

І.В.Янчевський¹, Л.О.Григор'єва²

НЕСТАЦІОНАРНІ КОЛИВАННЯ В'ЯЗКОПРУЖНОГО
ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНОГО ЦИЛІНДРА

¹Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського»,
просп. Берестейський, 37, 03056, Київ, Україна; e-mail: i.yanchevskiy@kpi.ua;

²Київський національний університет будівництва та архітектури,
пр. Повітрофлотський, 31, 01063, Київ, Україна; e-mail: l_grigoryeva@ukr.net

Abstract. An unified approach is proposed to the calculation of the non-stationary oscillations of piezoceramic plane layers, cylinders and balls, taking into account functional heterogeneity and energy dissipation. The standard vibration damping model and the viscoelastic model of Kelvin-Voigt are considered. The proposed approach makes it possible to study transient response of the transducer to a static or stable mode of oscillations under non-stationary disturbances. An analysis of the functional heterogeneity effect on the non-stationary oscillations of the piezo element is carried out. Calculation of damped vibrations and viscoelastic vibrations of a radially polarized axisymmetric cylinder under electrical and mechanical disturbance in the form of the Heaviside-type function was performed. The damping dynamics were analyzed and the obtained results were compared with the static solution. The actual damping time was determined for the cylinder. The voltage generation by a piezoceramic cylinder under mechanical axisymmetric loading was investigated, taking into account the damping of oscillations. It is established, that the time to reach the steady state for mechanical and electrical load is the same.

Key words: nonstationary electroelasticity, piezoceramic cylinder, functionally-gradient material, energy dissipation, vibration attenuation, Voigt viscoelastic model.

Вступ.

Коливання п'єзоелектричних перетворювачів при нестационарних електричних та механічних збуреннях в електропружній постановці розглядалися в роботах [1, 5, 11, 12, 17 та ін.]. Отримані результати можуть відрізнятися від реальних значень через прояв в'язкопружних властивостей п'єзоелектриків та неоднорідність матеріалу. В фізичному контексті нестационарні збурення з часом затухають та переходять до усталених коливань або статичного стану в залежності від типу навантаження. Процес виходу п'єзоелектричних тіл на усталений режим при нестационарних збуреннях на даний момент залишається недостатньо вивченим.

Усталені коливання п'єзоелектричних тіл в лінійній постановці досить широко представлені в літературі – [2 – 4, 6, 7, 10, 13 – 16 та ін.]. Зокрема, в [6, 9, 15] описані сучасні методи та підходи до розрахунку динамічної поведінки електропружних тіл, взаємодія їх з акустичними та тепловими полями, робочі стандарти визначення матеріальних характеристик. Основні типи, геометрія, режими роботи та особливості експлуатації найбільш поширених п'єзоелементів описані в [3].

П'єзоелектричні перетворювачі можуть працювати як в режимі випромінювання (обернений п'єзоэффект, актуатор), так і в режимі прийому коливань (прямий п'єзоэффект, сенсор) [3 – 6]. В останньому випадку на розімкнутих електродах виникає

різниця потенціалів, тобто генерується електричний сигнал, що може бути зчитаний іншими пристроями електричного кола. В [5] розв'язувалася задача про ідентифікацію вхідного механічного сигналу за вихідним електричним для біморфних тіл.

При усталених коливаннях загальноприйнятим способом врахування демпфування енергії є введення матеріальних характеристик в комплексній формі. В такому підході основною проблемою є отримання повного набору тангенсів втрат для механічних, електричних та діелектричних характеристик матеріалу (разом 10 констант), які в загальному випадку залежать від частотного діапазону навантаження [16]. Врахування дисипації енергії за допомогою комплексних модулів дає можливість знайти реальні амплітудні значення параметрів електромеханічного стану перетворювача в околі резонансів [4]. В міжрезонансному діапазоні дисипація енергії мало впливає на коливання і розрахунок з дійсними матеріальними сталими дає задовільний результат. Дисипативний розігрів п'єзоелектричних в'язкопружних шаруватих оболонок в нелінійній постановці досліджувався в [2, 13].

Проблема невідповідності реального електромеханічного стану математичній моделі може бути також пов'язана з неоднорідністю матеріальних характеристик. Функціональна неоднорідність матеріалу може бути спеціально спроектованою та реалізованою для забезпечення особливих задач перетворення енергії. Функціонально-градієнтні матеріали отримують при механічному компонуванні матеріалів з різко відмінними значеннями фізико-хімічних параметрів. Функціонально-градієнтні п'єзоелектрики використовуються для сенсорів, актуаторів, збирачів енергії, оскільки завдяки компонуванню можна позбавитися недоліків традиційних матеріалів та підсилити переваги матеріалів, що використовуються. В [10] досліджуються вимушені коливання багат шарових та функціонально-градієнтних п'єзокерамічних циліндрів методом розділення змінних з застосуванням сплайн-колокацій та методу дискретної ортогоналізації. В [14] застосовується метод розділення змінних за координатами x, y для прямокутних пластин. Розрахунок функціонально неоднорідних п'єзокерамічних пластин, циліндрів та куль при статичних навантаженнях проводився в [8, 18].

Одним з найпростіших методів врахування затухання коливань є введення в рівняння руху демпфуючого елементу, пропорційного до швидкості переміщень. Ця модель затухання безпосередньо впливає з закону збереження енергії та однаково підходить як для нестационарного режиму, так і для гармонічного аналізу [7, 13].

В'язкопружна модель Фойгта (або Кельвіна – Фойгта) може бути реалізована виключно в'язким демпфером (в'язким тілом Ньютона) і чисто пружним елементом (пружним тілом Гука), з'єднаними паралельно. Ця модель якісно описує явище пружної післядії, при якій деформація розвивається із запізненням відносно прикладеного навантаження [7, 13]. Таким чином, демпфуючий елемент вводиться в матеріальні співвідношення і є пропорційним до швидкості деформації [7].

В даній роботі запропоновано новий підхід до розрахунку нестационарних коливань функціонально-неоднорідних в'язкопружних п'єзокерамічних тіл, що базується на описаному в [1, 12] універсальному підході до дослідження коливань плоских шарів, циліндрів та куль.

§1. Найпростіша модель затухання коливань.

Розглядаються товщинні коливання плоского п'єзоелемента або осесиметричні коливання порожнистих кулі та нескінченного циліндра з врахуванням функціонально-градієнтних та в'язкопружних властивостей матеріалу. Для їх вивчення використовується застосований в [1, 12] узагальнений підхід з введенням параметра N , де $N = 0$ відповідає плоскому п'єзоелементу; $N = 1$ – циліндричному, $N = 2$ – сферичному тілу. В постановці задачі використовуються наступні позначення: r – радіальна (для плоского шару товщинна) координата; D_r – електрична індукція в напрямку осі r ; σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ – радіальні (товщинні) та колові (поперечні) механічні напруження; φ –

електричний потенціал; c_{ij}^E – пружні модулі при сталому електричному полі; e_{ij} – п'єзоелектричні модулі; ε_{ij}^S – діелектрична проникність при сталих деформаціях. Всі матеріальні характеристики вважаються функціонально залежними від товщинної координати:

$$\rho = \rho(r); \quad c_*^E = c_*^E(r); \quad e_* = e_*(r); \quad \varepsilon_{33}^S = \varepsilon_{33}^S(r).$$

Надалі R_1, R_2 – внутрішній та зовнішній радіуси циліндра або кулі; h – товщина стінки п'єзоелементу.

Всі наступні формули та результати наведено в безрозмірному вигляді:

$$\begin{aligned} \bar{r} = \frac{r}{h}; \quad \bar{t} = \frac{t}{t_h}; \quad \bar{u} = \frac{u}{h}; \quad \bar{\sigma}_* = \frac{\sigma_*}{c_{00}}; \quad \bar{\varphi} = \frac{\varphi}{h} \sqrt{\frac{\varepsilon_{33}^S}{c_{00}}}; \quad \bar{D}_r = \frac{D_r}{\sqrt{c_{00} \varepsilon_{33}^S}}; \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_{00}}; \\ \bar{c}_* = \frac{c_*^E}{c_{00}}; \quad \bar{k}_1 = \frac{k_1 h^2}{c_{00} t_h}; \quad \bar{e}_* = \frac{e_*}{\sqrt{c_{00} \varepsilon_{33}^S}}; \quad \bar{\varepsilon}_{33} = 1, \end{aligned} \quad (1.1)$$

де $t_h = h \sqrt{\rho_{00}/c_{00}}$; $c_{00} = c_{33}^E + e_{33}^2/\varepsilon_{33}^S$; $\rho_{00} = \rho$.

Для нормуючих величин використовуються табличні значення характеристик матеріалу.

Залежності (1.1) вибрано таким чином, щоб вхідні рівняння не змінювали свою форму. Надалі знаки безрозмірності опускаємо.

Найпростіша модель затухання коливань формується шляхом введення в рівняння руху демпфувального доданка у вигляді добутку швидкості на коефіцієнт затухання k_1

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{N}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k_1 \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (1.2)$$

Квазістатичне рівняння Максвелла в даній моделі має класичний вигляд

$$\frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{N}{r} D_r = 0. \quad (1.3)$$

Матеріальні співвідношення при товщинній поляризації записуються наступним чином [1]:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= c_{33}^E \frac{\partial u}{\partial r} + N c_{13}^E \frac{u}{r} + e_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \\ \sigma_{\theta\theta} &= c_{13}^E \frac{\partial u}{\partial r} + N \left(c_{11}^E - \frac{1}{2} (N-1) (c_{11}^E - c_{13}^E) \right) \frac{u}{r} + e_{13} \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$D_r = e_{33} \frac{\partial u}{\partial r} + N e_{31} \frac{u}{r} - \varepsilon_{33}^S \frac{\partial \varphi}{\partial r}.$$

Підставляємо (1.4) в (1.2), (1.3) з врахуванням функціональної залежності матеріальних констант від координати r . Штрих біля матеріальної характеристики означає похідну за товщинною координатою:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k_1 \frac{\partial u}{\partial t} &= c_{33} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \left(c_{33}' + N \frac{c_{33}}{r} \right) \frac{\partial u}{\partial r} + \left(N \frac{c_{13}'}{r} - N \frac{c_{13}}{r^2} + N^2 \frac{c_{13} - a}{r^2} \right) u + \\ &+ e_{33} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \left(e_{33}' + N \frac{e_{33} - e_{31}}{r} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$e_{33} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \left(e'_{33} + N \frac{e_{13} + e_{33}}{r} \right) \frac{\partial u}{\partial r} + \left(N \frac{e'_{31}}{r} + N(N-1) \frac{e_{13}}{r^2} \right) u -$$

$$- \varepsilon_{33} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - \left(\varepsilon'_{33} + N \frac{\varepsilon_{33}}{r} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0. \quad (1.6)$$

В (1.5) використовується заміна $a = c_{11} - (N-1)(c_{11} - c_{13})/2$.

Рівняння (1.5), (1.6) доповнюємо механічними граничними умовами

$$u(R_i, t) = U_i(t) \quad \text{або} \quad \sigma_{rr}(R_i, t) = P_i(t) \quad (i = 1, 2); \quad (1.7)$$

граничними умовами для електричних польових величин

$$\varphi(R_1) = 0; \quad \varphi(R_2) = V(t) \quad (1.8)$$

та початковими умовами

$$u|_{t=0} = U_0(r); \quad \left. \frac{du}{dt} \right|_{t=0} = W_0(r). \quad (1.9)$$

В рівняннях (1.5) і (1.6) переходимо від континуальної до дискретної постановки за просторовою координатою з використанням скінченно-різницевого виразу другого порядку точності. Вводимо розбиття $r_i = R_1 + (i-1)\Delta$ ($\Delta = h/m$, $i = 1, \dots, m+1$) та будемо шукати розв'язок відносно $u_i = u(r_i)$ і $\varphi_i = \varphi(r_i)$. Отримуємо систему рівнянь, яка в матричній формі може бути записана наступним чином:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + k_1 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{A} \mathbf{u} + \mathbf{B} \boldsymbol{\varphi}; \quad (1.10)$$

$$\mathbf{C} \mathbf{u} + \mathbf{D} \boldsymbol{\varphi} = 0. \quad (1.11)$$

Для розв'язання системи рівнянь (1.10), (1.11) застосовується неявна схема інтегрування за часом. Використовуємо схему Ньюмарка (тут ξ – параметр схеми; Δt – крок за часом; u^{p+1} , $\dot{u}^{p+1}$, $\ddot{u}^{p+1}$ – переміщення, швидкість та прискорення в момент часу $t^{p+1} = p\Delta t$) –

$$\dot{u}^{p+1} = \frac{u^{p+1} - u^p}{\xi \Delta t} - \frac{1-\xi}{\xi} \dot{u}^p; \quad \ddot{u}^{p+1} = \frac{u^{p+1} - u^p}{\xi^2 \Delta t^2} - \frac{1}{\xi^2 \Delta t} \dot{u}^p - \frac{1-\xi}{\xi} \ddot{u}^p. \quad (1.12)$$

В результаті підстановки (1.12) в (1.10) отримуємо систему рівнянь

$$\left(\frac{\rho}{\xi^2 \Delta t^2} + \frac{k_1}{\xi \Delta t} \right) \mathbf{u}^{p+1} - \mathbf{A} \mathbf{u}^{p+1} - \mathbf{B} \boldsymbol{\varphi}^{p+1} =$$

$$= \left(\frac{\rho}{\xi^2 \Delta t^2} + \frac{k_1}{\xi \Delta t} \right) \mathbf{u}^p + \left(\frac{\rho}{\xi^2 \Delta t} + k_1 \frac{1-\xi}{\xi} \right) \dot{\mathbf{u}}^p + \rho \frac{1-\xi}{\xi} \ddot{\mathbf{u}}^p;$$

$$\mathbf{C} \mathbf{u}^{p+1} + \mathbf{D} \boldsymbol{\varphi}^{p+1} = 0. \quad (1.13)$$

Система (1.13) доповнюється граничними умовами (1.7), (1.8) з використанням (за необхідністю) односторонніх різницевого виразів

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_i = \frac{3f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}}{2\Delta}; \quad \left. \frac{df}{dx} \right|_i = \frac{-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}}{2\Delta}. \quad (1.14)$$

При роботі п'єзоелектрика в режимі прямого п'єзоефекту різниця потенціалів на його розімкнених електродах визначається через переміщення шляхом наступних математичних перетворень рівняння Максвелла [5]:

$$rD_r = r \left(e_{33} \frac{\partial u}{\partial r} + Ne_{31} \frac{u}{r} - \varepsilon_{33}^S \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = \text{const} = 0 ;$$

$$Ne_{31} \frac{u}{r} = \varepsilon_{33}^S \frac{\partial \varphi}{\partial r} - e_{33} \frac{\partial u}{\partial r} ; \quad Ne_{31} \int_{R_1}^{R_2} \frac{u}{r} dr = \int_{R_1}^{R_2} \left(\varepsilon_{33}^S \frac{\partial \varphi}{\partial r} - e_{33} \frac{\partial u}{\partial r} \right) dr ;$$

$$Ne_{31} \int_{R_1}^{R_2} \frac{u}{r} dr = \varepsilon_{33}^S \left(\varphi|_{r=R_2} - \varphi|_{r=R_1} \right) - e_{33} \left(u|_{r=R_2} - u|_{r=R_1} \right) .$$

При переході від континуальних до дискретних виразів маємо

$$V = \varphi_{m+1} - \varphi_1 = \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}^S} (u_{m+1} - u_1) + \frac{Ne_{31}}{\varepsilon_{33}^S} \sum_{i=1}^m \frac{u_i}{r_i} \Delta . \quad (1.15)$$

При врахуванні функціональної неоднорідності матеріалу (1.15) перетворюється до вигляду

$$e_{33}(R_2)u_{m+1} - e_{33}(R_1)u_1 - \left[\varepsilon_{33}^S(R_2)\varphi_{m+1} - \varepsilon_{33}^S(R_1)\varphi_1 \right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^m \left(-e'_{33}(r_i)u_i + \varepsilon'_{33}(r_i)\varphi_i + Ne_{31}(r_i)\frac{u_i}{r_i} \right) \Delta = 0 . \quad (1.16)$$

Рівняння (1.15) або (1.16) використовується в якості електричної граничної умови при механічному навантаженні елемента і описує залежність між згенерованою напругою та переміщеннями елемента.

§2. Модель Кельвіна – Фойгта.

В моделі демпфування Кельвіна – Фойгта рівняння руху та рівняння Максвелла мають класичний вигляд

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{N}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} ; \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{N}{r} D_r = 0 . \quad (2.2)$$

Демпфувальні доданки у виразах для напружень пропорційні до швидкості деформації. Оскільки в осесиметричній постановці у виразах фігурують дві лінійні деформації (ε_{rr} , $\varepsilon_{\theta\theta}$) та два нормальних напруження (σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$), введемо три коефіцієнти демпфування k_{33} , k_{13} та k_{11} з індексацією, відповідною до індексів модулів пружності c_{ij}^E . Для уникнення зв'язаності напружень в плоскому випадку швидкість колової деформації домножується на N

$$\sigma_{rr} = c_{33}^E \varepsilon_{rr} + N c_{13}^E \varepsilon_{\theta\theta} - e_{33} E_r + k_{33} \dot{\varepsilon}_{rr} + k_{13} N \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} ;$$

$$\sigma_{\theta\theta} = c_{13}^E \varepsilon_{rr} + N a \varepsilon_{\theta\theta} - e_{13} E_r + k_{13} \dot{\varepsilon}_{rr} + k_{11} N \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} ; \quad (2.3)$$

$$D_r = e_{33} \varepsilon_{xx} + Ne_{31} \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{33}^S E_r ; \quad \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} ; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r} ; \quad E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} .$$

Вважаємо, що коефіцієнти затухання пропорційні до відповідних коефіцієнтів рівнянь (2.3):

$$\frac{k_{33}}{k_{13}} = \frac{c_{33}^E}{c_{13}^E} ; \quad \frac{k_{13}}{k_{11}} = \frac{c_{13}^E}{a} .$$

Задача (2.1) – (2.3) доповнюється граничними та початковими умовами (1.7) – (1.9).

З введенням швидкості v як додаткової розв'язуючої функції зручно перейти від системи (2.1), (2.2) до системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку та застосувати для інтегрування за часом стандартні методи (наприклад, метод Рунге – Кутта). Підставивши (2.3) в (2.1), маємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = v; \quad \frac{\partial v}{\partial t} = & \left[c_{33}^E \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \left(c_{33}' + \frac{N}{r} c_{33}^E \right) \frac{\partial u}{\partial r} + \left(\frac{N c_{13}'}{r} - \frac{N^2}{r^2} a \right) u + e_{33} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \right. \\ & \left. + \left(e_{33}' + \frac{N}{r} (e_{33} - e_{13}) \right) \frac{\partial \varphi}{\partial r} + k_{33} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{k_{33} N}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{N}{r^2} (N(k_{13} - k_{11}) - k_{13}) v \right] / \rho. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Рівняння (2.4) доповнюються рівнянням Максвелла у формі (1.6) та граничними умовами

$$\sigma_{rr} = \left(c_{33}^E \frac{\partial u}{\partial r} + N c_{13}^E \frac{u}{r} + e_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + k_{33} \frac{\partial v}{\partial r} + k_{13} N \frac{v}{r} \right)_{r=R_i} = P_i(t) \quad (i = 1, 2). \quad (2.5)$$

Електричні граничні умови вибираються в вигляді (1.8).

Розв'язок будемо шукати в вигляді вектора

$$\mathbf{Y} = \{u_1, \dots, u_{m+1}, v_1, \dots, v_{m+1}, \varphi_1, \dots, \varphi_{m+1}\}, \quad (2.6)$$

де u_i, v_i, φ_i – переміщення, швидкість та електричний потенціал в точках розбиття $r_i = R_1 + (i-1)\Delta$ ($\Delta = h/m$, $i = 1, \dots, m+1$).

З різницевої форми рівняння (1.6) в матричному вигляді (1.11) виражаємо електричний потенціал через переміщення та диференціюємо за часом:

$$\boldsymbol{\varphi} = -\mathbf{D}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{u} \rightarrow \dot{\boldsymbol{\varphi}} = -\mathbf{D}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{v}. \quad (2.7)$$

Диференціюємо (2.5), (1.8) за часом і доповнюємо систему рівнянь виразами для шуканих величин в контурних точках

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} = v_1; \quad \frac{\partial u_{m+1}}{\partial t} = v_{m+1}; \\ \frac{\partial v_1}{\partial t} = & \left[\frac{c_{33}^E}{2\Delta r} (-3v_1 + 4v_2 - v_3) + N c_{13}^E \frac{v_1}{R_0} + \frac{e_{33}}{2\Delta r} \left(-3 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + 4 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{k_{33}}{2\Delta r} \left(4 \frac{\partial v_2}{\partial t} - \frac{\partial v_3}{\partial t} \right) \right] / \left(\frac{3k_{33}}{2\Delta r} - \frac{k_{13}N}{R_0} \right); \\ \frac{\partial v_{m+1}}{\partial t} = & - \left[\frac{c_{33}^E}{2\Delta r} (3v_{m+1} - 4v_m + v_{m-1}) + N c_{13}^E \frac{v_{m+1}}{R_1} + \frac{e_{33}}{2\Delta r} \left(3 \frac{\partial \varphi_{m+1}}{\partial t} - 4 \frac{\partial \varphi_m}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial t} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{k_{33}}{2\Delta r} \left(-4 \frac{\partial v_m}{\partial t} + \frac{\partial v_{m-1}}{\partial t} \right) - P_1 \right] / \left(\frac{3k_{33}}{2\Delta r} + \frac{k_{13}N}{R_1} \right); \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial \varphi_{m+1}}{\partial t} = \dot{V}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Система (2.4), (2.6)–(2.8) записується в вигляді

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{F} \mathbf{Y}. \quad (2.9)$$

Система диференціальних рівнянь (2.8) розв'язується методом Рунге – Кутта при початкових умовах

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{U}_0(\mathbf{r}); \quad \mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{W}_0(\mathbf{r}); \quad \boldsymbol{\varphi}|_{t=0} = -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{U}_0(\mathbf{r}); \quad \mathbf{r} = (r_1, \dots, r_{m+1}). \quad (2.10)$$

§3. Числові результати.

Розглянемо п'єзокерамічні порожнисті радіально поляризовані циліндри ($N = 1$), які виготовлені з п'єзокераміки PZT-4 або функціонально-градієнтного матеріалу на основі PZT-4 (таблиця).

c_{11}^E	c_{12}^E	c_{13}^E	c_{33}^E	c_{44}^E	e_{13}	e_{33}	e_{15}	ε_{11}^S	ε_{33}^S	ρ
10^{10} Па					К/м ²			ε_0		кг/м ³
13,9	7,78	7,43	11,5	2,56	-5,2	15,1	12,7	730	635	7500

Вважається, що циліндричні поверхні вільні від механічних навантажень ($P_1 = P_2 = 0$), а до струмопровідних покриттів п'єзоелементів підводиться ступінчастий одиничний електричний сигнал ($V(t) = H(t)$, $H(t)$ – функція Гевісайда). Геометрія п'єзоелементів визначається безрозмірними параметрами R_1 і R_2 .

При моделюванні функціональної неоднорідності матеріальних характеристик вважалось, що їх розподіл за товщиною відбувається за параболічним законом з множителем

$$f(r) = \frac{4b}{h^2} \left(x - \frac{h}{2} \right)^2 + 1 - b, \quad (3.1)$$

де b – відхилення матеріальної характеристики від табличного значення на центральних волокнах в відсотках; $x = r - R_1$ – товщинна координата.

На рис. 1 наведено криві коливань зовнішніх поверхонь циліндра з радіусами $R_1 = 1$ і $R_2 = 2$. При $b = 0$ маємо однорідний матеріал циліндру, а при $b = 10\%$ та 20% всі матеріальні характеристики з таблиці змінюються за законом (3.1) відносно табличного значення.

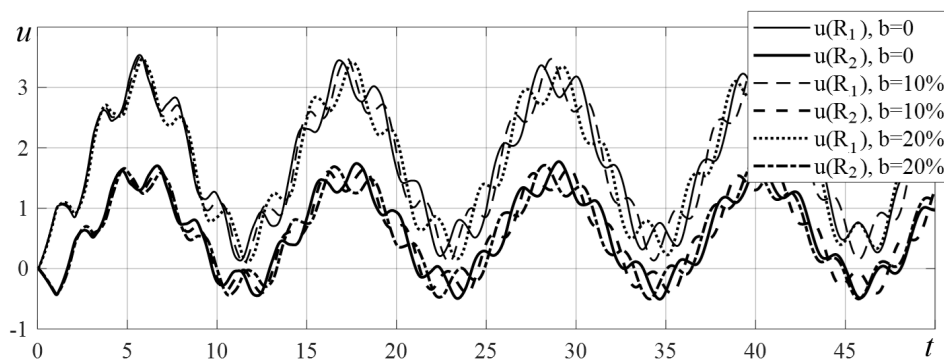


Рис. 1

З рис. 1 бачимо, що функціональна неоднорідність впливає лише на швидкість поширення товщинних коливань. В даному випадку в зв'язку зі зменшенням значень матеріальних характеристик відносно однорідного тіла швидкість поширення зменшується, що відповідає результатам, наведеним в [1, 11]. Амплітуда коливань середньої поверхні циліндра не залежить від b , а період зростає на 0,4% на кожні 10% відхилення.

Порівняння розглянутих вище моделей затухання проведемо за допомогою рис. 2. На рис. 2, а наведено нестационарні коливання зовнішньої поверхні однорідного циліндра з радіусами $R_1 = 3$ і $R_2 = 4$ для моделі (1.2) – (1.4) при різних значеннях коефіцієнта затухання k_1 . Бачимо, що при $k_1 = 0,02$ практично повне затухання відбувається при $t_3 = 500$; при $k_1 = 0,01$ – $t_3 = 900$, а при $k_1 = 0,005$ – $t_3 = 1500$. Безрозмірна одиниця часу для тіла з товщиною стінки 1 см відповідає $2,2 \cdot 10^{-6}$ с, тобто час затухання, відповідно, складає 1,1 мс, 1,98 мс і 3,3 мс. Коливання в'язкопружного тіла наближаються до розв'язку відповідної статичної задачі (рис. 2) – $u(R_2) = 2,4$, при цьому зменшення амплітуди відбувається за експоненціальним законом.

На рис. 2, б відображено коливання зовнішньої поверхні того ж циліндра згідно в'язкопружної моделі Фойгта (2.1) – (2.3) при різних значеннях коефіцієнта затухання k_{33} .

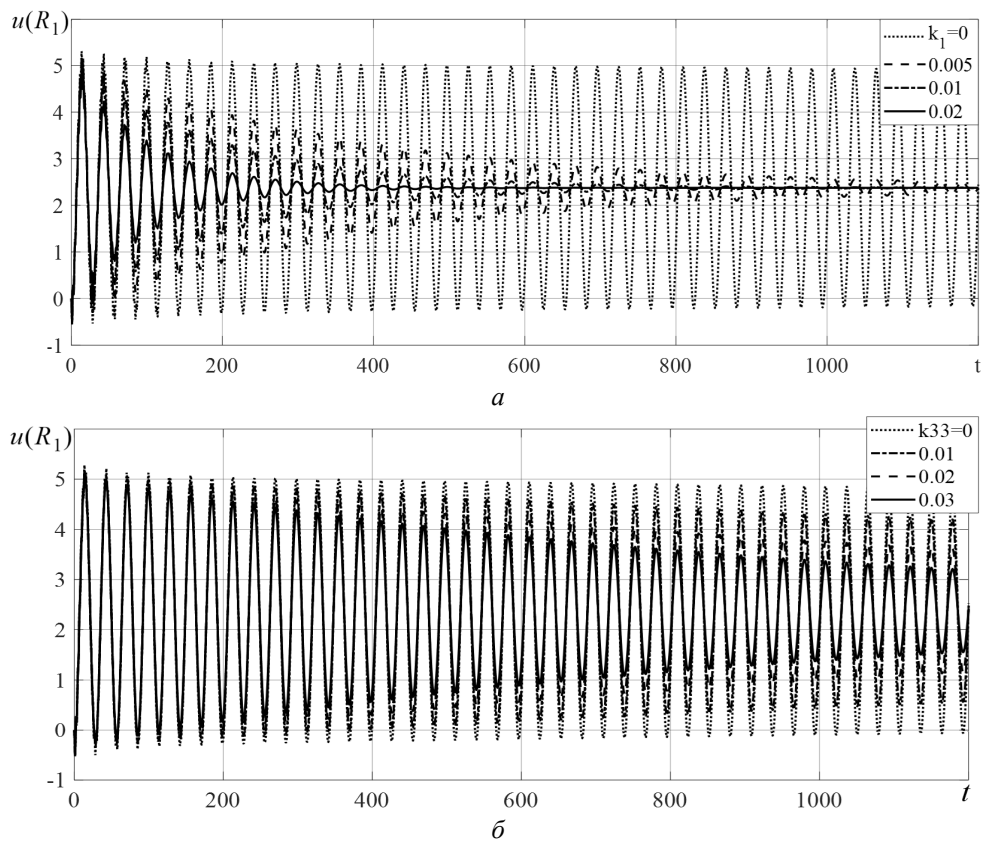


Рис. 2

Бачимо, що на дослідженому інтервалі часу амплітуда зменшилася і наближається до розв'язку задачі у статичній постановці. За час спостереження (2,64 мс) при $k_{33} = 0,01$ амплітуда коливань зменшилася на 30%; при $k_{33} = 0,02$ – на 53 %, а при $k_{33} = 0,03$ – на 67 %. На розглянутому інтервалі маємо 42 цикла коливань. Тобто можна спрогнозувати, що для $k_{33} = 0,03$ з моменту часу $t_3 = 2200$ відхилення відносно статичного значення не буде перевищувати 3%. Період коливань в розмірних величинах склав $61,6 \cdot 10^{-6}$ с, частота – 16,2 кГц.

На рис. 3 наведено результати статичного розрахунку для описаного вище циліндра при навантаженні одиничною різницею потенціалів.

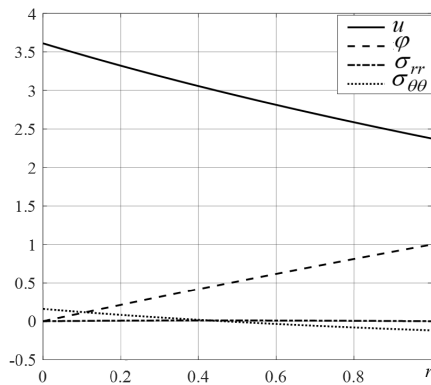


Рис. 3

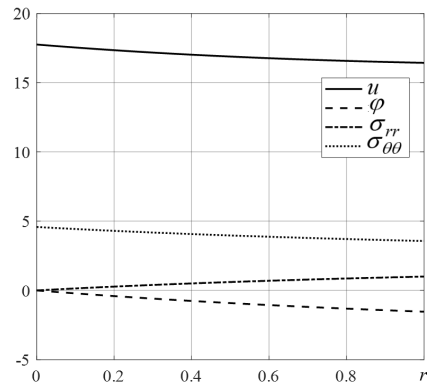


Рис. 4

Маємо на внутрішній поверхні переміщення 3,6, а на зовнішній поверхні 2,37. Тобто, із порівняння представлених на рис. 2 і 3 кривих випливає, що при врахуванні в'язкопружних властивостей матеріалу електропружні коливання прямують до статичного розв'язку, що повністю узгоджується з класичними визначеннями з теорії коливань і свідчить про коректність отриманих результатів.

Генерація напруги при механічному навантаженні п'єзокерамічного циліндра ілюструє собою прямий п'єзоэффект. Результати статичного розрахунку при навантаженні одиничним зовнішнім тиском $P_2 = 1$ наведено на рис. 4. Переміщення змінюються з 17,74 на внутрішній поверхні до 16,42 на зовнішній. Різниця електричного потенціалу набуває значення 1,53.

Динамічні криві переміщень зовнішньої поверхні циліндра та згенерованої напруги між його розімкненими електродами наводяться на рис. 5. В даних розрахунках реалізована модель (1.2) – (1.4) при $P_1 = 0$, $P_2 = H(t)$ та електричній граничній умові (1.15).

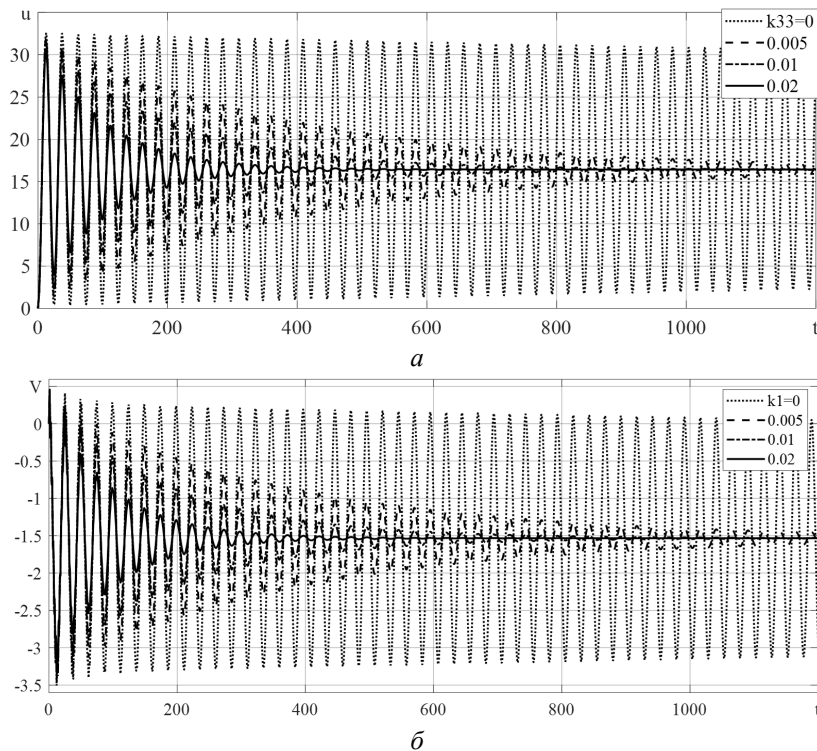


Рис. 5

На рис. 5 спостерігаються пульсуючі коливання зовнішньої поверхні. Характер затування при розглянутих значеннях коефіцієнта демпфування k_1 повністю співпадає з рис. 2, а. Переміщення прямують до значення $u(R_2) = 16,4$, а електричний потенціал до $\varphi(R_2) = -1,52$, що повністю відповідає результатам, наведеним на рис. 4.

Період механічно обумовлених коливань менший, ніж при електричному навантаженні, приблизно на 12%. Частота коливань 18,5 кГц. Зменшення амплітуди відбувається за нелінійною залежністю. Максимальні переміщення, що виникають при описаному ступінчастому навантаженні, вдвічі вищі за значення при статичному розв'язку. Те саме можна сказати і про механічні напруження.

Висновок.

Побудовано і отримано чисельний розв'язок задачі про нестационарні коливання радіально поляризованого в'язкопружного п'єзокерамічного циліндра з функціонально-градієнтного матеріалу. Вплив функціональної неоднорідності матеріалу виражається в зміні швидкості поширення збурень уздовж товщинної координати. При порівнянні використання двох розглянутих моделей дисипації енергії встановлено, що врахування демпфувального елементу, пропорційного до швидкості переміщень в рівнянні руху, спричиняє затування значно швидше, ніж в моделі Фойгта при тих самих коефіцієнтах затування. Виконані числові розрахунки показали, що збурення, які виникають при прикладанні нестационарного навантаження, мають амплітуду коливань, що приблизно вдвічі вища за відповідне значення в статичному розв'язку. Для визначення коефіцієнтів затування обома методами необхідно знати час затування в реальному об'єкті. Загалом дві розглянуті моделі дисипації енергії дали подібну картину коливань, тобто надалі можна використовувати простішу з них.

При дослідженні генерації напруги при механічному навантаженні частота коливань збільшилася. При розглянутому додатному значенні зовнішнього навантаження переміщення відбуваються в додатній зоні, а різниця потенціалів від'ємна. Криві переміщень та електричного потенціалу в розглянутому масштабі пропорційні між собою.

Отримані результати важливі для оцінки електромеханічного стану, в тому числі електричної та механічної міцності п'єзоелемента, при нестационарних збуреннях. Запропонований підхід дає змогу виконувати розрахунок перехідних режимів для п'єзокерамічних плоских тіл, циліндрів та куль, в тому числі з функціонально-градієнтного матеріалу.

РЕЗЮМЕ. Запропоновано уніфікований підхід до розрахунку нестационарних коливань п'єзокерамічних плоских шарів, циліндрів та куль з урахуванням функціональної неоднорідності та в'язкопружності матеріалу. Розглянуто стандартну модель затування коливань та в'язкопружну модель Кельвіна – Фойгта. Запропонований підхід дозволяє досліджувати перехід перетворювача до статичного стану або на усталений режим коливань при нестационарних збуреннях. Проведено аналіз впливу функціональної неоднорідності на нестационарні коливання п'єзоелемента. Виконано розрахунок затування коливань та в'язкопружних осесиметричних коливань радіально поляризованого циліндра при електричному та механічному збуренні функцією типу Гевісайда. Проаналізовано динаміку затування, проведено порівняння отриманих результатів зі статичним розв'язком для перевірки достовірності отриманих результатів. Досліджується також генерація напруги п'єзокерамічним циліндром при механічному осесиметричному навантаженні з урахуванням в'язкопружних властивостей матеріалу. Встановлено, що час виходу на усталений режим для механічного та електричного навантаження майже однаковий.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: нестационарна електропружність, п'єзокерамічний циліндр та сфера, функціонально-градієнтний матеріал, в'язкопружне затування коливань.

1. Григор'єва Л.О., Янчевський І.В. Нестационарні коливання п'єзоелектричних перетворювачів з функціонально-градієнтного матеріалу // Пробл. обчислювальної механіки та міцності конструкцій. – 2022, №35. – С. 29 – 41.

2. Киричок І.Ф., Жук Я.О., Карнаухова Т.В. Демпфування резонансних осесиметричних коливань нескінченно довгої в'язкопружної циліндричної оболонки з п'єзоелектричними сенсором і актуатором при врахуванні вібророзігріву // Вісник Київського нац. ун-ту імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2015. – № 1. – С. 35 – 40.
3. Шарапов В.М., Сотула Ж.В., Куницкая Л.Г. Электроакустические преобразователи – Москва: Техносфера, 2013. – 296 с.
4. Шульга М.О., Карлаш В.Л. Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин. – Київ: Наук. думка, 2008. – 270 с.
5. Янчевський І.В. Нестационарні коливання біморфних електропружних тіл. – Київ: КПП ім. Ігоря Сікорського, 2023. – 448 с.
6. Busch-Vishniac I.J. Electromechanical Sensors and Actuators. – New York: Springer, 1999. – 359 p.
7. Chazal C.F., Moutou Pitti R. An incremental constitutive law for ageing viscoelastic materials: a three-dimensional approach // Comptes Rendus Mécanique. – 2009. – **337**, N 1. – P. 30 – 33.
8. Dai H.L., Fu Y.M., Yang J.H. Electromagnetoelastic behaviors of functionally graded piezoelectric solid cylinder and sphere // Acta Mechanica Sinica. – 2007. – **23**, N 1. – P. 55 – 63.
9. Fang D., Li F., Liu B., Zhang Y. Advances in Developing Electromechanically Coupled Computational Methods for Piezoelectrics/Ferroelectrics at Multiscale // Appl. Mech. Reviews. – 2013. – **65**, N 6. – P. 52.
10. Grigorenko A.Y., Müller W.H., Loza I.A. Selected Problems in the Elastodynamics of Piezoceramic Bodies. – Cham: Springer, 2021. – P. 239.
11. Grigoryeva L. Transient responses in piezoceramic multilayer actuators taking into account external viscoelastic layer // Strength of Materials and Theory of Struct. – 2020. – **105**. – P. 255 – 266.
12. Hryhorieva L.O., Yanchevskiy I.V. Influence of material functional heterogeneity on non-stationary oscillations of piezoceramic bodies // Strength of Materials and Theory of Struct. – 2022. – **109**. – P. 359 – 368.
13. Kozlov V.I., Zinchuk L.P., Karnaukhova T.V. Nonlinear Vibrations and Dissipative Heating of Laminated Shells of Piezoelectric Viscoelastic Materials with Shear Strains // Int. Appl. Mech. – 2021. – **57**, N 6. – P. 669 – 686.
14. Li J., Xue Y., Li F., Narita Y. Active vibration control of functionally graded piezoelectric material plate // Composite Struct. – 2019. – 207. – P. 509 – 518.
15. Rupitsch S.J. Piezoelectric Sensors and Actuators. – Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2019. – 559 p.
16. Uchino K., Zhuang Y., Ural S.O. Loss Determination Methodology for a Piezoelectric Ceramic: New Phenomenological Theory and Experimental Proposals // J. of Advanced Dielectrics. – 2011. – **1**, N. 1. – P. 17 – 31.
17. Wang H.M., Ding H.J., Chen Y.M. Transient responses of a multilayered spherically isotropic piezoelectric hollow sphere // Arch. Appl. Mech. – 2005. – **74**. – P. 581 – 599.
18. Ying C., Zhi-fei S. Analysis of a functionally graded piezothermoelastic hollow cylinder // J. of Zhejiang University. Science A. – 2005. – **6**, N 9. – P. 956 – 961.

Надійшла 28.01.2023

Затверджена до друку 27.06.2023