

В.Д.Кубенко¹, І.В.Янчевський², В.О.Ліскін²

**КІНЕМАТИЧНЕ ЗБУДЖЕННЯ РІДИНИ
В НЕСКІНЧЕНІЙ ЦИЛІНДРИЧНІЙ ПОРОЖНИНІ
З ДВОМА СФЕРИЧНИМИ ТІЛАМИ**

¹Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
вул. П. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: venkub@ipmtech.kyiv.ua

²Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського",
просп. Берестейський, 37, 03056, Київ, Україна; e-mail: i.yanchevskiy@kpi.ua

Abstract. Two spherical bodies are located on the axis of an infinite cylindrical cavity, which is filled with an ideal compressible fluid. The surface of one of the bodies carries out periodic radial oscillations with a given frequency and amplitude, the second body is completely solid. The problem of determining the hydrodynamic characteristics of the acoustic medium and the radiation force acting on the second body is solved, depending on the excitation frequency of the emitter and the geometric parameters of the mechanical system. Using the methods of separation of variables and translational addition theorems, the problem is reduced to an infinite system of algebraic equations, which is solved by the truncation method. The conducted series of numerical experiments showed that, as in the case of radiator oscillations near the solid end of a cylindrical cavity, there are frequencies at which the hydrodynamic characteristics of the medium and the radiation force acting on the solid sphere increase many times over. At the main of such "conditionally resonant" frequencies, the maximum value of pressure occurs at points external to distance between centers on the axis of the cylindrical cavity. The normalized value of the radiation force is maximum when the vibrating body is larger than the passive one and is aimed at increasing the distance between the centers.

Key words: infinite cylindrical cavity, ideal compressible fluid, spherical body, oscillatory velocity, hydrodynamic parameters, acoustic radiation force.

Вступ.

Визначення параметрів гідропружних систем при вібраційному акустичному збудженні є предметом численних досліджень завдяки їх актуальності для низки технічних і медичних галузей людської діяльності. Один з цікавих аспектів таких досліджень є визначення сил, що діють на тіла в рідині в акустичному полі. Такі сили здатні зумовити рух зануреного тіла (частинки, пухирця, бульбашки) в бажаному напрямку, що дозволяє реалізацію певних технічних потреб, наприклад, перемішування, локалізація, сортування, левітація та ін. Вказаний рух зумовлюють так звані радіаційні сили, наявність яких теоретично визначається на основі аналізу величин другого порядку у відповідних рівняннях руху [3, 10–12]. При цьому радіаційні сили поділяються на первинні і вторинні. Перші з них – це сили, що діють на окреме тіло в полі акустичного випромінювання. Другі сили виникають в системі тіл в рідині і відповідають за взаємодію між тілами.

В більшості випадків при визначенні вказаних сил дослідники обмежуються розглядом поодинокого тіла або системи тіл в безмежному середовищі чи півпросторі рідини. При цьому така система складається з однотипних тіл. Це можуть бути сферичні

ні (рідше сфероїдальні) тіла. В той же час, актуальним здається випадок, коли така система тіл заповнює рідину в обмеженому об'ємі. Такого типу дослідження виконані останніми роками [4, 5, 7, 9, 12]. Вони стосуються поодинокого сферичного тіла, розташованого в нескінченній (напівнескінченній) порожнині, заповненій стисливою рідиною. Дослідження показали, що в цьому випадку існують певні частоти акустичної дії, на яких рівень гідродинамічного тиску в деяких точках простору порожнини суттєво збільшується, що в свою чергу, впливає на характер радіаційних сил.

В даній роботі розглядається система двох сферичних тіл в порожнині з рідиною, одне з яких генерує акустичне випромінювання. Це випромінювання взаємодіє з поверхнею другого тіла і поверхнею порожнини, зумовлюючи появу відбитих хвиль, котрі в свою чергу взаємодіють з усіма іншими елементами механічної системи. Як наслідок, в системі виникає складне дифракційне поле. Метою даної роботи є визначення гідродинамічних параметрів такої системи і обчислення радіаційної сили, яка в даному випадку, очевидно, належить до вищезгаданих вторинних сил. Застосовується класичний метод розділення змінних, теореми додавання хвильових функцій і співвідношення, що представляють сферичні хвильові функції через циліндричні і навпаки. Це дає змогу задовільнити граничні умови на всіх граничних поверхнях і одержати нескінченну систему алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів загального розв'язку. Вказана система розв'язується шляхом її усучення, що уможливорює обчислення гідродинамічних параметрів і радіаційної сили.

§1. Постановка задачі.

Нескінченна кругова циліндрична порожнина із твердими стінками заповнена ідеальною стисливою рідиною з густиною γ та містить на своїй осі два сферичні тіла. Перше тіло здійснює осесиметричні радіальні коливання з частотою ω , а друге є абсолютно твердим. Позначимо через ρ_0 радіус циліндра (рис. 1); R_j – радіус j -го сферичного тіла ($j = 1, 2$); $2h$ – відстань між центрами куль ($2h > R_1 + R_2$).

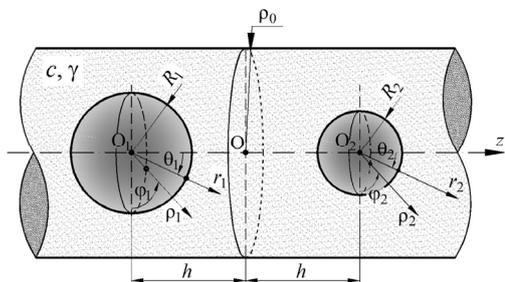


Рис. 1

Введемо дві сферичні системи координат – $(r_1, \theta_1, \varphi_1)$ і $(r_2, \theta_2, \varphi_2)$ з початками O_1 і O_2 , що співпадають з центрами однойменних сферичних тіл, і циліндричну систему координат (ρ, z, φ) , вісь Oz якої збігається з віссю циліндра. При цьому точка O рівновіддалена від центрів O_1 і O_2 (рис. 1).

Введемо також безрозмірні змінні, у яких характерними одиницями є радіус циліндра ρ_0 та швидкість звуку в рідині c :

$$\bar{r} = \frac{r}{\rho_0}; \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}; \quad \bar{z} = \frac{z}{\rho_0}; \quad \bar{t} = \frac{ct}{\rho_0}; \quad \bar{\omega} = \frac{\omega\rho_0}{c}; \quad \bar{U} = \frac{U}{c}; \quad \bar{p} = \frac{p}{\gamma c^2}.$$

Тут t – час; p , U – тиск і швидкість руху часток середовища. Далі риска над позначеннями буде опущена.

Гідродинамічні характеристики системи (p і U) пов'язані з потенціальною функцією Φ – $\vec{U} = \text{grad } \Phi$; $p = i\omega\Phi$, яка у свою чергу задовольняє рівнянню Гельмгольца

$$\Delta\Phi + \omega^2\Phi = 0. \quad (1.1)$$

Тут Δ – диференціальний оператор Лапласа.

При заданій швидкості радіальних коливань поверхні першої кулі \tilde{U}_r гранична умова в системі координат $(O_1 r_1 \theta_1 \varphi_1)$ має вигляд

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial r_1} \right|_{r_1=R_1} = \tilde{U}_r(\theta_1). \quad (1.2)$$

Тут слід зазначити, що задача осесиметрична і координата φ випадає з розгляду, а по-друге, часовий множник $e^{-i\omega t}$ усюди мається на увазі.

На циліндричній поверхні порожнини ($\rho = \rho_0 = 1$ циліндричної системи координат $O\rho z\varphi$) і на сферичній поверхні другого тіла (у системі координат $O_2 r_2 \theta_2 \varphi_2$) мають виконуватися рівності

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0} = 0; \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial r_2} \right|_{r_2=R_2} = 0, \quad (1.3)$$

відповідні до умови непроникності.

§2. Загальний розв'язок рівняння Гельмгольца.

Хвильовий потенціал Φ (1.1) представимо у вигляді суперпозиції циліндричного $\Phi_{\text{cyl}}(\rho, z)$ і двох сферичних потенціалів $\Phi_{\text{sph}}^{(j)}(r_j, \theta_j)$ ($j = 1, 2$):

$$\Phi = \Phi_{\text{cyl}}(\rho, z) + \Phi_{\text{sph}}^{(1)}(r_1, \theta_1) + \Phi_{\text{sph}}^{(2)}(r_2, \theta_2). \quad (2.1)$$

Циліндричний потенціал $\Phi_{\text{cyl}}(\rho, z)$, який задовольняє рівнянню (1.1) у циліндричних координатах (ρ, z) , з урахуванням обмеженості при $\rho = 0$, запишемо у вигляді [4]

$$\Phi_{\text{cyl}}(\rho, z) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\xi) J_0\left(\sqrt{\omega^2 - \xi^2} \rho\right) e^{i\xi z} d\xi. \quad (2.2)$$

У сферичних координатах загальний розв'язок (1.1) з урахуванням умови згасання випромінювання при $r_j \rightarrow \infty$ ($j = 1, 2$) може бути записаним в такий спосіб:

$$\Phi_{\text{sph}}^{(j)}(r_j, \theta_j) = \sum_{m=0}^{\infty} X_m^{(j)} h_m(\omega r_j) P_m(\cos \theta_j) \quad (j = 1, 2). \quad (2.3)$$

В (2.2) і (2.3) $B(\xi)$, $X_m^{(j)}$ – шукані змінні; $J_0(x)$ – циліндрична функція Бесселя індексу 0; $h_m(x)$ – сферична функція Ганкеля I-го роду індексу m ; $P_m(x)$ – багаточлен Лежандра степені m .

Для задоволення граничним умовам (1.2) і (1.3) представимо потенціал Φ (2.1) у координатах, пов'язаних з кожною граничною поверхнею. Для цього використовуються відомі співвідношення [4, 5]:

$$h_m(\omega r_j) P_m(\cos \theta_j) = \frac{i^{-m}}{2\omega} \int_{-\infty}^{\infty} P_m\left(\frac{\xi}{\omega}\right) H_0\left(\sqrt{\omega^2 - \xi^2} \rho\right) e^{i\xi(z - (-1)^j h)} d\xi \quad (j = 1, 2); \quad (2.4)$$

$$e^{i\xi z} J_0\left(\sqrt{\omega^2 - \xi^2} \rho\right) = \sum_{m=0}^{\infty} i^m (2m+1) P_m\left(\frac{\xi}{\omega}\right) j_m(\omega r) P_m(\cos \theta), \quad (2.5)$$

де $j_m(x)$ – сферична функція Бесселя індексу m ; $H_0(x)$ – функція Ганкеля I-го роду індексу 0.

Використовуючи (2.3), (2.4) можна переписати сумарний сферичний потенціал $\Phi_{\text{sph}} = \Phi_{\text{sph}}^{(1)}(r_1, \theta_1) + \Phi_{\text{sph}}^{(2)}(r_2, \theta_2)$ у циліндричних координатах:

$$\Phi_{\text{sph}}(\rho, z) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\xi) H_0(\sqrt{\omega^2 - \xi^2} \rho) e^{i\xi z} d\xi \quad (2.6)$$

і навпаки – циліндричний потенціал $\Phi_{\text{cyl}}(\rho, z)$ можна записати в кожній зі сферичних систем координат (r_j, θ_j) ($j = 1, 2$):

$$\Phi_{\text{cyl}}^{(j)}(r_j, \theta_j) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m^{(j)} j_m(\omega r_j) P_m(\cos \theta_j), \quad (2.7)$$

де

$$A(\xi) = \frac{1}{2\omega} \sum_{m=0}^{\infty} i^{-m} \left[X_m^{(1)} e^{i\xi h} + X_m^{(2)} e^{-i\xi h} \right] P_m\left(\frac{\xi}{\omega}\right);$$

$$B_m^{(j)} = i^m (2m+1) \int_{-\infty}^{\infty} B(\xi) P_m\left(\frac{\xi}{\omega}\right) e^{-(-1)^j i\xi h} d\xi.$$

Крім цього, потенціали $\Phi_{\text{sph}}^{(j)}(r_j, \theta_j)$ ($j = 1, 2$) з формули (2.3) можуть бути переписані в сферичних координатах (r_k, θ_k) ($k = 2, 1$) за допомогою теорем додавання сферичних функцій [2].

Представлення (2.2), (2.3), (2.6) і (2.7) дозволяють записати повний потенціал збурень Φ (2.1) у координатах, пов'язаних з кожною граничною поверхнею. Зокрема, у сферичних координатах (r_j, θ_j) вираз (2.1) набуває наступний вид:

– у координатах (r_1, θ_1)

$$\Phi(r_1, \theta_1) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[X_m^{(1)} h_m(\omega r_1) + \sum_{f=0}^{\infty} X_f^{(2)} Q_{mf}^{(2)} j_m(\omega r_1) + B_m^{(1)} j_m(\omega r_1) \right] P_m(\cos \theta_1); \quad (2.8)$$

– у координатах (r_2, θ_2)

$$\Phi(r_2, \theta_2) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[X_m^{(2)} h_m(\omega r_2) + \sum_{f=0}^{\infty} X_f^{(1)} Q_{mf}^{(1)} j_m(\omega r_2) + B_m^{(2)} j_m(\omega r_2) \right] P_m(\cos \theta_2). \quad (2.9)$$

Тут коефіцієнти $B_m^{(1)}$ і $B_m^{(2)}$ визначаються через невідому густину $B(\xi)$ за формулами (2.7), а розрахункові вирази для величин $Q_{mf}^{(1)}$ і $Q_{mf}^{(2)}$ можна знайти в публікації [4], тому в даній роботі не наводяться.

У циліндричній системі координат (ρ, z) отримаємо

$$\Phi(\rho, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[B(\xi) J_0(\sqrt{\omega^2 - \xi^2} \rho) + A(\xi) H_0(\sqrt{\omega^2 - \xi^2} \rho) \right] e^{i\xi z} d\xi. \quad (2.10)$$

§3. Задоволення граничним умовам.

На циліндричній поверхні із граничної умови непроникності (1.3') і виразу (2.12) при $\rho = \rho_0$ маємо [4]

$$B(\xi) = -\frac{1}{2\omega} \frac{H_1(\sqrt{\omega^2 - \xi^2})}{J_1(\sqrt{\omega^2 - \xi^2})} \sum_{m=0}^{\infty} i^{-m} \left[X_m^{(1)} e^{i\xi h} + X_m^{(2)} e^{-i\xi h} \right] P_m\left(\frac{\xi}{\omega}\right). \quad (3.1)$$

Співвідношення (3.1) дозволяє виразити коефіцієнти $B_m^{(j)}$ ($j=1,2$; $m=0,1,\dots$) через невідомі $X_m^{(k)}$ ($k=1,2$):

$$B_m^{(j)} = -\frac{2m+1}{2\omega} \sum_{f=0}^{\infty} i^{m-f} \left[X_f^{(j)} q_{mf} + X_f^{(k)} q_{mf}^{(k)} \right] \quad (j, k=1,2; k \neq j), \quad (3.2)$$

де

$$q_{mf} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_1(\sqrt{\omega^2 - \xi^2})}{J_1(\sqrt{\omega^2 - \xi^2})} P_m\left(\frac{\xi}{\omega}\right) P_f\left(\frac{\xi}{\omega}\right) d\xi;$$

$$q_{mf}^{(j)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_1(\sqrt{\omega^2 - \xi^2})}{J_1(\sqrt{\omega^2 - \xi^2})} P_m\left(\frac{\xi}{\omega}\right) P_f\left(\frac{\xi}{\omega}\right) e^{(-1)^{j-1} i 2\xi h} d\xi.$$

Слід зазначити, що скориставшись співвідношеннями

$$Q_{mf}^{(1)} = (-1)^{m-f} Q_{mf}^{(2)}; \quad q_{mf}^{(2)} = (-1)^{m-f} q_{mf}^{(1)}$$

можна суттєво скоротити час обчислень.

На сферичній поверхні $r_1 = R_1$ в сферичній системі координат $(O_1 r_1 \theta_1)$ задана коливальна швидкість $\tilde{U}_r(\theta_1)$ (1.2), стосовно якої передбачається можливість її представлення у вигляді розвинення за поліномами Лежандра

$$\tilde{U}_r(\theta_1) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m P_m(\cos \theta_1). \quad (3.3)$$

Тоді з (2.8), (1.2) і (3.4) випливає рівність

$$X_m^{(1)} h'_m(\omega R_1) + \sum_{f=0}^{\infty} X_f^{(2)} Q_{mf}^{(2)} j'_m(\omega R_1) + B_m^{(1)} j'_m(\omega R_1) = u_m \quad (m=0,1,\dots,\infty), \quad (3.4)$$

де $h'_m(\omega R) = (dh_m(\omega r)/dr)|_{r=R}$; $j'_m(\omega R) = (dj_m(\omega r)/dr)|_{r=R}$.

На поверхні другого сферичного тіла має виконуватися умова непроникності (1.3.2), яка з урахуванням виразу (2.9) для потенціальної функції в сферичних координатах $(O_2 r_2 \theta_2)$ прийме наступний вигляд:

$$X_m^{(2)} h'_m(\omega R_2) + \sum_{f=0}^{\infty} X_f^{(1)} Q_{mf}^{(1)} j'_m(\omega R_2) + B_m^{(2)} j'_m(\omega R_2) = 0. \quad (3.5)$$

В результаті наступної підстановки співвідношення (3.2) у рівняння (3.4) і (3.5) отримаємо розв'язну нескінченну систему алгебраїчних рівнянь відносно шуканих коефіцієнтів $X_m^{(j)}$:

$$X_m^{(1)} h'_m(\omega R_1) - \frac{2m+1}{2\omega} j'_m(\omega R_1) \sum_{f=0}^{\infty} X_f^{(1)} i^{m-f} q_{mf} +$$

$$+ j'_m(\omega R_1) \sum_{f=0}^{\infty} X_f^{(2)} \left[Q_{mf}^{(2)} - \frac{2m+1}{2\omega} i^{m-f} q_{mf}^{(2)} \right] = u_m;$$

$$j'_m(\omega R_2) \sum_{f=0}^{\infty} X_f^{(1)} \left[Q_{mf}^{(1)} - \frac{2m+1}{2\omega} i^{m-f} q_{mf}^{(1)} \right] + \quad (3.6)$$

$$+X_m^{(2)}h'_m(\omega R_2)-j'_m(\omega R_2)\frac{2m+1}{2\omega}\sum_{f=0}^{\infty}X_f^{(2)}i^{m-f}q_{mf}=0.$$

Зробивши заміну змінних

$$h'_m(\omega R_1)X_m^{(1)}=x_m^{(1)}; \quad h'_m(\omega R_2)X_m^{(2)}=x_m^{(2)}$$

і скориставшись методом усічення при її розв'язанні нескінченна система рівнянь (3.6) може бути записана в більш компактній матричній формі

$$A \cdot x = U. \quad (3.7)$$

Тут A – блокова (2×2) -матриця, елементи кожного блоку якого з розміром $(N+1 \times N+1)$ обчислюються за формулами:

$$\{A_{ij}\}_{mf} = \delta_{mf} - \frac{2m+1}{2\omega} \frac{j'_m(\omega R_j)}{h'_f(\omega R_j)} i^{m-f} q_{mf}; \quad \{A_{jk}\}_{mf} = \frac{j'_m(\omega R_j)}{h'_f(\omega R_k)} \left[Q_{mf}^{(k)} - \frac{2m+1}{2\omega} i^{m-f} q_{mf}^{(k)} \right],$$

де $j, k = 1, 2; k \neq j; m, f = 0, 1, \dots, N; \delta_{mf}$ – символ Кронекера.

Елементи вхідних у систему (3.7) вектор-стовпців U і x висотою $2(N+1)$ містять коефіцієнти розвинення ряду (3.3) і шукані змінні $x_m^{(j)}$ ($j = 1, 2; m = 0, 1, \dots, N$), відповідно:

$$U = [u_0 \quad u_1 \quad \dots \quad u_N \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0]^T;$$

$$x = [x_0^{(1)} \quad x_1^{(1)} \quad \dots \quad x_N^{(1)} \quad x_0^{(2)} \quad x_1^{(2)} \quad \dots \quad x_N^{(2)}]^T.$$

Система (3.7) являє собою систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $x_m^{(j)}$ ($j = 1, 2; m = 0, 1, \dots, N$) і може бути розв'язана класичним способом ($x = A^{-1} \cdot U$) без залучення яких-небудь регуляризуючих процедур. Інші особливості розрахунку вхідних у систему (3.7) коефіцієнтів, зокрема, $Q_{mf}^{(j)}$, q_{mf} і $q_{mf}^{(j)}$, описані в публікації [4].

Маючи значення $x_m^{(j)}$ на заключному етапі обчислюються $X_m^{(j)}$, які визначають як сумарний потенціал збурень Φ , так і пов'язані з ним гідродинамічні параметри середовища. Зокрема, у сферичній системі координат (r_1, θ_1) , з врахуванням (2.8) і (3.2), для потенціалу Φ , тиску p , радіальної U_{r1} та колової $U_{\theta1}$ швидкостей точок середовища отримаємо:

$$\Phi(r_1, \theta_1, t) = e^{-i\omega t} \sum_{m=0}^N \left\{ X_m^{(1)} h_m(\omega r_1) - \frac{2m+1}{2\omega} j_m(\omega r_1) \sum_{f=0}^N X_f^{(1)} i^{m-f} q_{mf} + \right. \\ \left. + j_m(\omega r_1) \sum_{f=0}^N X_f^{(2)} \left[Q_{mf}^{(2)} - \frac{2m+1}{2\omega} i^{m-f} q_{mf}^{(2)} \right] \right\} P_m(\cos \theta_1); \quad (3.8)$$

$$p = i\omega\Phi; \quad |p| = \sqrt{\text{Re}(p)^2 + \text{Im}(p)^2}; \quad (3.9)$$

$$U_{r1} = \frac{\partial \Phi}{\partial r_1}; \quad U_{\theta1} = \frac{1}{r_1} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1}; \quad |U_*| = \sqrt{\text{Re}(U_*)^2 + \text{Im}(U_*)^2}.$$

Тут $\text{Re}(*)$ – значення гідродинамічного параметра на початку періоду коливання; $\text{Im}(*)$ – через чверть періоду; $|*|$ – амплітудне значення.

Також у формулі (3.8) показано множник $e^{-i\omega t}$, який до цього мався на увазі у всіх попередніх виразах.

З урахуванням співвідношень системи (3.6) і з використанням представлення сферичної функції Ганкеля $h_m(\omega r_1)$ через сферичні функції Бесселя I-го і II-го роду [1] ($h_m(x) = j_m(x) + i \cdot y_m(x)$) вираз (3.8) набуває більш простого вигляду, а саме

$$\Phi(r_1, \theta_1, t) = e^{-i\omega t} \sum_{m=0}^N \left\{ \frac{u_m}{j'_m(\omega R_1)} j_m(\omega r_1) + i \cdot X_m^{(1)} \left(y_m(\omega r_1) - \frac{y'_m(\omega R_1)}{j'_m(\omega R_1)} j_m(\omega r_1) \right) \right\} P_m(\cos \theta_1).$$

У випадку, коли поверхня першого сферичного тіла випромінює періодичний тиск із заданою частотою та амплітудою, гранична умова (1.2) має бути записана наступним чином:

$$i\omega\Phi|_{r_1=R_1} = \tilde{p}(\theta_1),$$

що замінить перше рівняння розрахункової системи (3.6) на наступне

$$\begin{aligned} X_m^{(1)} h_m(\omega R_1) - \frac{2m+1}{2\omega} j_m(\omega R_1) \sum_{f=0}^{\infty} X_f^{(1)} i^{m-f} q_{mf} + \\ + j_m(\omega R_1) \sum_{f=0}^{\infty} X_f^{(2)} \left[Q_{mf}^{(2)}(2h\omega) - \frac{2m+1}{2\omega} i^{m-f} q_{mf}^{(2)} \right] = \frac{P_m}{i\omega}, \end{aligned}$$

де p_m – коефіцієнти розвинення функції $\tilde{p}(\theta_1)$ за поліномами Лежандра.

Сумарний потенціал швидкостей рідини в сферичній системі координат (r_1, θ_1) у спрощеному форматі запишеться при цьому наступним чином:

$$\Phi(r_1, \theta_1, t) = e^{-i\omega t} \sum_{m=0}^N \left[\frac{P_m/(i\omega)}{j_m(\omega R_1)} j_m(\omega r_1) + i \cdot X_m^{(1)} \left(y_m(\omega r_1) - \frac{y_m(\omega R_1)}{j_m(\omega R_1)} j_m(\omega r_1) \right) \right] P_m(\cos \theta_1).$$

Друге рівняння системи (3.6) для визначення коефіцієнтів $X_m^{(1)}$, як і вираз для потенціальної функції Φ в системі координат (r_2, θ_2) залишаться без змін

$$\begin{aligned} \Phi(r_2, \theta_2, t) = e^{-i\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ X_m^{(2)} h_m(\omega r_2) - \frac{2m+1}{2\omega} j_m(\omega r_2) \sum_{f=0}^{\infty} X_f^{(2)} i^{m-f} q_{mf} + \right. \\ \left. + j_m(\omega r_2) \sum_{f=0}^{\infty} X_f^{(1)} \left[Q_{mf}^{(1)} - \frac{2m+1}{2\omega} i^{m-f} q_{mf}^{(1)} \right] \right\} P_m(\cos \theta_2), \end{aligned}$$

або в спрощеному вигляді

$$\Phi(r_2, \theta_2, t) = e^{-i\omega t} i \cdot \sum_{m=0}^{\infty} X_m^{(2)} \left(y_m(\omega r_2) - \frac{y'_m(\omega R_2)}{j'_m(\omega R_2)} j_m(\omega r_2) \right) P_m(\cos \theta_2). \quad (3.10)$$

Слід зазначити, що наведеним вище методом можна досліджувати дифракційні процеси в околі сферичних тіл, які розташовані в безмежному середовищі. Для цього достатньо в розрахунковій системі рівнянь (3.6) коефіцієнти q_{mf} покласти рівними нулеві. У випадку прирівнювання нулеві коефіцієнтів $Q_{mf}^{(2)}$ і $q_{mf}^{(2)}$ отримаємо задачу для механічної системи з одним (першим) сферичним тілом, розв'язок якої можна знайти в літературі [11].

§4. Радіаційна сила.

У загальному випадку сила, що діє на розташовану в ідеальній стисливій рідині кулю в безрозмірному форматі з урахуванням складових другого порядку може бути записана наступним чином [8, 10]

$$\vec{F} = \iint_S \frac{\partial \varphi}{\partial t} \vec{n} dS - \iint_S \left\{ \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} |\nabla \psi|^2 \right] \cdot \vec{n} + (v_n \cdot \vec{n} + v_\tau \cdot \vec{\tau}) \cdot v_n \right\} dS \quad (r_1 = R), \quad (4.1)$$

де \vec{n} , $\vec{\tau}$ – орти нормалі та дотичної до поверхні кулі; S – обмежуюча кулю поверхня; v_n , v_τ – нормальна та дотична складові швидкості точок рідини; $\psi = \text{Re}(\Psi)$ – дійсна частина потенціалу швидкості.

При цьому шукана радіаційна сила обчислюється шляхом осереднення за періодом падаючої звукової хвилі $T = 2\pi/\omega$ гідродинамічної сили $\vec{F}(t)$ (4.1):

$$\langle \vec{F} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{F} dt. \quad (4.2)$$

Для твердої кулі 2, потенціальна функція на поверхні якої задається виразом типу (3.10), остаточний запис для обчислення діючої на неї радіаційної сили запишеться наступним чином [5]

$$\langle F_z \rangle = 2\pi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+1)}{(2m+1)(2m+3)} [m(m+2) - \omega^2 R_2^2] (\mathfrak{R}_m \mathfrak{R}_{m+1} + \mathfrak{I}_m \mathfrak{I}_{m+1}), \quad (4.3)$$

де

$$\mathfrak{R}_m = \text{Re}\{X_m^{(2)}\} \cdot Y_m^{(2)}; \quad \mathfrak{I}_m = -\text{Im}\{X_m^{(2)}\} \cdot Y_m^{(2)}; \quad Y_m^{(2)} = y_m(\omega R_2) - \frac{y'_m(\omega R_2)}{j'_m(\omega R_2)} j_m(\omega R_2).$$

З метою нормування результатів (4.3) та зручності їх аналізу, іноді використовуються безрозмірна функція радіаційної сили Y_{st} [8, 11], яка є питомою радіаційною силою на одиницю густини енергії падаючої хвилі і одиницю площі її дії:

$$Y_{st} = \langle F_z \rangle / S_c E_p, \quad (4.4)$$

де $E_p = \omega^2 D^2 / 2$ – безрозмірне середнє значення густини енергії падаючої хвилі; D – амплітуда потенціальної функції первинної хвилі від вібрації першого сферичного тіла; $S_c = \pi R_2^2$ – площа поперечного перерізу другого сферичного тіла.

При кінематичному збуренні акустичного середовища центрально-симетричними коливаннями першого сферичного тіла амплітуда потенціалу первинної хвилі визначається рівністю

$$D = u_0 j_0(\omega R_1) / j'_0(\omega R_1),$$

а при силовому збуренні –

$$D = p_0 / i\omega,$$

де $u_0(p_0)$ – відмінний від нуля коефіцієнт розвинення радіальної швидкості середовища (тиску) на поверхні сферичного тіла.

§5. Числові результати.

Представлені в даному параграфі обчислення були виконані для механічної системи, безрозмірні радіуси куль якої (R_1 і R_2) приймалися рівними 0,3 або 0,6 ($\rho_0 = 1$). При цьому для всіх розрахункових випадків зазор між даними кулями становить 0,7 ($2h = R_1 + R_2 + 0,7$).

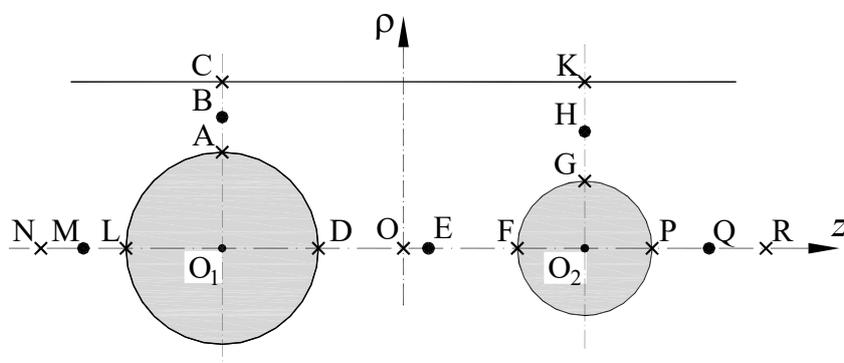
Параметр усічення N розрахункової нескінченної системи (3.6) прийнятий рівним 50, що забезпечує прийнятну точність обчислених значень гідродинамічних параметрів (3.8) (розбіжність контрольних максимальних значень із відповідними значеннями при $N = 60$ не перевищує 2 %).

Безрозмірна частота збудження випромінювача ω варіювалася в діапазоні від 0 до 10. При цьому крок сканування частоти прийнято рівним 0,01, а для уточнення розрахункових значень в околі «умовно резонансних» частот [4] використовувався більш дрібний крок – 0,0001.

Розглядалася центрально-симетрична форма коливань випромінюючого сферичного тіла, тобто в розвиненні (3.3) покладено

$$u_0 = 1, \quad u_m = 0 \quad (m = 1, 2, \dots, \infty).$$

Гідродинамічні параметри середовища (тиск p і швидкості U_* (3.8)) обчислювалися як для всього околу сферичних тіл, так і для конкретних точок, позначених на рис. 2 (у дужках зазначені їх координати в циліндричній системі $O\rho z$).



| | | |
|----------------------------|---------------------------|------------------------|
| $A(R_1, -h)$ | $F(0, h - R_2)$ | $M(0, -0,5(3h + R_1))$ |
| $B(0,5(\rho_0 + R_1), -h)$ | $G(R_2, h)$ | $N(0, -2h)$ |
| $C(\rho_0, -h)$ | $H(0,5(\rho_0 + R_2), h)$ | $P(0, h + R_2)$ |
| $D(0, R_1 - h)$ | $K(\rho_0, h)$ | $Q(0, 0,5(3h + R_2))$ |
| $E(0, 0,5(R_1 - R_2))$ | $L(0, -h - R_1)$ | $R(0, 2h)$ |

Рис. 2

Слід зазначити, що обчислення радіальних швидкостей U_r у точках А, С, D і L у системі координат (r_1, θ_1) та F, G, K і P у системі координат (r_2, θ_2) , виконувалося винятково для перевірки виконання граничних умов. Так, при параметрі усічення $N = 50$ у точках А, D і L – $U_r = 1,000$, в інших перерахованих вище точках $U_r \approx 0$ ($|U_r| < 5 \cdot 10^{-3}$).

У лівому стовпці рис. 3 представлено модулі детермінанта оберненої матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь (3.7) $\|A^{-1}\|$ як функція частоти ω при різних комбінаціях значень R_1 і R_2 : рис. 3, а відповідає випадку $R_1 = R_2 = 0,3$; рис. 3, б – $R_1 = 0,3$ і $R_2 = 0,6$; рис. 3, в – $R_1 = 0,6$ і $R_2 = 0,3$; рис. 3, г – $R_1 = R_2 = 0,6$. Графік

зазначеної функції $\|A^{-1}\| = f(\omega)$ дозволяє виявити «умовно резонансні» частоти збудження 1-ої кулі, при яких шукані гідродинамічні характеристики середовища можуть приймати великі значення. Таким частотам відповідають максимуми детермінанта оберненої матриці. Ці частоти не є власними значеннями механічної системи, оскільки детермінанти приймають хоч і великі, однак скінченні значення. Таких чітко виражених «умовно резонансних» частот у діапазоні $0 < \omega \leq 6$ виявлено не було, тому на рис. 3 представлені значення $\|A^{-1}\|$ виключно для $6 \leq \omega \leq 10$. Також слід зазначити той факт, що для комбінації $R_1 = 0,6$ і $R_2 = 0,3$ (рис. 3, б) отриманий графік $\|A^{-1}\| = f(\omega)$ ідентичний графіку для механічної системи з $R_1 = 0,3$ і $R_2 = 0,6$ (рис. 3, в). Це свідчить про незалежність спектра «умовно резонансних» частот від вибору джерела кінематичного збудження акустичного середовища для окремо взятої механічної системи із двох куль на осі циліндричної порожнини.

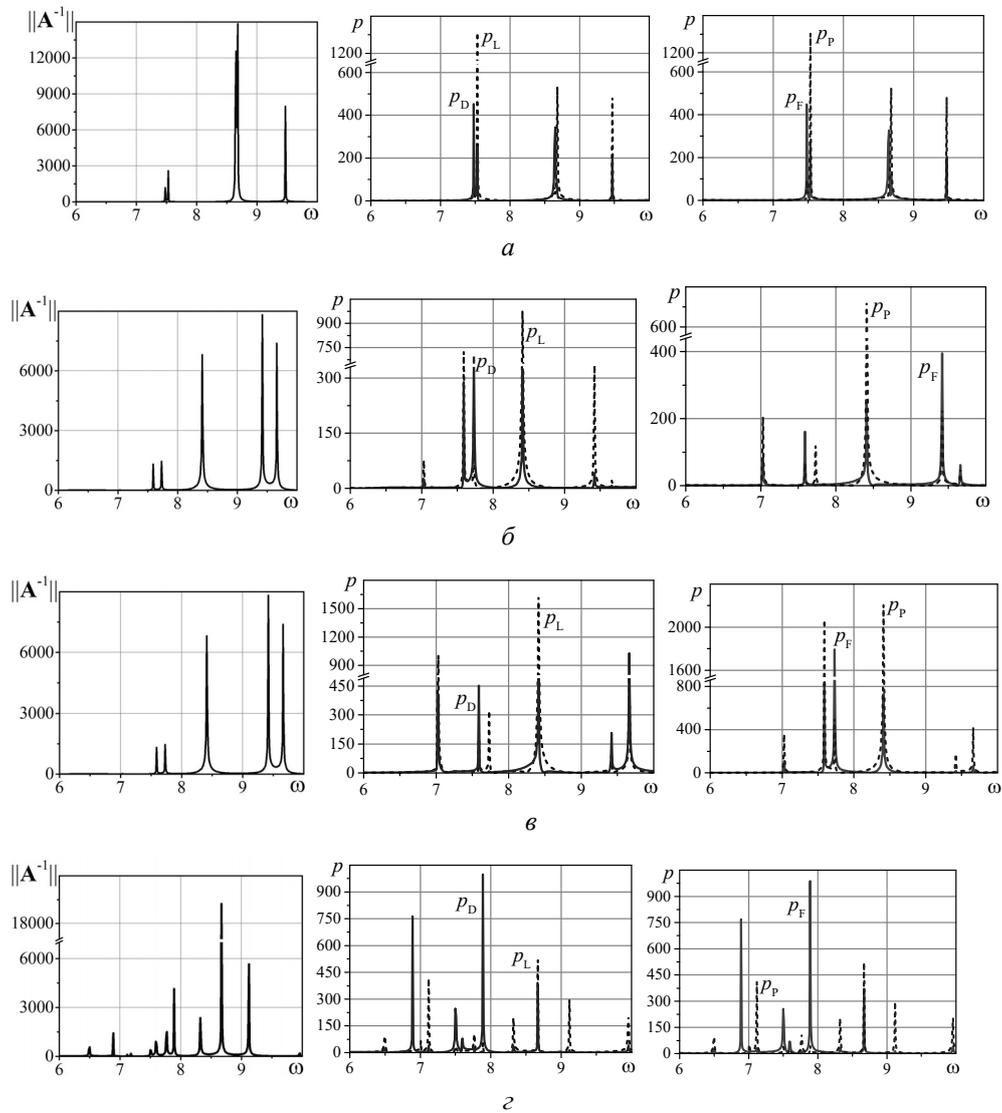


Рис. 3

З аналізу представлених у лівому стовпці рис. 3 кривих також можна зробити висновки, що зі збільшенням сумарного радіуса сферичних тіл кількість «умовно резонансних» частот збільшується.

Коректність знаходження «умовно резонансних» частот за модулем детермінанта $\|A^{-1}\|$ підтверджують графіки в середньому і правому стовпцях рис. 3, на яких показані абсолютні значення тисків у точках D (суцільна крива) і L (штрихова крива) на першій (випромінюючій) кулі (середній стовпець) і тиску на поверхні другого (твердого) сферичного тіла в точках F (суцільна крива) і P (штрихова крива) (правий стовпець). Як видно з рисунків, положення піків на графіках $\|A^{-1}\|$ і $|p|$ збігаються. З аналізу представлених на рис. 3 кривих також випливає, що максимум модуля $\|A^{-1}\|$ при обраному кроці сканування не визначає максимум гідродинамічного параметра на відповідній частоті, а тому графік $\|A^{-1}\|$ може бути використаний, наприклад, для звуження області пошуку таких «умовно резонансних» частот. Для механічної системи зі сферичними тілами однакових радіусів (рис. 3, а і рис. 3, з) обчислені на «умовно резонансних» частотах значення тисків у контрольних точках (D, L, F і P) вказують на деяку симетрію поля тисків відносно точки O початку циліндричної системи координат ($p_D \approx p_F$; $p_L \approx p_P$). При цьому у випадку менших куль (рис. 3, а) максимальні значення тиску виходять дещо більші, ніж при $R_1 = R_2 = 0,6$ (рис. 3, в). Більші значення тиску при сферичних тілах різного радіуса (рис. 3, б і рис. 3, в) також спостерігаються в околі менших куль.

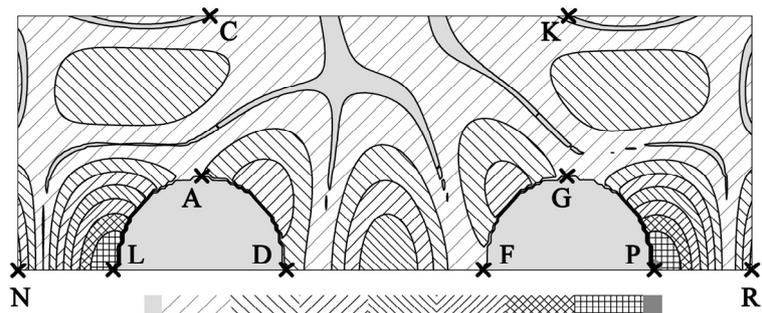
При цьому для всіх розрахункових комбінацій з радіусами $R_1 + R_2 \leq 0,9$ максимальні значення тиску мають місце на зовнішніх точках куль відносно їх міжцентрової відстані (точки L і P, рис. 2). У відповідних внутрішніх точках (точки D і F) тиск в рази менший. Протилежна картина має місце для сферичних тіл більших радіусів (зокрема, $R_1 = R_2 = 0,6$).

Більш детальні дослідження полів гідродинамічних параметрів акустичного середовища в околі сферичних тіл можуть бути виконані при фіксованому значенні «умовно резонансної» частоти. Результати таких чисельних експериментів наведено на рис. 4 і 5, на яких представлені поля гідродинамічного тиску $|p|$ в циліндричній порожнині (рис. 4) і графіки розподілу швидкостей U точок середовища уздовж найбільш характерних відрізків циліндричної порожнини (рис. 5) для обраних комбінацій геометричних параметрів і частоти.

Аналіз представлених на рис. 4 полів тиску підтверджує зроблений раніше висновок, що при малих значеннях радіусів куль максимум тиску має місце в зовнішніх відносно міжцентрової відстані точках поверхні сферичних тіл на осі циліндричної порожнини (точки L і P). Рис. 4, а і 4, з також свідчать про те, що при однакових радіусах куль, який співвимірний із зазором між ними, на «умовно резонансній» частоті збудження випромінювача картину розподілу тиску із прийнятною точністю можна назвати симетричною відносно площини ($O\rho\varphi$) циліндричної системи координат.

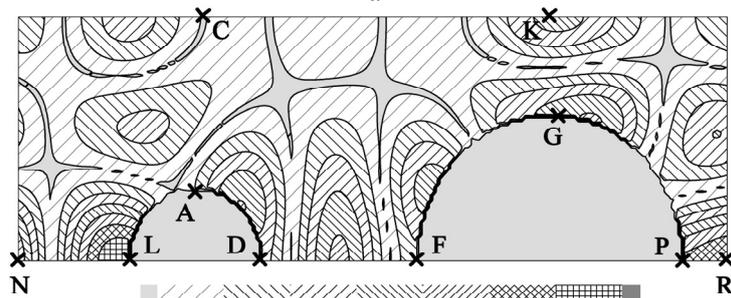
На рис. 5 зображено обчислені за формулами (3.8) при $R_1 = R_2 = 0,3$ і $\omega = 8,677$ епюри розподілу радіальної U_r та колової U_θ швидкостей точок середовища уздовж найбільш характерних відрізків циліндричної порожнини (рис. 2) – AC (рис. 5, а), GK (рис. 5, б) і NR (рис. 5, в). При цьому, як і на рис. 4, представлено абсолютні значення розрахункових величин.

Представлені графіки свідчать про задоволення граничних умов (1.2) і (1.3) у контрольних точках. В цілому, мінімальні значення абсолютної швидкості на розглянутій «умовно резонансній» частоті коливань випромінювача спостерігаються в околі середин найкоротших відрізків між сферичними тілами і циліндричною порожниною (у точках B, H і E, рис. 2). На відрізках AC і GK радіальні швидкості U_r (суцільні криві



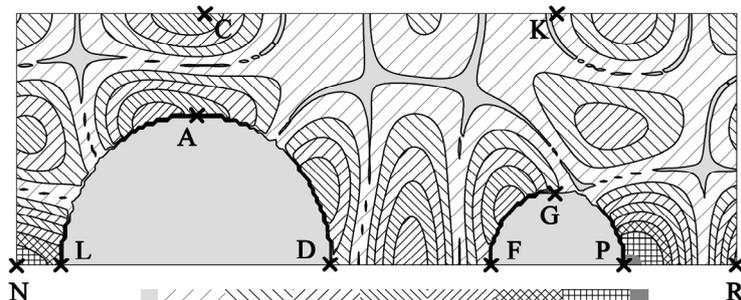
$$R_1 = R_2 = 0,3; \omega = 8,677$$

a



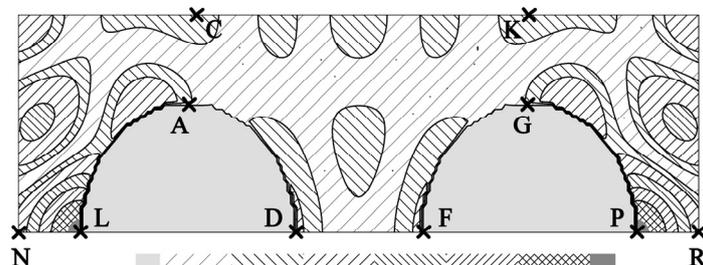
$$R_1 = 0,3; R_2 = 0,6; \omega = 8,414$$

b



$$R_1 = 0,6; R_2 = 0,3; \omega = 8,414$$

c



$$R_1 = R_2 = 0,6; \omega = 8,323$$

d

Рис. 4

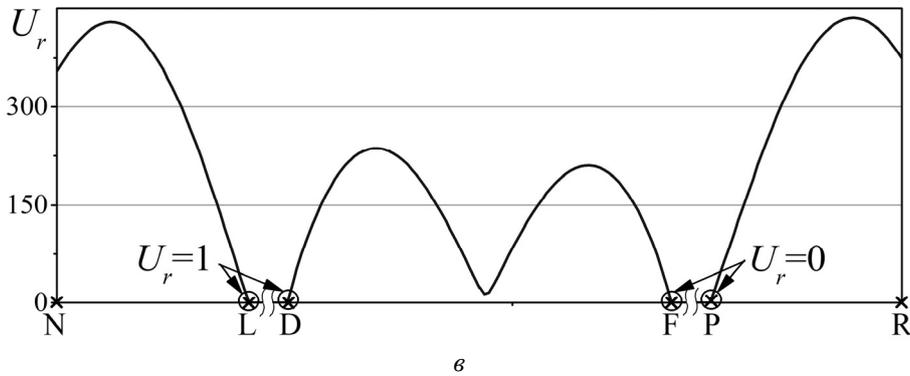
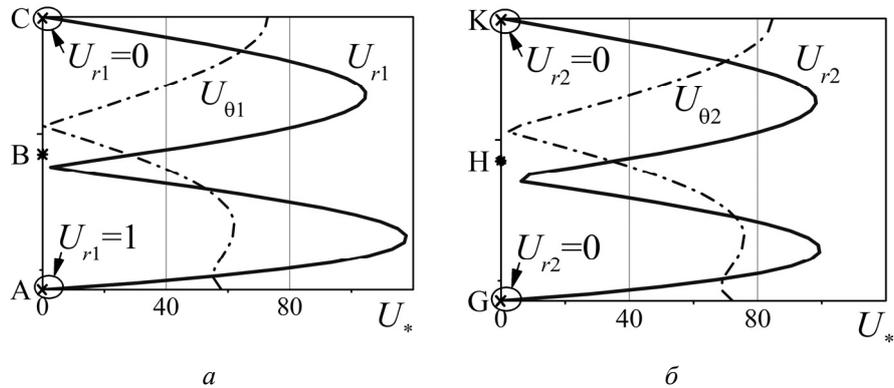


Рис. 5

на рис. 5, а і рис. 5, б) мають два порівнянні максимуми, які приблизно на два порядки перевищують амплітудне значення швидкості на поверхні випромінювача. Дещо менші значення приймає колова швидкість U_θ точок середовища на згаданих відрізках, при цьому максимуми U_θ мають місце поблизу поверхонь сферичних тіл і порожнини. Дещо більші значення швидкості спостерігаються безпосередньо на осі циліндричної порожнини (рис. 5, в). При цьому в області між сферичними тілами (відрізок DF на рис. 2) максимальні значення швидкості приблизно в 235 разів більші одиничної амплітуди коливань випромінювача. На зовнішніх відрізках розрахункової області (NL і PR) максимальне значення становить близько 430 і з віддаленням від центрів куль швидкість стрімко зменшується, що відповідає прийнятій граничній умові спадання випромінювання на нескінченності (2.3) (на рис. 5, в не показано).

На рис. 6 представлена діюча на тверде сферичне тіло 2 нормована радіаційна сила у випадку кінематичного збурення дифракційних процесів в акустичному середовищі сферичним тілом 1. Тут крива 1 відповідає випадку $R_1 = R_2 = 0,3$; крива 2 – $R_1 = 0,3$; $R_2 = 0,6$; крива 3 – $R_1 = 0,6$; $R_2 = 0,3$; крива 4 – $R_1 = R_2 = 0,6$.

Як і на досліджених вище чисельних експериментах вважалось, що тіло 1 здійснює центрально-симетричні коливання зі швидкістю одиничної амплітуди, а найкоротша відстань між поверхнями сферичних тіл однакова і дорівнює 0,7, а безрозмірні радіуси тіл прийнято рівними 0,3 і 0,6.

Аналіз представлених на рис. 6, а графіків підтверджує той факт, що екстремальні значення радіаційних сил спостерігаються в околі «умовно резонансних» частот механічної системи [4, 12]. Для інших частот радіаційна сила не перевищує 1,0 і при обраному масштабі відповідні криві фактично зливаються з віссю абсцис. При

$R_1 = 0,6$ діюча на тіло 2 радіаційна сила має від'ємні значення виключно в околі верхньої межі сканованого діапазону частот ($\omega \approx 10$). Для частот $\omega < 9$ мають місце додатні значення радіаційної сили, що свідчить про тенденцію до взаємного віддалення тіла 2 від джерела первинної хвилі (тіла 1). Найбільше значення нормованої радіаційної сили отримано для $R_1 > R_2$, результати розрахунку якої відображає крива 3. Близькі максимальні значення нормованих радіаційних сил отримано для випадку тіл однакового розміру: крива 1 – для $R_1 = R_2 = 0,3$ і крива 4 – для $R_1 = R_2 = 0,6$. Принциповою відмінністю цих кривих є значення частоти, при якій мають місце ці максимуми – $\omega \approx 8,65$ для кривої 1 і $\omega \approx 5,20$ для кривої 4.

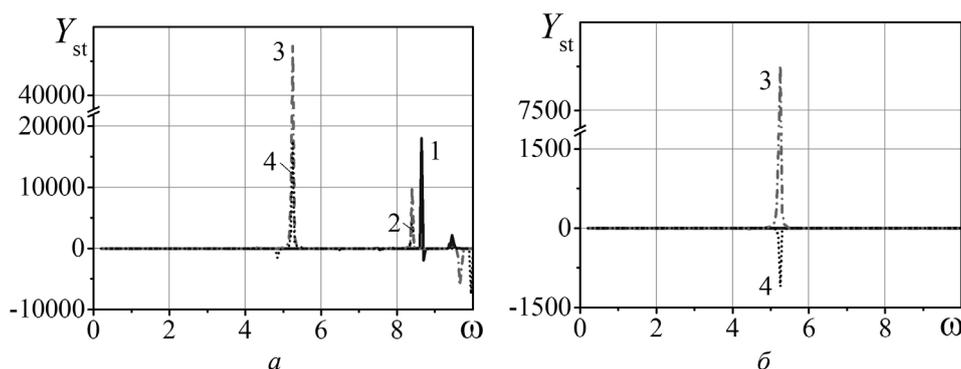


Рис. 6

Слід зазначити, що великі значення радіаційної сили обумовлені, в першу чергу, наявністю обмежуючої середовище циліндричної границі. Про це свідчать зображені на рис. 6, б результати розрахунку сили у випадку розташування сферичних тіл у безмежному акустичному середовищі. Для цих розрахункових випадків радіаційна сила при $R_1 = 0,3$ близька до нуля на усьому розглянутому діапазоні частоти (при обраному масштабі осі ординат криві 1 і 2 фактично співпадають з віссю абсцис). При $R_1 = 0,6$ частоти, які відповідають піковим значенням радіаційної сили для сферичного тіла 2 у безмежному середовищі і в обмеженому циліндричною границею порожнини, однакові. Разом з тим виявлено, що при $R_1 = R_2 = 0,6$ (крива 4) напрям радіаційної сили на зазначеній вище частоті для тіла у порожнині є протилежним напрямку сили для тіла в безмежному середовищі. Тобто, порожнина змінює як значення сили, так і напрям її дії. При $R_1 = 0,6$ і $R_2 = 0,3$ (крива 3), тобто коли вібрує сферичне тіло 1 більше за пасивне тіло 2 ($R_1 > R_2$), мають місце найбільші значення нормованої радіаційної сили як у циліндричній порожнині (рис. 6, а), так і в безмежному середовищі (рис. 6, б). При цьому розрахункові напрями однакові, однак дифракційне поле в обмеженому циліндричною границею середовищі генерує радіаційну силу, яка приблизно в 5,7 разів більша за силу від дифракційного поля в безмежному середовищі.

В цілому, наведені числові результати свідчать про ефективність викладеного в даній роботі методу розв'язання задачі про кінематичне збудження сферичним випромінювачем стаціонарних процесів в акустичному середовищі в циліндричній порожнині з урахуванням впливу розташованого поблизу нього жорсткого сферичного тіла. Збіжність методу апробована як для випадку, коли відстані «куля – куля» і «кулі – циліндрична поверхня» (зазори AC, GK і DF) мають порівнянні значення, так і при суттєвій різниці між ними. Раніше, при розв'язанні авторами аналогічних задач ([4, 5]), використовувався прямий метод обчислення відповідних коефіцієнтів трансляційних теорем додавання, який при суттєвій різниці зазорів між граничними поверхнями призводив до нестійкого рахунку через великі погрішності в значеннях сферичних функцій, що, відповідно, проявлялося в поганій обумовленості матриці розрахунку

кової системи рівнянь. У даній роботі цей недолік вдалося усунути за рахунок реалізації рекурентного алгоритму для обчислення коефіцієнтів трансляційних теорем додавання [2, 6], для чого була розроблена відповідна спеціальна програма в середовищі програмування MathCAD.

Висновки.

У роботі досліджуються особливості акустичних процесів у нескінченній циліндричній твердій порожнині з ідеальною стисливою рідиною, яка кінематично збуджується одним з двох сферичних тіл, що розташовані на осі порожнини. Друге сферичне тіло вважається абсолютно твердим. Досліджуються гідродинамічні характеристики рідини залежно від геометричних параметрів механічної системи при пульсуючих коливаннях випромінювача з радіальною швидкістю одиничної амплітуди. Точний розв'язок розглянутої граничної задачі отримано з використанням методу поділу змінних, трансляційних теорем додавання для сферичних хвильових функцій і співвідношень, які представляють сферичні хвильові функції через циліндричні та навпаки. Викладений підхід дозволив звести задачу до нескінченної системи алгебраїчних рівнянь, для розв'язання якої застосовано метод усічення. Наведені в роботі числові результати отримано для випадку, коли найкоротша відстань між поверхнями випромінюючої кулі і твердої кулі фіксована і має зіставне з радіусами куль значення. Разом з тим, метод показав себе стійким і до інших конфігурацій геометричних параметрів розглянутої механічної системи, що, очевидно, обумовлено використанням рекурентних формул для обчислення коефіцієнтів трансляційних теорем додавання [2, 6]. Виконані чисельні експерименти свідчать про задоволення усіх граничних умов і збіжності розв'язку.

Раніше, при розв'язанні аналогічних задач для напівнескінченної циліндричної порожнини з одним сферичним випромінювачем [4], авторами було встановлено існування «умовно резонансних» частот, при яких гідродинамічні характеристики середовища багаторазово зростають. Аналогічний ефект має місце і для розглянутої в даній роботі механічної системи. Викладений метод розв'язання дозволяє як виявляти значення таких «умовно резонансних» частот, так і досліджувати гідродинамічні параметри середовища в околі сферичних тіл.

При розв'язанні даної задачі встановлено, що значення «умовно резонансних» частот залежать від геометричних параметрів механічної системи. Разом з тим передбачити значення цих частот виключно за цими параметрами не є можливим. Виявлено, що на «умовно резонансній» частоті коливань випромінювача максимальні тиски при невеликих радіусах куль виникають у протилежних відносно їхньої міжцентрової відстані точках цих куль на осі циліндричної порожнини. У випадку куль відносно великого радіуса максимальний тиск має місце на осі порожнини на внутрішніх точках міжцентрової відстані. Мінімальні швидкості точок акустичного середовища при порівнянних зазорах між двома кулями і між кулями і циліндричною порожниною мають місце в середині згаданих зазорів. У той же час максимальні абсолютні значення швидкості виявлені на осі циліндричної порожнини в зовнішніх від міжцентрової відстані зонах.

Розрахунок діючої на тверде сферичне тіло радіаційної сили підтвердив, що пікові значення сили мають місце при коливаннях випромінюючої кулі на «умовно резонансних» частотах механічної системи. Нормоване значення радіаційної сили максимальне, коли радіус «вібруючого» сферичного тіла більший за радіус «пасивного». Основний вплив на значення радіаційної сили формують дифракційні процеси, обумовлені обмежуючою акустичне середовище циліндричною границею. Вона може як суттєво збільшити значення сили, так і змінити напрям її дії.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за підтримки Національного фонду досліджень України (конкурс «Підтримка досліджень провідних та молодих учених», Проєкт 2020.02/0112 «Дифракційні процеси і радіаційні сили в обмежених гідропружних системах»).

РЕЗЮМЕ. Два сферичні тіла розташовані на осі нескінченної циліндричної порожнини, яка заповнена ідеальною стисливою рідиною. Поверхня одного з тіл здійснює періодичні радіальні коливання із заданою частотою та амплітудою, друге тіло є абсолютно твердим. Розв'язано задачу визначення гідродинамічних характеристик акустичного середовища та діючої на друге тіло радіаційної сили залежно від частоти збудження випромінювача і геометричних параметрів механічної системи. Із застосуванням методів поділу змінних і трансляційних теорем додавання задача зведена до нескінченної системи алгебраїчних рівнянь, яка розв'язується методом усічення. Проведена серія чисельних експериментів показала, що як і у випадку коливань випромінювача поблизу твердого торця циліндричної порожнини, існують частоти, при яких гідродинамічні характеристики середовища і діюча на тверду кулю радіаційна сила багаторазово зростають. На основній з таких «умовно резонансних» частот максимальне значення тиску має місце в зовнішніх до міжцентрової відстані точках на осі циліндричної порожнини. Радіаційна сила максимальна, коли вібруюче тіло більше за пасивне, і направлена на збільшення міжцентрової відстані.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: нескінченна циліндрична порожнина, ідеальна стислива рідина, сферичне тіло, коливальна швидкість, гідродинамічні параметри, радіаційна сила.

1. *Абрамовиц М., Стуган И.* Справочник по специальным функциям. – Москва: Наука, 1979. – 832 с.
2. *Ерофеевко В.Т.* Теоремы сложения: Справочник. – Минск: Наука и техника, 1989. – 255 с.
3. *Doinikov A.A.* Bjerknes forces and translational bubble dynamics. In: *Bubble and Particle Dynamics in Acoustic Fields: Modern Trends and Applications* (ed. by A. Doinikov), 2005. – P. 95 – 143.
4. *Kubenko V.D., Yanchevskiy I.V.* “Resonance” phenomenon of kinematic excitation by a spherical body in a semi-infinite cylindrical vessel filled with liquid // *Acta Mechanica*. – 2019. – **230**, N 3. – P. 1009 – 1025.
5. *Kubenko V.D., Yanchevskiy I.V., Zhuk Ya. O., Liskin V.O.* Hydrodynamic Characteristics of a Plane Wave Interacting with a Spherical Body in a Semi-Infinite Cylindrical Cavity Filled with a Compressible Fluid // *Int. Appl. Mech.* – 2023. – **59**, N 2. – P. 131 – 144.
6. *Mackowski D.W.* Analysis of radiative scattering for multiple sphere configurations // *Proc. R. Soc. Lond. A*. – 1991. – **433**. – P. 599 – 614.
7. *Martin P.A., Skvortsov A.T.* Scattering by a sphere in a tube, and related problems // *J. of the Ac. Soc. of Am.* – 2020. – **148**. – P. 191 – 200.
8. *Mitri F.G.* Acoustic scattering of a high-order Bessel beam by an elastic sphere // *Ann. Phys.* – 2008. – **323**, N 11. – P. 2840 – 2850.
9. *Schwartz B.L., Liu Y., Royston Th.J., Magin R.L.* Axisymmetric diffraction of a cylindrical transverse wave by a viscoelastic spherical inclusion // *J. of Sound and Vibration*. – 2016. – **364**. – P. 222 – 233.
10. *Shi J., Li Sh., Deng Y., Zhang X., Zhang G.* Analysis of acoustic radiation force on a rigid sphere in a fluid-filled cylindrical cavity with an abruptly changed cross-section // *J. Acoust. Soc. Am.* – 2020. – **147**, N 1. – P. 516 – 524.
11. *Shi J., Zhang X., Chen R., Zhang G.* Acoustic radiation force of a solid elastic sphere immersed in a cylindrical cavity filled with ideal fluid // *Wave Motion*. – 2018. – **80**. – P. 37 – 46.
12. *Zhuk O.P., Kubenko V.D., Zhuk Y.O., Yanchevskiy I.V.* Acoustic Radiation Pressure on a Solid Sphere in a Compliant Cylindrical Tube Filled with a Fluid // *Int. Appl. Mech.* – 2022. – **58**, N 1. – P. 30 – 42.

Надійшла 13.06.2023

Затверджена до друку 12.12.2023