І.Ю.Хома[1], Т.М.Прощенко[2]

НЕРОЗТЯЖНА ВІДНОСНО ГРАНИЧНИХ ПЛОЩИН ТРАНСВЕРСАЛЬНО – ІЗОТРОПНА ПЛАСТИНА З КРУГОВИМ ОТВОРОМ ПРИ ЗАДАНІЙ НА НЬОМУ РОЗЩЕПЛЮВАЛЬНІЙ СИЛІ

*[1] Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: reolog@inmech.kiev.ua;
[2] Київський національний університет імені Т. Шевченка,
просп. Академіка Глушкова, 4г, 03127, Київ, Україна;
e-mail: t.proshchenko@gmail.com*

Abstract. Using the method of expanding of unknown functions into Fourier series of Legendre polynomials a system of equations for a transversally isotropic plate of constant thickness under mixed conditions on flat faces is obtained. A method for representing the general analytical solution of the system for symmetrical deformation of the plate with respect to the median plane is described. A solution is found to the problem of the stress state of a plate with a circular hole, on the surface of which a splitting force is given.

Key words: transversely isotropic plate, mixed boundary conditions, circular hole, splitting force, stress concentration.

Вступ.

Проблемі концентрації напружень біля отворів та порожнин у пружних тілах типу пластин та оболонок приділяється достатньо уваги [4, 6, 9, 13 – 15]. Можливість деформування пружного тіла по товщині (що властиво нетонким пластинам) дозволяє враховувати розподіл напружень по трьох напрямах. Отримання повної інформації про розподіл напружень в локальних областях пов'язано з використанням методів та результатів просторових задач механіки деформівного твердого тіла [2, 10, 16]. Однак складність розв'язання граничних задач у тривимірній постановці призводить до необхідності використання наближених методів. Ефективним є метод розкладу шуканих величин у ряди Фур'є за ортогональною системою базових функцій [1, 5, 7, 8]. Для визначення напружено-деформованого стану нетонких пластин з отворами у [4, 9] використовується метод однорідних розв'язків, а у [11 – 13] – метод розкладу шуканих функцій у ряди за поліномами Лежандра.

У даній роботі аналогічним [5] способом викладено виведення рівнянь рівноваги трансверсально-ізотропної пластини при комбінованих граничних умовах на плоских гранях. Наведено метод представлення загального аналітичного розв'язку системи рівнянь при симетричному деформуванні пластини по відношенню до серединної площини. Знайдено розв'язок задачі про напружений стан пластини з круговим отвором, на поверхні якого задано значення розщеплювальної сили (врівноваженої по товщині пари сил, направлених на розщеплення або стиснення пластини по серединній площині).

§1. Постановка задачі та виведення основних рівнянь.

Припустимо, що необмежена пластина товщиною $2h$ ($h = \mathrm{const}$), яка заповнює область $\Omega = S \times [-h, h]$ тривимірного простору R^3, віднесена до декартової системи координат x_i $(i = 1, 2, 3)$. Граничні площини $x_3 = h$ і $x_3 = -h$ недеформівні у своїй площині та вільні від зовнішнього навантаження. Отже, на пласких гранях мають місце граничні умови

$$u_\alpha\left(x_1,\, x_2,\, \pm h\right) = 0 \quad \left(\alpha = 1,\, 2\right); \quad \sigma_{33}\left(x_1,\, x_2,\, \pm h\right) = 0\,.$$

Пластина послаблена круговим отвором радіуса R, на поверхні $\partial\Omega = R \times \left[-h,\, h\right]$ якого задана розщеплювальна сила

$$\sigma_{r3} = q\varphi\left(\zeta\right),$$

де $q = \mathrm{const}$; $\varphi\left(\zeta\right)$ – непарна функція поперечної координати $\zeta = h^{-1}x_3$, зокрема $\varphi\left(\zeta\right) = \zeta$ або $\varphi\left(\zeta\right) = \zeta\left(1-\zeta^2\right)$.

Для розв'язання задачі скористаємося методом розкладу шуканих функцій в ряди Фур'є за поліномами Лежандра $P_k\left(\zeta\right)$ координати товщини ζ. Представимо, аналогічно [1, 5], компоненти тензора напружень σ_{ij} і нормального переміщення u_3 у вигляді ряду

$$\left\{\sigma_{ij}\left(x,\, x_3\right), u_3\left(x,\, x_3\right)\right\} = \sum_{k=0}^{\infty}\left\{\sigma_{ij}^{(k)}(x),\, u_3^{(k)}(x)\right\}P_k(\zeta)\,, \tag{1.1}$$

а складові тангенціальних переміщень u_α запишемо таким чином:

$$u_\alpha\left(x,\, x_3\right) = \sum_{k=0}^{\infty} u_\alpha^{(k)}(x)\left[P_k(\zeta) - P_{k+2}(\zeta)\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\left[u_\alpha^{(k)}(x) - u_\alpha^{(k+2)}(x)\right]P_k(\zeta)\,, \tag{1.2}$$

де $x = (x_1,\, x_2) \in \mathrm{S}$; $u_j^{(k)}\left(x\right)$, $\sigma_{ij}^{(k)}\left(x\right)$ – коефіцієнти розкладу, які скорочено називатимемо моментами, визначаються ріностями

$$\left\{u_j^{(k)}(x),\, \sigma_{ij}^{(k)}(x)\right\} = \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{h}\int_{-h}^{h}\left\{u_j\left(x, x_3\right), \sigma_{ij}\left(x, x_3\right)\right\}P_k(\zeta)dx_3\,. \tag{1.3}$$

Відносно моментів напружень $\sigma_{ij}^{(k)}$ як функцій двох незалежних змінних при симетричному відносно серединної площини S деформуванні пластини отримаємо систему рівнянь [5]

$$\begin{gathered}\partial_\alpha\sigma_{\alpha\beta}^{(2k)} - \left(4k+1\right)h^{-1}\sum_{s=0}^{k-1}\sigma_{3\beta}^{(2s+1)} + \left(2k + \frac{1}{2}\right)h^{-1}\left(\sigma_{3\beta}^{+} - \sigma_{3\beta}^{-}\right) = 0\,;\\ \partial_\alpha\sigma_{\alpha 3}^{(2k+1)} - \left(4k+3\right)h^{-1}\sum_{s=0}^{k}\sigma_{33}^{(2s)} = 0 \qquad (\beta = 1,2;\ k = 0,\, 1,\ldots)\,,\end{gathered} \tag{1.4}$$

де $\partial_\alpha = \partial/\partial x_\alpha$ $\left(\alpha = 1,\, 2\right)$; σ_{3j}^{+} і σ_{3j}^{-} – значення напружень на граничних площинах $x_3 = h,\ x_3 = -h$ відповідно; по індексах, що повторюються, мають на увазі додавання, причому латинські букви набувають значень 1, 2, 3, а грецькі – 1, 2.

Рівняння стану, що пов'язують моменти компонент напружень $\sigma_{ij}^{(k)}$ і деформацій $\varepsilon_{ij}^{(k)}$, отримуємо із співвідношень узагальненого закону Гука для анізотропного тіла

$$\sigma_{ij} = c_{ijlm}\partial_l u_m\,,$$

де c_{ijlm} – тензор модулів пружності, що задовольняє умовам симетрії $c_{ijlm} = c_{jilm} = c_{lmij}$.

Згідно з формулами (1.1), (1.2), знайдемо вирази для деформацій $\varepsilon_{lm} = \partial_l u_m$. Враховуючи при цьому рекурентні співвідношення для поліномів Лежандра [3]

$$P'_{n+1}(\zeta)-P'_{n-1}(\zeta)=\left(2n+1\right)P_n(\zeta)\,,$$

будемо мати вираз

$$\varepsilon_{lm}=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon_{lm}^{(k)}\left(x\right)P_k(\zeta)\,, \tag{1.5}$$

у якому

$$\begin{gathered}\varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)}=\partial_\alpha\left(u_\beta^{(k)}-u_\beta^{(k-2)}\right);\quad \varepsilon_{\alpha 3}^{(k)}=\partial_\alpha u_3^{(k)}\,;\\ \varepsilon_{3\beta}^{(k)}=-\left(2k+1\right)h^{-1}u_\beta^{(k-1)}\,;\quad \varepsilon_{33}^{(k)}=\left(2k+1\right)h^{-1}\sum_{s=0}^{\infty}u_3^{(k+2s+1)}\,.\end{gathered} \tag{1.6}$$

Згідно (1.5), напруження σ_{ij} набудуть вигляду

$$\sigma_{ij}=\sum_{n=0}^{\infty}c_{ijlm}\varepsilon_{lm}^{(n)}\left(x\right)P_n(\zeta)\,. \tag{1.7}$$

Враховуючи формули (1.3), помножимо рівність (1.7) на функцію $p_k(x_3)=$ $=\left(k+(1/2)\right)h^{-1}P_k(\zeta)$ і виконаємо інтегрування за змінною x_3 у межах товщини пластини. У результаті отримаємо співвідношення, що пов’язують моменти компонент напружень $\sigma_{ij}^{(k)}$ та деформацій $\varepsilon_{ij}^{(k)}$

$$\sigma_{ij}^{(k)}=c_{ijlm}\varepsilon_{lm}^{(k)}\,. \tag{1.8}$$

Для трансверсально-ізотропної пластини з площиною ізотропії, що співпадає із серединною площиною, рівняння стану (1.8) при симетричному деформуванні пластини відносно площини S представляються таким чином:

$$\begin{gathered}\sigma_{11}^{(2k)}=c_{11}\varepsilon_{11}^{(2k)}+c_{12}\varepsilon_{22}^{(2k)}+c_{13}\varepsilon_{33}^{(2k)}\,;\quad \sigma_{12}^{(2k)}=c_{66}\left(\varepsilon_{12}^{(2k)}+\varepsilon_{21}^{(2k)}\right);\\ \sigma_{22}^{(2k)}=c_{12}\varepsilon_{11}^{(2k)}+c_{11}\varepsilon_{22}^{(2k)}+c_{13}\varepsilon_{33}^{(2k)}\,;\ \sigma_{13}^{(2k+1)}=c_{44}\left(\varepsilon_{13}^{(2k+1)}+\varepsilon_{31}^{(2k+1)}\right);\\ \sigma_{33}^{(2k)}=c_{13}e^{(2k)}+c_{33}\varepsilon_{33}^{(2k)}\,;\qquad \sigma_{23}^{(2k+1)}=c_{44}\left(\varepsilon_{23}^{(2k+1)}+\varepsilon_{32}^{(2k+1)}\right),\end{gathered} \tag{1.9}$$

де $e^{(2k)}=\varepsilon_{11}^{(2k)}+\varepsilon_{22}^{(2k)}=\partial_\alpha u_\alpha^{(2k)}$; c_{11}, c_{12}, …, c_{66} – пружні сталі, що визначаються через технічні константи формулами

$$c_{11}=\frac{\left(1-e\nu'^2\right)E}{d};\quad c_{12}=\frac{\left(\nu+e\nu'^2\right)E}{d}\,;\quad c_{13}=\frac{\nu'\left(1+\nu\right)E}{d}\,;\quad c_{33}=\frac{\left(1-\nu^2\right)E}{ed}\,;$$

$$c_{44}=G'\,;\quad c_{66}=G=\frac{E}{2\left(1+\nu\right)}\,;\quad e=\frac{E}{E'}\,;\quad d=\left(1+\nu\right)\left(1-\nu-2e\nu'^2\right).$$

Тут E, E' – модулі пружності у площині ізотропії і нормальній до неї площині; G, G' і ν, ν' – модулі зсуву та коефіцієнти Пуассона у відповідних площинах.

З рівностей (1.7) знаходимо

$$\sigma_{3\beta}^{+}-\sigma_{3\beta}^{-}=2c_{44}\sum_{s=0}^{\infty}\left[\partial_\beta u_3^{(2s+1)}-\left(4s+3\right)u_\beta^{(2s)}\right]. \tag{1.10}$$

Підставивши (1.9), (1.10) у рівняння (1.4), після деяких перетворень отримаємо систему рівнянь

$$c_{66}\Delta u_\alpha^{(2k)}+\left(c_{12}+c_{66}\right)\partial_\alpha e^{(2k)}+$$

$$+h^{-1}\sum_{s=0}^{\infty}\alpha_{2s+1}^{(k)}\left[\left(c_{13}+c_{44}\right)\partial_\alpha u_3^{(2s+1)}-\left(4s+3\right)c_{44}h^{-1}u_\alpha^{(2s)}\right]=0\quad\left(\alpha=1,2\right); \tag{1.11}$$

$$c_{44}\Delta u_3^{(2k+1)}-\left(4k+3\right)\left(c_{13}+c_{44}\right)h^{-1}e^{(2k)}-\left(4k+3\right)c_{33}h^{-2}\sum_{s=0}^{\infty}\alpha_{2s+1}^{(k)}u_3^{(2s+1)}=0 \\ \left(k=0,\,1,\,...\right), \tag{1.12}$$

у якій Δ – двовимірний оператор Лапласа; $\alpha_{2s+1}^{(k)}$ – абсолютна константа виду

$$\alpha_{2s+1}^{(k)}=\begin{cases}(\mathrm{s}+1)\left(2s+1\right),\ 0\le s\le k;\\ (k+1)\left(2k+1\right),\ \ k\le s.\end{cases}$$

§2. Представлення загального аналітичного розв'язку.

На практиці при розв'язанні конкретних задач використовується система рівнянь скінченного порядку, що властиво методам, які містять у собі регулярний процес заміни розв'язку тривимірної задачі послідовністю двовимірних. Процес редукції до системи рівнянь скінченного порядку здійснюється за допомогою збереження у розкладах шуканих функцій тільки скінченного числа $N+1$ перших членів ряду. На основі цього при $N=2n+1$, де n – довільне натуральне число, $n<\infty$, можна вважати, що $u_\alpha^{(2k)}=u_3^{(2k+1)}=0$, якщо $k>n$. Беручи до уваги вказане припущення, викладемо спосіб представлення загального аналітичного розв'язку системи рівнянь (1.11), (1.12). Продиференціюємо перше ($\alpha=1$) рівняння (1.11) за змінною x_1, а друге ($\alpha=2$) – за x_2 і додамо отримані рівності. У результаті отримаємо рівняння, яке разом із (1.12) утворює таку систему:

$$\Delta e^{(2k)}+\frac{c_{44}}{c_{11}h}\sum_{s=0}^{n}\alpha_{2s+1}^{(k)}\left[c^*\Delta u_3^{(2s+1)}-\left(4s+3\right)h^{-1}e^{(2s)}\right]=0\,; \tag{2.1}$$

$$\Delta u_3^{(2k+1)}-\left(4k+3\right)c^*h^{-1}e^{(2k)}-\frac{\left(4k+3\right)c_{33}}{c_{44}h^2}\sum_{s=0}^{n}\alpha_{2s+1}^{(k)}u_3^{(2s+1)}=0\ \left(k=0,1,...n\right), \tag{2.2}$$

де $c_{11}=c_{12}+2c_{66}$; $c^*=1+c_{13}/c_{44}$.

Уводячи позначення

$$c_{66}he^{(2k)}=\upsilon_{2k+1}\,;\quad c_{66}u_3^{(2k+1)}=\upsilon_{2(k+1)}\ \left(k=0,\,1,\,...,\,n\right), \tag{2.3}$$

надамо їй нормального виду

$$\sum_{s=1}^{2(n+1)}\left(a_{ks}\Delta-b_{ks}h^{-2}\right)\upsilon_s=0\quad\left(k=1,\,2,...,\,n+1\right).$$

Можна вчинити ще наступним способом. Визначимо з рівності (2.2) моменти деформацій

$$e^{(2k)}=\frac{h}{\left(4k+3\right)c^*}\Delta u_3^{(2k+1)}-\frac{c_{33}}{c^*c_{44}h}\sum_{s=0}^{n}\alpha_{2s+1}^{(k)}u_3^{(2s+1)} \tag{2.4}$$

і внесемо їх значення в (2.1). Тоді отримаємо систему рівнянь відносно функцій $u_3^{(2k+1)}$

$$\frac{h^4}{4k+3}\Delta\Delta u_3^{(2k+1)} - ah^2\sum_{s=0}^{n}\alpha_{2s+1}^{(k)}\Delta u_3^{(2s+1)} + \frac{c_{33}}{c_{11}}\sum_{s=0}^{n}(4s+3)\alpha_{2s+1}^{(k)}\sum_{l=0}^{n}\alpha_{2l+1}^{(s)}u_3^{(2l+1)} = 0 .$$

Тут $a = \frac{cc_{33}}{c_{44}} - \frac{2c_{13}}{c_{11}}$; $c = 1 - \frac{c_{13}^2}{c_{11}c_{33}}$. Покладаючи

$$c_{66}u_3^{(2k+1)} = u_k \quad (k = 0, 1, ..., n), \tag{2.5}$$

запишемо її так

$$\sum_{k=1}^{n+1} L_{sk}(\Delta)u_k = 0 \quad (s = 1, 2,..., n+1), \tag{2.6}$$

де $L_{sk}(\Delta)$ – диференціальні оператори виду

$$L_{sk}(\Delta) = \alpha_{sk}h^2\Delta\Delta - \beta_{sk}h^2\Delta + \gamma_{sk} ,$$

α_{sk}, β_{sk}, γ_{sk} – постійні, явні вирази яких неважко виписати.

Для інтегрування системи рівнянь (2.6) скористаємося аналогічним [5] операторним методом. Уведемо функцію V згідно формул

$$u_k = \mathrm{A}_{sk}(\Delta)\mathrm{V} , \tag{2.7}$$

де $\mathrm{A}_{sk}(\Delta) = (-1)^{s+k}\mathrm{M}_{sk}(\Delta)$; $\mathrm{M}_{sk}(\Delta)$ – мінори, $\mathrm{A}_{sk}(\Delta)$ – алгебраїчні доповнення елементів $L_{sk}(\Delta)$ операторної матриці $\|L_{sk}(\Delta)\|_{(n+1)\times(n+1)}$, і підставимо значення (2.7) у s-ту рівність системи (2.5). У результаті отримаємо рівняння

$$\sum_{k=1}^{n+1} L_{sk}(\Delta)\mathrm{A}_{sk}(\Delta)\mathrm{V} = 0$$

або ж у звичайній формі

$$\sum_{l=0}^{2(n+1)} B_l h^{2l}\Delta^l\mathrm{V} = 0 , \tag{2.8}$$

де B_l – безрозмірні постійні коефіцієнти.

Розглянемо характеристичне рівняння

$$\det\left\|\alpha_{sk}k^2 - \beta_{sk}k + \gamma_{sk}\right\| = 0$$

і будемо вважати, що воно має прості не рівні нулю корені k_m. Тоді рівність (2.8) можна представити у вигляді

$$\prod_{m=1}^{2(n+1)}\left(\Delta - k_m h^{-2}\right)\mathrm{V} = 0 .$$

Звідси випливає, що

$$\mathrm{V} = \sum_{m=1}^{2(n+1)}\mathrm{V}_m , \tag{2.9}$$

де V_m – метагармонічні функції, що задовольняють рівностям

$$\Delta\mathrm{V}_m - k_m h^{-2}\mathrm{V}_m = 0 . \tag{2.10}$$

Зауважимо, що, в залежності від значень пружних констант, корені k_m можуть бути дійсними або комплексно-спряженими. Якщо, наприклад, k_l – комплексний корінь, то $k_{l+1} = \bar{k}_l$ і $\mathrm{V}_{l+1} = \bar{\mathrm{V}}_l$.

Розкриваючи визначник в (2.7), будемо мати

$$u_k = \sum_{p=0}^{2n} \tilde{c}_p^{(2k-1)} h^{2p} \Delta^p \mathrm{V} .$$

Користуючись формулами (2.9), (2.10) і позначеннями (2.5), знаходимо

$$c_{66} u_3^{(2k+1)} = \sum_{m=1}^{2(n+1)} c_m^{(2k+1)} \mathrm{V}_m , \tag{2.11}$$

де постійні $c_m^{(2k+1)}$ пов’язані з $\tilde{c}_p^{(2k+1)}$ співвідношеннями

$$c_m^{(2k+1)} = \sum_{p=0}^{2n} \tilde{c}_p^{(2k+1)} k_m^{2p} .$$

Тепер з рівності (2.4) визначаємо моменти компонент деформацій

$$c_{66} e^{(2k)} = h^{-1} \sum_{m=1}^{2(n+1)} c_m^{(2k)} \mathrm{V}_m . \tag{2.12}$$

Тут

$$c_m^{(2k)} = \frac{c_{44}}{c_{13}+c_{44}} \left[\frac{k_m}{4k+3} c_m^{(2k+1)} - \frac{c_{33}}{c_{44}} \sum_{s=0}^{n} \alpha_{2s+1}^{(k)} c_m^{(2s+1)} \right].$$

Запишемо (2.12) у вигляді рівності

$$c_{66} \partial_\alpha u_\alpha^{(2k)} = h \sum_{m=1}^{2(n+1)} c_m^{(2k)} k_m^{-1} \Delta \mathrm{V}_m$$

і визначимо з неї переміщення $u_\alpha^{(2k)}$

$$c_{66} u_\alpha^{(2k)} = h \sum_{m=1}^{2(n+1)} a_m^{(2k)} \partial_\alpha \mathrm{V}_m + (-1)^\alpha h \partial_\beta \mathrm{Y}_{2k} \quad (\alpha \neq \beta), \tag{2.13}$$

де $a_m^{(2k)} = c_m^{(2k)} k_m^{-1}$, Y_{2k} – довільні достатньо гладкі дійсні функції. Для їх визначення скористаємося рівняннями (1.11). Отже, якщо внести в (1.11) значення функцій (2.11) – (2.13), то отримаємо рівності

$$(-1)^\alpha \partial_\beta \left[\Delta \mathrm{Y}_{2k} - \frac{c_{44}}{c_{66} h^2} \sum_{s=0}^{n} (4s+3) \alpha_{2s+1}^{(k)} \mathrm{Y}_{2s} \right] + \frac{c_{11}}{c_{66} h} \sum_{m=1}^{2(n+1)} O_m^{(2k)} \partial_\alpha \mathrm{V}_m = 0 \tag{2.14}$$

$$(\alpha,\, \beta = 1,\, 2;\; \alpha \neq \beta;\; k = 0,\, 1,\, ...,\, n),$$

у яких

$$O_m^{(2k)} = c_m^{(2k+1)} + \frac{c_{44}}{c_{11}} \sum_{s=0}^{n} \alpha_{2s+1}^{(k)} \left[c^* c_m^{(2s+1)} - (4s+3) c_m^{(2s)} \right].$$

Неважко бачити, що $O_m^{(2k)} \equiv 0 \ \forall k \in [0, n]$. Дійсно, оскільки функції V_m лінійно незалежні і рівність (2.1) виконується при значеннях моментів (2.11), (2.12), то звідси випливає вказане твердження. Тоді рівняння (2.14) після інтегрування за замінною x_β набуде вигляду

$$\Delta \mathrm{Y}_{2k} - \frac{c_{44}}{c_{66} h^2} \sum_{s=0}^{n} (4s+3) \alpha_{2s+1}^{(k)} \mathrm{Y}_{2s} = c_k . \tag{2.15}$$

Оскільки функції Υ_{2k} визначаються з точністю до константи, то константу c_k можна прийняти рівною нулю.

Уводячи позначення

$$\Upsilon_{2(k-1)} = y_k\ ; \quad q_{ks} = (4s-1)\alpha_{2s-1}^{(k)} \frac{c_{44}}{c_{66}} \quad (k = 1,\ 2, ...,\ n+1), \tag{2.16}$$

зведемо систему (2.15) до нормального виду

$$\sum_{s=1}^{n+1} \left(q_{ks} - \delta_{ks} h^2 \Delta \right) y_s = 0\ ,$$

де δ_{ks} – символ Кронекера;

$$\alpha_{2s-1}^{(k)} = \begin{cases} s(2s-1), 1 \le s \le k; \\ k(2k-1), k \le s \le n. \end{cases}$$

За умови, що характеристичне рівняння

$$\det \left\| q_{ks} - \lambda \delta_{ks} \right\| = 0$$

має прості нерівні нулю корені λ_s, аналогічним до вищеописаного способом знаходимо

$$y_k = \sum_{s=1}^{n+1} b_s^{(2k)} \omega_s\ , \tag{2.17}$$

де ω_s – метагармонічні функції, що задовольняють рівнянням Гельмгольца

$$\Delta \omega_s - \lambda_s h^{-2} \omega_s = 0\ ,$$

а постійні $b_s^{(2k)}$ визначаються алгебраїчними доповненнями елементів будь-якого рядка визначника $\left| q_{ks} - \lambda \delta_{ks} \right|_{(n+1)\times(n+1)}$. Підставляючи (2.17) з урахуванням позначень (2.16) у формули (2.13), матимемо

$$c_{66} u_\alpha^{(2k)} = h \sum_{m=1}^{2(n+1)} a_m^{(2k)} \partial_\alpha V_m + (-1)^\alpha h \sum_{s=1}^{n+1} b_s^{(2k)} \partial_\beta \omega_s \ \left(\alpha \ne \beta;\ k = 0,1, ..., n \right). \tag{2.18}$$

Таким чином, значення функцій (2.11), (2.12) і (2.18) представляють загальний розв'язок системи рівнянь (1.11), (1.12).

§3. Пластина, послаблена круговим отвором при заданій розщеплювальній силі.

Розглянемо необмежену трансверсально-ізотропну пластину із наскрізною круговою порожниною радіуса R і будемо вважати, що вона віднесена до циліндричної системи координат $r,\ \vartheta,\ x_3$, вісь x_3 якої проходить через центр кругового отвору на серединній площині S. На основі того, що компоненти напружень у криволінійній системі координат визначаються таким самим способом, як і у декартовій, запишемо рівняння стану (1.9) у вигляді

$$\begin{gathered} \sigma_{rr}^{(2k)} = c_{11} \varepsilon_{rr}^{(2k)} + c_{12} \varepsilon_{\vartheta\vartheta}^{(2k)} + c_{13} \varepsilon_{33}^{(2k)}; \quad \sigma_{r\vartheta}^{(2k)} = c_{66} \left(\varepsilon_{r\vartheta}^{(2k)} + \varepsilon_{\vartheta r}^{(2k)} \right); \\ \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(2k)} = c_{12} \varepsilon_{rr}^{(2k)} + c_{11} \varepsilon_{\vartheta\vartheta}^{(2k)} + c_{13} \varepsilon_{33}^{(2k)}; \quad \sigma_{r3}^{(2k+1)} = c_{44} \left(\varepsilon_{r3}^{(2k+1)} + \varepsilon_{3r}^{(2k+1)} \right); \\ \sigma_{33}^{(2k)} = c_{13} e^{(2k)} + c_{33} \varepsilon_{33}^{(2k)};\ \sigma_{\vartheta 3}^{(2k+1)} = c_{44} \left(\varepsilon_{\vartheta 3}^{(2k+1)} + \varepsilon_{3\vartheta}^{(2k+1)} \right). \end{gathered} \tag{3.1}$$

Згідно формул (1.6) співвідношення між моментами компонент тензора деформацій і вектора переміщень визначаються таким чином:

$$\varepsilon_{rr}^{(2k)} = \frac{\partial}{\partial r}\left(u_r^{(2k)} - u_r^{(2k-2)}\right); \quad \varepsilon_{\vartheta\vartheta}^{(2k)} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(u_\vartheta^{(2k)} - u_\vartheta^{(2k-2)}\right) + \frac{1}{r}\left(u_r^{(2k)} - u_r^{(2k-2)}\right);$$

$$\varepsilon_{r\vartheta}^{(2k)} = r\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\left(u_\vartheta^{(2k)} - u_\vartheta^{(2k-2)}\right)\right]; \quad \varepsilon_{\vartheta r}^{(2k)} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(u_r^{(2k)} - u_r^{(2k-2)}\right);$$

$$\varepsilon_{r3}^{(2k+1)} = \frac{\partial u_3^{(2k+1)}}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\vartheta 3}^{(2k+1)} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_3^{(2k+1)}}{\partial\vartheta}; \quad \varepsilon_{33}^{(2k)} = \frac{4k+1}{h}\sum_{s=k}^{n} u_3^{(2s+1)}; \tag{3.2}$$

$$\varepsilon_{3r}^{(2k+1)} = -\left(4k+3\right)h^{-1}u_r^{(2k)}; \quad \varepsilon_{3\vartheta}^{(2k+1)} = -\left(4k+3\right)h^{-1}u_\vartheta^{(2k)}.$$

З (2.11), (2.18) з урахуванням формул перетворення отримуємо вирази для моментів компонент вектора переміщень

$$c_{66}u_r^{(2k)} = h\sum_{m=1}^{2(n+1)} a_m^{(2k)}\frac{\partial V_m}{\partial r} - h\sum_{s=1}^{n+1} b_s^{(2k)}\frac{1}{r}\frac{\partial\omega_s}{\partial\vartheta};$$

$$c_{66}u_\vartheta^{(2k)} = h\sum_{m=1}^{2(n+1)} a_m^{(2k)}\frac{1}{r}\frac{\partial V_m}{\partial\vartheta} + h\sum_{s=1}^{n+1} b_s^{(2k)}\frac{\partial\omega_s}{\partial r}; \tag{3.3}$$

$$c_{66}u_3^{(2k+1)} = \sum_{m=1}^{2(n+1)} c_m^{(2k+1)}V_m \quad \left(k = 0,1,...,n\right).$$

Підставляючи значення функцій (3.2), (3.3) у співвідношення (3.1), отримуємо рівності

$$\sigma_{rr}^{(2k)} = h\sum_{m=1}^{2(n+1)}\left[2\underline{a}_m^{(2k)}\frac{\partial^2 V_m}{\partial r^2} + \left(d_m^{(2k)} - \underline{c}_m^{(2k)}\right)h^{-2}V_m\right] - h\sum_{s=1}^{n+1} 2\underline{b}_s^{(2k)}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\omega_s}{\partial\vartheta}\right);$$

$$\sigma_{\vartheta\vartheta}^{(2k)} = -h\sum_{m=1}^{2(n+1)}\left[2\underline{a}_m^{(2k)}\frac{\partial^2 V_m}{\partial r^2} - \left(d_m^{(2k)} - \underline{c}_m^{(2k)}\right)h^{-2}V_m\right] + h\sum_{s=1}^{n+1} 2\underline{b}_s^{(2k)}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\omega_s}{\partial\vartheta}\right);$$

$$\sigma_{r\vartheta}^{(2k)} = h\sum_{m=1}^{2(n+1)} 2\underline{a}_m^{(2k)}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_m}{\partial\vartheta}\right) + h\sum_{s=1}^{n+1}\underline{b}_s^{(2k)}\left(2\frac{\partial^2\omega_s}{\partial r^2} - \lambda_s h^{-2}\omega_s\right); \tag{3.4}$$

$$\sigma_{33}^{(2k)} = h^{-1}\sum_{m=1}^{2(n+1)} d_{3m}^{(2k)}V_m; \quad \sigma_{r3}^{(2k+1)} = \sum_{m=1}^{2(n+1)} p_m^{(2k+1)}\frac{\partial V_m}{\partial r} - \sum_{s=1}^{n+1} q_s^{(2k+1)}\frac{1}{r}\frac{\partial\omega_s}{\partial\vartheta};$$

$$\sigma_{\vartheta 3}^{(2k+1)} = \sum_{m=1}^{2(n+1)} p_m^{(2k+1)}\frac{1}{r}\frac{\partial V_m}{\partial\vartheta} + \sum_{s=1}^{n+1} q_s^{(2k+1)}\frac{\partial\omega_s}{\partial r},$$

у яких

$$\underline{a}_m^{(2k)} = a_m^{(2k)} - a_m^{(2k-2)}; \ \underline{c}_m^{(2k)} = c_m^{(2k)} - c_m^{(2k-2)}; \ \underline{b}_s^{(2k)} = b_s^{(2k)} - b_s^{(2k-2)};$$

$$d_m^{(2k)} = \frac{c_{12} + c_{66}}{c_{66}}\underline{c}_m^{(2k)} + \frac{\left(4k+1\right)c_{13}}{c_{66}}\sum_{s=k}^{n} c_m^{(2s+1)}; \ d_{3m}^{(2k)} = \frac{c_{13}}{c_{66}}\underline{c}_m^{(2k)} + \frac{\left(4k+1\right)c_{33}}{c_{66}}\sum_{s=k}^{n} c_m^{(2s+1)};$$

$$p_m^{(2k+1)} = \frac{c_{44}}{c_{66}}\left[c_m^{(2k+1)} - (4k+3)\,a_m^{(2k)}\right]; \; q_s^{(2k+1)} = \frac{(4k+1)\,c_{44}}{c_{66}} b_s^{(2k)} .$$

При осесиметричному деформуванні пластини відносно координатної осі x_3 деформації не залежать від кутової координати ϑ і, отже, будемо мати рівності: $u_\vartheta^{(2k)} = 0$; $\varepsilon_{r\vartheta}^{(2k)} = \varepsilon_{\vartheta r}^{(2k)} = 0$; $\varepsilon_{3\vartheta}^{(2k+1)} = \varepsilon_{\vartheta 3}^{(2k+1)} = 0$. У цьому випадку моменти компонент напружень і переміщень визначаються тільки за допомогою метагармонічних функцій V_m .

На основі наведених рівностей розглянемо задачу про напружений стан пластини, послабленої круговим отвором радіуса R , на поверхні $\partial\Omega = R \times [-h,\, h]$ якого задано значення розщеплювальної сили

$$\sigma_{r3} = q\zeta \quad (q = \mathrm{const}) .$$

Очевидно, при такому навантаженні задача буде осесиметричною і граничні умови на контурі кругового отвору на площині S мають вигляд

$$\sigma_{rr}^{(2k)}\Big|_{r=R} = 0 \quad (k = 0, 1, ..., n) ;$$

$$\sigma_{r3}^{(1)}\Big|_{r=R} = q ; \quad \sigma_{r3}^{(2k+1)}\Big|_{r=R} = 0 \quad (k = 1, 2, ..., n) . \tag{3.5}$$

Якщо ж врівноважена пара сил на граничній поверхні отвору представлена нелінійною функцією

$$\sigma_{r3} = -q\zeta\left(1 - \zeta^2\right) ,$$

то умови на контурі кругового отвору будуть такими:

$$\sigma_{rr}^{(2k)}\Big|_{r=R} = 0 \quad (k = 0,1,...,n) ; \quad \sigma_{r3}^{(2k+1)}\Big|_{r=R} = 0 \;\; (k = 2, 3, ..., n) ;$$

$$\sigma_{r3}^{(1)}\Big|_{r=R} = -0{,}4q \; ; \quad \sigma_{r3}^{(3)}\Big|_{r=R} = 0{,}4q . \tag{3.6}$$

В умовах осьової симетрії метагармонічні функції V_m покладемо такими, що мають вигляд

$$V_m = B_0^{(m)} K_0(\rho x_m) , \quad m \in [1, 2l] ;$$

$$V_{2m-1} = C_0^{(2m)} H_0^{(1)}(\rho x_{2m-1}) ; \quad V_{2m} = D_0^{(2m)} H_0^{(2)}(\rho x_{2m}) , \; m \in [l+1,\, n+1] ,$$

де $l \le n+1$;

$$\rho = r/R \; ; \; x_m = Rh^{-1}\sqrt{k_m} \; ; \quad x_{2m-1} = Rh^{-1}\sqrt{-k_{2m-1}} \; ; \; x_{2m} = \overline{x}_{2m-1} ;$$

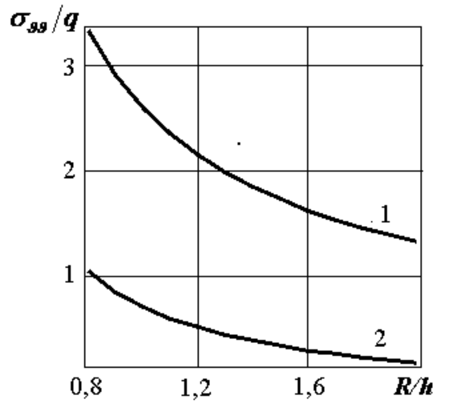
$K_0(\rho x_m)$ – модифікована функція Бесселя; $H_0^{(1)}(\rho x_{2m-1})$ і $H_0^{(2)}(\rho x_{2m})$ – циліндричні функції Ханкеля першого і другого роду; $B_0^{(m)}$, $C_0^{(2m)}$ і $D_0^{(2m)}$ – довільні сталі. Тут враховано, що характеристичне рівняння має $2l$ дійсних додатних та $2(n-l+1)$ комплексно-спряжених коренів (функції ω_s в осесиметричній задачі відсутні).

Підставляючи значення даних функцій у рівності (3.4) і враховуючи граничні умови (3.5) і (3.6), отримаємо алгебраїчну систему рівнянь для визначення невідомих констант. За знайденими функціями визначаємо значення компонент напружень і переміщень.

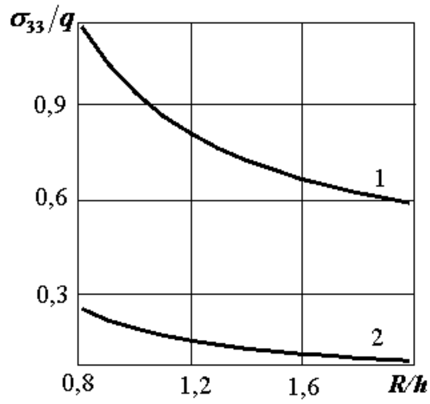
§4. Числові дослідження і аналіз результатів.

Проведено дослідження напруженого стану трансверсально-ізотропної пластини, послабленої круговим отвором, на поверхні якого задана розщеплювальна сила (врівноважена по товщині пара дотичних напружень σ_{r3}). Значення вказаних напружень представлені у вигляді лінійної $\sigma_{r3} = q\zeta$ і нелінійної $\sigma_{r3} = q\zeta\left(1-\zeta^2\right)$ функцій поперечної координати $\zeta = h^{-1}x_3$. При додатних значеннях константи q ці напруження спрямовані на розщеплення пластини вздовж серединної площини, а при від'ємних – на стиснення.

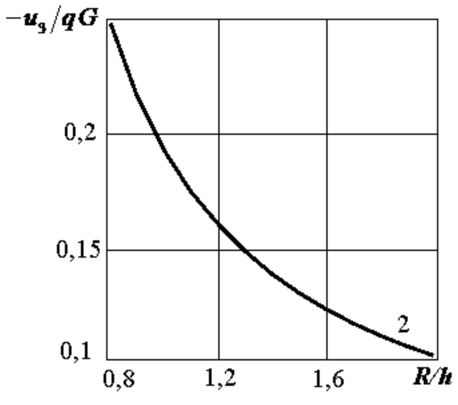
Числові розрахунки виконано для пластини з коефіцієнтами Пуассона $\nu = 0,3$; $\nu' = 0,25$ і відношеннями модулів пружності $E/E' = 1,25$; $E/G' = 5,0$. На рис. 1 при розщеплювальній силі, заданій лінійною функцією, представлено криві зміни колових $\sigma_{\vartheta\vartheta}/q$ і нормальних σ_{33}/q напружень та поперечного переміщення u_3/qG на контурі отвору ($\rho = 1$) відповідно на серединній (крива *1*) і граничній (крива *2*) площинах пластини в залежності від відносної товщини R/h. Із зменшенням відносної товщини напруження і переміщення спадають як на серединній, так і на граничній площинах.



а



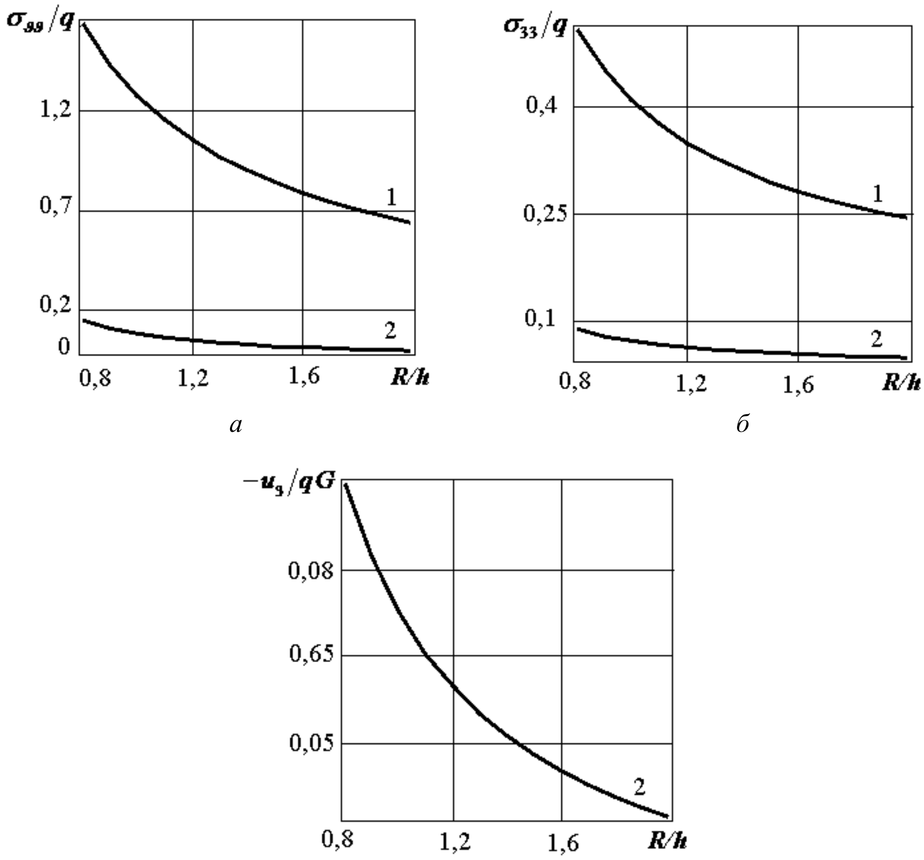
б



в

Рис. 1

Для виявлення впливу зовнішнього навантаження на напружений стан на рис. 2 наведено аналогічні рис. 1 криві зміни напружень $\sigma_{\vartheta\vartheta}$, σ_{33} і переміщення u_3 в залежності від відносної товщини пластини при нелінійному способі задання розщеплювальної сили. Як видно з рисунка, із збільшенням параметра R/h напруження та переміщення монотонно спадають, однак за абсолютними значеннями вони суттєво відрізняються.

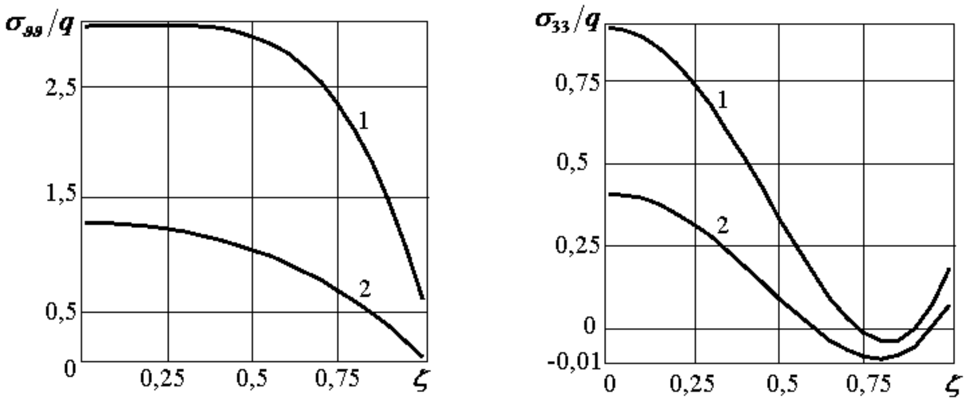


а *б*

в

Рис. 2

На рис. 3 представлено криві зміни напружень $\sigma_{\vartheta\vartheta}/q$ і σ_{33}/q по товщині пластини при двох значеннях параметра $R/h = 0,5$ (крива *1*) та $R/h = 1,0$ (крива *2*). Як видно, найбільших значень вони досягають на серединній площині ($\zeta = 0$) і спадають при прямуванні до граничної площини ($\zeta = 1$).



а *б*

Рис. 3

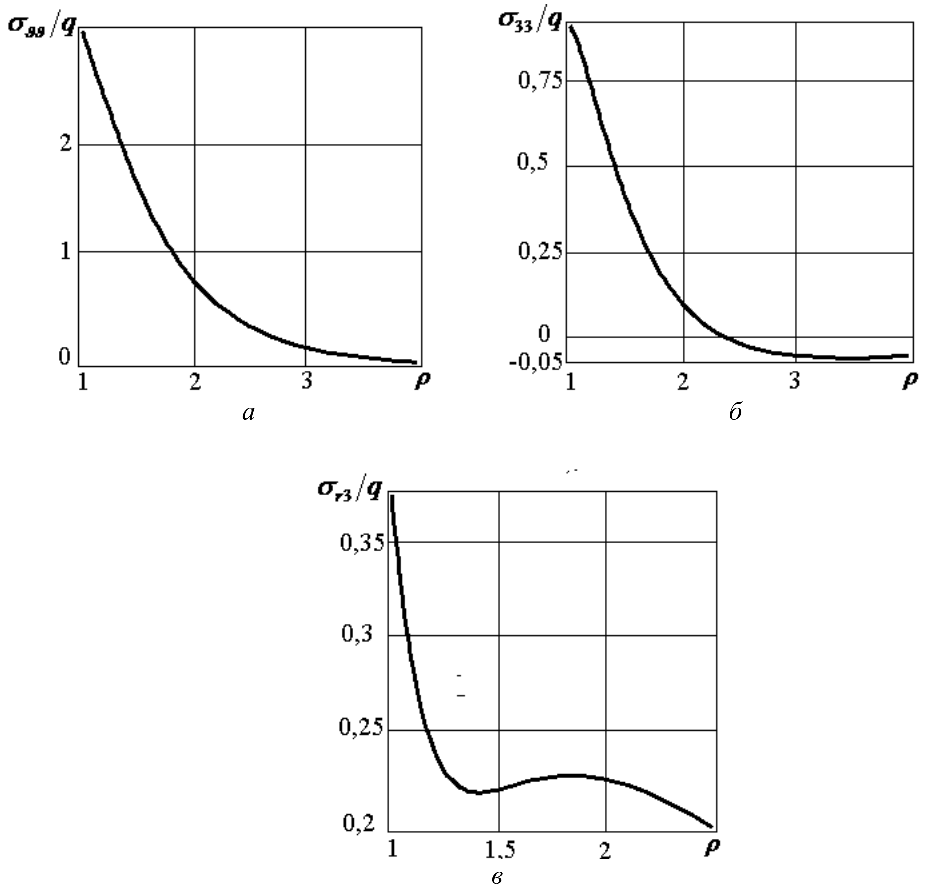


Рис. 4

Криві, наведені на рис. 4, характеризують затухання напружень $\sigma_{\vartheta\vartheta}/q$ та σ_{33}/q на серединній площині $\zeta = 0$ і σ_{r3}/q – на площині $\zeta = 0,5$ при віддаленні від поверхні отвору. Із збільшенням координати ρ напруження спадають, наближаючись до нульових значень.

Висновки.

Отримано систему рівнянь пружної рівноваги трансверсально-ізотропної пластини постійної товщини при комбінованих граничних умовах на плоских гранях. В основу покладено метод розкладу шуканих функцій за поліномами Лежандра. Викладено спосіб представлення загального аналітичного розв'язку системи рівнянь при симетричному деформуванні пластини по відношенню до серединної площини. Знайдено розв'язок задачі про напружений стан пластини з круговим отвором, на поверхні якого задано значення розщеплювальної сили.

РЕЗЮМЕ. Методом розкладу шуканих функцій в ряди Фур'є за поліномами Лежандра координати товщини отримано систему рівнянь рівноваги трансверсально-ізотропної платини при комбінованих умовах на плоских гранях. Викладено метод побудови загального аналітичного розв'язку системи рівнянь при симетричному деформування пластини відносно серединної площини. Знайдено розв'язок задачі про напружений стан пластини, послабленої круговим отвором, на поверхні якого задана розщеплювальна сила.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: трансверсально-ізотропна пластина, напружений стан, круговий отвір, розщеплювальна сила.

1. *Векуа И.Н.* Теория тонких пологих оболочек переменной толщины // Тр. Тбилис. матем. ин-та. – 1965. – Вып. 30. – С. 3 – 103.
2. *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф.* Точное решение задачи Кирша // Прикл. механика. – 1970. – **6**, № 5. – С. 10 – 17.
3. *Лебедев Н.Н.* Специальные функции и их приложение. – Москва: Физматлит, 1963. – 358 с.
4. *Фильштинский Л.А., Кушнир Д.В.* Упругое равновесие многосвязных цилиндрических тел // Теорет. и прикл. механика. – 2005. – № 32. – С. 55 – 58.
5. *Хома И.Ю.* Обобщенная теория анизотропных оболочек. – Киев: Наук. думка, 1986. – 170 с.
6. *Abbas I.A.* Fractional Order GN model on Thermoelastic Interaction in an Infinite Fibre – Reinforsed Anisotropic Plate Containing a Circular Hole // J. Comput. and Theor Nanosci. – 2014. – **11**, N 2. – P. 380 – 384.
7. *Cicala P.* Sulla Teoria Elastica della Plate Sottile // Giorn. Genio Civile. – 1972. – **97**, N 4. – P. 238 – 256.
8. *Fellers I.I., Soler A.I.* Approximate Solution of the Finite Cylinders Problem Lising Legendrs Polynomials // AIAAI. – 1970. – **8**, N 11. – P. 2037 – 2048.
9. *Folias E.S., Wang I.I.* On the Tree-dimensional Stress Fields around a Circular Hole in a Plate of Arbitrary Thickness // Comput. Mech. – 1990. – **6**, N 5. – P. 379 – 391.
10. *Green A.E.* Three-dimensional Stress Systems in Isotropic Plates // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Ser. A. – 1948. – **240**, N 285. – P. 561 – 597.
11. *Khoma I.Yu., Proshchenko T.M.* The Stress State of a Transversely Isotropic Plate with a Curvilinear Hole for a Given Splitting Force on the Boundary Surface // Int. Appl. Mech. – 2019. – **55**, N 4. – P. 434 – 449.
12. *Khoma I.Yu., Proshchenko T.M.* Stress State of a Transversely Isotropic Plate with a Curved Hole Under Simple Shear at Infinity // Int. Appl. Mech. – 2021. – **57**, N 1. – P. 75 – 85.
13. *Khoma I.Yu., Strygina O.A.* On the Turning of a Transversely Isotropic Plate with a Curvilinear Hole // Int. Appl. Mech. – 2020. – **56**, N 4. – P. 445 – 461.
14. *Kotousov A., Wang C.H.* Three-Dimensional Stresses Constraint in an Elastic Plate with a Notch // Int. J. Solids and Struct. – 2002. – **39**, N 16. – P. 4311 – 4326.
15. *Rezaeepazhand J., Jafari M.* Stress Concentration in Metallic Plates with Special Shaped Cutout // Int. J. Mech. Sci. – 2010. – **52**, N 1. – P. 96 – 102.
16. *Youngdal C.K., Sternberg E.* Three-dimensional Stress Concentration around a Circular Hole in a Semi-infinite Body // Ser. E. J. Appl. Mech. – 1996. – **33**, N 4. – P. 855 – 865.

Надійшла 09.03.2023 Затверджена до друку 12.12.2023