

А.О.Камінський, Є.Є.Курчakov, Ю.О.Чорноіван
ПРО ЗОНУ ПЕРЕДРУЙНУВАННЯ В НЕЛІНІЙНОМУ ОРТОТРОПНОМУ
ТІЛІ З ТРИЩИНОЮ

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: fract@inmech.kiev.ua*

Abstract. The first basic problem of non-linear elastic orthotropic body with intrinsic mode I crack is stated in the terms of the displacement vector components. It is supposed that there are process zones at the vicinity of each crack tip. We use invariant equations that are built based on the supposition that the process zone can be modeled as an open slit with a stress vector on its surface. The state of the process zones is described using equations with scalar function with two constants. Multiple-cycle solution of the boundary-value problem allows us to find out how the single non-zero component of the stress vector at points on the surfaces of the body, the fracture energy density, as well as the single non-zero component of the stress vector at points on the surfaces of the slit and the slit opening depend on the above-mentioned constants. In addition, it was found how the above-mentioned constants affect the configuration of the non-linearity zone at each tip of the crack. A method of the experimental-theoretical determination of the constitutive constants is proposed.

Key words: non-linear elastic orthotropic body, intrinsic crack, constitutive equations, process zone, boundary-value problem.

Вступ.

Виникнення біля кінця тріщини зони передруйнування суттєво впливає на стан тіла. Тому при постановці крайових задач механіки руйнування обов'язково треба зважати на зону передруйнування. Для цього потрібні рівняння, які відобразять стан цієї зони, котрі можна побудувати, спираючись на її модель. Зокрема, цю зону можна уявити у вигляді розкритого розрізу, до поверхонь якого прикладений деякий вектор напруження [12]. При цьому рівняння стану мають зв'язувати компоненти вектора напруження у споріднених точках на протилежних поверхнях розрізу з компонентами вектора зміщення цих точок відносно одна одної. Це було враховано в роботі [1]. В побудованих рівняннях стану фігурує скалярна функція з двома сталими.

Зауважимо, що є і інші моделі зони передруйнування [7, 19, 20, 27].

Зупинимось на випадку плоского напруженого стану.

В цій статті скориставшись тензорно-лінійними визначальними рівняннями [14], сформульовано (в компонентах вектора переміщення) першу основну задачу про рівновагу нелінійного ортотропного тіла з внутрішньою тріщиною нормального відриву, біля кожного кінця якої існує зона передруйнування.

Для відображення стану зони передруйнування використано рівняння, побудовані в роботі [1]. Нагадаємо, що в цих рівняннях фігурує скалярна функція з двома сталими.

Звичайно, розв'язуючи крайову задачу, братимемо до уваги, що напруження у точках на поверхнях розрізу не повинні зазнавати розривів. До того ж, вимагатимемо, щоб у кінці розрізу виконувався критерій міцності [12].

В результаті розв'язання крайової задачі з'ясовано, як від зазначених вище сталих залежать єдина ненульова компонента вектора напруження у точках на поверхнях тіла, питома енергія руйнування, а також єдина ненульова компонента вектора напруження у точках на поверхнях розрізу й розкриття розрізу. Окрім того, виявлено, як зазначені вище сталі впливають на конфігурацію зони нелінійності, що примикає до кожного кінця тріщини.

Також запропоновано експериментально-теоретичний метод визначення зазначених вище сталих.

§1. Загальні положення.

Зосередимось на тензорно-лінійних визначальних рівняннях.

Розглянемо анізотропне тіло, для якого зв'язок компонент тензора деформацій \mathbf{D} з компонентами тензора напружень \mathbf{S} є нелінійним. Називатимемо дане тіло нелінійним [5, 21].

Вважатимемо, що початковий стан тіла збігається з його натуральним станом.

Нехай анізотропія первісна (виявляється за нескінченно малої деформації тіла з початкового стану) [2].

Введемо взаємно обернені тензори четвертого рангу \mathbf{F} та \mathbf{G} , які характеризуватимуть анізотропію.

Коваріантні компоненти тензора анізотропії \mathbf{F} визначимо на основі відомих для околу початкового стану залежностей кожної коваріантної компоненти тензора деформацій \mathbf{D} від кожної контраваріантної компоненти тензора напружень \mathbf{S} :

$$F_{\alpha\beta\gamma\delta} = \left. \frac{\partial}{\partial S^{\gamma\delta}} D_{\alpha\beta} (S^{\gamma\delta}) \right|_{S^{\gamma\delta}=0}.$$

Звісно, коваріантні компоненти тензора анізотропії \mathbf{F} та контраваріантні компоненти тензора анізотропії \mathbf{G} мають задовольняти формулам

$$F_{\alpha\beta\gamma\delta} G^{\alpha\beta\epsilon\zeta} = \delta_{\gamma}^{\epsilon} \delta_{\delta}^{\zeta} \quad (\epsilon, \zeta), \quad (1.1)$$

де δ_{η}^{ι} – символи Кронекера.

Якщо відомі коваріантні компоненти тензора анізотропії \mathbf{F} , то за формулами (1.1) можна визначити контраваріантні компоненти тензора анізотропії \mathbf{G} .

Братимемо до уваги, що тензорам анізотропії \mathbf{F} та \mathbf{G} властива висока симетрія [16]. Інакше кажучи, в компонентах цих тензорів можна переставляти як індекси, що належать до будь-якої пари індексів, так і самі пари індексів.

Обмежимося малими деформаціями.

Узагальнюючи співвідношення Рейнера, маємо [21]

$$D_{\alpha\beta} = A_0 F_{\alpha\beta\gamma\delta} g^{\gamma\delta} + A_1 F_{\alpha\beta\gamma\delta} S^{\gamma\delta} + A_2 F_{\alpha\beta\gamma\delta} g_{\eta\theta} S^{\eta\theta} S^{\delta\theta}, \quad (1.2)$$

де A_0, A_1, A_2 – деякі скаляри.

Останній член у співвідношеннях (1.2) відповідає вторинним ефектам, а саме, ефекту Пойнтінга [9, 26] та ефекту Томсона [22].

Будемо нехтувати вторинними ефектами.

Відкидаючи у співвідношеннях (1.2) останній член, отримуємо

$$D_{\alpha\beta} = A_0 F_{\alpha\beta\gamma\delta} g^{\gamma\delta} + A_1 F_{\alpha\beta\gamma\delta} S^{\gamma\delta}. \quad (1.3)$$

Згідно з Ріхтером [24] й представляючи скаляри A_0, A_1 зі співвідношень (1.3) через алгебраїчні інваріанти тензора деформацій \mathbf{D} і тензора напружень \mathbf{S} [25], знаходимо тензорно-лінійні визначальні рівняння, які після обернення мають вигляд [14]

$$S^{\alpha\beta} = \frac{E}{Z} g^{\alpha\beta} + \frac{\varphi(\Omega)}{\Omega} \left(G^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\gamma\delta} - \frac{E}{Z} g^{\alpha\beta} \right), \quad (1.4)$$

де $\varphi(\Omega)$ – деяка скалярна функція.

Для величини Ω маємо:

$$\Omega = \sqrt{\Xi - \frac{E^2}{Z}}. \quad (1.5)$$

Тут

$$Z = F_{\alpha\beta\gamma\delta} g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta}; \quad E = g^{\alpha\beta} D_{\alpha\beta}; \quad \Xi = G^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\alpha\beta} D_{\gamma\delta}. \quad (1.6)$$

В статті [14] показано, що рівняння (1.4) відповідають закону Клаузіуса [15] та закону Гельмгольца [18].

Енергія деформації тіла, яке перебуває в стані термодинамічної рівноваги, є мінімальною. Це означає, що похідна скалярної функції $\varphi(\Omega)$ за величиною Ω має бути додатною [13]:

$$\frac{d}{d\Omega} \varphi(\Omega) > 0. \quad (1.7)$$

Згідно з Ільющінім [11], представляємо скалярну функцію $\varphi(\Omega)$ так:

$$\varphi(\Omega) = [1 - \tilde{\varphi}(\Omega)] \Omega. \quad (1.8)$$

Виявимо властивості скалярної функції $\tilde{\varphi}(\Omega)$.

Оскільки [14]

$$\varphi(\Omega) > 0 \quad (\Omega > 0),$$

то, згідно з формулою (1.8), маємо

$$\tilde{\varphi}(\Omega) < 1 \quad (\Omega > 0). \quad (1.9)$$

Враховуючи формулу (1.8) та нерівність (1.7), отримуємо

$$\frac{d}{d\Omega} [\tilde{\varphi}(\Omega) \Omega] < 1. \quad (1.10)$$

Беручи до уваги формулу (1.8), надаємо рівнянням (1.4) вигляду

$$S^{\alpha\beta} = G^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\gamma\delta} - \tilde{\varphi}(\Omega) \left(G^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\gamma\delta} - \frac{E}{Z} g^{\alpha\beta} \right). \quad (1.11)$$

З огляду на те, що рівняння (1.11) інваріантні, вони дають змогу ставити крайові задачі про рівновагу нелінійного анізотропного тіла з тріщиною, довільною за геометрією.

Вважатимемо, що (рис. 1)

$$\tilde{\varphi}(\Omega) = 0 \quad \Omega \in [0, \nu];$$

$$\frac{d}{d\Omega} \tilde{\varphi}(\Omega) = 0 \quad (\Omega = \nu).$$

Нехай

$$\varphi(\Omega) = \tau \quad (\Omega = \psi). \quad (1.13)$$

Враховуючи рівність (1.13), на основі формули (1.8) отримуємо

$\tilde{\varphi}(\Omega)$

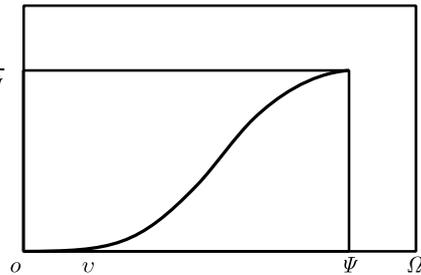


Рис. 1

$$\tilde{\varphi}(\Omega) = 1 - \frac{\tau}{\psi} \quad (\Omega = \psi) \quad (1.14)$$

Відповідно до першої із формул (1.12), скалярна функція $\tilde{\varphi}(\Omega)$ стає додатною, якщо величина Ω перевищує сталу ν . Тому зв'язок контраваріантних компонент тензора напружень \mathbf{S} з коваріантними компонентами тензора деформацій \mathbf{D} згідно з (1.11) стає нелінійним. Отже, критерій нелінійності можна записати так:

$$\Omega = \nu. \quad (1.15)$$

Припустимо, що зміна міцності відбувається тоді, коли величина Ω дорівнює сталій ψ . Отже, критерій міцності можна записати так:

$$\Omega = \psi. \quad (1.16)$$

Якщо коваріантні компоненти тензора анізотропії \mathbf{F} та контраваріантні компоненти тензора анізотропії \mathbf{G} виражатимуться через константи Ляме (тіло є ізотропним), рівняння (1.11) будуть тотожні рівнянням Генкі – Надаї [10, 17]. За цієї ж умови критерії (1.15) та (1.16) будуть тотожні критеріям Мізеса [8] й Мізеса – Генкі [8, 10].

Зосередимо увагу на рівняннях стану для зони передруйнування.

В статті [1] аналітично побудовано інваріантні рівняння стану для зони передруйнування біля кінця довільної тріщини.

Тут зону передруйнування було представлено у вигляді розкритого розрізу, до поверхонь якого приєднані прямолінійні елементи з нескінченно малою площею поперечного перетину.

Вважається, що кінцями тріщини та зони передруйнування є точки A і B .

Перед кінцем тріщини (точкою A) виділено точку L , яка внаслідок деформації тіла переходить у точки L^+ і L^- на поверхнях розрізу. Ці точки названо спорідненими.

Потім видалено прямолінійний елемент, приєднаний до поверхонь розрізу у точках L^+ і L^- . До цього елемента прикладені вектори напруження \mathbf{P}_+ і \mathbf{P}_- (рис. 2, а), а до тіла – вектори напруження $-\mathbf{P}_+$ і $-\mathbf{P}_-$ (рис. 2, б).

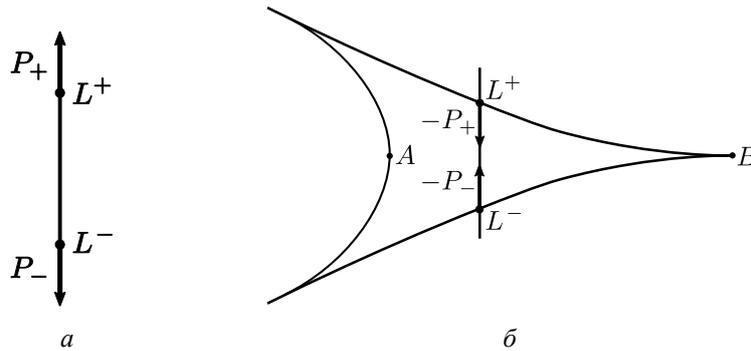


Рис. 2

Зроблено припущення, що відомі вектори $\overline{LL^+} \equiv \mathbf{u}^+$ і $\overline{LL^-} \equiv \mathbf{u}^-$, які зображають переміщення точок L^+ і L^- відносно точки L .

Після цього утворено вектор \mathbf{v}^{+-} ($\mathbf{v}^{+-} = \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-$), який зобразить зміщення точки L^+ відносно точки L^- , і вектор \mathbf{v}^{-+} ($\mathbf{v}^{-+} = \mathbf{u}^- - \mathbf{u}^+$), який зобразить зміщення точки L^- відносно точки L^+ .

Далі розглядався видалений елемент. Для описання стану цього елемента можна було обрати вектор напруження P_+ і вектор зміщення v^{+-} або вектор напруження P_- і вектор зміщення v^{-+} . Обрані вектори було записано як P і v .

Звичайно, вектор напруження P і вектор зміщення v є колінеарними та однаково спрямованими.

З урахуванням наведених міркувань побудовано рівняння, які зв'язують контраваріантні компоненти вектора напруження P з коваріантними компонентами вектора зміщення v [1]:

$$P^\alpha = P \frac{g^{\alpha\beta} v_\beta}{v}. \quad (1.17)$$

Для модуля P вектора напруження P і модуля v вектора зміщення v маємо:

$$P = \sqrt{g_{\alpha\beta} P^\alpha P^\beta}; \quad v = \sqrt{g^{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta}. \quad (1.18)$$

Нехай

$$P = P_o f(v), \quad (1.19)$$

де $f(v)$ – скалярна функція, яка спадає (від одиниці до нуля) в обмеженому замкненому інтервалі $[o, \eta]$.

Представляємо скалярну функцію $f(v)$ як:

$$f(v) = 1 - \tilde{f}(v), \quad (1.20)$$

де $\tilde{f}(v)$ – скалярна функція, яка зростає (від нуля до одиниці) в обмеженому замкненому інтервалі $[o, \eta]$.

Приймаючи до уваги формули (1.19) та (1.20), надаємо рівнянням (1.17) вигляду

$$P^\alpha = P_o [1 - \tilde{f}(v)] \frac{g^{\alpha\beta} v_\beta}{v}. \quad (1.21)$$

Вимагатимемо, щоб скалярна функція $\tilde{f}(v)$ задовольняла таким формулам (рис. 3):

$$\begin{aligned} \tilde{f}(v) = 0; \quad \frac{d}{dv} \tilde{f}(v) = 0 \quad (v = o); \\ \tilde{f}(v) = 1; \quad \frac{d}{dv} \tilde{f}(v) = m \quad (v = \eta). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Зауважимо, що $m \geq 0$. Звертаючись до рівнянь (1.21), при $\tilde{f}(v) = 1$ для компонент P^α вектора напруження P отримуємо: $P^\alpha = 0$.

Тобто, видалений елемент буде зруйновано. Таким чином, маємо критерій локального руйнування

$$v = \eta. \quad (1.23)$$

Відзначимо, що критерій (1.23) є узагальненням критерію Велса – Савіна – Камінського [23, 28], сформульованого для зони передруйнування біля кінця тріщини нормального відриву.

Звісно, для стану граничної рівноваги у точці A має виконуватися критерій локального руйнування. А у точці B завжди має виконуватися критерій міцності.

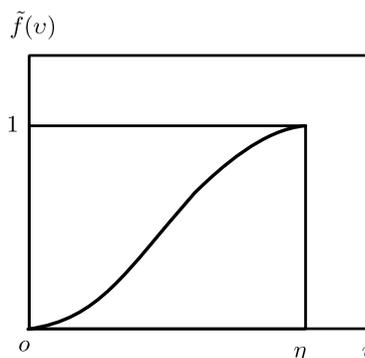


Рис. 3

Визначимо питому енергію J , що витрачається на деформацію видаленого елемента.

Приріст питомої енергії J дорівнює роботі компонент P^α на приростах компонент v_α :

$$dJ = P^\alpha dv_\alpha. \quad (1.24)$$

Вносячи до формули (1.24) компоненти вектора напруження із рівнянь (1.21), одержуємо

$$dJ = P_o [1 - \tilde{f}(v)] \frac{g^{\alpha\beta} dv_\alpha v_\beta}{v}. \quad (1.25)$$

Відповідно до другої із формул (1.18),

$$g^{\alpha\beta} dv_\alpha v_\beta = v dv. \quad (1.26)$$

Враховуючи формулу (1.26), для формули (1.25) отримуємо:

$$dJ = P_o [1 - \tilde{f}(v)] dv. \quad (1.27)$$

Згідно з формулою (1.27),

$$J = P_o \int [1 - \tilde{f}(v)] dv. \quad (1.28)$$

Звісно, питома енергія J має бути нульовою, якщо модуль v дорівнює нулю:

$$J = 0 \quad (v = 0).$$

Оскільки $P_o > 0$, то, згідно з формулою (1.28),

$$\int [1 - \tilde{f}(v)] dv = 0 \quad (v = 0). \quad (1.29)$$

Нехай ω є питома енергія, що витрачається на руйнування видаленого елемента.

Отже, беручи до уваги критерій (1.23) і формулу (1.28), установлюємо

$$\omega = P_o \int [1 - \tilde{f}(v)] dv \quad (v = \eta). \quad (1.30)$$

Якщо відомі величина P_o і скалярна функція $\tilde{f}(v)$, то можна, звернувшись до формули (1.30), визначити питому енергію ω .

Згідно з рівняннями (1.21), для контраваріантних компонент вектора напруження P у точках на поверхнях розрізу маємо

$$P^\alpha = -P_o [1 - \tilde{f}(v)] \frac{g^{\alpha\beta} v_\beta}{v}. \quad (1.31)$$

Через те, що рівняння (1.31) інваріантні, вони здатні відтворювати стан зони передруйнування будь-якої за геометрією.

Завдяки введенню скалярних функцій $\tilde{\varphi}(\Omega)$ і $\tilde{f}(v)$, розв'язувати крайову задачу можна буде методом послідовних наближень [14], який узагальнює метод додаткових напружень [11].

В першому наближенні необхідно прийняти, що $\tilde{\varphi}(\Omega) = 0$ та $\tilde{f}(v) = 0$.

В кожному наступному наближенні скалярні функції $\tilde{\varphi}(\Omega)$ і $\tilde{f}(v)$ треба обчислити, спираючись на розв'язок крайової задачі в попередньому наближенні.

§2. Основні рівняння.

Нехай система координат x^1, x^2, x^3 , до якої віднесено тіло, є прямокутною системою Декарта. Таким чином, метричний тензор \mathbf{g} буде одиничним [3]. Тобто, для коваріантних і контрваріантних компонент цього тензора матимемо:

$$g_{\varepsilon\zeta} = g^{\varepsilon\zeta} = \begin{cases} 1 & (\varepsilon = \zeta); \\ 0 & (\varepsilon \neq \zeta). \end{cases} \quad (2.1)$$

У відповідності до рівностей (2.1) рівняння (1.1) набувають вигляду

$$\begin{aligned} S^{\alpha\beta} &= G^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\gamma\delta} - \tilde{\varphi}(\Omega) \left(G^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\gamma\delta} - \frac{E}{Z} \right) \quad (\alpha = \beta); \\ S^{\alpha\beta} &= G^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\gamma\delta} - \tilde{\varphi}(\Omega) G^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\gamma\delta} \quad (\alpha \neq \beta). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Залучаючи рівності (2.1), записуємо перший і другий із інваріантів (1.6) так:

$$Z = F_{1111} + F_{2222} + F_{3333} + 2(F_{1122} + F_{1133} + F_{2233}); \quad E = D_{11} + D_{22} + D_{33}. \quad (2.3)$$

Згідно з рівностями (2.1) рівняння (1.31) набувають вигляду

$$P^\alpha = P_o \left[\tilde{f}(v) - 1 \right] \frac{v_\alpha}{v}. \quad (2.4)$$

Враховуючи рівності (2.1), записуємо другу із формул (1.18) так:

$$v = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2 + (v_3)^2}. \quad (2.5)$$

В подальшому будуть потрібні співвідношення між компонентами тензора деформацій \mathbf{D} і компонентами вектора переміщення \mathbf{u} .

Звернемось до співвідношень Коші [15]:

$$D_{\varepsilon\zeta} = \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x^\zeta} (\varepsilon, \zeta). \quad (2.6)$$

Над правими частинами співвідношень (2.6) слід виконати операцію симетрування за індексами ε, ζ .

Вносячи до рівнянь (2.2) компоненти тензора деформацій \mathbf{D} зі співвідношень (2.6), установлюємо

$$\begin{aligned} S^{\alpha\beta} &= G^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_\gamma}{\partial x^\delta} - \tilde{\varphi}(\Omega) \left(G^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_\gamma}{\partial x^\delta} - \frac{E}{Z} \right) \quad (\alpha = \beta); \\ S^{\alpha\beta} &= G^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_\gamma}{\partial x^\delta} - \tilde{\varphi}(\Omega) G^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_\gamma}{\partial x^\delta} \quad (\alpha \neq \beta). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Підставляючи до другого із інваріантів (2.3) і до третього із інваріантів (1.3) компоненти тензора деформацій \mathbf{D} зі співвідношень (2.6), отримуємо

$$E = \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial u_3}{\partial x^3}; \quad \Xi = G^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\beta} \frac{\partial u_\gamma}{\partial x^\delta}. \quad (2.8)$$

Вважатимемо тіло ортотропним. Припустимо також, що головні напрямки збігаються з осями x^1, x^2, x^3 . Введемо такі позначення:

$$\begin{aligned} G^{1111} &\equiv \kappa^{aa}; \quad G^{1122} \equiv \kappa^{ad}; \quad G^{1133} \equiv \kappa^{af}; \\ G^{1212} &\equiv \kappa^{bb}; \quad G^{1313} \equiv \kappa^{cc}; \quad G^{2222} \equiv \kappa^{dd}; \\ G^{2233} &\equiv \kappa^{df}; \quad G^{2323} \equiv \kappa^{ee}; \quad G^{3333} \equiv \kappa^{ff}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Зупинимось на випадку плоского напруженого стану.

Нехай компоненти тензора напружень \mathbf{S} , які не дорівнюють нулю, лежать у площині x^1x^2 . Отже,

$$S^{\alpha\beta} = S^{\alpha\beta}(x^1, x^2) \quad (\alpha = 1, 2; \beta = 1, 2); \quad (2.10)$$

$$S^{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \beta = 3; \alpha = 3, \beta = 1, 2; \alpha = 3, \beta = 3). \quad (2.11)$$

В цьому випадку частинна похідна від компоненти u_3 за координатою x^3 не дорівнюватиме нулю.

Звернемо увагу на те, що, згідно з рівняннями (2.7), а також першим із інваріантів (2.8) і формулами (2.10), частинні похідні від компонент u_1, u_2 за координатами x^1, x^2 та частинна похідна від компоненти u_3 за координатою x^3 будуть функціями координат x^1, x^2 .

Відповідно до нерівності (1.9), $\tilde{\varphi}(\Omega) \neq 1$. Внаслідок цього, звертаючись до других із рівнянь (2.7) й зважаючи на рівності (2.11), маємо

$$\frac{\partial u_\gamma}{\partial x^\delta} + \frac{\partial u_\delta}{\partial x^\gamma} = 0 \quad (\gamma = 1, 2, \delta = 3; \gamma = 3, \delta = 1, 2). \quad (2.12)$$

Залучаючи рівності (2.12) та враховуючи позначення (2.9), для другого із інваріантів (2.8) одержуємо:

$$\begin{aligned} \Xi = & \kappa^{aa} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + 2\kappa^{ad} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \kappa^{dd} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \kappa^{bb} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u_1}{\partial x^2} \frac{\partial u_2}{\partial x^1} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) + \\ & + \left(2\kappa^{af} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + 2\kappa^{df} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \kappa^{ff} \frac{\partial u_3}{\partial x^3} \right) \frac{\partial u_3}{\partial x^3}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Звертаючись до перших із рівнянь (2.7), враховуючи перший із інваріантів (2.8) та позначення (2.9), для компонент $S^{\alpha\beta}$ ($\alpha = 1, 2, 3, \beta = 1, 2, 3; \alpha = \beta$) тензора напружень \mathbf{S} матимемо:

$$\begin{aligned} S^{11} = & \kappa^{aa} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \kappa^{ad} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \kappa^{af} \frac{\partial u_3}{\partial x^3} - \\ & - \tilde{\varphi}(\Omega) \left[\left(\kappa^{aa} - \frac{1}{Z} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \left(\kappa^{ad} - \frac{1}{Z} \right) \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \left(\kappa^{af} - \frac{1}{Z} \right) \frac{\partial u_3}{\partial x^3} \right]; \\ S^{22} = & \kappa^{da} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \kappa^{dd} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \kappa^{df} \frac{\partial u_3}{\partial x^3} - \\ & - \tilde{\varphi}(\Omega) \left[\left(\kappa^{da} - \frac{1}{Z} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \left(\kappa^{dd} - \frac{1}{Z} \right) \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \left(\kappa^{df} - \frac{1}{Z} \right) \frac{\partial u_3}{\partial x^3} \right]; \\ S^{33} = & \kappa^{fa} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \kappa^{fd} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \kappa^{ff} \frac{\partial u_3}{\partial x^3} - \\ & - \tilde{\varphi}(\Omega) \left[\left(\kappa^{fa} - \frac{1}{Z} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \left(\kappa^{fd} - \frac{1}{Z} \right) \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \left(\kappa^{ff} - \frac{1}{Z} \right) \frac{\partial u_3}{\partial x^3} \right]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Приврівнюючи компоненту S^{33} тензора напружень \mathbf{S} до нуля, на основі третього із рівнянь (2.14) для частинної похідної від компоненти u_3 за координатою x^3 знаходимо:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_3}{\partial x^3} = \\ & = \frac{1}{\kappa^{ff}} \left\{ \tilde{\varphi}(\Omega) \left[\left(\kappa^{fa} - \frac{1}{Z} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \left(\kappa^{fd} - \frac{1}{Z} \right) \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \left(\kappa^{ff} - \frac{1}{Z} \right) \frac{\partial u_3}{\partial x^3} \right] - \kappa^{fa} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} - \kappa^{fd} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \right\}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Введемо такі позначення:

$$\begin{aligned} \kappa^{aa} - \frac{\kappa^{af}}{\kappa^{ff}} \kappa^{fa} &\equiv \underline{\kappa}^{aa}; \quad \kappa^{ad} - \frac{\kappa^{af}}{\kappa^{ff}} \kappa^{fd} \equiv \underline{\kappa}^{ad}; \\ \kappa^{da} - \frac{\kappa^{df}}{\kappa^{ff}} \kappa^{fa} &\equiv \underline{\kappa}^{da}; \quad \kappa^{dd} - \frac{\kappa^{df}}{\kappa^{ff}} \kappa^{fd} \equiv \underline{\kappa}^{dd}; \\ 1 - \frac{\kappa^{af}}{\kappa^{ff}} &\equiv \alpha; \quad 1 - \frac{\kappa^{df}}{\kappa^{ff}} \equiv \delta. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Вносячи до першого і до другого із рівнянь (2.14) частинну похідну від компоненти u_3 за координатою x^3 із виразу (2.15) й урахуваючи позначення (2.16), для компонент $S^{\alpha\beta}$ ($\alpha = 1, 2, \beta = 1, 2; \alpha = \beta$) тензора напружень \mathbf{S} отримуємо:

$$\begin{aligned} S^{11} &= \underline{\kappa}^{aa} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \underline{\kappa}^{ad} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \tilde{\varphi}(\Omega) \left[\left(\underline{\kappa}^{aa} - \frac{\alpha}{Z} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \left(\underline{\kappa}^{ad} - \frac{\alpha}{Z} \right) \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \frac{\alpha}{Z} \frac{\partial u_3}{\partial x^3} \right]; \\ S^{22} &= \underline{\kappa}^{da} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \underline{\kappa}^{dd} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \tilde{\varphi}(\Omega) \left[\left(\underline{\kappa}^{da} - \frac{\delta}{Z} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \left(\underline{\kappa}^{dd} - \frac{\delta}{Z} \right) \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \frac{\delta}{Z} \frac{\partial u_3}{\partial x^3} \right]. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Звертаючись до других із рівнянь (2.7) та враховуючи позначення (2.9), для компонент $S^{\alpha\beta}$ ($\alpha = 1, 2, \beta = 1, 2; \alpha \neq \beta$) тензора напружень \mathbf{S} матимемо:

$$\begin{aligned} S^{12} &= \kappa^{bb} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) - \tilde{\varphi}(\Omega) \kappa^{bb} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right); \\ S^{21} &= \kappa^{bb} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) - \tilde{\varphi}(\Omega) \kappa^{bb} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Згідно з рівностями (2.11) рівняння Нав'є будуть такими [6]:

$$\frac{\partial S^{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial S^{12}}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial S^{21}}{\partial x^1} + \frac{\partial S^{22}}{\partial x^2} = 0. \quad (2.19)$$

Вносячи до рівнянь (2.19) компоненти тензора напружень із рівнянь (2.17) і (2.18) та переносючи нелінійні члени у праві частини, встановлюємо

$$\begin{aligned} \underline{\kappa}^{aa} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^1 \partial x^1} + \left(\underline{\kappa}^{ad} + \kappa^{bb} \right) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^2} + \kappa^{bb} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2 \partial x^2} &= Q^1; \\ \kappa^{bb} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^1} + \left(\kappa^{bb} + \underline{\kappa}^{da} \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^1 \partial x^2} + \underline{\kappa}^{dd} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2 \partial x^2} &= Q^2. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Тут

$$Q^1 = \frac{\partial}{\partial x^1} \left\{ \tilde{\varphi}(\Omega) \left[\left(\underline{\kappa}^{aa} - \frac{\alpha}{Z} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \left(\underline{\kappa}^{ad} - \frac{\alpha}{Z} \right) \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \frac{\alpha}{Z} \frac{\partial u_3}{\partial x^3} \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial x^2} \left[\tilde{\varphi}(\Omega) \kappa^{bb} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) \right]; \quad (2.21)$$

$$Q^2 = \frac{\partial}{\partial x^1} \left[\tilde{\varphi}(\Omega) \kappa^{bb} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x^2} \left\{ \tilde{\varphi}(\Omega) \left[\left(\underline{\kappa}^{da} - \frac{\delta}{Z} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \left(\underline{\kappa}^{dd} - \frac{\delta}{Z} \right) \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \frac{\delta}{Z} \frac{\partial u_3}{\partial x^3} \right] \right\}.$$

Згідно з рівностями (2.11), крайові умови будуть такими [6]:

$$S^{11}n_1 + S^{12}n_2 = P^1; \quad S^{21}n_1 + S^{22}n_2 = P^2, \quad (2.22)$$

де n_1, n_2 – компоненти одиничного вектора \mathbf{n} зовнішньої нормалі до поверхні тіла.

Підставляючи до умов (2.22) компоненти тензора напружень із рівнянь (2.17) і (2.18) та переносячи нелінійні члени у праві частини, отримуємо

$$\left(\underline{\kappa}^{aa} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \underline{\kappa}^{ad} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \right) n_1 + \kappa^{bb} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) n_2 = P^1 + R^1; \quad (2.23)$$

$$\kappa^{bb} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) n_1 + \left(\underline{\kappa}^{da} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \underline{\kappa}^{dd} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \right) n_2 = P^2 + R^2.$$

Тут

$$R^1 = \tilde{\varphi}(\Omega) \left[\left(\underline{\kappa}^{aa} - \frac{\alpha}{Z} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \left(\underline{\kappa}^{ad} - \frac{\alpha}{Z} \right) \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \frac{\alpha}{Z} \frac{\partial u_3}{\partial x^3} \right] n_1 + \tilde{\varphi}(\Omega) \kappa^{bb} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) n_2; \quad (2.24)$$

$$R^2 = \tilde{\varphi}(\Omega) \kappa^{bb} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) n_1 + \tilde{\varphi}(\Omega) \left[\left(\underline{\kappa}^{da} - \frac{\delta}{Z} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \left(\underline{\kappa}^{dd} - \frac{\delta}{Z} \right) \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \frac{\delta}{Z} \frac{\partial u_3}{\partial x^3} \right] n_2.$$

Зауважимо, що у випадку плоского напруженого стану

$$v_3 = 0. \quad (2.25)$$

Звертаючись до рівнянь (2.4) й формули (2.5) та враховуючи рівність (2.25), для ненульових компонент вектора напруження \mathbf{P} матимемо:

$$P^1 = P_o [\tilde{f}(v) - 1] \frac{V_1}{V}; \quad P^2 = P_o [\tilde{f}(v) - 1] \frac{V_2}{V}. \quad (2.26)$$

Тут

$$v = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2}. \quad (2.27)$$

Для того, щоб сформулювати крайову задачу, будуть потрібні ще рівняння для компонент u_α ($\alpha = 1, 2$) вектора переміщення \mathbf{u} в окремих точках тіла [13, 14].

§3. Додаткові рівняння.

Розглянемо прямокутне тіло з центральною тріщиною. Поперечні осі симетрії тіла сумістимо з осями x^1, x^2 . Розмір тіла вздовж осі x^3 вважатимемо малим.

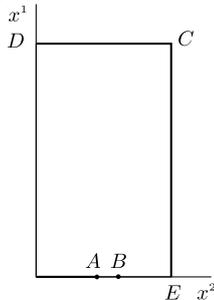


Рис. 4

Припустимо, що компоненти вектора напруження \mathbf{P} у протилежних точках на поверхнях тіла задано симетрично відносно осей x^1, x^2 . Тому зосередимо увагу лише на четвертій частині тіла (рис. 4).

Із симетрії відносно осей x^1, x^2 випливає

$$u_1(x^1, -x^2) - u_1(x^1, +x^2) = 0; \quad u_2(x^1, -x^2) + u_2(x^1, +x^2) = 0; \quad (3.1)$$

$$u_1(-x^1, x^2) + u_1(+x^1, x^2) = 0; \quad u_2(-x^1, x^2) - u_2(+x^1, x^2) = 0.$$

Кінцями тріщини і розрізу є точки A і B . Отримаємо рівняння для компонент u_α ($\alpha = 1, 2$) вектора переміщення \mathbf{u} у точці B . Із симетрії відносно осі x^2 для компоненти u_1 вектора переміщення \mathbf{u} у точці B маємо:

$$u_1 = 0. \quad (3.2)$$

Нехай поблизу точки B існує точка F з координатами f^1, f^2 . Координати x^1, x^2 точки B записуємо у вигляді сум: $f^1 + \varepsilon^1, f^2 + \varepsilon^2$. Таким чином, для компоненти u_2 вектора переміщення \mathbf{u} у точці B матимемо [13]:

$$u_2 - u_2|_{(f^1, f^2)} - \frac{\partial u_2}{\partial x^1}|_{(f^1, f^2)} \varepsilon^1 - \frac{\partial u_2}{\partial x^2}|_{(f^1, f^2)} \varepsilon^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^1}|_{(f^1, f^2)} \varepsilon^1 \varepsilon^1 + 2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^2}|_{(f^1, f^2)} \varepsilon^1 \varepsilon^2 + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2 \partial x^2}|_{(f^1, f^2)} \varepsilon^2 \varepsilon^2 \right) = 0. \quad (3.3)$$

Зазначимо, що $\angle DCE$ є лінійним кутом двогранного кута, утвореного верхньою та боковою поверхнями тіла. Розглянемо точку C (вершину $\angle DCE$). Дістанемо рівняння для компонент u_α ($\alpha = 1, 2$) вектора переміщення \mathbf{u} у точці C .

Нехай поблизу точки C існує точка G з координатами g^1, g^2 . Координати x^1, x^2 точки C записуємо у вигляді сум: $g^1 + \zeta^1, g^2 + \zeta^2$.

Отже, для компонент u_α ($\alpha = 1, 2$) вектора переміщення \mathbf{u} в точці C матимемо [25]:

$$u_\alpha - u_\alpha|_{(g^1, g^2)} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^1}|_{(g^1, g^2)} \zeta^1 - \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^2}|_{(g^1, g^2)} \zeta^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^1 \partial x^1}|_{(g^1, g^2)} \zeta^1 \zeta^1 + 2 \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^1 \partial x^2}|_{(g^1, g^2)} \zeta^1 \zeta^2 + \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2 \partial x^2}|_{(g^1, g^2)} \zeta^2 \zeta^2 \right) = 0. \quad (3.4)$$

Задля простоти природи $\varepsilon^1, \varepsilon^2$ координат f^1, f^2 та природи ζ^1, ζ^2 координат g^1, g^2 можна вважати однаковими за абсолютною величиною. І ще одне. З огляду на симетрію відносно осі x^2 маємо

$$v_2 = 0. \quad (3.5)$$

Звертаючись до рівнянь (2.26) й формули (2.27) та беручи до уваги рівність (3.5) для ненульової компоненти вектора напруження \mathbf{P} , матимемо:

$$P^1 = P_0 [\tilde{f}(v) - 1] \frac{v_1}{v}. \quad (3.6)$$

Тут

$$v = v_1. \quad (3.7)$$

Очевидно, що

$$v_1 = 2u_1. \quad (3.8)$$

Залишається сформулювати розв'язувальні рівняння.

§4. Розв'язувальні рівняння.

Додержуючись роботи [12], дискретизуємо змінні. Утворимо сітку координат x_i^1, x_j^2 (рис. 5):

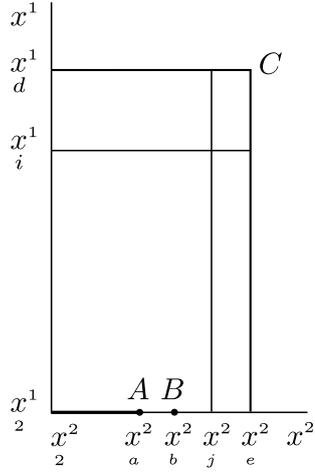


Рис. 5

$$\begin{aligned} x_i^1 &= (i-2)h \quad (i=1, \dots, d); \\ x_j^2 &= (j-2)h \quad (j=1, \dots, e). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Як видно з формул (4.1), крок сітки h прийнято однаковим за обома координатами. Компоненти u_1, u_2 вектора переміщення \mathbf{u} у точках $\left(x_i^1, x_j^2\right)$ позначимо так:

$$u_1\left(x_i^1, x_j^2\right) \equiv y_s; \quad u_2\left(x_i^1, x_j^2\right) \equiv y_t. \quad (4.2)$$

Тут

$$\begin{aligned} s &= 2[(i-1)e + j - b] + 1; \\ t &= 2[(i-1)e + j - b] + 2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Розв'язувальні рівняння дістанемо, звертаючись до рівнянь (2.20), умов (2.23) і рівнянь (3.1) – (3.4).

Розписуючи умови (2.23) й формули (2.24), будемо залучати значення компонент n_1, n_2 одиничного вектора \mathbf{n} зовнішньої нормалі у точках на верхній та на боковій поверхнях тіла, а також у точках на верхній поверхні тріщини і розрізу.

Вважатимемо, що $-\varepsilon^1 = \varepsilon^2 = \zeta^1 = \zeta^2 = h$.

Враховуючи позначення (4.2) й апроксимуючи (у точках $\left(x_i^1, x_j^2\right)$ ($i=2, \dots, d$, $j=2, \dots, e$) частинні похідні від компонент u_α ($\alpha=1,2$) за координатами x^β ($\beta=1,2$) відповідними різницевиими відношеннями, дістаємо n лінійних рівнянь з невідомими y_1, \dots, y_n :

$$\begin{aligned} &A_{ss}y_s + A_{ss+2e}y_{s+2e} + A_{ss-2e}y_{s-2e} + A_{st+2(e+1)}y_{t+2(e+1)} + A_{st+2(e-1)}y_{t+2(e-1)} + \\ &+ A_{st-2(e-1)}y_{t-2(e-1)} + A_{st-2(e+1)}y_{t-2(e+1)} + A_{ss+2}y_{s+2} + A_{ss-2}y_{s-2} \approx B_s; \\ &A_{tt}y_t + A_{tt+2e}y_{t+2e} + A_{tt-2e}y_{t-2e} + A_{ts+2(e+1)}y_{s+2(e+1)} + A_{ts+2(e-1)}y_{s+2(e-1)} + \\ &+ A_{ts-2(e-1)}y_{s-2(e-1)} + A_{ts-2(e+1)}y_{s-2(e+1)} + A_{tt+2}y_{t+2} + A_{tt-2}y_{t-2} \approx B_t \\ &(i=2, j=b+1, \dots, e-1; i=3, \dots, d-1, j=2, \dots, e-1); \\ &A_{ss}y_s + A_{ss-2e}y_{s-2e} + A_{ss-4e}y_{s-4e} + A_{st+2}y_{t+2} + A_{st-2}y_{t-2} \approx B_s; \\ &A_{tt}y_t + A_{tt-2e}y_{t-2e} + A_{tt-4e}y_{t-4e} + A_{ts+2}y_{s+2} + A_{ts-2}y_{s-2} \approx B_t \quad (i=d, j=2, \dots, e-1); \\ &A_{ss}y_s + A_{ss-2}y_{s-2} + A_{ss-4}y_{s-4} + A_{st+2e}y_{t+2e} + A_{st-2e}y_{t-2e} \approx B_s; \\ &A_{tt}y_t + A_{tt-2}y_{t-2} + A_{tt-4}y_{t-4} + A_{ts+2e}y_{s+2e} + A_{ts-2e}y_{s-2e} \approx B_t \quad (i=2, \dots, d-1, j=e); \\ &A_{ss}y_s + A_{ss+2e}y_{s+2e} + A_{ss+4e}y_{s+4e} + A_{st+2}y_{t+2} + A_{st-2}y_{t-2} \approx B_s; \\ &A_{tt}y_t + A_{tt+2e}y_{t+2e} + A_{tt+4e}y_{t+4e} + A_{ts+2}y_{s+2} + A_{ts-2}y_{s-2} \approx B_t \quad (i=2, j=2, \dots, a-1); \\ &A_{ss}y_s + A_{ss+2e}y_{s+2e} + A_{ss+4e}y_{s+4e} + A_{st+2}y_{t+2} + A_{st-2}y_{t-2} \approx B_s; \\ &A_{tt}y_t + A_{tt+2e}y_{t+2e} + A_{tt+4e}y_{t+4e} + A_{ts+2}y_{s+2} + A_{ts-2}y_{s-2} \approx B_t \quad (i=2, j=a, \dots, b-1); \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned}
A_{s-2s-2}Y_{s-2} + A_{s-2s+2}Y_{s+2} &= B_{s-2}; \quad A_{t-2t-2}Y_{t-2} + A_{t-2t+2}Y_{t+2} = B_{t-2} \quad (i=2, \dots, d, j=2); \\
A_{s-2es-2e}Y_{s-2e} + A_{s-2es+2e}Y_{s+2e} &= B_{s-2e}; \quad A_{t-2et-2e}Y_{t-2e} + A_{t-2et+2e}Y_{t+2e} = B_{t-2e} \\
&(i=2, j=b, \dots, e); \quad A_{ss}Y_s = B_s; \\
A_{tt}Y_t + A_{tt+2e}Y_{t+2e} + A_{tt-2}Y_{t-2} + A_{tt+2(e-1)}Y_{t+2(e-1)} + A_{tt+4e}Y_{t+4e} + A_{tt-4}Y_{t-4} + \\
&+ A_{tt+4(e-1)}Y_{t+4(e-1)} \approx B_t \quad (i=2, j=b); \\
A_{ss}Y_s + A_{ss-2e}Y_{s-2e} + A_{ss-2}Y_{s-2} + A_{ss-2(e+1)}Y_{s-2(e+1)} + \\
&+ A_{ss-4e}Y_{s-4e} + A_{ss-4}Y_{s-4} + A_{ss-4(e+1)}Y_{s-4(e+1)} \approx B_s; \\
A_{tt}Y_t + A_{tt-2e}Y_{t-2e} + A_{tt-2}Y_{t-2} + A_{tt-2(e+1)}Y_{t-2(e+1)} + A_{tt-4e}Y_{t-4e} + A_{tt-4}Y_{t-4} + \\
&+ A_{tt-4(e+1)}Y_{t-4(e+1)} \approx B_t \quad (i=d, j=e).
\end{aligned}$$

Для коефіцієнтів і вільних членів лінійних рівнянь із системи (4.4) маємо:

$$\begin{aligned}
-A_{ss} &= 8(\underline{\kappa}^{aa} + \underline{\kappa}^{bb}); \quad A_{ss+2e} = 4\underline{\kappa}^{aa}; \quad A_{ss-2e} = 4\underline{\kappa}^{aa}; \quad A_{st+2(e+1)} = \underline{\kappa}^{ad} + \underline{\kappa}^{bb}; \\
-A_{st+2(e-1)} &= \underline{\kappa}^{ad} + \underline{\kappa}^{bb}; \quad -A_{st-2(e-1)} = \underline{\kappa}^{ad} + \underline{\kappa}^{bb}; \quad A_{st-2(e+1)} = \underline{\kappa}^{ad} + \underline{\kappa}^{bb}; \\
A_{ss+2} &= 4\underline{\kappa}^{bb}; \quad A_{ss-2} = 4\underline{\kappa}^{bb}; \quad B_s = 2h\underline{Q}^1 \left| \begin{matrix} x^1, x^2 \\ i, j \end{matrix} \right|; \quad -A_{tt} = 8(\underline{\kappa}^{bb} + \underline{\kappa}^{dd}); \\
A_{tt+2e} &= 4\underline{\kappa}^{bb}; \quad A_{tt-2e} = 4\underline{\kappa}^{bb}; \quad A_{ts+2(e+1)} = \underline{\kappa}^{bb} + \underline{\kappa}^{da}; \quad -A_{ts+2(e-1)} = \underline{\kappa}^{bb} + \underline{\kappa}^{da}; \\
-A_{ts-2(e-1)} &= \underline{\kappa}^{bb} + \underline{\kappa}^{da}; \quad A_{ts-2(e+1)} = \underline{\kappa}^{bb} + \underline{\kappa}^{da}; \quad A_{tt+2} = 4\underline{\kappa}^{dd}; \quad A_{tt-2} = 4\underline{\kappa}^{dd}; \\
B_t &= 2h\underline{Q}^2 \left| \begin{matrix} x^1, x^2 \\ i, j \end{matrix} \right| \quad (i=2, j=b+1, \dots, e-1; \quad i=3, \dots, d-1, j=2, \dots, e-1); \\
A_{ss} &= 3\underline{\kappa}^{aa}; \quad -A_{ss-2e} = 4\underline{\kappa}^{aa}; \quad A_{ss-4e} = \underline{\kappa}^{aa}; \quad A_{st+2} = \underline{\kappa}^{ad}; \quad -A_{st-2} = \underline{\kappa}^{ad}; \\
B_s &= 2h(P^1 + R^1) \left| \begin{matrix} x^1, x^2 \\ i, j \end{matrix} \right|; \quad A_{tt} = 3\underline{\kappa}^{bb}; \quad -A_{tt+2e} = 4\underline{\kappa}^{bb}; \quad A_{tt+4e} = \underline{\kappa}^{bb}; \\
-A_{ts+2} &= \underline{\kappa}^{bb}; \quad A_{ts-2} = \underline{\kappa}^{bb}; \quad B_t = 2h(P^2 + R^2) \left| \begin{matrix} x^1, x^2 \\ i, j \end{matrix} \right| \quad (i=d, j=2, \dots, e-1); \\
A_{ss} &= 3\underline{\kappa}^{bb}; \quad -A_{ss-2} = 4\underline{\kappa}^{bb}; \quad A_{ss-4} = \underline{\kappa}^{bb}; \quad A_{st+2e} = \underline{\kappa}^{bb}; \quad -A_{st-2e} = \underline{\kappa}^{bb}; \\
B_s &= 2h(P^1 + R^1) \left| \begin{matrix} x^1, x^2 \\ i, j \end{matrix} \right|; \\
A_{tt} &= 3\underline{\kappa}^{dd}; \quad -A_{tt-2} = 4\underline{\kappa}^{dd}; \quad A_{tt-4} = \underline{\kappa}^{dd}; \quad A_{ts+2e} = \underline{\kappa}^{da}; \quad -A_{ts-2e} = \underline{\kappa}^{da}; \\
B_t &= 2h(P^2 + R^2) \left| \begin{matrix} x^1, x^2 \\ i, j \end{matrix} \right| \quad (i=2, \dots, d-1, j=e); \\
A_{ss} &= 3\underline{\kappa}^{aa}; \quad -A_{ss+2e} = 4\underline{\kappa}^{aa}; \quad A_{ss+4e} = \underline{\kappa}^{aa}; \quad -A_{st+2} = \underline{\kappa}^{ad}; \quad A_{st-2} = \underline{\kappa}^{ad}; \\
B_s &= 2h(P^1 + R^1) \left| \begin{matrix} x^1, x^2 \\ i, j \end{matrix} \right|;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_{tt} = 3\kappa^{bb}; \quad -A_{tt+2e} = 4\kappa^{bb}; \quad A_{tt+4e} = \kappa^{bb}; \quad -A_{ts+2} = \kappa^{bb}; \quad A_{ts-2} = \kappa^{bb}; \\
& B_t = 2h(P^2 + R^2) \Big|_{\binom{x^1, x^2}{i, j}} \quad (i = 2, j = 2, \dots, a-1); \\
& A_{ss} = 3\underline{\kappa}^{aa}; \quad -A_{ss+2e} = 4\underline{\kappa}^{aa}; \quad A_{ss+4e} = \underline{\kappa}^{aa}; \quad -A_{st+2} = \underline{\kappa}^{ad}; \quad A_{st-2} = \underline{\kappa}^{ad}; \\
& B_s = 2h(P^1 + R^1) \Big|_{\binom{x^1, x^2}{i, j}}; \\
& A_{tt} = 3\kappa^{bb}; \quad -A_{tt+2e} = 4\kappa^{bb}; \quad A_{tt+4e} = \kappa^{bb}; \quad -A_{ts+2} = \kappa^{bb}; \quad A_{ts-2} = \kappa^{bb}; \\
& B_t = 2h(P^2 + R^2) \Big|_{\binom{x^1, x^2}{i, j}} \quad (i = 2, j = a, \dots, b-1); \tag{4.5} \\
& A_{s-2s-2} = 1; \quad -A_{s-2s+2} = 1; \quad B_{s-2} = 0; \quad A_{t-2t-2} = 1; \quad A_{t-2t+2} = 1; \quad B_{t-2} = 0 \\
& \quad (i = 2, \dots, d, \quad j = 2); \\
& A_{s-2es-2e} = 1; \quad A_{s-2es+2e} = 1; \quad B_{s-2e} = 0; \quad A_{t-2et-2e} = 1; \quad -A_{t-2et+2e} = 1; \quad B_{t-2e} = 0 \\
& \quad (i = 2, \quad j = b, \dots, e); \quad A_{ss} = 1; \quad B_s = 0; \\
& A_{tt} = 3; \quad -A_{tt+2e} = 4; \quad -A_{tt-2} = 4; \quad A_{tt+2(e-1)} = 4; \\
& A_{tt+4e} = 1; \quad A_{tt-4} = 1; \quad -A_{tt+4(e-1)} = 1; \quad B_t = 0 \quad (i = 2, \quad j = b); \\
& A_{ss} = 3; \quad -A_{ss-2e} = 4; \quad -A_{ss-2} = 4; \quad A_{ss-2(e+1)} = 4; \\
& A_{ss-4e} = 1; \quad A_{ss-4} = 1; \quad -A_{ss-4(e+1)} = 1; \quad B_s = 0; \\
& A_{tt} = 3; \quad -A_{tt-2e} = 4; \quad -A_{tt-2} = 4; \quad A_{tt-2(e+1)} = 4; \\
& A_{tt-4e} = 1; \quad A_{tt-4} = 1; \quad -A_{tt-4(e+1)} = 1; \quad B_t = 0 \quad (i = d, \quad j = e).
\end{aligned}$$

У формулах (4.5)

$$\underline{\underline{Q}}^1 \Big|_{\binom{x^1, x^2}{i, j}} = 2h\underline{Q}^1 \Big|_{\binom{x^1, x^2}{i, j}}; \quad \underline{Q}^2 \Big|_{\binom{x^1, x^2}{i, j}} = 2h\underline{Q}^2 \Big|_{\binom{x^1, x^2}{i, j}}. \tag{4.6}$$

Відповідно до формул (2.21) та (4.6) для величин $\underline{\underline{Q}}^1 \Big|_{\binom{x^1, x^2}{i, j}}$, $\underline{Q}^2 \Big|_{\binom{x^1, x^2}{i, j}}$ маємо:

$$\begin{aligned}
& \underline{\underline{Q}}^1 \Big|_{\binom{x^1, x^2}{i, j}} = \\
& = \left\{ \tilde{\varphi}(\Omega) \left[\left(\underline{\kappa}^{aa} - \frac{\alpha}{Z} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \left(\underline{\kappa}^{ad} - \frac{\alpha}{Z} \right) \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \frac{\alpha}{Z} \frac{\partial u_3}{\partial x^3} \right] \right\} \Big|_{\binom{x^1, x^2}{i+1, j}} - \\
& - \left\{ \tilde{\varphi}(\Omega) \left[\left(\underline{\kappa}^{aa} - \frac{\alpha}{Z} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \left(\underline{\kappa}^{ad} - \frac{\alpha}{Z} \right) \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \frac{\alpha}{Z} \frac{\partial u_3}{\partial x^3} \right] \right\} \Big|_{\binom{x^1, x^2}{i-1, j}} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\tilde{\varphi}(\Omega) \kappa^{bb} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) \right] \Big|_{(x_i^1, x_{j+1}^2)} - \left[\tilde{\varphi}(\Omega) \kappa^{bb} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) \right] \Big|_{(x_i^1, x_{j-1}^2)}; \quad (4.7) \\
& \underline{Q}^2 \Big|_{(x_i^1, x_j^2)} = \\
& = \left[\tilde{\varphi}(\Omega) \kappa^{bb} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) \right] \Big|_{(x_{i+1}^1, x_j^2)} - \left[\tilde{\varphi}(\Omega) \kappa^{bb} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) \right] \Big|_{(x_{i-1}^1, x_j^2)} + \\
& + \left\{ \tilde{\varphi}(\Omega) \left[\left(\underline{\kappa}^{da} - \frac{\delta}{Z} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \left(\underline{\kappa}^{dd} - \frac{\delta}{Z} \right) \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \frac{\delta}{Z} \frac{\partial u_3}{\partial x^3} \right] \right\} \Big|_{(x_i^1, x_{j+1}^2)} - \\
& - \left\{ \tilde{\varphi}(\Omega) \left[\left(\underline{\kappa}^{da} - \frac{\delta}{Z} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \left(\underline{\kappa}^{dd} - \frac{\delta}{Z} \right) \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \frac{\delta}{Z} \frac{\partial u_3}{\partial x^3} \right] \right\} \Big|_{(x_i^1, x_{j-1}^2)} \\
& (i = 2, j = b+1, \dots, e-1; i = 3, \dots, d-1, j = 2, \dots, e-1).
\end{aligned}$$

Зазначимо, що з симетрії відносно осей x^1, x^2 випливає

$$\begin{aligned}
& \left[\tilde{\varphi}(\Omega) \kappa^{bb} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) \right] \Big|_{(x_i^1, x_i^2)} + \left[\tilde{\varphi}(\Omega) \kappa^{bb} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) \right] \Big|_{(x_i^1, x_3^2)} = 0; \\
& \left\{ \tilde{\varphi}(\Omega) \left[\left(\underline{\kappa}^{da} - \frac{\delta}{Z} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \left(\underline{\kappa}^{dd} - \frac{\delta}{Z} \right) \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \frac{\delta}{Z} \frac{\partial u_3}{\partial x^3} \right] \right\} \Big|_{(x_i^1, x_i^2)} - \\
& - \left\{ \tilde{\varphi}(\Omega) \left[\left(\underline{\kappa}^{da} - \frac{\delta}{Z} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \left(\underline{\kappa}^{dd} - \frac{\delta}{Z} \right) \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \frac{\delta}{Z} \frac{\partial u_3}{\partial x^3} \right] \right\} \Big|_{(x_i^1, x_3^2)} = 0 \\
& (i = 3, \dots, d-1); \quad (4.8) \\
& \left\{ \tilde{\varphi}(\Omega) \left[\left(\underline{\kappa}^{aa} - \frac{\alpha}{Z} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \left(\underline{\kappa}^{ad} - \frac{\alpha}{Z} \right) \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \frac{\alpha}{Z} \frac{\partial u_3}{\partial x^3} \right] \right\} \Big|_{(x_i^1, x_j^2)} - \\
& - \left\{ \tilde{\varphi}(\Omega) \left[\left(\underline{\kappa}^{aa} - \frac{\alpha}{Z} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \left(\underline{\kappa}^{ad} - \frac{\alpha}{Z} \right) \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \frac{\alpha}{Z} \frac{\partial u_3}{\partial x^3} \right] \right\} \Big|_{(x_3^1, x_j^2)} = 0; \\
& \left[\tilde{\varphi}(\Omega) \kappa^{bb} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) \right] \Big|_{(x_i^1, x_j^2)} + \left[\tilde{\varphi}(\Omega) \kappa^{bb} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) \right] \Big|_{(x_3^1, x_j^2)} = 0 \\
& (j = b+1, \dots, e-1).
\end{aligned}$$

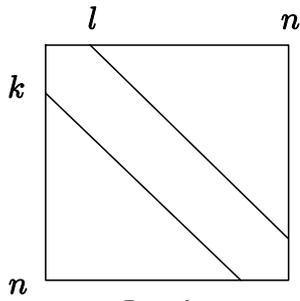


Рис. 6

Підкреслимо, що, згідно з формулами (4.3), індекси s, t пов'язані з індексами i, j . Як бачимо, матриця системи (4.4) є стрічковою (рис. 6). Вкажемо, що

$$k = 4e + 5; \quad l = 4e + 1; \quad n = 2(de - b + 1).$$

Ширина стрічки $(k + l - 1)$ дорівнює $8e + 5$.

Представимо систему (4.4) так:

$$\sum_{v=1}^n A_{uv} y_v = B_u \quad (u = 1, \dots, n). \quad (4.9)$$

Перетворимо матрицю A системи (4.9) на матрицю \dot{A} з елементами

$$\dot{A}_{u\bar{v}} = A_{uv} \quad (u = 1, \dots, n, \quad v = 1, \dots, n).$$

Тут

$$\bar{v} = \begin{cases} v & (u \leq k); \\ v - u + k & (u > k). \end{cases}$$

Таким чином, матрицю A розміру $n \times n$ перетворено на матрицю \dot{A} розміру $n \times (k + l - 1)$.

Зазначимо, що матриця \dot{A} і стовпчик B вільних членів утворюють компакту розширену матрицю. Невідомі y_1, \dots, y_n знайдемо модифікованим методом Гауса [14].

Прямий хід включатиме чотири етапи.

Перший етап ($u = 1, \dots, k, v = u + 1, \dots, l + u - 1$):

$$\dot{A}_{uv}^{(u)} = \frac{\dot{A}_{uv}^{(u-1)}}{\dot{A}_{uu}^{(u-1)}}; \quad B_u^{(u)} = \frac{B_u^{(u-1)}}{\dot{A}_{uu}^{(u-1)}};$$

$$(w = u + 1, \dots, k)$$

$$\dot{A}_{wv}^{(u)} = \dot{A}_{wv}^{(u-1)} - \dot{A}_{uv}^{(u)} \dot{A}_{wu}^{(u-1)}; \quad B_w^{(u)} = B_w^{(u-1)} - B_u^{(u)} \dot{A}_{wu}^{(u-1)};$$

$$(w = k + 1, \dots, k + u - 1)$$

$$\dot{A}_{wv-w+k}^{(u)} = \dot{A}_{wv-w+k}^{(u-1)} - \dot{A}_{uv}^{(u)} \dot{A}_{wu-w+k}^{(u-1)}; \quad B_w^{(u)} = B_w^{(u-1)} - B_u^{(u)} \dot{A}_{wu-w+k}^{(u-1)}. \quad (4.10)$$

Другий етап ($u = k + 1, \dots, n - k, v = u + 1, \dots, l + u - 1$):

$$\dot{A}_{uv-u+k}^{(u)} = \frac{\dot{A}_{uv-u+k}^{(u-1)}}{\dot{A}_{uk}^{(u-1)}}; \quad B_u^{(u)} = \frac{B_u^{(u-1)}}{\dot{A}_{uk}^{(u-1)}};$$

$$\dot{A}_{wv-w+k}^{(u)} = \dot{A}_{wv-w+k}^{(u-1)} - \dot{A}_{uv-u+k}^{(u)} \dot{A}_{wu-w+k}^{(u-1)}; \quad B_w^{(u)} = B_w^{(u-1)} - B_u^{(u)} \dot{A}_{wu-w+k}^{(u-1)}. \quad (4.11)$$

Третій етап ($u = n - k + 1, \dots, n - l, v = u + 1, \dots, l + u - 1$):

$$\dot{A}_{uv-u+k}^{(u)} = \frac{\dot{A}_{uv-u+k}^{(u-1)}}{\dot{A}_{uk}^{(u-1)}}; \quad B_u^{(u)} = \frac{B_u^{(u-1)}}{\dot{A}_{uk}^{(u-1)}};$$

$$(w = u + 1, \dots, n)$$

$$\dot{A}_{wv-w+k}^{(u)} = \dot{A}_{wv-w+k}^{(u-1)} - \dot{A}_{uv-u+k}^{(u)} \dot{A}_{wu-w+k}^{(u-1)}; \quad B_w^{(u)} = B_w^{(u-1)} - B_u^{(u)} \dot{A}_{wu-w+k}^{(u-1)}. \quad (4.12)$$

Четвертий етап ($u = n - l + 1, \dots, n, v = u + 1, \dots, n$):

$$\dot{A}_{uv-u+k}^{(u)} = \frac{\dot{A}_{uv-u+k}^{(u-1)}}{\dot{A}_{uk}^{(u-1)}}, \quad B_u^{(u)} = \frac{B_u^{(u-1)}}{\dot{A}_{uk}^{(u-1)}};$$

$$(w = u + 1, \dots, n)$$

$$\dot{A}_{wv-w+k}^{(u)} = \dot{A}_{wv-w+k}^{(u-1)} - \dot{A}_{uv-u+k}^{(u)} \dot{A}_{wu-w+k}^{(u-1)}; \quad B_w^{(u)} = B_w^{(u-1)} - B_u^{(u)} \dot{A}_{wu-w+k}^{(u-1)}. \quad (4.13)$$

Здійснивши перетворення за формулами (4.10) – (4.13), отримаємо вільний член $B_n^{(n)}$. Змінна y_n дорівнюватиме вільному члену $B_n^{(n)}$. Зворотний хід включатиме три етапи.

Перший етап ($u = n - 1, \dots, n - l + 1$):

$$y_u = B_u^{(u)} - \sum_{v=u+1}^n \dot{A}_{uv-u+k}^{(u)} y_v. \quad (4.14)$$

Другий етап ($u = n - l, \dots, k + 1$):

$$y_u = B_u^{(u)} - \sum_{v=u+1}^{l+u-1} \dot{A}_{uv-u+k}^{(u)} y_v. \quad (4.15)$$

Третій етап ($u = k, \dots, 1$):

$$y_u = B_u^{(u)} - \sum_{v=u+1}^{l+u-1} \dot{A}_{uv}^{(u)} y_v. \quad (4.16)$$

Здійснивши обчислення за формулами (4.14) – (4.16), знайдемо невідомі y_{n-1}, \dots, y_1 .

§5. Обчислювальний приклад.

В обчислювальному прикладі використано дані, наведені в статтях [4, 5].

Головні компоненти тензора анізотропії F наступні:

$$F_{1111} = 0,193 \cdot 10^{-10} \text{Па}^{-1}; \quad -F_{1122} = 0,045 \cdot 10^{-10} \text{Па}^{-1}; \quad -F_{1133} = 0,049 \cdot 10^{-10} \text{Па}^{-1};$$

$$F_{1212} = 0,107 \cdot 10^{-10} \text{Па}^{-1}; \quad F_{1313} = 0,121 \cdot 10^{-10} \text{Па}^{-1}; \quad F_{2222} = 0,142 \cdot 10^{-10} \text{Па}^{-1};$$

$$-F_{2233} = 0,045 \cdot 10^{-10} \text{Па}^{-1}; \quad F_{2323} = 0,107 \cdot 10^{-10} \text{Па}^{-1}; \quad F_{3333} = 0,193 \cdot 10^{-10} \text{Па}^{-1}.$$

Перший із інваріантів (2.3): $Z = 0,250 \cdot 10^{-10} \text{Па}^{-1}$. Головні компоненти тензора анізотропії G :

$$G^{1111} = 6,395 \cdot 10^{10} \text{Па}; \quad G^{1122} = 2,744 \cdot 10^{10} \text{Па}; \quad G^{1133} = 2,263 \cdot 10^{10} \text{Па};$$

$$G^{1212} = 2,336 \cdot 10^{10} \text{Па}; \quad G^{1313} = 2,066 \cdot 10^{10} \text{Па}; \quad G^{2222} = 8,781 \cdot 10^{10} \text{Па};$$

$$G^{2233} = 2,744 \cdot 10^{10} \text{Па}; \quad G^{2323} = 2,336 \cdot 10^{10} \text{Па}; \quad G^{3333} = 6,395 \cdot 10^{10} \text{Па}.$$

Скалярну функцію $\tilde{\varphi}(\Omega)$ побудовано з урахуванням формул (1.12):

$$\tilde{\varphi}(\Omega) = \begin{cases} 0 & \Omega \in [o, \nu]; \\ \frac{\Omega - \nu - a \ln\left(\frac{\Omega - \nu}{a} + 1\right)}{\Omega} & \Omega \in [\nu, \psi]. \end{cases} \quad (5.1)$$

Підкреслимо, що $a > 0$.

Залучаючи другу із формул (5.1), отримуємо

$$\frac{d}{d\Omega}[\tilde{\varphi}(\Omega)\Omega] = \frac{\Omega - \nu}{\Omega - \nu + a} \quad \Omega \in [\nu, \psi]. \quad (5.2)$$

Оскільки $a > 0$, то з формули (5.2) випливає, що похідна добутку $\tilde{\varphi}(\Omega)\Omega$ за величиною Ω менша за одиницю. Тобто, нерівність (1.10) не порушено.

Сталі τ , ν і ψ такі:

$$\tau = 0,815 \cdot 10^3 \text{ Па}^{1/2}; \quad \nu = 0,325 \cdot 10^3 \text{ Па}^{1/2}; \quad \psi = 9,350 \cdot 10^3 \text{ Па}^{1/2}.$$

Залучаючи формулу (1.14), визначаємо коефіцієнт a з формули (5.1):

$$a = 0,111 \cdot 10^3 \text{ Па}^{1/2}.$$

Скалярну функцію $\tilde{f}(\nu)$ записуємо з урахуванням перших із формул (1.22):

$$\tilde{f}(\nu) = b_{k_1} \nu^{k_1} + b_{k_2} \nu^{k_2}, \quad (5.3)$$

де k_1 і k_2 – деякі числа ($1 < k_1 < k_2$).

Залучаючи другі з формул (1.22), визначаємо коефіцієнти b_{k_1} та b_{k_2} з формули (5.3):

$$b_{k_1} = \frac{k_2 + m\eta}{(k_2 - k_1)\eta^{k_1}}; \quad b_{k_2} = \frac{k_1 + m\eta}{(k_1 - k_2)\eta^{k_2}}. \quad (5.4)$$

Враховуючи формули (5.3) і (5.4), знаходимо

$$\int [1 - \tilde{f}(\nu)] d\nu = \left\{ 1 - \frac{1}{k_1 - k_2} \left[\frac{m\eta - k_2}{k_1 + 1} \left(\frac{\nu}{\eta} \right)^{k_1} + \frac{k_1 - m\eta}{k_2 + 1} \left(\frac{\nu}{\eta} \right)^{k_2} \right] \right\} \nu. \quad (5.5)$$

Згідно з формулою (1.29), стала інтегрування дорівнює нулю.

У відповідності до формули (5.5),

$$\int [1 - \tilde{f}(\nu)] d\nu = \frac{(k_1 k_2 + m\eta)\eta}{(k_1 + 1)(k_2 + 1)} \quad (\nu = \eta). \quad (5.6)$$

Користуючись формулою (5.6), перетворюємо формулу (1.30) до вигляду

$$\omega = P_o \frac{(k_1 k_2 + m\eta)\eta}{(k_1 + 1)(k_2 + 1)}. \quad (5.7)$$

Як видно з формули (5.7), зі збільшенням сталих m і η ставатиме більшою питомою енергія ω . Прийнято, що $k_1 = 2$; $k_2 = 3$.

Згідно з формулами (5.3) і (5.4), скалярна функція $\tilde{f}(\nu)$ містить дві сталі (m і η). Кожній сталій надавали кілька значень.

Розміри четвертої частини тіла в напрямках осей x^1, x^2 , позначені $s_{(1)}$, $s_{(2)}$, були такими:

$$s_{(1)} = 6,0 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \quad s_{(2)} = 3,0 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Координату x^2 кінця тріщини (точки A) записано як x_a^2 , а кінця зони передруйнування (точки B) – як x_b^2 (рис. 5).

Задано, що

$$x_a^2 = 1,30 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \quad x_b^2 = 1,42 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Звернемось до рис. 5. Вектор напруження \mathbf{P} у точках на верхній та на боковій поверхнях тіла, а також у точках на верхній поверхні тріщини записано наступним чином:

$$\mathbf{P} \Big|_{\left(\begin{smallmatrix} x^1 \\ x^2 \\ i \\ j \end{smallmatrix} \right)} \equiv \begin{cases} \mathbf{P}_{(1)} \Big|_{\left(\begin{smallmatrix} x^1 \\ x^2 \\ i \\ j \end{smallmatrix} \right)} & (i = d, j = 2, \dots, e-1); \\ \mathbf{P}_{(2)} \Big|_{\left(\begin{smallmatrix} x^1 \\ x^2 \\ i \\ j \end{smallmatrix} \right)} & (i = 2, \dots, d-1, j = e); \\ \mathbf{P}_{(3)} \Big|_{\left(\begin{smallmatrix} x^1 \\ x^2 \\ i \\ j \end{smallmatrix} \right)} & (i = 2, j = 2, \dots, a-1). \end{cases}$$

Припустимо, що уведені вектори напруження не залежать від координат x^1, x^2 . Тобто,

$$\mathbf{P}_{(1)} \Big|_{\left(\begin{smallmatrix} x^1 \\ x^2 \\ i \\ j \end{smallmatrix} \right)} = \mathbf{P}_{(1)}; \quad \mathbf{P}_{(2)} \Big|_{\left(\begin{smallmatrix} x^1 \\ x^2 \\ i \\ j \end{smallmatrix} \right)} = \mathbf{P}_{(2)}; \quad \mathbf{P}_{(3)} \Big|_{\left(\begin{smallmatrix} x^1 \\ x^2 \\ i \\ j \end{smallmatrix} \right)} = \mathbf{P}_{(3)}.$$

Компоненти векторів напруження $\mathbf{P}_{(1)}$, $\mathbf{P}_{(2)}$, $\mathbf{P}_{(3)}$ були такими:

$$P_{(1)}^1 > 0, P_{(1)}^2 = 0; \quad P_{(2)}^1 = 0, P_{(2)}^2 = 0; \quad P_{(3)}^1 = 0, P_{(3)}^2 = 0.$$

Звісно, вектор напруження \mathbf{P} у точках на поверхні розрізу залежатиме від координати x^2 . Єдину ненульову компоненту цього вектора обчислювали за рівнянням (3.6).

Зауважимо, що зміщення однієї відносно іншої споріднених точок на поверхнях розрізу (модуль v вектора зміщення \mathbf{v}) буде нескінченно малим, якщо ці точки розташовані на нескінченно малій відстані від кінця розрізу (точки B). При цьому скалярна функція $\tilde{f}(v)$ буде нескінченно малою.

Звертаючись до рівняння (3.6) та нехтуючи скалярною функцією $\tilde{f}(v)$, для компоненти P^1 вектора напруження \mathbf{P} отримаємо:

$$P^1 = -P_o. \quad (5.8)$$

Для компонент n_1, n_2 одиничного вектора \mathbf{n} зовнішньої нормалі до верхньої поверхні розрізу маємо:

$$n_1 = -1; \quad n_2 = 0.$$

Враховуючи це, перетворюємо першу із умов (2.22) до вигляду

$$P^1 = -S^{11}. \quad (5.9)$$

Підставляючи в (5.8) компоненту вектора напруження з умови (5.9), отримуємо

$$S^{11} = P_o. \quad (5.10)$$

Розв'язуючи крайову задачу, вимагали, щоб компонента S^{11} тензора напружень \mathbf{S} у точці B теж задовольняла рівності (5.10).

Зазначимо, що величину P_o та компоненту $P_{(1)}^1$ визначали в процесі розв'язання крайової задачі.

Спочатку величині P_o і компоненті $P_{(1)}^1$ надавали деякі значення.

Звертаючись до системи (4.4), знаходили змінні y_1, \dots, y_n . Здійснювали це методом послідовних наближень, викладеним в статті [14].

Так, в першому наближенні приймали, що $\tilde{\varphi}(\Omega) = 0$. При цьому, згідно з формулами (4.7) й рівняннями (4.8),

$$\underline{Q}^1 \left| \begin{matrix} x^1, x^2 \\ i, j \end{matrix} \right. = 0; \quad \underline{Q}^2 \left| \begin{matrix} x^1, x^2 \\ i, j \end{matrix} \right. = 0,$$

а, згідно з формулами (2.24),

$$R^1 \left| \begin{matrix} x^1, x^2 \\ i, j \end{matrix} \right. = 0; \quad R^2 \left| \begin{matrix} x^1, x^2 \\ i, j \end{matrix} \right. = 0.$$

Окрім того, в першому наближенні приймали, що $\tilde{f}(v) = 0$.

В кожному наступному наближенні, одному із 89-ти наближень, скалярну функцію $\tilde{\varphi}(\Omega)$, величини $\underline{Q}^1 \left| \begin{matrix} x^1, x^2 \\ i, j \end{matrix} \right.$, $\underline{Q}^2 \left| \begin{matrix} x^1, x^2 \\ i, j \end{matrix} \right.$ і $R^1 \left| \begin{matrix} x^1, x^2 \\ i, j \end{matrix} \right.$, $R^2 \left| \begin{matrix} x^1, x^2 \\ i, j \end{matrix} \right.$, скалярну функцію $\tilde{f}(v)$ обчислювали, використовуючи розв'язок системи (4.4) в попередньому наближенні й ураховуючи позначення (4.2) та формули (4.3).

Скалярну функцію $\tilde{\varphi}(\Omega)$ обчислювали за формулою (5.1), враховуючи формулу (1.5), перший із інваріантів (2.8), інваріант (2.13) та вираз (2.15).

Величини $\underline{Q}^1 \left| \begin{matrix} x^1, x^2 \\ i, j \end{matrix} \right.$, $\underline{Q}^2 \left| \begin{matrix} x^1, x^2 \\ i, j \end{matrix} \right.$ і $R^1 \left| \begin{matrix} x^1, x^2 \\ i, j \end{matrix} \right.$, $R^2 \left| \begin{matrix} x^1, x^2 \\ i, j \end{matrix} \right.$ обчислювали за формулами (4.7), рівняннями (4.8) й формулами (2.24), ураховуючи вираз (2.15).

Скалярну функцію $\tilde{f}(v)$ обчислювали за формулою (5.2), ураховуючи формули (5.3), а також формули (3.7) і (3.8).

В останньому наближенні за першим із рівнянь (2.17) обчислювали, враховуючи вираз (2.15), компоненту S^{11} тензора напружень S у точці B . Якщо згадана компонента не задовольняла рівності (5.4), то величину P_o коригували, і всю процедуру повторювали.

Нарешті, перевіряли дотримання в точці B критерію (5.5). Якщо це не мало місця, то компоненту $P_{(1)}^1$ змінювали і усю процедуру повторювали.

§6. Аналіз отриманих результатів.

Опрацьовуючи розв'язки крайової задачі, з'ясуємо, як від сталих m і η зі скалярної функції $\tilde{f}(v)$ залежать компонента $P_{(1)}^1$ вектора напруження $P_{(1)}$ у точках на верхній поверхні тіла, питома енергія руйнування ω , а також компонента P^1 вектора напруження P у точках на верхній поверхні розрізу й компонента u_1 вектора переміщення u у точках на верхній поверхні розрізу. Окрім того, виявимо, як зазначені вище сталі впливають на конфігурацію зони нелінійності.

Вкажемо, що, згідно з рівнянням (5.8) і рівністю (5.10), компонента S^{11} тензора напружень S у точках на верхній поверхні розрізу дорівнює за абсолютною величиною компоненті P^1 . Слід зазначити, що для верхньої поверхні розрізу $x^1 = 0$.

Сталій m було надано такі значення:

$$1 \quad -0,1 \cdot 10^5 \text{ м}^{-1}; \quad 2 \quad -0,2 \cdot 10^5 \text{ м}^{-1}; \quad 3 \quad -0,3 \cdot 10^5 \text{ м}^{-1}.$$

А стала η становила $5,0 \cdot 10^{-5}$ м.

На рис. 7 представлено графіки скалярної функції $\tilde{f}(v)$, побудовані з використанням наведених значень сталої m .

Отже, зі збільшенням сталої m (з $0,1 \cdot 10^5 \text{ м}^{-1}$ (крива 1) до $0,3 \cdot 10^5 \text{ м}^{-1}$ (крива 3)) трохи понижується значення скалярної функції $\tilde{f}(v)$ (для будь-якого проміжного значення її аргументу). Тому має, згідно з рівнянням (3.6), трохи зменшуватись (за умови, що величина P_o змінюється слабо) компонента P^1 вектора напруження \mathbf{P} у точках на верхній поверхні розрізу. Внаслідок цього трохи збільшуватиметься, згідно з умовою (5.9), компонента S^{11} тензора напружень \mathbf{S} у точках на верхній поверхні розрізу. Це означає, що зі збільшенням сталої m має трохи збільшуватись (для додержання критерію (1.16) у кінці розрізу) компонента $P_{(1)}^1$ вектора напруження $\mathbf{P}_{(1)}$ у точках на верхній поверхні тіла.

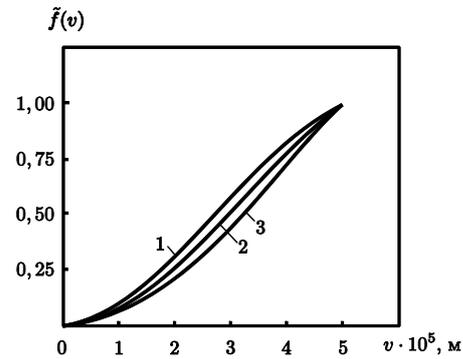


Рис. 7

В табл. 1 представлено значення P_o й $P_{(1)}^1$, а також ω , установлені з використанням наведених значень сталих m та η .

Таблиця 1

$m \cdot 10^{-5}, \text{ м}^{-1}$	$P_o \cdot 10^{-8}, \text{ Па}$	$P_{(1)}^1 \cdot 10^{-7}, \text{ Па}$	$\omega \cdot 10^{-3}, \text{ Н} \cdot \text{ м}^{-1}$
-0,1	2,0003	6,4854	5,4174
-0,2	2,0113	6,6538	5,8662
-0,3	2,0259	6,8242	6,3309

Таким чином, зі зменшенням сталої m з $-0,1 \cdot 10^5 \text{ м}^{-1}$ до $-0,3 \cdot 10^5 \text{ м}^{-1}$ майже не змінюється величина P_o та трохи збільшується компонента $P_{(1)}^1$ (з $6,4854 \cdot 10^{-8}$ Па до $6,8242 \cdot 10^{-8}$ Па). Разом з цим, значно підвищується питома енергія руйнування ω (з $5,4174 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{ м}^{-1}$ до $6,3309 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{ м}^{-1}$). Тобто, руйнування тіла потребуватиме дедалі більше енергії.

В табл. 2 представлено значення u_1 та S^{11} (верхні та нижні значення, відповідно), установлені з використанням наведених значень сталих m та η .

Таблиця 2

$m \cdot 10^{-5}, \text{ м}^{-1}$	$x^2 \cdot 10^2, \text{ м}$						
	1,30	1,32	1,34	1,36	1,38	1,40	1,42
-0,1	1,9732	1,7536	1,4894	1,1791	0,8180	0,4404	0
	0,3605	0,5755	0,8600	1,2025	1,5696	1,8594	2,0003
-0,2	2,0445	1,8025	1,5154	1,1867	0,8138	0,4351	0
	0,4213	0,6742	0,9813	1,3197	1,6539	1,8972	2,0113
-0,3	2,1330	1,8641	1,5492	1,1976	0,8098	0,4294	0
	0,4437	0,7569	1,1004	1,4395	1,7406	1,9372	2,0259

За даними табл. 2 побудовано графіки, які ілюструють вплив сталої m на компоненту u_1 вектора переміщення \mathbf{u} (рис. 8, *a*) та на компоненту S^{11} тензора напружень \mathbf{S} (рис. 8, *б*) у точках, що належать до верхньої поверхні розрізу.

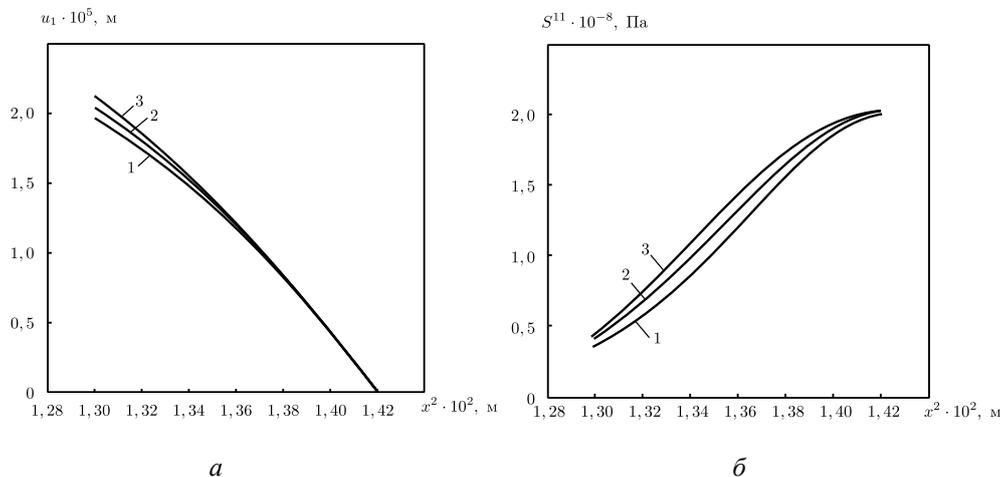


Рис. 8

Таким чином, зі збільшенням сталої m компонента u_1 вектора переміщення \mathbf{u} у точках, для яких координата x^2 становить $1,30 \cdot 10^{-2}$ м, ..., $1,36 \cdot 10^{-2}$ м, збільшується, а у точках, для яких координата x^2 становить $1,38 \cdot 10^{-2}$ м і $1,40 \cdot 10^{-2}$ м, зменшується.

Зауважимо також, що зі зменшенням сталої m компонента S^{11} тензора напружень \mathbf{S} у точках, для яких координата x^2 становить $1,30 \cdot 10^{-2}$ м, ..., $1,40 \cdot 10^{-2}$ м трохи збільшується.

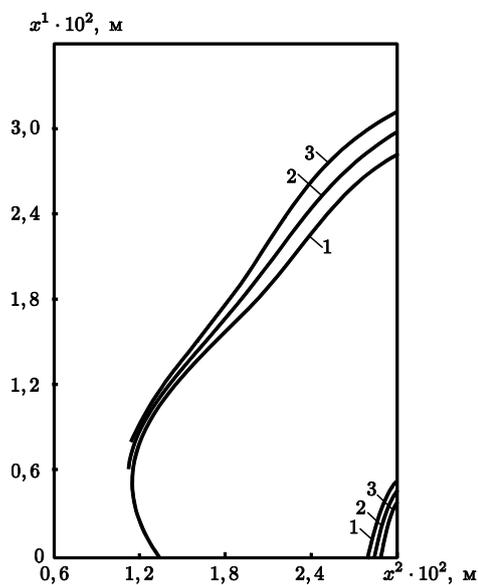


Рис. 9

За виявленими (для кожного із значень сталої m і значення сталої η) точками, у яких додержується критерій (1.15), побудовано межі зони нелінійності, показані на рис. 9.

Варто нагадати, що зі збільшенням сталої m трохи збільшується компонента $P_{(1)}^1$ вектора напруження $\mathbf{P}_{(1)}$ у точках на верхній поверхні тіла. Через це трохи розширюється та змінює форму зона нелінійності.

Сталій η було надано такі значення:

$$1 - 3,6 \cdot 10^{-5} \text{ м}; \quad 2 - 4,0 \cdot 10^{-5} \text{ м}; \quad 3 - 4,4 \cdot 10^{-5} \text{ м}; \\ 4 - 4,8 \cdot 10^{-5} \text{ м}; \quad 5 - 5,2 \cdot 10^{-5} \text{ м},$$

а стала m становила $-0,2 \cdot 10^5 \text{ м}^{-1}$.

На рис. 10 показано графіки скалярної функції $\tilde{f}(v)$, побудовані для кожного із значень сталої η і значення сталої m .

Отже, зі збільшенням сталої η (з $3,6 \cdot 10^{-5}$ м до $5,2 \cdot 10^{-5}$ м) істотно понижується значення скалярної функції $\tilde{f}(v)$ (для будь-якого проміжного значення її аргументу).

Через те, згідно з рівнянням (3.6), має істотно зменшуватись (за умови, що величина P_o змінюється слабо) компонента P^1 вектора напруження \mathbf{P} у точках на верхній поверхні розрізу. В результаті істотно збільшуватиметься, згідно з умовою (5.9), компонента S^{11} тензора напружень \mathbf{S} у точках на верхній поверхні розрізу. Це означає, що зі збільшенням сталої η має істотно збільшуватись (для додержання критерію (1.16) у кінці розрізу) компонента $P_{(1)}^1$ вектора напруження $\mathbf{P}_{(1)}$ у точках на верхній поверхні тіла.

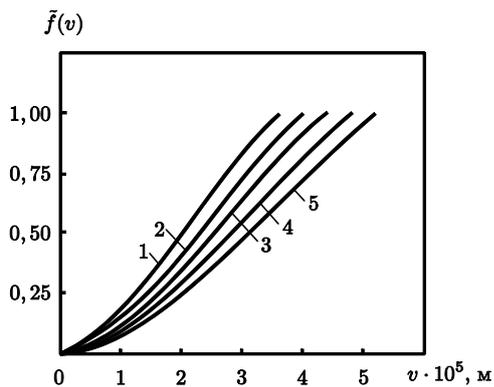


Рис. 10

В табл. 3 представлено значення P_o , $P_{(1)}^1$, а також ω , установлені для кожного із значень сталої η і значення сталої m .

Таблиця 3

$\eta \cdot 10^5, \text{м}$	$P_o \cdot 10^{-8}, \text{Па}$	$P_{(1)}^1 \cdot 10^{-7}, \text{Па}$	$\omega \cdot 10^{-3}, \text{Н} \cdot \text{м}^{-1}$
3,6	1,9745	5,8742	3,9805
4,0	1,9866	6,1328	4,5029
4,4	1,9970	6,3605	5,0377
4,8	2,0066	6,5618	5,5863
5,2	2,0160	6,7408	6,1501

Таким чином, зі збільшенням сталої η (з $3,6 \cdot 10^{-5} \text{м}$ до $5,2 \cdot 10^{-5} \text{м}$) майже не змінюється величина P_o та істотно збільшується компонента $P_{(1)}^1$ (з $5,8742 \cdot 10^{-8} \text{Па}$ до $6,7408 \cdot 10^{-8} \text{Па}$). До того ж, набагато підвищується питома енергія руйнування ω (з $3,9805 \cdot 10^3 \text{Н} \cdot \text{м}^{-1}$ до $6,1501 \cdot 10^3 \text{Н} \cdot \text{м}^{-1}$). Тобто, руйнування тіла потребуватиме щодалі більше енергії.

В табл. 4 представлено значення u_1 та S^{11} (верхні та нижні значення, відповідно), установлені для кожного із значень сталої η і значення сталої m .

Таблиця 4

$\eta \cdot 10^5, \text{м}$	$x^2 \cdot 10^2, \text{м}$						
	1,30	1,32	1,34	1,36	1,38	1,40	1,42
3,6	1,7889	1,6262	1,4223	1,1624	0,8328	0,4577	0
	0,0092	0,1642	0,4112	0,7783	1,2611	1,7235	1,9745
4,0	1,8686	1,6842	1,4553	1,1726	0,8277	0,4496	0
	0,1163	0,3116	0,5917	0,9651	1,4067	1,7907	1,9866
4,4	1,9426	1,7355	1,4824	1,1796	0,8222	0,4431	0
	0,2364	0,4609	0,7595	1,1247	1,5219	1,8410	1,9970
4,8	2,0117	1,7813	1,5053	1,1847	0,8166	0,4375	0
	0,3598	0,6051	0,9114	1,2600	1,6143	1,8804	2,0066
5,2	2,0763	1,8228	1,5249	1,1884	0,8111	0,4328	0
	0,4818	0,7408	1,0472	1,3748	1,6897	1,9124	2,0160

За даними табл. 4 побудовано графіки, котрі ілюструють, як від сталої η залежать компонента u_1 вектора переміщення \mathbf{u} (рис. 11, а) та компонента S^{11} тензора напружень \mathbf{S} (рис. 11, б) в точках, що належать до верхньої поверхні розрізу.

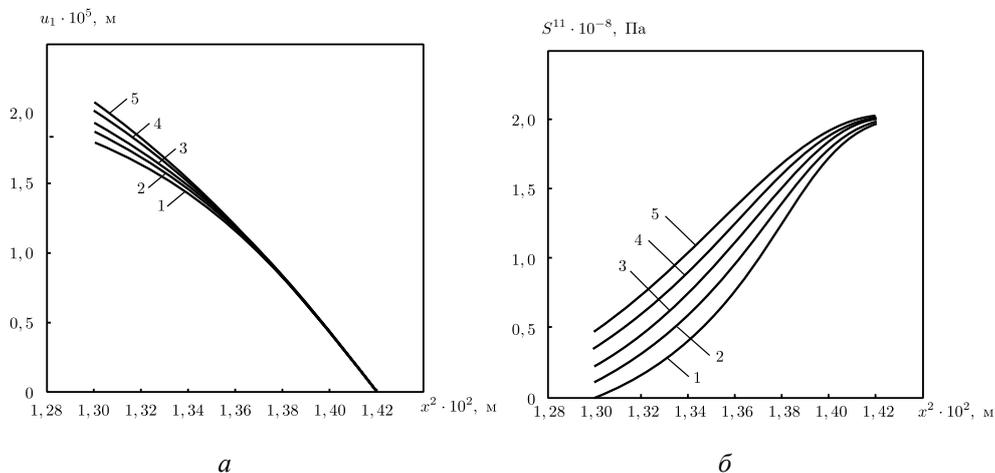


Рис. 11

Таким чином, зі збільшенням сталої η компонента u_1 вектора переміщення \mathbf{u} у точках, для яких координата x^2 становить $1,30 \cdot 10^{-2}$ м, ..., $1,36 \cdot 10^{-2}$ м, збільшується,

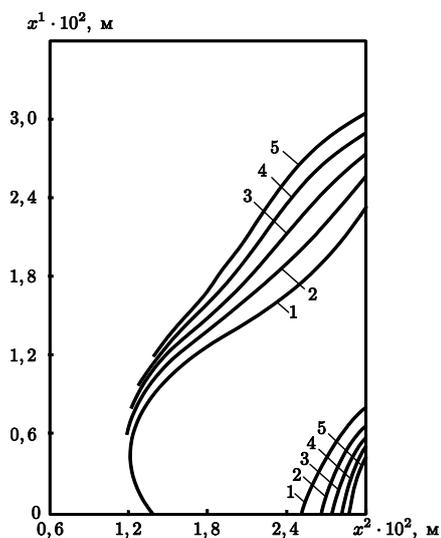


Рис. 12

а у точках, для яких координата x^2 становить $1,38 \cdot 10^{-2}$ м і $1,40 \cdot 10^{-2}$ м, зменшується.

Зауважимо також, що зі збільшенням сталої η компонента S^{11} тензора напружень \mathbf{S} у точках, для яких координата x^2 становить $1,30 \cdot 10^{-2}$ м, ..., $1,40 \cdot 10^{-2}$ м, істотно збільшується.

За виявленими (для кожного із значень сталої η і значення сталої m) точками, у яких виконується критерій (1.15), побудовано межі зони нелінійності, зображені на рис. 12.

Треба нагадати, що зі збільшенням сталої η істотно збільшується компонента $P_{(1)}^1$ вектора напруження $\mathbf{P}_{(1)}$ у точках на верхній поверхні тіла. У зв'язку з цим істотно розширюється та змінює форму зона нелінійності.

§7. Додаткові відомості.

Торкнемось питання визначення сталих m і η зі скалярної функції $\tilde{f}(v)$. Певна річ, для цього будуть потрібні дані експерименту. Для експерименту залучимо тіло, розглянуте в числовому прикладі. Отже, відомі розміри тіла та довжина тріщини.

Нехай до верхньої та до нижньої поверхонь тіла прикладені вектори напруження \mathbf{P}_+ і \mathbf{P}_- .

Вважатимемо, що серед компонент цих векторів напруження не дорівнюють нулю лише компоненти P_+^1 і P_-^1 .

Прикладаючи до тіла сили, доб'ємось його граничної рівноваги й виміряємо довжину зони передруйнування.

Потім за модулем сил знайдемо модуль P векторів напруження P_+ і P_- . Згідно з першою із формул (1.18) та рівностями (2.1), цей модуль дорівнюватиме абсолютному значенню $|P^1|$ компонент P_+^1 і P_-^1 .

Тепер, використовуючи дані експерименту, можна теоретично визначити сталі m і η .

Скориставшись рівнянням (3.6), розв'яжемо крайову задачу про граничну рівновагу залученого тіла. Зосередимо увагу на четвертій частині тіла (рис. 4).

Звісно, довжина розрізу повинна дорівнювати довжині зони передруйнування, відомій з експерименту.

Зрозуміло, компоненти $P_{(1)}^1$ вектора напруження $P_{(1)}$ у точках на верхній поверхні тіла надамо значення, отримане на основі даних експерименту.

При розв'язанні крайової задачі будемо вимагати, щоб у кінці тріщини (точці A) виконувалася критерій (1.23), а у кінці розрізу (точці B) виконувалася рівність (5.10) та критерій (1.16).

Неодноразово розв'язуючи крайову задачу, будемо кожного разу надавати інші значення величині P_0 , а також сталим m і η . Шуканими будуть ті значення, для котрих виконуватимуться (усі разом) у точці A – критерій (1.23), а у точці B – рівність (5.10) та критерій (1.16).

Висновки.

У компонентах вектора переміщення сформульовано першу основну задачу про рівновагу нелінійного ортотропного тіла з внутрішньою тріщиною нормального відриву, біля кожного кінця якої існує зона передруйнування. Для відтворення стану цієї зони залучено інваріантні рівняння. Вони побудовані у рамках уявлення, що зона передруйнування може бути представлена у вигляді розкритого розрізу, до поверхонь якого прикладений деякий вектор напруження. У цих рівняннях фігурує скалярна функція з двома сталими.

В результаті багаторазового розв'язання крайової задачі з'ясовано, що зі збільшенням зазначених вище сталих збільшується єдина ненульова компонента вектора напруження у точках на поверхнях тіла і підвищується питома енергія руйнування, однак зменшується єдина ненульова компонента вектора напруження у точках на поверхнях розрізу (тобто, збільшується відповідна компонента тензора напружень у цих точках).

Виявлено, як зі збільшенням зазначених вище сталих відбувається трансформація (розширення та змінення форми) зони нелінійності, що примикає до кожного кінця тріщини.

Запропоновано також експериментально-теоретичний метод визначення зазначених вище сталих.

РЕЗЮМЕ. Для випадку плоского напруженого стану сформульовано (в компонентах вектора переміщення) першу основну задачу про рівновагу нелінійного ортотропного тіла з внутрішньою тріщиною нормального відриву. Припускається, що біля кожного кінця тріщини існує зона передруйнування. Використано інваріантні рівняння, які побудовано на припущенні, що зону передруйнування можна змоделювати відкритим розрізом із заданим вектором напружень на його поверхні. Стан зони передруйнування відтворено із залученням рівнянь, в яких фігурує скалярна функція з двома сталими. В результаті розв'язування крайової задачі з'ясовано, як від зазначених вище сталих залежать єдина ненульова компонента вектора напруження у точках на поверхнях тіла, питома енергія руйнування, а також єдина ненульова компонента вектора напруження у точках на поверхнях розрізу й розкриття розрізу. Виявлено, як зазначені вище сталі впливають на конфігурацію зони нелінійності, що примикає до кожного кінця тріщини. Запропоновано експериментально-теоретичний метод визначення зазначених вище сталих.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: нелінійне пружне ортотропне тіло, внутрішня тріщина, зона передруйнування, крайова задача.

1. *Богданова О.С., Каминский А.А., Курчаков Е.Е.* О зоне предразрушения возле фронта произвольной трещины в твердом теле // Доп. НАН України. – 2017. – № 5. – С. 25 – 33.
2. *Ильюшин А.А.* Пластичность. Основы общей математической теории. – Москва: Изд-во АН СССР, 1963. – 271 с.
3. *Кильчевский Н.А.* Основы тензорного исчисления с приложениями к механике. – Киев: Наук. думка, 1972. – 148 с.
4. *Курчаков Е.Е.* Исследование связи деформаций с напряжениями для нелинейной анизотропной среды // Прикл. механика. – 1979. – 15, № 9. – С. 19 – 24.
5. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. – Москва: Изд-во «Наука», 1973. – 536 с.
6. *Филоненко-Бородич М.М.* Теория упругости. – Москва: Физматгиз, 1969. – 364 с.
7. *Banks-Sills L., Travitzky N., Ashkenazi D., Eliasi R.* A methodology for measuring interface fracture properties of composite materials // Int. J. Fract. – 1999. – 99, N 3. – P. 143 – 160.
8. *Ford H., Alexander J.M.* Advanced Mechanics of Materials. – London: Longmans, 1963. – 672 p.
9. *Horgan C.O., Murphy J.G.* Poynting and Reverse Poynting Effects in Soft Materials // Soft Matter. – 2017. – 13. – P. 4916 – 4923.
10. *Jones R.M.* Deformation Theory of Plasticity – Blacksburg: Bull Ridge Pub., 2009. – 622 p.
11. *Kacahnov L.M.* Fundamentals of the Theory of Plasticity. – New York: Dover Publications, 2004. – 512 p.
12. *Kaminsky A.A., Bogdanova O.S.* Long-Term Crack-Resistance of Orthotropic Viscoelastic Plate under Biaxial Loading // Int. Appl. Mech. – 1995. – 31, N 9. – P. 747 – 753.
13. *Kaminsky A.O., Kurchakov E.E.* Tensor-Nonlinear Constitutive Equations for an Elastic Body with Primary Anisotropy // Int. Appl. Mech. – 2022. – 58, N 2. – P. 154 – 159.
14. *Kaminsky A.O., Kurchakov E.E., Chornoivan Y. O.* Boundary-Value Problems of Fracture Mechanics for a Nonlinear Anisotropic Body // Int. Appl. Mech. – 2022. – 58, N 3. – P. 243 – 279.
15. *Kaufman M.* Principles of Thermodynamics. – Boca Raton: CRC Press, 2019. – 408 p.
16. *Love A.* Treatise on Mathematical Theory of Elasticity. – Cambridge: University Press, 2013. – 622 p.
17. *Maugin G.A.* The Thermomechanics of Plasticity and Fracture. – Cambridge: University Press, 1992. – 350 p.
18. *Morton A.S., Beckett P.J.* Basic Thermodynamics. – New York: Butterworths, 1969. – 300 p.
19. *Needleman A.* A Continuum Model for Void Nucleation by Inclusion Debonding // J. Appl. Mech. – 1987. – 54, N 3. – P. 525 – 531.
20. *Park K., Paulino G.H.* Cohesive Zone Models: A Critical Review of Traction-Separation Relationships Across Fracture Surfaces // Appl. Mech. Reviews. – 2011. – 64, N 11. – P. 1 – 20.
21. *Reiner M.* A mathematical theory of dilatancy // American J. of Mathematics. – 1945. – 67, № 3. – P. 350 – 362.
22. *Rowe D.M.* CRC Handbook of Thermoelectrics. – Boca Raton: CRC Press, 2017. – 701 p.
23. *Savin G.N., Kaminskii A.A.* The Growth of Cracks During the Failure of Hard Polymers // Sov. Appl. Mech. – 1967. – 3, N 9. – P. 22 – 25.
24. *Schweickert E., Mihai A., Martin R.J., Neff P.* A note on non-homogeneous deformations with homogeneous Cauchy stress for a strictly rank-one convex energy in isotropic hyperelasticity // Int. J. Non-Lin. Mech. – 2020. – 119. – P. 103282.
25. *Spencer A.J.M.* Continuum Mechanics. – New York: Dover Publications, 2012. – 192 p.
26. *Truesdell C., Noll W.* The Non-Linear Field Theories of Mechanics. – Berlin: Springer-Verlag, 2004. – 602 p.
27. *Tvergaard V., Hutchinson J.W.* The Influence of Plasticity on Mixed Mode Interface Toughness // J. Mech. Phys. Solids. – 1993. – 41, N 6. – P. 1119 – 1135.
28. *Wells A.A.* Critical tip opening displacement as fracture criterion // Proc. Crack Propagation Symp., Cranfield. – 1961. – 1. – P. 210 – 221.

Надійшла 22.06.2023

Затверджена до друку 12.12.2023