

В.С.Ловейкін¹, Ю.О.Ромасевич¹, А.В.Ловейкін²,
А.С.Хорошун³, М.М.Коробко¹

**МІНІМІЗАЦІЯ РУШІЙНОГО МОМЕНТУ ПРИВОДУ МЕХАНІЗМУ
ПОВОРОТУ БАШТОВОГО КРАНА ПРИ УСТАЛЕНОМУ РЕЖИМІ
ЗМІНИ ВІЛЬОТУ**

¹Національний університет біоресурсів і природокористування України,
вул. Героїв оборони, 12 в, Київ, Україна;
e-mail: lovvs@ukr.net; romasevichyuriy@ukr.net,
korobko_mm@nubip.edu.ua,

²Київський національний університет ім. Тараса Шевченка,
просп. акад. Глушкова, 4 е, Київ, Україна; e-mail: anlov74@gmail.com;

³Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
вул. Нестерова, 3, Київ, Україна; e-mail: khoroshunanatoliy@gmail.com

Abstract. The results of optimization of a force mode of the tower crane slewing mechanism start-up, with a steady motion of changing the crane arm, are presented. The horizontal boom of a tower crane model is used for the research. A dynamic model is developed and the differential equations of motion are derived by using the second-order Lagrange equations. An optimization problem is stated. It includes the differential equations of the boom system motion during crane slewing and trolleying, the optimization criterion, and the boundary conditions of motion. A complex dimensionless criterion is used. The boundary conditions are derived as the kinematic characteristics of the slewing mechanism. They allow to elimination of the load pendulum oscillations. A solution to the problem of optimal motion control is presented in the form of a polynomial with two items, the first provides the boundary conditions for epy crane slewing under a steady mode of trolleying, and the second minimizes the optimization criterion by determining the unknown coefficients. By using the Rot-Ring-PSO method the optimal mode of the slewing mechanism during steady trolleying is obtained.

Key words: tower crane, slewing and trolleying mechanisms, driving torque, optimization.

Вступ.

Для підвищення продуктивності баштових кранів при виконанні транспортно-технологічних операцій в деяких випадках здійснюють поєднання роботи окремих механізмів. Досить часто є поширеним суміщення руху механізмів зміни вильоту та повороту баштових кранів. За такого руху кранових механізмів в їхніх елементах та металоконструкціях виникають підвищені динамічні навантаження, які впливають на енергетичні витрати приводів та надійність роботи крана. При цьому найбільші динамічні навантаження спостерігаються під час проходження перехідних процесів (пуск, гальмування). Динамічні навантаження в елементах механізмів конструкції крана в значній мірі залежать від величини та характеру зміни рушійного моменту приводу. Значно зменшити динамічні навантаження в елементах крана можна шляхом вибору режиму руху приводних механізмів в процесі пуску. Тому виникає задача вибору режиму руху механізму повороту при усталеній зміні вильоту вантажу, який забезпечує мінімізацію згідно з критерієм, що включає середньоквадратичне та максимальне значення рушійного моменту приводу. При цьому перша складова критерію впливає на надійність роботи механізму, а друга – на розрахунок міцності та жорсткості його

елементів. Отже, поставлена проблема оптимізації режиму руху механізму повороту при усталеній зміні вильоту вантажу є актуальною, оскільки дозволяє підвищити ефективність роботи баштових кранів.

При використанні вантажопідйомних кранів з метою підвищення продуктивності виконання транспортно-технологічних операцій здійснюють суміщення роботи декількох механізмів [5, 10, 14, 18, 19]. В цьому випадку підвищуються динамічні навантаження в елементах приводних механізмів та конструкцій кранів, а також збільшується розгойдування вантажу на гнучкому підвісі [5, 6, 19]. Вивченню динамічних процесів в елементах вантажопідйомних машин приділена значна увага дослідниками різних країн [1 – 4, 17]. В роботах [1, 17] досліджувалась динаміка зміни вильоту та підйому вантажу для різних типів вантажопідйомних машин та встановлювались причини виникнення коливань вантажу. В роботах [5, 19] розглянуто спільний рух механізмів зміни вильоту та повороту вантажопідйомних кранів, зокрема баштових. В них здійснювалось керування приводом механізму зміни вильоту при повороті крана з підвішеним вантажем на гнучкому підвісі для зменшення його коливань. В роботі [6] досліджувалась динаміка спільного руху механізмів зміни вильоту та повороту баштового крана, де встановлений вплив кожного з механізмів на динаміку руху крана в цілому. На основі цих досліджень визначені кінематичні, силові та енергетичні характеристики механізмів. Зокрема, виявлені значні силові перевантаження приводних механізмів і просторові коливання вантажу.

Для зменшення коливань вантажу на гнучкому підвісі розв'язувались оптимізаційні задачі вибору режимів руху при роботі окремих механізмів [7, 9, 10, 13]. В роботі [13] розв'язана задача мінімізації коливань вантажу на гнучкому підвісі при роботі механізму повороту баштового крана. В роботі [7] оптимізовано перехідний процес пуску механізму зміни вильоту вантажу шляхом керування рушійним моментом приводу для мінімізації динамічних навантажень.

При оптимізації режимів руху механізмів вантажопідйомних машин важливим залишається питання вибору критеріїв оцінки руху. Поширення отримали динамічні критерії, які є інтегральними функціоналами з підінтегральними функціями у вигляді середньоквадратичних значень, кінематичних, силових та енергетичних характеристик [11, 12]. В роботі [13] наведено розв'язок задачі оптимізації режиму руху механізму зміни вильоту баштового крана при усталеному режимі його повороту. Виникає також потреба у визначенні режиму повороту крана при усталеному режимі зміни вильоту вантажу, що забезпечує мінімізацію рушійного моменту приводного механізму.

Метою роботи є мінімізація рушійного моменту приводного механізму повороту баштового крана за усталеної зміни вильоту вантажу шляхом оптимізації режиму пуску.

§1. Постановка задачі оптимального керування.

Стрілову систему баштового крана при сумісному русі механізмів повороту та зміни вильоту вантажу (рис. 1) представлено як механічну систему, що складається з абсолютно твердих ланок, окрім приводу 1 механізму повороту та гнучкого підвісу 2 вантажу 3. При цьому привод 1 механізму повороту має пружні властивості з коефіцієнтом жорсткості C . Вантаж 3 на гнучкому підвісі 2, з постійною довжиною $H = \text{const}$, відхиляється від вертикалі на кут ν при повороті крана. Окрім того, візок 4 разом з вантажем рухається вздовж стріли 5 зі сталою швидкістю $V = \text{const}$.

В такій динамічній моделі стрілової системи баштового крана за узагальнені координати використані кутові координати приводу механізму повороту α , поворотної частини крана зі стрілою φ та вантажу на гнучкому підвісі ψ , а також лінійна координата центру мас візка x . Оскільки візок рухається з постійною швидкістю, то координата x визначається наступною залежністю

$$x = x_0 + Vt, \quad (1.1)$$

де t – час; x_0 – початкове положення візка вздовж стріли.

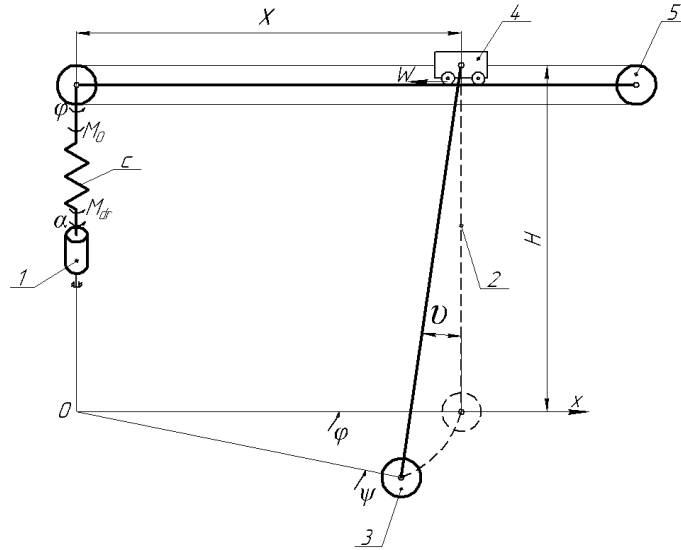


Рис. 1

Отже, лінійна координата візка x є відомою. Тому представлена динамічна модель стрілової системи має три степені свободи. При цьому гнучкий підвіс вантажу відхиляється від вертикалі на кут

$$v = \frac{x}{H}(\varphi - \psi). \quad (1.2)$$

Для отримання рівнянь руху прийнятої динамічної моделі стрілової системи при спільному русі механізмів повороту та зміни вильоту вантажу використовуємо рівняння Лагранжа другого роду, які для прийнятої динамічної моделі мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \alpha^{(1)}} - \frac{\partial T}{\partial \alpha} &= M_{dr} - \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha}; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \varphi^{(1)}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -M_0 - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \psi^{(1)}} - \frac{\partial T}{\partial \psi} &= -\frac{\partial \Pi}{\partial \psi}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

де M_{dr} – рушійний момент приводу механізму повороту; M_0 – момент сил опору поворотної частини крана; T , Π – кінетична та потенціальна енергія системи, відповідно.

Кінетична енергія стрілової системи визначається наступною залежністю:

$$T = \frac{1}{2} I_1 (\alpha^{(1)})^2 + \frac{1}{2} I_0 (\varphi^{(1)})^2 + \frac{1}{2} m_0 \left(V^2 + (x_0 + Vt)^2 (\varphi^{(1)})^2 \right) + \frac{1}{2} m (x_0 + Vt)^2 (\psi^{(1)})^2, \quad (1.4)$$

де m_0 , m – маси візка та вантажу, відповідно; I_0 , I_1 – моменти інерції поворотної частини крана зі стрілою та приводу механізму повороту стосовно осі повороту крана, відповідно.

Потенціальна енергія стрілової системи має вигляд

$$\Pi = \frac{1}{2} C (\alpha - \varphi)^2 + mgH(1 - \cos v), \quad (1.5)$$

де g – прискорення вільного падіння.

Визначимо похідні від виразів (1.4) і (1.5), необхідні для системи рівнянь (1.3)

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha} = \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\partial T}{\partial \psi} = 0; \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \alpha^{(1)}} &= I_1 \alpha^{(1)}; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi^{(1)}} = (I_0 + m_0(x_0 + Vt)^2) \varphi^{(1)}; \\ \frac{\partial T}{\partial \psi^{(1)}} &= m(x_0 + Vt)^2 \psi^{(1)}; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \alpha^{(1)}} = I_1 \alpha^{(2)};\end{aligned}\quad (1.7)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \varphi^{(1)}} = (I_0 + m_0(x_0 + Vt)^2) \varphi^{(2)} + 2m_0 V(x_0 + Vt)^2 \varphi^{(1)}; \quad (1.8)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \psi^{(1)}} = m(x_0 + Vt)^2 \psi^{(2)} + 2(x_0 + Vt)V \psi^{(1)}; \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} = C(\alpha - \varphi); \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -C(\alpha - \varphi) + mgH \frac{\partial v}{\partial \varphi} \sin v; \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \psi} = mgH \frac{\partial v}{\partial \psi} \sin v. \quad (1.12)$$

Оскільки максимальне значення кута v не перевищує 12° , то можна прийняти, що $\sin(v) \approx v$. Взявши похідні від виразу (1.2), з урахуванням залежності (1.1), за координатами φ та ψ і підставивши їх у залежності (1.11) і (1.12) з урахуванням прийнятої вище заміни, отримаємо

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -C(\alpha - \varphi) + \frac{mg}{H} (x_0 + Vt)^2 (\varphi - \psi); \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \psi} = -\frac{mg}{H} (x_0 + Vt)^2 (\varphi - \psi). \quad (1.14)$$

В результаті підстановки виразів (1.6) – (1.10), (1.13), (1.14) в рівняння (1.3) отримаємо систему диференціальних рівнянь руху механізму повороту за усталеної зміни вильоту вантажу

$$\begin{aligned}I_1 \alpha^{(2)} &= M_{dr} - C(\alpha - \varphi); \quad (I_0 + m_0(x_0 + Vt)^2) \varphi^{(2)} + 2m_0 V(x_0 + Vt)^2 \varphi^{(1)} = \\ &= -M_0 + C(\alpha - \varphi) + \frac{mg}{H} (x_0 + Vt)^2 (\varphi - \psi); \\ (x_0 + Vt) \psi^{(2)} + 2V \psi^{(1)} &= \frac{g}{H} (x_0 + Vt)^2 (\varphi - \psi).\end{aligned}\quad (1.15)$$

Оскільки метою роботи є мінімізація рушійного моменту приводу механізму повороту в процесі пуску, тому за критерій оптимізації оберемо комплексний безрозмірний показник, який враховує середньоквадратичне та максимальне значення рушійного моменту в процесі руху, який має такий вигляд:

$$\begin{aligned}Cr = Cr_1 \delta_1 + Cr_2 \delta_2 + Ineq &= \delta_1 \frac{\sqrt{\frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} M_{dr}^2 dt}}{\min \left(\sqrt{\frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} M_{dr}^2 dt} \right)} + \delta_2 \frac{\max(M_{dr})}{\min(\max(M_{dr}))} + \\ &+ Ineq \rightarrow \min; \quad \delta_1 + \delta_2 = 1,\end{aligned}\quad (1.16)$$

де δ_1 та δ_2 – вагові коефіцієнти, які показують важливість мінімізації кожної складової комплексного критерію; t – координата часу; t_1 – тривалість процесу пуску механізму повороту; $Ineq$ – штрафний компонент критерію, який впливає на дотримання обмеження $M_{dr} < 0$ і визначається наступним чином:

$$Ineq = \begin{cases} 0, & \text{якщо } M_{dr} \geq 0; \\ \frac{|\min(M_{dr})|}{\min(\max(M_{dr}))} \delta_{ineq}, & \text{якщо } M_{dr} < 0, \end{cases} \quad (1.17)$$

де δ_{ineq} – штрафний коефіцієнт, який впливає на збільшення величини $Ineq$, якщо обмеження $M_{dr} < 0$ порушене.

Зазначимо, що для знаходження знаменників першого і другого доданків критерію (1.16) необхідно розв'язати наступні оптимізаційні задачі:

$$\min \left(\sqrt{\frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} M_{dr}^2 dt} \right) + Ineq \rightarrow \min - \text{перша}; \quad \min(\max(M_{dr})) + Ineq \rightarrow \min - \text{друга}. \quad (1.18)$$

Таким чином, критерій (1.16) відображає вимоги до дотримання обмеження $M_{dr} < 0$, мінімізації середньоквадратичного та максимального значень рушійного моменту. Дві останні вимоги досягаються на компромісній основі.

§2. Розв'язання задачі.

З першого рівняння системи (1.15) виразимо рушійний момент приводу:

$$M_{dr} = I_1 \alpha^{(2)} + C(\alpha - \varphi). \quad (2.1)$$

В залежність рушійного моменту (2.1) входять координати приводу механізму повороту α та поворотної частини крана φ . Знайдемо їх через координати вантажу та їхні похідні за часом. Використаємо спочатку останнє рівняння системи (1.15), з якого знайдемо координату поворотної частини крана

$$\varphi = \psi + \left(\psi^{(2)} + 2V \frac{\psi^{(1)}}{x_0 + Vt} \right) \frac{H}{g}. \quad (2.2)$$

Підставивши в друге рівняння системи (1.15) вираз (2.1), отримаємо

$$\begin{aligned} C(\alpha + \varphi) = & \left(I_0 + m_0(x_0 + Vt)^2 \right) \varphi^{(2)} + 2m_0V(x_0 + Vt)^2 \varphi^{(1)} + \\ & + m(x_0 + Vt)^2 \psi^{(2)} + 2m(x_0 + Vt)V\psi^{(1)} + M_0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

З останнього виразу (2.3) знайдемо координати приводу механізму повороту

$$\begin{aligned} \alpha = \varphi + \frac{1}{C} \left(\left(I_0 + m_0(x_0 + Vt)^2 \right) \varphi^{(2)} + 2m_0(x_0 + Vt)V\varphi^{(1)} + \right. \\ \left. + m(x_0 + Vt)^2 \psi^{(2)} + 2m(x_0 + Vt)V\psi^{(1)} + M_0 \right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

У вираз рушійного моменту приводу (2.1) входить друга похідна за часом від кутової координати приводу, тому знайдемо її

$$\begin{aligned} \alpha^{(1)} = \varphi^{(1)} + \frac{1}{C} \left(\left(I_0 + m_0(x_0 + Vt)^2 \right) \varphi^{(3)} + 4m_0V(x_0 + Vt)\varphi^{(2)} + \right. \\ \left. + 2m_0V^2\varphi^{(1)} + m(x_0 + Vt)^2\psi^{(3)} + 4mV(x_0 + Vt)\psi^{(2)} + 2mV^2\psi^{(1)} \right); \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned}\alpha^{(2)} = \varphi^{(2)} + \frac{1}{C} \left((I_0 + m_0(x_0 + Vt)^2) \varphi^{(4)} + 6m_0V(x_0 + Vt)\varphi^{(3)} + \right. \\ \left. + 6m_0V^2\varphi^{(2)} + m(x_0 + Vt)^2\psi^{(4)} + 6mV(x_0 + Vt)\psi^{(2)} + 6mV^2\psi^{(2)} \right).\end{aligned}\quad (2.6)$$

У вирази (2.3) і (2.6) входять похідні за часом від координати поворотної частини крана включно до четвертого порядку, тому знайдемо їх, використавши залежність (2.4)

$$\varphi^{(1)} = \psi^{(1)} + \frac{H}{g} \left(\psi^{(3)} + 2V \frac{\psi^{(2)}(x_0 + Vt) - V\psi^{(1)}}{(x_0 + Vt)^2} \right); \quad (2.7)$$

$$\varphi^{(2)} = \psi^{(2)} + \frac{H}{g} \left(\psi^{(4)} + 2V \frac{\psi^{(3)}(x_0 + Vt)^2 - 2V(x_0 + Vt)\psi^{(2)} + 2V^2\psi^{(1)}}{(x_0 + Vt)^3} \right); \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned}\varphi^{(3)} = \psi^{(3)} + \frac{H}{g} \left(\psi^{(5)} + \frac{2V}{(x_0 + Vt)^4} (\psi^{(4)}(x_0 + Vt)^3 - 3V(x_0 + Vt)^2\psi^{(3)} + \right. \\ \left. + 6V^2(x_0 + Vt)\psi^{(2)} - 6V^3\psi^{(1)}) \right); \quad (2.9)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi^{(4)} = \psi^{(4)} + \frac{H}{g} \left(\psi^{(6)} + \frac{2V}{(x_0 + Vt)^5} (\psi^{(5)}(x_0 + Vt)^4 - 4V(x_0 + Vt)^3\psi^{(4)} + \right. \\ \left. + 12V^2(x_0 + Vt)^2\psi^{(3)} - 24V^3(x_0 + Vt)\psi^{(2)} + 24V^4\psi^{(1)}) \right).\end{aligned}\quad (2.10)$$

Для мінімізації критерію (1.16), в який входить рушійний момент приводу механізму повороту в процесі пуску при усталеному режимі зміни вильоту вантажу, необхідно розв'язати варіаційну задачу. Ця задача передбачає мінімізацію динамічного критерію (1.16) з урахуванням виразів (2.1), (2.3), (2.6) при забезпеченні наступних крайових умов руху на початку пуску, коли $t = 0$ і в кінці руху, коли $t = t_1$

$$t = 0: \psi = 0, \varphi = 0, \alpha = M_0 / C, \psi^{(1)} = 0, \varphi^{(1)} = 0, \alpha^{(1)} = 0; \quad (2.11)$$

$$t = t_1: \psi = \varphi = \omega t_1 / 2, \psi^{(1)} = \varphi^{(1)} = \omega, \alpha = M_0 / C + (\omega t_1 / 2), \alpha^{(1)} = \omega,$$

де ω – кутова швидкість усталеного руху поворотної частини крана.

Наведені вище крайові умови (2.11) відповідають уникненню маятникових коливань вантажу на гнучкому підвісі. Таким чином, ця задача відноситься до класу задач оптимального керування маятниковими системами [1 – 4, 6, 10 – 13, 15, 20].

В наведеній оптимізаційній задачі виразимо крайові умови (2.11) через узагальнену кутову координату повороту вантажу ψ та її похідні за часом.

Розглянемо початковий момент пуску, коли $t = 0$. З початкових умов (2.11) маємо $\psi(0) = 0$ і $\psi^{(1)}(0) = 0$, крім того, в момент початку пуску $\psi(0) = 0$ і $\psi^{(1)}(0) = 0$, за якими із залежностей (2.2) та (2.6) знаходимо, що $\psi^{(2)}(0) = 0$, $\psi^{(3)}(0) = 0$. Також з початкових умов пуску $\alpha_0 = M_0 / C$ отримаємо із залежності (2.3), що $\psi^{(2)}(0) = 0$. Тоді із виразу (2.8) маємо $\psi^{(4)}(0) = 0$. З умови $\alpha^{(1)}(0) = 0$ за допомогою (2.5) знаходимо, що $\psi^{(3)}(0) = 0$, з отриманої умови із формули (2.9) маємо $\psi^{(4)}(0) = 0$.

Тепер розглянемо кінцевий момент пуску, коли $t = t_1$. З кінцевих умов (2.11) маємо $\psi(t_1) = \omega t_1 / 2$ і $\psi^{(1)}(t_1) = \omega$. Також з кінцевих умов пуску відомо, що $\varphi(t_1) = \omega t_1 / 2$ і $\varphi^{(1)}(t_1) = \omega$. Тоді з виразів (2.3) і (2.6) знаходимо

$$\psi^{(2)}(t_1) = -\frac{2V\omega}{x_0 + Vt_1}; \quad \psi^{(3)}(t_1) = 6\frac{2V^2\omega}{(x_0 + Vt_1)^2}. \quad (2.12)$$

В кінці пуску маємо координату приводу $\alpha(t_1) = M_0 / C + (\omega t_1 / 2)$, врахувавши яку, за формулою (2.8) знаходимо

$$\varphi^{(2)}(t_1) = -\frac{2m_0(x_0 + Vt_1)V\omega}{I_0 + m_0(x_0 + Vt_1)^2}. \quad (2.13)$$

Із врахуванням виразу (2.13), за формулою (2.8) визначаємо

$$\psi^{(4)}(t_1) = \frac{2gV\omega}{H(x_0 + Vt_1)} \left(1 - \frac{m_0}{m_0 + \frac{I_0}{(x_0 + Vt_1)^2}} \right) - \frac{24V^3\omega}{(x_0 + Vt_1)^3}. \quad (2.14)$$

З кінцевої умови $\alpha^{(1)}(t_1) = \omega$ із виразу (2.5), знаходимо

$$\varphi^{(3)}(t_1) = \frac{2m_0V^2\omega}{I_0 + m_0(x_0 + Vt_1)^2} \left(\frac{4m_0(x_0 + Vt_1)^2}{I_0 + m_0(x_0 + Vt_1)^2} - 1 \right). \quad (2.15)$$

Врахувавши (2.15), за допомогою залежності (2.9), знайдемо п'яту похідну за часом від координат вантажу в кінці процесу пуску

$$\begin{aligned} \psi^{(5)}(t_1) = & \frac{2gV^2\omega}{H} \left(\frac{m_0}{I_0 + m_0(x_0 + Vt_1)^2} \left(\frac{4m_0(x_0 + Vt_1)^2}{I_0 + m_0(x_0 + Vt_1)^2} - 1 \right) - \frac{3}{(x_0 + Vt_1)^2} \right) + \\ & + \frac{4V^2\omega}{(x_0 + Vt_1)^4} \left(30V^2 - \frac{g}{H}(x_0 + Vt_1)^2 \left(1 - \frac{m_0}{m_0 + \frac{I_0}{(x_0 + Vt_1)^2}} \right) \right). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Виходячи з попередньо проведених розрахунків, мінімізація критерію (1.16) здійснюється при виконанні наступних крайових умов руху механізму повороту при установлених режимі зміни вильоту вантажу:

$$\begin{aligned} t = 0: \quad & \psi = 0, \quad \psi^{(1)} = 0, \quad \psi^{(2)} = 0, \quad \psi^{(3)} = 0, \quad \psi^{(4)} = 0, \quad \psi^{(5)} = 0; \\ t = t_1: \quad & \psi = \frac{\omega t_1}{2}, \quad \psi^{(1)} = \omega, \quad \psi^{(2)} = \psi^{(2)}(t_1), \quad \psi^{(3)} = \psi^{(3)}(t_1), \quad \psi^{(4)} = \psi^{(4)}(t_1), \quad \psi^{(5)} = \psi^{(5)}(t_1). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Останні чотири умови при $t = t_1$ визначаються за формулами (2.12), (2.14) та (2.16), відповідно.

Варіаційну задачу, в якій мінімізується критерій (1.16), при крайових умовах (2.17) розв'язати аналітично не можливо, оскільки вона є нелінійною, тому використаємо наближений метод розв'язку.

Для наближеного розв'язку поставленої варіаційної задачі використаємо шукану функцію у вигляді поліному з двома доданками

$$\psi(t) = \psi_0(t) + \psi_1(t), \quad 0 \leq t \leq t_1. \quad (2.18)$$

У залежності (2.18) перший доданок $\psi_0(t)$ – це вибраний поліном, який задовольняє крайовим умовам (2.17), а другий $\psi_1(t)$ – поліном, що включає вільні коефіцієнти і задовольняє нульовим крайовим умовам

$$\psi_1(0) = 0, \quad \psi_1^{(1)}(0) = 0, \quad \psi_1^{(2)}(0) = 0, \quad \psi_1^{(3)}(0) = 0, \quad \psi_1^{(4)}(0) = 0, \quad \psi_1^{(5)}(0) = 0;$$

$$\psi_1(t_1) = 0, \psi_1^{(1)}(t_1) = 0, \psi_1^{(2)}(t_1) = 0, \psi_1^{(3)}(t_1) = 0, \psi_1^{(4)}(t_1) = 0, \psi_1^{(5)}(t_1) = 0. \quad (2.19)$$

$\psi_0(t)$ виберемо у вигляді поліному 11-го степеня для забезпечення крайових умов (2.17)

$$\psi_0(t) = t^6 \sum_{i=1}^6 C_i (t-t_1)^{i-1}, \quad 0 \leq t \leq t_1. \quad (2.20)$$

Оскільки в крайових умовах (2.17) використовується значення похідних від виразу (2.20) на початку та в кінці руху включно до п'ятого порядку, тому знайдемо ці похідні

$$\begin{aligned} \psi_0^{(1)}(t) = t^5 & \left(6C_1 + C_2(6(t-t_1)+t) + 2C_3(t-t_1)(3(t-t_1)+t) + 3C_4(t-t_1)^2 \times \right. \\ & \left. \times (2(t-t_1)+t) + 2C_5(t-t_1)^3(3(t-t_1)+2t) + C_6(t-t_1)^4(6(t-t_1)+5t) \right); \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \psi_0^{(2)}(t) = 2t^4 & \left(15C_1 + 3C_2(5(t-t_1)+4t) + C_3(15(t-t_1)^2 + 12(t-t_1)t + t^2) + 3C_4(t-t_1) \times \right. \\ & \left. \times (5(t-t_1)^2 + 6t(t-t_1) + t^2) + 3C_5(t-t_1)^2(5(t-t_1)^2 + 8(t-t_1)t + 2t^2) + 5C_6(t-t_1)^3 \times \right. \\ & \left. \times (3(t-t_1)^2 + 6(t-t_1)t + 2t^2) \right); \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \psi_0^{(3)}(t) = 6t^3 & \left(20C_1 + 5C_2(4(t-t_1)+3t) + 2C_3(10(t-t_1)^2 + 15t(t-t_1) + 3t^2) + \right. \\ & + C_4(20(t-t_1)^3 + 45(t-t_1)^2t + 18(t-t_1)t^2 + t^3) + 4C_5(t-t_1)(5(t-t_1)^3 + \\ & + 15(t-t_1)^2t + 9(t-t_1)t^2 + t^3) + 5C_6(t-t_1)^2(4(t-t_1)^3 + 15(t-t_1)^2t + 12(t-t_1)t^2 + 2t^3) \Big); \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \psi_0^{(4)}(t) = 24t^2 & \left(15C_1 + 5C_2(3(t-t_1)+4t) + 5C_3(3(t-t_1)^2 + 8t(t-t_1) + 3t^2) + \right. \\ & + 3C_4(5(t-t_1)^3 + 20(t-t_1)^2t + 15(t-t_1)t^2 + 2t^3) + C_5(15(t-t_1)^4 + 80(t-t_1)^3t + \\ & + 90(t-t_1)^2t^2 + 24(t-t_1)t^3 + t^4) + 5C_6(t-t_1)(3(t-t_1)^4 + 20(t-t_1)^3t + 30 \times \\ & \times (t-t_1)^2t^2 + 12(t-t_1)t^3 + t^4) \Big); \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \psi_0^{(5)}(t) = 120t & \left(6C_1 + 3C_2(2(t-t_1)+5t) + 2C_3(3(t-t_1)^2 + 15(t-t_1)t + 10t^2) + \right. \\ & + 3C_4(2(t-t_1)^3 + 15(t-t_1)^2t + 20(t-t_1)t^2 + 5t^3) + 6C_5((t-t_1)^4 + 10(t-t_1)^3t + \\ & + 20(t-t_1)^2t^2 + 10(t-t_1)t^3 + t^4) + C_6(6(t-t_1)^5 + 75(t-t_1)^4t + 200(t-t_1)^3t^2 + \\ & + 150(t-t_1)^2t^3 + 30(t-t_1)t^4 + t^5) \Big). \end{aligned} \quad (2.25)$$

При такому виборі функції $\psi_0(t)$ крайові умови (2.17) у початковий момент часу $t=0$ вже виконані. Коефіцієнти $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ обираємо так, щоб виконувались ненульові крайові умови (2.17) в кінцевий момент часу t_1 . В результаті підстановки крайових умов (2.17) в момент часу t_1 в залежності (2.21) – (2.25) отримаємо систему лінійних рівнянь, з якої визначені невідомі коефіцієнти

$$C_1 = \frac{\omega}{2t_1^5}; \quad C_2 = \frac{\omega}{2t_1^6} + 6\frac{C_1}{t_1^5}; \quad C_3 = -\frac{V\omega}{(x_0 + Vt_1)^2 t_1^6} - 15\frac{C_1}{t_1^2} - 12\frac{C_2}{t_1};$$

$$\begin{aligned}
C_4 &= \frac{V^2 \omega}{(x_0 + Vt_1)^2 t_1^6} - 20 \frac{C_1}{t_1^3} - 15 \frac{C_2}{t_1^2} - 6 \frac{C_3}{t_1}; \\
C_5 &= \frac{1}{24 t_1^6} \left[\frac{2gV\omega}{H(x_0 + Vt_1)} \left(1 - \frac{m_0}{m_0 + \frac{I_0}{(x_0 + Vt_1)^2}} \right) - 24 \frac{V^3 \omega}{(x_0 + Vt_1)^3} \right] - 15 \frac{C_1}{t_1^4} - 20 \frac{C_2}{t_1^3} - 15 \frac{C_3}{t_1^2} - 6 \frac{C_4}{t_1}; \\
C_6 &= \frac{V^2 \omega}{60 t_1^6} \left\{ \frac{g}{H} \left[\frac{m_0}{I_0 + m_0(x_0 + Vt_1)^2} \left(\frac{4m_0(x_0 + Vt_1)^2}{I_0 + m_0(x_0 + Vt_1)^2} - 1 \right) - \frac{3}{(x_0 + Vt_1)^2} \right] + \frac{2}{(x_0 + Vt_1)^4} \times \right. \\
&\times \left. \left[30V^2 - \frac{g}{H} (x_0 + Vt_1)^2 \left(1 - \frac{m_0}{m_0 + \frac{I_0}{(x_0 + Vt_1)^2}} \right) \right] \right\} - 6 \frac{C_1}{t_1^5} - 15 \frac{C_2}{t_1^4} - 20 \frac{C_3}{t_1^3} - 15 \frac{C_4}{t_1^2} - 6 \frac{C_5}{t_1}. \quad (2.26)
\end{aligned}$$

Отже, поліном $\psi_0(t)$ вигляду (2.20) з коефіцієнтами (2.26) задовольняє крайові умови (2.19).

Поліном $\psi_1(t)$ представимо у наступному вигляді

$$\psi_1(t) = t^6 (t - t_1)^6 \sum_{j=0}^n D_j t^j, \quad 0 \leq t \leq t_1, \quad (2.27)$$

де множник $t^6 (t - t_1)^6$ гарантує виконання нульових крайових умов (2.19) при будь-яких значеннях коефіцієнтів $D_0, D_1, \dots, D_n$, тобто ці коефіцієнти залишаються вільними і використовуються для знаходження мінімуму функціоналу Cr (1.16).

Підставляючи залежності (2.20) і (2.25) з коефіцієнтами (2.26) і залежність (2.27) у вираз (2.18), знайдемо явний вигляд функції $\psi_1(t)$, який включає вільні коефіцієнти $D_0, D_1, \dots, D_n$. Маючи явний вигляд функції $\psi_1(t)$, знайдемо вигляд функцій $\varphi(t)$, $\alpha(t)$ за допомогою залежностей (2.2), (2.4). При цьому функції $\varphi(t)$, $\alpha(t)$ також включають вільні коефіцієнти $D_0, D_1, \dots, D_n$. Підставляючи $\psi_1(t)$, $\varphi(t)$ і $\alpha(t)$ у вираз (2.1), отримаємо залежність для моменту M_{dr} , що входить у підінтегральний вираз функціоналу Cr (1.16).

Після проведення інтегрування функціоналу Cr залежатиме від вільних коефіцієнтів $D_0, D_1, \dots, D_n$, тобто критерій Cr є функцією аргументів $D_0, \dots, D_n$. Отже, наближений розв'язок задачі (1.16) з урахуванням виразів (2.1) – (2.10) та крайових умов (2.17) зводиться до знаходження мінімуму функції багатьох змінних.

При цьому функціонал (1.16) представимо як функцію, залежну від шести невідомих коефіцієнтів

$$Cr = Cr(D_0, D_1, D_2, D_3, D_4, D_5). \quad (2.28)$$

Зазначимо, що функція (2.28) нелінійна і визначення її мінімуму є складною задачею. Тому для розв'язування задачі використано модифікацію метаевристичного методу рою часточок PSO [8] із обертовою кільцевою топологією зв'язків між часточками Ring-Rot-PSO [16].

Розрахунки оптимального силового режиму руху механізму повороту при установленому режимі зміни вильоту вантажу здійснено при таких значеннях параметрів стрілової системи баштового крана: $m = 5000$ кг; $m_0 = 300$ кг; $I_0 = 4,92 \cdot 10^6$ кг·м²; $I_1 = 5,51 \cdot 10^5$ кг·м²; $\nu = 0,85$ м/с²; $\omega = 0,075$ рад/с; $M_0 = 39890$ Нм; $H = 10$ м; $g = 9,81$ м/с²; $c = 6,627 \cdot 10^6$ Нм/рад; $x_0 = 10$ м; $t_1 = 5,0$ с.

Для цих даних визначалися розв'язки знаменників складових критерію (1.16) на коефіцієнтах поліномів. У результаті отримано

$$\min \left(\sqrt{(1/t_1) \int_0^{t_1} M_{dr}^2 dt} \right) = 155278 \text{ Нм} ; \min(\max(M_{dr})) = 291039 \text{ Нм} .$$

Ці значення використані для нормування окремих складових критерію (1.16).

Зменшення величини критерію (1.16) при застосуванні методу Ring-Rot-PSO для різних значень вагових коефіцієнтів δ_1 та δ_2 показано на рис. 2.

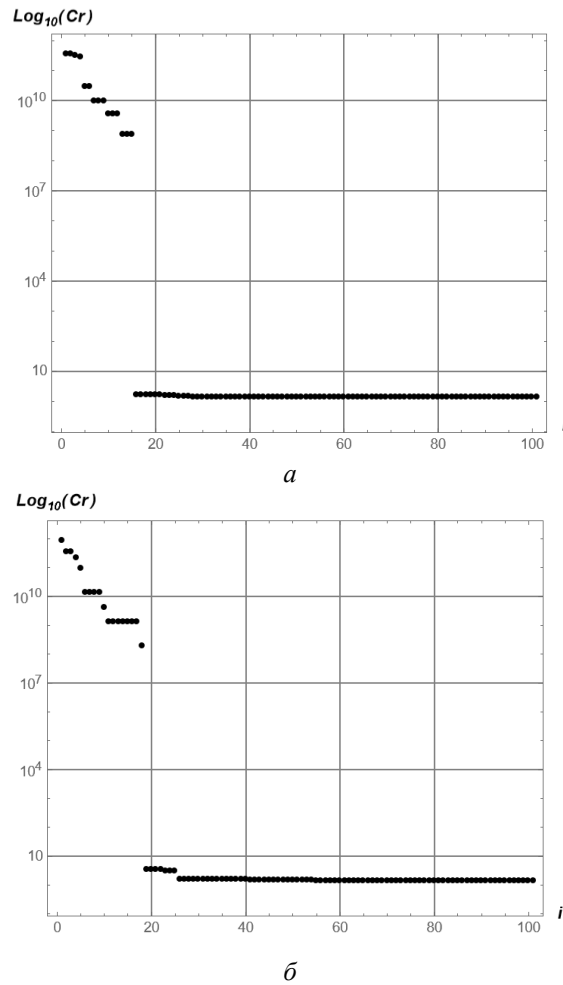


Рис. 2

З рис. 2 видно, що для кожного варіанту (рис. 2, а – $\delta_1 = 1$; $\delta_2 = 0$; рис. 2, б – $\delta_1 = 0$; $\delta_2 = 1$) відбувається стрімке зменшення величини критерію оптимізації (1.16), яке асоціюється з стрибкоподібним зменшення величини $Ineq$ до нуля. Аналогічний характер зміни величини критерію (1.16) спостерігається при інших значеннях вагових коефіцієнтів: $\delta_1 = 0,1$, $\delta_2 = 0,9$; $\delta_1 = 0,5$, $\delta_2 = 0,5$; $\delta_1 = 0,9$, $\delta_2 = 0,1$.

В результаті застосування методу Ring-Rot-PSO отримано значення коефіцієнтів поліному при різних значеннях вагових коефіцієнтів в оптимізаційному комплексному критерії (1.16), які наведено у табл. 1.

Таблиця 1

Коефіцієнт полінома	Значення вагових коефіцієнтів				
	$\delta_1 = 1; \delta_2 = 0$	$\delta_1 = 0,9; \delta_2 = 0,1$	$\delta_1 = 0,5; \delta_2 = 0,5$	$\delta_1 = 0,1; \delta_2 = 0,9$	$\delta_1 = 0; \delta_2 = 1$
D_0	1,528E-8	8,289E-9	- 1,972E-9	- 3,867E-10	- 3,171E-9
D_1	2,962E-9	8,621E-10	2,680E-9	1,224E-8	- 2,482E-8
D_2	6,755E-9	1,445E-8	3,392E-9	1,993E-8	3,393E-8
D_3	1,443E-8	- 4,394E-9	- 1,949E-9	- 9,797E-9	- 9,649E-9
D_4	- 6,921E-9	3,030E-10	1,130E-9	1,436E-9	7,417E-10
D_5	7,489E-10	- 1,289E-11	- 1,896E-10	- 8,236E-11	- 2,648E-12

§3. Аналіз результатів розв'язання задачі.

Результати оптимізації за комплексним силовим критерієм режиму пуску механізму повороту при усталеному режимі зміни вильоту вантажу проілюструємо за допомогою графічних залежностей (рис. 3, 4).

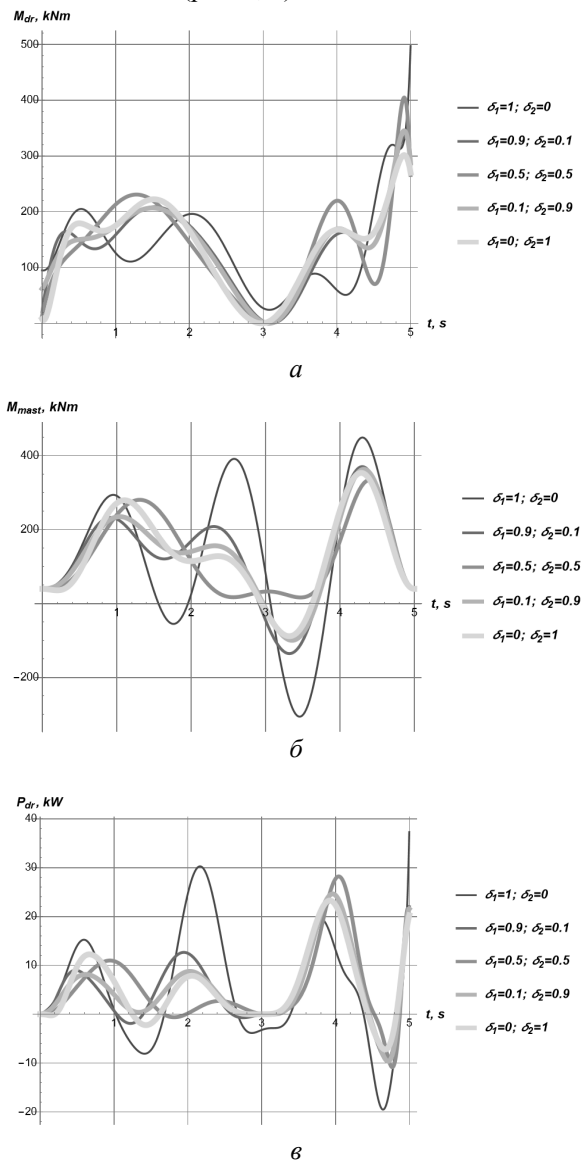


Рис. 3

Усі отримані залежності мають коливальний характер в процесі пуску механізму повороту, але при завершенні перехідного процесу спостерігаються тенденції до затування цих коливань. Найбільшу амплітуду коливань рушійного моменту (рис. 3, *а*), пружного моменту в колоні (рис. 3, *б*) та потужності приводу (рис. 3, *в*) має режим руху з ваговими коефіцієнтами комплексного критерію $\delta_1 = 1$ і $\delta_2 = 0$. При усіх значеннях вагових коефіцієнтів критерію рушійний момент приводу приймає тільки додатні значення. Разом з тим, в графічних залежностях зміни пружного моменту в колоні та потужності приводного механізму спостерігаються від'ємні значення цих характеристик. В той же час існує режим пуску при значеннях вагових коефіцієнтів $\delta_1 = 0,5$ і $\delta_2 = 0,5$, коли пружний момент в колоні приймає тільки додатні значення і має досить плавний характер зміни.

З фазового портрету пружних коливань в колоні (рис. 4, *а*) видно, що найбільші деформації і швидкості їхньої зміни спостерігаються при режимі пуску, коли в комплексному критерії $\delta_1 = 1,0$ і $\delta_2 = 0$, а найменші – при $\delta_1 = 0,5$ і $\delta_2 = 0,5$. Коливання вантажу на гнучкому підвісі (рис. 4, *б*) є близькими при всіх режимах пуску і затухають до кінця перехідного процесу.

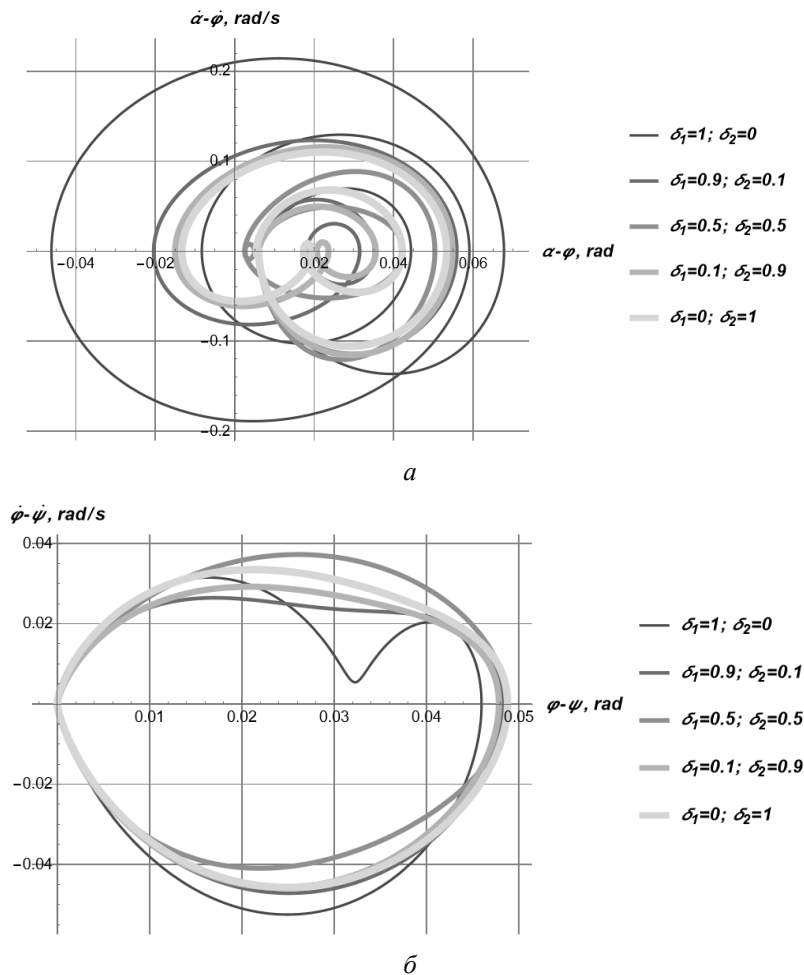


Рис. 4

На основі отриманих розв'язків знайдено числові значення оціночних показників (табл. 2).

Таблиця 2

Показник	Одиниця вимірювання	Значення вагових коефіцієнтів				
		$\delta_1 = 1;$ $\delta_2 = 0$	$\delta_1 = 0,9;$ $\delta_2 = 0,1$	$\delta_1 = 0,5;$ $\delta_2 = 0,5$	$\delta_1 = 0,1;$ $\delta_2 = 0,9$	$\delta_1 = 0;$ $\delta_2 = 1$
Середньоквадратичне значення рушійного моменту	Нм	155278	156379	162670	156579	157636
Максимальне значення рушійного моменту	Нм	496961	333482	404523	345035	301519
Середньоквадратичне значення моменту в колоні	Нм	232959	179398	165727	172361	173804
Максимальне значення моменту в колоні	Нм	449188	370467	333930	363324	353628
Максимальне значення потужності	Вт	37272	23218	28196	24620	23267
Середньоквадратичне значення крутної деформації колони	рад	0,0351	0,0270	0,0250	0,0260	0,0262
Амплітуда пружних коливань колони	рад	0,0677	0,0559	0,0503	0,0548	0,053
Середньоквадратичне значення відхилення вантажу від вертикалі	рад	0,0260	0,0267	0,0272	0,0268	0,0272
Амплітуда маятникових коливань вантажу	рад	0,0459	0,0482	0,0486	0,0478	0,0487
Максимальне прискорення колони	рад/с ²	0,829	0,518	0,640	0,536	0,460
Максимальне прискорення стріли	рад/с ²	0,080	0,0651	0,058	0,0637	0,0617
Максимальне прискорення вантажу	рад/с ²	0,037	0,0403	0,0417	0,0400	0,0411

Аналіз табл. 2 показує, що найменше середньоквадратичне значення рушійного моменту приводу має місце при вагових коефіцієнтах в комплексному критерії $\delta_1 = 1$ і $\delta_2 = 0$, а найменше максимальне значення цього моменту – при $\delta_1 = 0$ і $\delta_2 = 1$. Середньоквадратичне і максимальне значення пружного моменту в колоні досягають мінімальних значень при режимі пуску з ваговими коефіцієнтами $\delta_1 = 0,5$ і $\delta_2 = 0,5$. При цьому ж режимі пуску найменші середньоквадратичне значення відхилення вантажу від вертикалі, його амплітуда маятникових коливань і максимальні прискорення стріли і вантажу. Максимальне значення потужності приводу є мінімальним при режимі пуску з ваговими коефіцієнтами $\delta_1 = 0,9$ і $\delta_2 = 0,1$.

Висновок.

Розроблено динамічну модель механізму повороту баштового крана при усталеному режимі зміни вильоту вантажу. Для такої моделі складено математичну модель, яка описується системою диференціальних рівнянь руху механізму повороту стрілової системи. На базі розробленої математичної моделі руху стрілової системи сфор-

мульовано і розв'язано оптимізаційну задачу силового режиму пуску. В цій задачі за критерій оптимізації режиму повороту стрілової системи обрано комплексний безрозмірний динамічний критерій, який враховує середньоквадратичне і максимальне значення рушійного моменту приводу механізму повороту. В оптимізаційній задачі за крайові умови руху обрані кінематичні характеристики механізму повороту, які усувають коливання вантажу на гнучкому підвісі при виході на усталений режим руху. Розв'язок оптимізаційної задачі представлений у вигляді суми двох поліномів з невідомими коефіцієнтами. Перший поліном забезпечує виконання крайових умов, а другий – мінімізує комплексний критерій. Для розв'язування оптимізаційної задачі використано модифікацію метаевристичного методу рою часточок із обертовою кільцевою топологією зв'язків між часточками Ring-Rot-PSO. Отриманий оптимальний режим пуску механізму повороту забезпечує мінімізацію середньоквадратичного і максимального значень рушійного моменту на компромісній основі. В отриманому оптимальному режимі руху механізму повороту спостерігаються низько- та високочастотні коливання кінематичних, силових та енергетичних характеристик, які викликані розгойдуванням вантажу на гнучкому підвісі та характером зміни рушійного моменту. На ділянці усталеного руху механізму повороту ці коливання усуваються, виходячи з умов отриманого оптимального режиму руху.

Новизною проведеного дослідження у порівнянні із відомими роботами є поєднання декількох вимог у постановочній частині задачі: мінімізації комплексного критерію, що враховує дві складові, обмеження на знак рушійного моменту механізму повороту крана, а також умови усунення маятникових коливань вантажу. Крім того, новою є методика розв'язання задачі, яка полягає у зведенні вихідної задачі до задачі безумовної оптимізації та використання метаевристичного методу Ring-Rot-PSO.

Стаття підготовлена в рамках виконання україно-ізраїльської науково-дослідної роботи «Розробка нових модифікацій методу PSO та їх застосування у задачах інженерії» (договір №М/67-2023 від 29.08.2023 р.).

РЕЗЮМЕ. Представлено результати оптимізації силового режиму пуску механізму повороту баштового крана при усталеному русі механізму зміни вильоту вантажу. Для дослідження використано балочну стрілову систему баштового крана. Вибрано динамічну модель і за допомогою рівнянь Лагранжа другого роду складено диференціальні рівняння руху. Поставлено оптимізаційну задачу, яка включає диференціальні рівняння руху стрілової системи при повороті крана та зміні вильоту вантажу, критерій оптимізації та крайові умови руху. За критерій оптимізації використано комплексний безрозмірний критерій. За крайові умови вибрані кінематичні характеристики механізму повороту, які усувають коливання вантажу на гнучкому підвісі. Розв'язок задачі оптимального керування рухом представлено у вигляді поліному з двома доданками, перший з яких забезпечує крайові умови повороту крана за усталеного режиму зміни вильоту, а другий мінімізує критерій оптимізації шляхом вибору невідомих коефіцієнтів. За допомогою методу Rot-Ring-PSO отримано оптимальний режим пуску механізму повороту при сталій зміні вильоту вантажу.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: баштовий кран, механізми повороту та зміни вильоту, рушійний момент, оптимізація.

1. Герасимьяк Р.П., Лецев В.А. Анализ и синтез крановых электромеханических систем. – Одесса: СМІЛ, 2008. – 192 с.
2. Герасимьяк Р.П., Найдено О.В. Особенности управления электроприводом механизма вильоту стріли під час обертання крана з підвищеним вантажем // Електромашинобудування та електрообладнання. – 2007. – 68. – С. 11 – 15.
3. Казак С.А. Динамика мостовых кранов. – Москва: Машиностроение, 2008. – 332 с.
4. Найдено Е.В. Управление электроприводом механизмов горизонтального перемещения с подвешенным грузом // Електромашинобудування та електрообладнання – 2007. – 69. – С. 17 – 22.

5. *Campara T., Bukvic H., Sprecic D.* Ability to Control Swinging of Payload during the Movement of the Rotary Cranes Mechanism // 4th Int. Conf. on Intelligent Technologies in Logistics and Mecha-tronics Systems. Kaunas Univ. Technol Panevezys Inst. Kaunas. LITHUANIA. – 2009. – P. 52 – 55.
6. *Carmona I.G., Colado J.* Control of a two wired hammerhead tower crane // Nonlinear Dynamics – 2016. – **84**, N 4. – P. 2137 – 2148.
7. *Chwastek S.* Optimization of crane mechanism to reduce vibration // Automation in Construction. – 2020. – **119**. – P. 103335 – 103344.
8. *Kennedy J., Eberhart R.C.* Particle swarm optimization // 1995 IEEE Int. Conf. on Neural Networks, Perth, Western Australia. – 1995. – **4**. – P. 1942 – 1948.
9. *Kruk D., Sulowicz M.* AHRs Based Anti-Sway Tower Crane Controller // 20th Int. Conf. on Research and Education in Mechatronics (REM). – 2019. – P. 1 – 6.
10. *Lee H.P.* Dynamic responses of a beam with a moving mass // J. of Sound and Vibration. – 1996. – **191**, N 2. – P. 289 – 294.
11. *Loveikin V.S., Romasevich Yu.A., Khoroshun A.S.* Optimal Stabilization Control of an Inverted Pendulum with a Flywheel. Part 1 // Int. Appl. Mech. – 2020. – **56**, N 4. – P. 462 – 470.
12. *Loveikin V.S., Romasevich Yu.A., Khoroshun A.S., Shevchuk A.G.* Time-Optimal Control of a Simple Pendulum with a Movable Pivot. Part 2 // Int. Appl. Mech. – 2020. – **56**, N 2. – P. 208 – 215.
13. *Loveikin V., Romasevich Y., Shymko L., Mushtin D., Loveikin Y.* The optimization of luffing and slewing regimes of a tower crane // J. of Theoretical and Appl. Mech. – 2021. – **51**. – P. 421 – 436.
14. *Oguamanam D.C.D., Hansen J.S., Heppler G.R.* Dynamics of a three-dimensional overhead crane system // J. of Sound and Vibration. – 2001. – **242**, N 3. – P. 411 – 426.
15. *Romasevich Yu.O., Loveikin V.S., Khoroshun A.S., Makarets V.V.* Synthesis of Optimal Feedback Control of the Crane–Load System // Int. Appl. Mech. – 2022. – **58**, N 2. – P. 199 – 207.
16. *Romasevich Y., Loveikin V., Loveikin Y.* Development of new rotating ring topology of PSO-algorithm // 2021 IEEE 2nd KhPI Week on Advanced Technology, KhPI Week 2021 – Conference Proceedings. – 2021. – P. 79 – 82.
17. *Schlott P., Rausher F., Sawodny O.* Modelling the structured dynamics of a tower crane // IEEE Int. Conf. on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM). – 2016. – P. 763 – 768.
18. *Stanisic M.M.* On a new theory of the dynamic behavior of the structure carrying moving masses // Ingenieur-Archiv. – 1985. – **55**, N 3. – P. 176 – 185.
19. *Sun G., Kleeberger M.* Dynamic responses of hydraulic mobile crane with consideration of the drive system // Mechanism and Machine Theory. – 2003. – **38**, N 12. – P. 1489 – 1508.
20. *Zhe S.* Designing and Optimization of Fuzzy Sliding Mode Controller for Nonlinear Systems // Computers, Materials and Continua. – 2019. – **61**. – P. 119 – 128.

Надійшла 18.10.2022

Затверджена до друку 27.06.2023