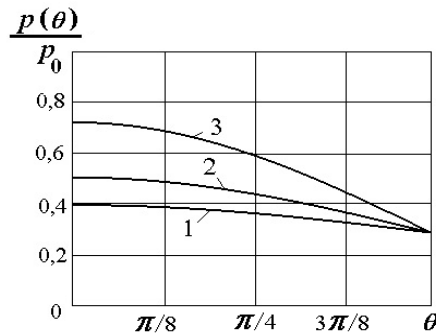


Рис. 3

Криві 1, 2, 3, 4 на рис. 2 відповідають значенням $x_0/a = 0; 0,25; 0,5; 1$, а кут $\theta = 0$. При наближенні до границі включення напруження необмежено зростають (прояв сингулярної поведінки напружень при переміщенні плоских жорстких включень у пружному та електропружному тілах).

На рис. 3 відображено залежність напружень під диском від кута θ . Напруження обчислювались при $r/a = 0,5$. Криві 1, 2, 3 на рис. 3 відповідають значенням $x_0/a = 0,25; 0,5; 1$. Обмежені значення напружень пояснюються тим, що вони обчислювались у центральній частині під диском ($r/a = 0,5$), не наближаючись до його границі.

Вивчимо також вплив зв'язаності силових і електричних полів на переміщення кругового диску у п'єзоелектричному просторі. Для цього проведемо порівняння напружень під диском при однакових значеннях переміщення диску у електропружному матеріалі та чисто пружному трансверсально-ізотропному матеріалі, який має такі ж самі пружні властивості, що й електропружний матеріал. В результаті порівняння знаходимо, що для того, щоб перемістити круговий диск у чисто пружному трансверсально-ізотропному просторі потрібно прикласти меншу за значенням силу. Так для матеріалів PZT-5, PZT-7A, BaTiO₃, PZT-5H відношення $P^{\text{Elast}} / P^{\text{Piezo}} = 61,39\%, 64,99\%, 80,03\%, 69,21\%$. Тобто, для наведених п'єзокерамічних матеріалів такий вплив (за рахунок зв'язаності силових і електричних полів) є достатньо значним.

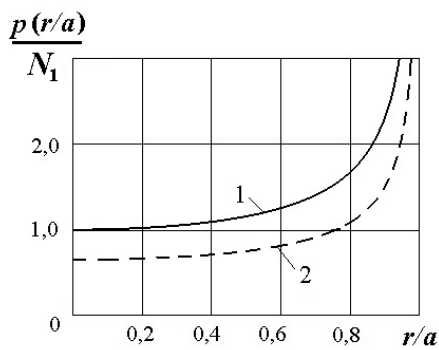


Рис. 4

На рис. 4 відображено вплив зв'язаності силових і електричних полів на розподіл напружень під круговим диском при його переміщенні на одне й теж значення у електропружному та пружному просторах. Лінія 1 на рис. 4 відповідала випадку переміщення диску у п'єзоелектричному матеріалі PZT-7A, а лінія 2 – переміщенню у чисто пружному трансверсально-ізотропному матеріалі, пружні властивості якого співпадають з властивостями електропружного матеріалу PZT-7A.

На рис. 4 використано позначення $N_1 = 2N^* \delta / (\pi a)$, де

$$N^* = \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^3 \alpha_j \frac{k_j}{\sqrt{v_j}} \right)} \sum_{j=1}^3 \alpha_j \left[c_{44}^E (1 + k_j) + e_{15} l_j \right].$$

Відмітимо, що з п'єзоелектричних матеріалів PZT-5, PZT-7A, BaTiO₃, PZT-5H зв'язаність силових полів найбільше суттєвим чином впливала на переміщення диску (при фіксованому значенні прикладеної сили) та на розподіл напружень під диском (при однакових його переміщеннях) для матеріалу PZT-5, найменшим чином – у випадку матеріалу BaTiO₃.

Висновок.

У даній роботі за допомогою строгої математичної моделі, що враховує зв'язаність силових і електричних полів, досліджено задачу про переміщення жорсткого кругового диску у п'єзоелектричному просторі при нецентральному навантаженні його поверхні, вивчено розподіл напружень під диском. Проведено числові розрахунки, досліджено вплив зв'язаності силових і електричних полів на переміщення диску та розподіл напружень під ним у електропружному матеріалі при дії сили, прикладеної не до центру жорсткого кругового диску.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Наукова та науково-технічна діяльність наукових установ Національної академії наук України» (КПКВК 6541030).

РЕЗЮМЕ. Отримано точний розв'язок задачі електропружності про напружений стан у електропружному трансверсально-ізотропному просторі при переміщенні жорсткого дископодібного включення під дією не центрально прикладеного навантаження до поверхні диску. Знайдено замкнуті аналітичні вирази для переміщень і розподілу напружень під включенням у п'єзоелектричному матеріалі. Використано представлення розв'язку статичних рівнянь електропружності для трансверсально-ізотропного тіла через гармонійні функції та зведення задачі до розв'язання парних інтегральних рівнянь. З отриманих аналітичних формул, як частинні випадки, випливають вирази для оцінки напруженого стану у чисто пружному трансверсально-ізотропному матеріалі при не центрально навантаженій поверхні дископодібного включення. Проведено числові дослідження, вивчено вплив зв'язаності силового та електричного полів на розподіл напружень під жорстким включенням при нецентральному його навантаженні.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: п'єзоелектричний простір, жорстке кругове включення, нецентральне навантаження, розподіл напружень, ефект зв'язаності полів.

1. *Механика связанных полей в элементах конструкций: в 5-ти томах. Т. 5. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А.* Электроупругость. – Киев: Наук. думка, 1989. – 279 с.
2. *Dai L., Guo W., Wang X.* Stress concentration at an elliptic hole in transversely isotropic piezoelectric solids // *Int. J. Solids Struct.* – 2006. – **43**, N 6. – P. 1818 – 1831.
3. *Dinzart F., Sabar H.* Electroelastic ellipsoidal inclusion with imperfect interface and its application to piezoelectric composite materials // *Int. J. Solids Struct.* – 2018. – **136** – **137**. – P.241 – 249.
4. *Johnson K.L.* Contact Mechanics. – Cambridge: Cambridge University Press, 1985. – 452 p.
5. *El Ouafi J., Azrar L., Aljinaidi A.* Analytical and semi-analytical modeling of effective moduli bounds: Application to transversely isotropic piezoelectric materials // *J. of Intelligent Material Systems and Struct.* – 2016. – **27**, N 12. – P. 1600 – 1623.
6. *Gladwell G.M.L.* On contact problems for a medium with rigid flat inclusions of arbitrary shape // *Int. J. Solids Struct.* – 1995. – **32**, N 3 – 4. – P. 383 – 389.
7. *Govorukha V., Kamlah M.* Analysis of a mode III interface crack in a piezoelectric bimaterial based on the dielectric breakdown model // *Archive of Appl. Mech.* – 2020. – **90**, N 5 – P. 1201 – 1213.
8. *Govorukha V., Sheveleva A., Kamlah M.* A crack along a part of an interface electrode in a piezoelectric bimaterial under anti-plane mechanical and in-plane electric loadings // *Acta Mechanica.* – 2019. – **230**, N 6 – P. 1999 – 2012.
9. *Kaloerov S.A., Samodurov A.A.* Problem of Electromagnetoviscoelasticity for Multiply Connected Plates // *Int. Appl. Mech.* – 2015. – **51**, N 6. – P. 623 – 639.
10. *Kaloerov S.A.* Determining the Intensity Factors for Stresses, Electric-Flux Density, and Electric-Field Strength in Multiply Connected Electroelastic Anisotropic Media // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – **43**, N 6. – P. 631 – 637.
11. *Kirilyuk V.S.* The Stress State of an Elastic Orthotropic Medium with an Ellipsoidal Cavity // *Int. Appl. Mech.* – 2005. – **41**, N 3. – P. 302 – 308.
12. *Kirilyuk V.S.* Stress State of an Elastic Orthotropic Medium with an Elliptic Crack under Tension and Shear // *Int. Appl. Mech.* – 2005. – **41**, N 4. – P. 358 – 366.
13. *Kirilyuk V.S.* On the Relationship between the Solutions of Static Contact Problems of Elasticity and Electroelasticity for a Half-space // *Int. Appl. Mech.* – 2006. – **42**, N 11. – P. 1256 – 1269.
14. *Kirilyuk V.S.* Elastic State of a Transversely Isotropic Piezoelectric Body with an Arbitrarily Oriented Elliptic Crack // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, N 2. – P. 150 – 157.
15. *Kirilyuk V.S.* Thermostressed State of a Piezoelectric Body with a Plane Crack under Symmetric Thermal Load // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, N 3. – P. 320 – 330.
16. *Kirilyuk V.S.* Stress State of a Piezoceramic Body with a Plane Crack opened by a Rigid Inclusion // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, N 7. – P. 757 – 768.
17. *Kirilyuk V.S., Levchuk O.I.* Stress Contact Interaction of Two Piezoelectric Half-Space, One of which Contains a Near-surface Notch of Elliptical Cross-section // *Int. Appl. Mech.* – 2022. – **58**, N 4. – P. 436 – 444.

18. Loboda V.V., Kryvoruchko A.G., Sheveleva A.Y. Electrically plane and mechanically antiplane problem for an inclusion with stepwise rigidity between piezoelectric materials // *Advanced Struct. Materials*. – 2019. – 94. – P. 463 – 481.
19. Loboda V., Sheveleva A., Komarov O., Lapusta Y. An interface crack with mixed electrical conditions at it faces in 1D quasicrystal with piezoelectric effect // *Mechanics of Advanced Materials and Struct.* 2021. – 29, N 23. – P. 3334 – 3344.
20. Martinez-Ayuso G., Friswell M.I., Khodaparast H.H., Roscow J.I., Bowen C.R. Electric field distribution in porous piezoelectric materials during polarization // *Acta Materialia*. – 2019. – 173. – P. 332 – 341.
21. Pasternak Y.M., Sulym H.T., Pasternak R.M. Action of concentrated heat sources in a pyroelectric with cracks for constant temperature of their faces // *Materials Sci.* – 2015. – 51, N 3. – P. 358 – 365.
22. Podil'chuk Yu.N. Representation of the General Solution of Statics Equations of the Electroelasticity of a Transversally Isotropic Piezoceramic Body in Terms of Harmonic Functions // *Int. Appl. Mech.* – 1998. – 34, N 7. – P. 623 – 628.
23. Podil'chuk Yu.N. Exact Analytical Solutions of Static Electroelastic and Thermoelectroelastic Problems for a Transversely Isotropic Body in Curvilinear Coordinate Systems // *Int. Appl. Mech.* – 2003. – 39, N 2. – P. 132 – 170.
24. Selvadurai A.P.S. On the displacement of a penny-shaped rigid inclusion embedded in a transversely isotropic elastic medium // *Solid Mechanics Archives*. – 1979. – 4. – P. 163 – 172.
25. Selvadurai A.P.S. Asymmetric displacements of a rigid disc inclusion embedded in a transversely isotropic elastic medium of infinite extent // *Int. J. Eng. Sci.* – 1980. – 18. – P. 979 – 986.
26. Selvadurai A.P.S. The eccentric loading of a rigid circular foundation embedded in an isotropic elastic medium // *Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* – 1980. – 4, N 2. – P. 121 – 129.
27. Wang Z.K. The general solution of three-dimension problems in piezoelectric media // *Int. J. Solids Struct.* – 1995. – 32, N 1. – P. 105 – 115.
28. Zhao M.H., Li Y., Yan Y., Fan C.Y. Singularity analysis of planar cracks in three-dimensional piezoelectric semiconductors via extended displacement discontinuity boundary integral equation method // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. – 2016. – 67. – P. 115 – 125.
29. Zhao M.H., Pan Y.B., Fan C.Y., Xu G.T. Extended displacement discontinuity method for analysis of cracks in 2D piezoelectric semiconductors // *Int. J. of Solids Struct.* – 2016. – 94 – 95. – P. 50 – 59.

Надійшла 27.12.2022

Затверджена до друку 27.06.2023