

П. З. Луговий, Ю. В. Скосаренко,
К. Е. Котенко, С. П. Орленко

ДИНАМІКА ТРИШАРОВИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ
ОБОЛОНОК З НЕОДНОРІДНИМ ЗАПОВНЮВАЧЕМ
ПРИ ЕКСПЛУАТАЦІЙНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: plugovu@inmtech.kiev.ua*

Abstract. An influence of the action of distributed on the end face and local axisymmetric operational non-stationary loads on the three-layer cylindrical shell elements of missile bodies is studied. An action of the engine is presented in the form of longitudinal forces with time-varying frequency and amplitude applied to the shell end. Local axisymmetric impulse external loads, which are applied along the guide of the cylindrical shell at the location of the rib and between the ribs, are an imitation of the explosion of an elongated cumulative charge of instantaneous action. Since the properties of the materials of the bearing layers, light filler, and reinforcing ribs are different, it is advisable to apply the finite element method. The conducted finite-element modeling of the dynamics of a three-layer structure under operational loads makes it possible to investigate with sufficient reliability the influence of light aggregate and to choose the place of installation of local axisymmetric impulse loads. The numerical results obtained in this work when calculating real objects according to the developed methodology will allow us to obtain recommendations for determining the optimal amount of cumulative charge, sufficient to separate the spent stage of the rocket and maintain its movement along the given course.

Key words: dynamics, three-layer cylindrical element, discrete-inhomogeneous filler, end loading variable in time by frequency and amplitude, local external impulse load, rigid fastening, finite-element method, mechanical phenomena.

Вступ.

Циліндричні оболонкові елементи широко застосовуються як конструктивні складові машин, космічних та літальних апаратів, різних споруд та інших агрегатів. Шаруваті оболонкові конструкції мають ряд суттєвих переваг у порівнянні з однорідними, що вимагає детального дослідження їх динамічної поведінки при експлуатаційних навантаженнях. Саме на етапі проектування конструкції велику роль відіграють чисельно-аналітичні методи теорії шаруватих оболонок, оскільки вони дозволяють теоретично виявити вплив тих чи інших параметрів на динаміку оболонок та прогнозувати шляхи покращення самої конструкції відносно її експлуатаційних характеристик. Тому розвитку теорії і методів розрахунку динаміки і статички таких циліндричних елементів конструкцій приділяється велика увага [2 – 4, 12, 15, 20 – 25]. В роботах [2 – 4, 11, 12, 24] аналітичними методами досліджена поведінка шаруватих циліндричних оболонок при динамічних навантаженнях. Вивчення динаміки тришарових циліндричних оболонок з дискретно-симетричним легким армованим ребрами заповнювачем в роботах [4, 18] проведено методом скінченних елементів. В статтях [15, 16] проаналізована динамічна поведінка циліндричного адаптера на пружній основі при локальних навантаженнях, а в роботі [1] розроблено методику дослідження перехідного процесу вимушених коливань циліндричної оболонки під дією навантаження зі змінною в часі частотою та амплітудою.

Створення прогресивних технологій, об'єктів спеціального призначення і т.д. часто призводить до необхідності розробки конструктивних тришарових оболонкових елементів із заповнювачем ускладненої геометричної структури. При цьому зазначені елементи піддаються динамічним навантаженням різного виду, в тому числі нестационарним. Для таких оболонок проблеми динамічної поведінки вивчені недостатньо [8, 13]. Значна увага приділяється використанню та розвитку аналітичних, скінченно-різницьових і скінченно-елементних методів розв'язування поставлених задач [4]. Проведені дослідження дозволяють правильно вибрати вид рівнянь і методів їх розв'язку при описі динаміки шаруватих оболонок з конструктивними особливостями [17] і тришарових оболонок з неоднорідним заповнювачем [4, 18, 24].

При значній відмінності фізико-механічних параметрів шарів тришарових структур доцільно застосовувати теорії оболонок з використанням незалежних гіпотез для кожного з шарів [8]. В результаті використання легкого заповнювача утворюється спеціальна тришарова структура з досить великою жорсткістю на згин при вигідному співвідношенні міцності і ваги.

У цій роботі розглядається модельний відповідальний елемент у вигляді тришарової циліндричної оболонки симетричної структури з дискретно-симетричним легким армованим ребрами заповнювачем при експлуатаційних нестационарних навантаженнях. Армуючі елементи розташовані на відстанях, які значно перевищують розміри поперечних перетинів армуючих ребер. Властивості матеріалів суміжних шарів досить різні, тому для розрахунків таких оболонкових структур доцільно застосовувати метод скінченних елементів.

§1. Постановка задачі.

В тришарових оболонках, які складаються з двох жорстких несучих шарів і м'якого заповнювача, при нестационарних навантаженнях виникає складний напружено-деформований стан. У більшості випадків заповнювач виготовляється з товстого пінополімеру, а тонкі несучі шари – з металу або композитного ламінату. У цих структурах заповнювач зберігає несучі шари на достатній відстані і передає поперечні нормальні та зсувні навантаження. Розглянемо тришаровий циліндричний елемент загальною товщиною h з легким заповнювачем, армованим дискретними ребрами, який являє собою пружну структуру, що складається з внутрішньої (індекс 1), зовнішньої (індекс 2) несучих оболонок, легкого заповнювача (індекс t) і набору дискретних ребер (індекс j), жорстко з'єднаних з зазначеними несучими оболонками. Для моделювання осесиметричних коливань циліндричних оболонок використаємо ортогональну систему координат x, z . Координатна лінія x на серединній поверхні оболонки загальною товщиною h при $z=0$ збігається з осьюовою лінією; координатна лінія z є прямою, ортогональною до серединної поверхні. Координату z будемо відраховувати в сторону збільшення довжини зовнішньої нормалі до вихідної поверхні (рис. 1).

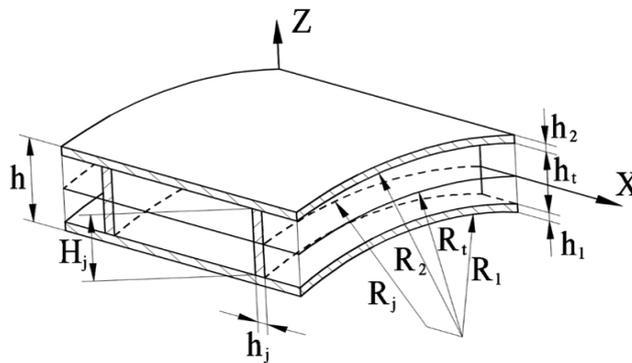


Рис. 1

Присутність легкого пружного матеріалу в порожнинах між ребрами і несучими оболонками створює дискретну неоднорідність ребристого заповнювача. Напружено-деформований стан внутрішньої і зовнішньої несучих оболонок може бути визначений через компоненти узагальненого вектора переміщень $\overline{U}_1 = (u_1^1, u_3^1, \varphi_1^1)^T$ і $\overline{U}_2 = (u_1^2, u_3^2, \varphi_1^2)^T$ [7]. Поля переміщень для легкого заповнювача визначаються узагальненим вектором переміщень $\overline{U}_t = (u_{1t}, u_{3t}, \varphi_{1t})^T$ згідно з моделлю, розробленою в роботі [9]. Деформований стан армуючих ребер, спрямованих вздовж колової координати, визначається узагальненим вектором переміщень $\overline{U}_j = (u_1^j, u_3^j, \varphi_1^j)^T$.

Формули для переміщень u_1^i і u_3^i в тонких несучих оболонках в напрямку x (поздовжній), z (товщина) і t (час) за малих лінійних переміщень запишемо згідно з зсувними гіпотезами Тимошенка [7]:

$$\begin{aligned} u_1^i(x, z, t) &= u_1^i(x, t) + z_i \varphi_1^i(x, t); \\ u_3^i(x, z, t) &= u_3^i(x, t) \quad (i = 1, 2), \end{aligned} \quad (1.1)$$

де z_i – вертикальна координата кожної несучої оболонки і вимірюється вгору від середньої поверхні кожної несучої оболонки; φ_1^i – кут повороту нормалі до середньої поверхні несучих оболонок.

При побудові математичної моделі рівнянь руху тонких несучих шарів використаємо спрощений варіант геометрично нелінійної теорії оболонок і пластин згідно роботи [5]. Кінематичні залежності для несучих оболонок в такому випадку запишуться наступним чином:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^i &= \frac{\partial u_1^i}{\partial x_i} + \frac{1}{2} [\theta_1^i]^2; \quad \varepsilon_{22}^i = \frac{u_3^i}{R^i}; \quad \varepsilon_{13}^i = \frac{\partial u_1^i}{\partial x_i} + \varphi_1^i; \\ \theta_1^i &= \frac{\partial u_3^i}{\partial x_i}; \quad \kappa_{11}^i = \frac{\partial \varphi_1^i}{\partial x_i}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Тут ε_{11}^i , ε_{22}^i , ε_{13}^i , κ_{11}^i – компоненти деформацій серединних поверхонь несучих оболонок.

Циліндричні несучі шари жорстко з'єднані армуючими ребрами по лініях контакту центрів тяжіння ребер з несучими оболонками [14, 19]:

$$\begin{aligned} u_1^j &= u_1^{jk}(x_j) \mp \frac{H_j}{2} \varphi_1^{jk}(x_j); \\ u_3^j &= u_3^{jk}(x_j); \quad \varphi_1^j = \varphi_1^{jk}(x_j) \quad (k = 1, 2), \end{aligned} \quad (1.3)$$

де x_j – координата лінії множин точок проєкцій центрів тяжіння поперечних перерізів j -го ребра на відповідну серединну поверхню несучої оболонки; $h_j^i = 0,5h_i + H_i/2$, h_i ($i = 1, 2$) – товщини циліндричних несучих оболонок; $H_i/2$ – відстань від осі j -го ребра до поверхні гладких оболонок; товщина легкого заповнювача $h_t = H_j$.

При виводі розв'язуючих рівнянь заповнювача опис полів переміщень в заповнювачі виконаємо згідно моделі, наведеної в роботі [9]:

$$u_1^t(x, z, t) = \left(1 + \frac{z_t}{R_t}\right) u_0^t(x, t) + z_t u_1^t(x, t); \quad u_3^t(x, z, t) = u_3^t(x, t). \quad (1.4)$$

За малих деформацій кінематичні залежності для легкого заповнювача в шаруватих оболонках приймемо у вигляді:

$$\varepsilon_{11}^t = \frac{\partial u_0^t}{\partial x} + z \frac{u_1^t}{\partial x}; \quad \varepsilon_{22}^t = \frac{u_3^t}{R_t + z_t}; \quad 2\varepsilon_{13}^t = \left(\frac{\partial u_3^t}{\partial x} \right) + u_1^t, \quad (1.5)$$

де u_0^t , u_1^t , u_3^t – компоненти узагальненого вектора переміщень легкого заповнювача.

При використанні теорії зсуву першого порядку, використана модель, яка передбачає ідеальне сполучення між заповнювачем і несучими оболонками без відриву і проковзування [10]:

$$\begin{cases} u_1^t(z = z_t^1) = u_0^t + \frac{1}{2}(-1)^k h_t \varphi_1^i, & \text{для } i = 1 \rightarrow (k = 0; z_t^1 = -h_t/2); \\ u_3^t = u_3^i, & \text{для } i = 2 \rightarrow (k = 1; z_t^2 = h_t/2). \end{cases} \quad (1.6)$$

Враховуючи вирази для поля переміщень для несучих оболонок (1.1), легкого заповнювача (1.4) і умови міжшарової неперервності переміщень (1.6), виведемо спрощені умови сумісності:

$$u_0^t = \frac{u_0^1 + u_0^2}{2} - \frac{1}{4}(h_2 \varphi_1^2 - h_1 \varphi_1^1); \quad u_1^t = \frac{u_0^1 - u_0^2}{h_t} - \frac{1}{2h_t}(h_2 \varphi_1^2 + h_1 \varphi_1^1); \quad u_3^t = \frac{1}{2}(u_3^1 + u_3^2). \quad (1.7)$$

Для армуючих ребер заповнювача зусилля і моменти обчислюються за формулами:

$$T_{11j} = \int_{F_j} \sigma_{11j} dF_j; \quad Q_{13j} = \int_{F_j} \sigma_{13j} dF_j; \quad M_{11j} = \int_{F_j} z_j \sigma_{11j} dF_j. \quad (1.8)$$

Для виводу рівнянь коливань несучих оболонок і ребристого легкого заповнювача використовується варіаційний принцип стаціонарності Гамільтона – Остроградського [7], згідно якого:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (K - \Pi + A) dt = 0, \quad (1.9)$$

де Π – повна потенціальна енергія пружної системи; K – повна кінетична енергія пружної системи; A – робота зовнішніх сил; t_1 і t_2 – фіксовані моменти часу. При виведенні рівнянь коливань тришарових оболонок з легким заповнювачем незалежному варіюванню підлягають: компоненти переміщень несучих оболонок і заповнювача з легкого матеріалу, а також армуючих ребер жорсткості.

Вирази для повної потенціальної і кінетичної енергії записуються у вигляді:

$$\delta \Pi = \delta \sum_{i=1}^2 \Pi^i + \delta \sum_{j=1}^J \Pi^j + \delta \sum_{S_i} \Pi^t; \quad \delta K = \delta \sum_{i=1}^2 K^i + \delta \sum_{j=1}^J K^j + \delta \sum_{S_i} K^t; \quad (1.10)$$

$$\delta \Pi^i = \int_S \left(T_{11}^i \delta E_{11}^i + T_{22}^i \delta E_{22}^i + \bar{T}_{13}^i \delta E_{13}^i + M_{11}^i \delta \kappa_{11}^i \right) dS; \quad (1.11)$$

$$\delta \Pi^t = \int_{S_i} \left[\int_{-h_t/2}^{h_t/2} \left(T_{11}^t \delta \varepsilon_{11}^t + T_{22}^t \delta \varepsilon_{22}^t + T_{13}^t \delta \varepsilon_{13}^t + M_{11}^t \delta \kappa_{11}^t \right) dz \right] dS_i; \quad (1.12)$$

$$\delta \Pi^j = \int_{L_j} T_{22}^j \delta \varepsilon_{22}^j dL_j; \quad (1.13)$$

$$\delta K^i = \int_S \left[\rho_i h_i \left(\frac{\partial^2 u_1^i}{\partial t^2} \delta u_1^i + \frac{\partial^2 u_3^i}{\partial t^2} \delta u_3^i \right) + \rho_i \frac{h_i^3}{12} \left(\frac{\partial^2 \varphi_1^i}{\partial t^2} \delta \varphi_1^i \right) \right] dS; \quad (1.14)$$

$$\delta K^t = \int_{S_i} \left[\int_{-h_i/2}^{h_i/2} \rho_t h_t \left(\frac{\partial^2 u_0^t}{\partial t^2} \delta u_0^t + \frac{\partial^2 u_1^t}{\partial t^2} \delta u_1^t + \frac{h_t^2}{12} \frac{\partial^2 u_3^t}{\partial t^2} \delta u_3^t \right) dz_t \right] dS_i; \quad (1.15)$$

$$\delta K^j = \int_{L_j} \left[\rho_j F_j \left(\frac{\partial^2 u_1^j}{\partial t^2} \delta u_1^j + \frac{\partial^2 u_3^j}{\partial t^2} \delta u_3^j \right) + \rho_j \left(I_{krj} \frac{\partial^2 \varphi_1^j}{\partial t^2} \delta \varphi_1^j \right) \right] dL_j; \quad (1.16)$$

В рівнянні (1.11) зусилля $\bar{T}_{13}^i = T_{13}^i + T_{11}^i \theta_1$, а в рівнянні (1.16) величини F_j , I_{krj} відповідають геометричним характеристикам поперечних армуючих ребер; ρ_j – густина матеріалу армуючого ребра, ρ_i ($i=1, 2$); ρ_t – густини матеріалів несучих оболонок і легкого заповнювача відповідно.

Відзначимо, що при розрахунку потенціальної і кінетичної енергії для легкого заповнювача в виразах $\delta \Pi^t$ та δK^t інтегрування проводиться за об'ємом, величина якого збільшена на величину обсягу армуючих ребер. Оскільки обсяг армуючих ребер в складі об'єму легкого заповнювача для тришарових оболонок обертаня не перевищує 2–3 %, то цей факт практично не впливає на загальну похибку теорії оболонок. Слід зауважити, що метод скінченних елементів добре зарекомендував себе при розрахунках конструкцій з матеріалів, які мають різні фізико-механічні властивості.

Після стандартних перетворень у варіаційному рівнянні (1.9), з урахуванням співвідношень (1.10) – (1.16), отримаємо дві системи гіперболічних рівнянь руху дев'ятого порядку для тришарового циліндричного елемента з легким ребристим заповнювачем при осесиметричному імпульсному навантаженні і відповідні природні граничні і початкові умови.

$$\frac{\partial T_{11}^i}{\partial x} - \frac{1}{R_i} T_{13}^i = \left(\rho_i h_i + \frac{\rho_t h_t}{3} \right) \frac{\partial^2 u_1^i}{\partial t^2}; \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial \bar{T}_{13}^i}{\partial x} - \frac{T_{22}^i}{R_i} - \frac{1}{R_{t1} h_t} M_{11}^i + \frac{1}{h_t} \frac{\partial M_{13}^i}{\partial x} + P_i \delta \left[(x = x_j), (t = bt_c) \right] = \rho_i h_i \frac{\partial^2 u_3^i}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial M_{11}^i}{\partial x} - T_{13}^i - T_{13}^t = \rho_i \frac{h_i^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1^i}{\partial t^2} \quad (i=1, 2);$$

$$\frac{\partial T_{11}^t}{\partial x} - \frac{1}{R_t} T_{13}^t = \rho_t h_t \frac{\partial^2 u_0^t}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial T_{13}^t}{\partial x} = \rho_t h_t \frac{\partial^2 u_3^t}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial M_{11}^t}{\partial x} - T_{13}^t = \rho_t \frac{h_t^3}{12} \frac{\partial^2 u_1^t}{\partial t^2};$$

$$\left[T_{11}^{i\pm} \right]_j = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{1j}}{\partial t^2}; \quad \left[\bar{T}_{13}^{i\pm} \right]_j = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial t^2};$$

$$\left[M_{11}^{i\pm} \mp h_j T_{11}^{i\pm} \right]_j = \rho_j I_{krj} \frac{\partial^2 \varphi_{1j}}{\partial t^2} \quad (i=1, 2; j=\overline{1, J}).$$

В другому рівнянні системи (1.17) зусилля $\bar{T}_{13}^i = T_{13}^i + T_{11}^i \theta_1$, а в передостанньому зусилля $\left[\bar{T}_{13}^{i\pm} \right]_j = T_{13j}^{i\pm} + T_{11j}^{i\pm} \theta_{1j}$.

Ці системи рівнянь утворюються за рахунок врахування розривних коефіцієнтів «несучі оболонки – армуючі ребра».

На лініях розривів в рівняннях коливань (1.17) величини $[T_{11}^{i\pm}]_j$; $[\bar{T}_{13}^{i\pm}]_j$; $[M_{11}^{i\pm}]_j$ відповідають зусиллям і моментам, які діють на j -ий дискретний елемент з боку несучих оболонок.

У співвідношення (1.11) – (1.13) введено наступні інтегральні характеристики для несучих оболонок (індекс 1 відповідає внутрішній, індекс 2 – зовнішній)

$$T_{11}^i = \int_{-h_i/2}^{h_i/2} \sigma_{11}^i dz_i; \quad T_{22}^i = \int_{-h_i/2}^{h_i/2} \sigma_{22}^i dz_i; \quad M_{11}^i = \int_{-h_i/2}^{h_i/2} z_i \sigma_{11}^i dz_i; \quad \bar{T}_{13}^i = k_s \int_{-h_i/2}^{h_i/2} \bar{\sigma}_{13}^i dz_i, \quad (1.18)$$

а зусилля і моменти для легкого заповнювача напишемо в наступному вигляді:

$$T_{11}^t = \int_{-h_t/2}^{h_t/2} \left(1 + \frac{z_t}{R_t}\right) \sigma_{11}^t dz_t; \quad M_{11}^t = \int_{-h_t/2}^{h_t/2} z_t \left(1 + \frac{z_t}{R_t}\right) \sigma_{11}^t dz_t; \quad T_{13}^t = \int_{-h_t/2}^{h_t/2} \sigma_{13}^t dz_t. \quad (1.19)$$

Для визначення величин компонент зусиль і моментів на лініях розриву для дискретних елементів заповнювача робимо перерахунок на внутрішню і зовнішню поверхні гладких обшивок за такими формулами:

$$T_{11}^j = \int_{F_j} \sigma_{11}^j dF_j; \quad \bar{T}_{13}^j = \int_{F_j} \bar{\sigma}_{13}^j dF_j; \quad M_{11}^j = \int_{F_j} z_j \sigma_{11}^j dF_j. \quad (1.20)$$

Для збільшення ймовірності отримати достовірний і зрозумілий результат скінченно-елементним методом необхідні знання принципів і методів реалізації цього методу, глибоке розуміння механічної поведінки конструкції у застосовуваній області аналізу. Для цього виводяться рівняння руху для кожної конкретної задачі, щоб більш свідомо створити скінченно-елементну модель, адекватну динамічному процесу досліджуваної конструкції. Два основних аспекти динамічного аналізу відрізняють його від статичного аналізу. По-перше, динамічні навантаження накладаються як функції часу. По-друге, ці навантаження, які змінюються з часом, індукують відгук конструкції, який змінюється з часом (переміщення, швидкості, прискорення, сили і напруження). Ця залежність від часу динамічних характеристик робить динамічний аналіз більш складним і більш реалістичним в порівнянні з статичним аналізом.

§2. Числові результати.

Розглядається симетричний тришаровий циліндричний елемент ракетного корпусу, навантажений на вільному торці $x = 0$ вздовж твірної змінно-періодичною силою $T_{11}(0, t)$ і в заданий момент часу bt_c зовнішнім зосередженим ударом по направляючій з координатою $x_j : P\delta[(x_j = aL), (t = bt_c)]$, де x_j і t – просторова і часова координати.

На вільний край ракетного корпусу діє осесиметричне повздовжнє змінно-періодичне навантаження від дії двигуна, вигляд якого описаний згідно роботи [1].

Граничні умови: при $x = 0$

$$T_{11}^i(0, t) = \begin{cases} A \sin \left[\vartheta \frac{t^2}{t_c} \left(1 - \frac{t}{3t_c}\right) \right] & 0 \leq t \leq 3t_c \\ A \sin \vartheta & t > 3t_c \end{cases}, \quad A = 10^6 \text{ Па}, \quad t_c = \frac{L}{c} = 8 \cdot 10^{-5} \text{ с}, \quad (2.1)$$

де c – швидкість пружних хвиль в матеріалі несучих шарів; ϑ – перша власна частота тришарової оболонки; $T_{22}^i(0, t) = 0$; $\varphi_1^i(0, t) = 0$.

При $x = L$ – $u_1^i = u_3^i = \varphi_1^i = 0$, ($i = 1, 2$); жорстке защемлення – початкові умови нульові для несучих шарів при $t = 0$:

$$u_1^i = u_3^i = \varphi_1^i = 0; \quad \frac{\partial u_1^i}{\partial t} = \frac{\partial u_3^i}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1^i}{\partial t} = 0 \quad (i = 1, 2). \quad (2.2)$$

Перший випадок. Зосереджений локальний осесиметричний зовнішній удар діє по направляючій тришаровій циліндричній оболонки в місці установки четвертого армуючого ребра (імітація вибуху подовженого кумулятивного заряду миттєвої дії):

$$P_1 \delta \left[\left(x = \frac{7}{10} L \right), (t = 1, 3t_c) \right] = \begin{cases} A \left(1 - \frac{t}{3t_c} \right) & 0 \leq t \leq t_c \\ 0 & \text{при } t \neq 1, 3t_c; x \neq \frac{7}{10} L \end{cases}. \quad (2.3)$$

Другий випадок. Осесиметричний зосереджений зовнішній удар діє по направляючій оболонки по середині між четвертим і п'ятим ребрами, де $A = 10^8$ Па.

$$P_1 \delta \left[\left(x = \frac{4}{5} L \right), (t = 1, 2t_c) \right] = \begin{cases} A \left(1 - \frac{t}{2t_c} \right) & 0 \leq t \leq t_c \\ 0 & \text{при } t \neq 1, 2t_c; x \neq \frac{4}{5} L \end{cases}. \quad (2.4)$$

Поставлена задача коливань тришарової циліндричної оболонки розв'язана при наступних геометричних та фізико-механічних параметрах $L/h_1 = 400$; $h_1 = h_2 = 0,001$ м; $R_1/h_1 = 100$; $H_j/h_1 = 2$; $F_j = 2 \cdot 10^{-4}$ м²; $E_1^1 = E_2^1 = E_j = 7 \cdot 10^{10}$ Па; $\nu_1^1 = \nu_2^1 = \nu_j = 0,3$; густина $\rho_1 = \rho_2 = \rho_j = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³; $E_1^1 / E_t = 50$; густина $\rho_t = 25$ кг/м³; коефіцієнт Пуассона $\nu_t = 0,27$.

Підкріплюючі елементи розташовані в точках $x_j = [11 + (k-1) \cdot \Delta x]$; $k = 1 \div 5$; $\Delta x = L/80$.

Відповідна початково-крайова задача (1.17), (2.1) – (2.4) розв'язується за допомогою скінченно-елементного методу. Створена адекватна скінченно-елементна модель тришарової циліндричної оболонки (рис. 2) складається із: *a* – зовнішнього несучого шару; *б* – внутрішнього несучого шару; *в* – армуючих ребер і *г* – легкого заповнювача. Модель відображає взаємозв'язок потенціальної енергії деформацій в тілі з потенціалом прикладених сил відповідно системі рівнянь (1.17).

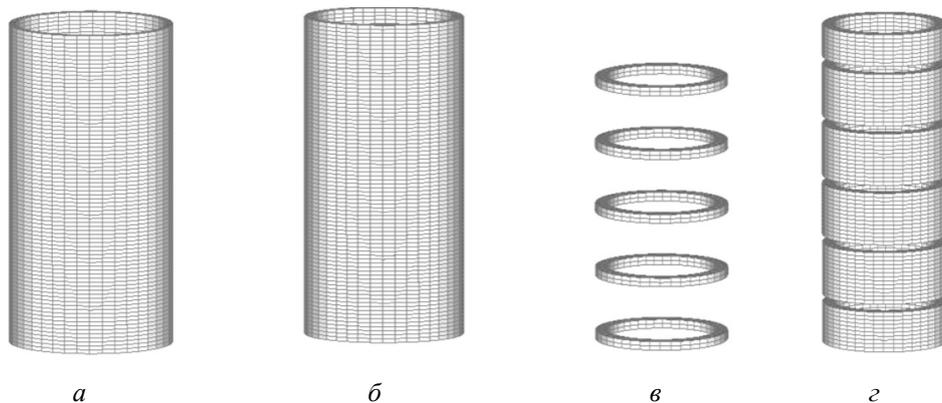


Рис. 2

Скінченно-елементна модель створювалася за використанням тривимірного об'ємного скінченного елемента типу Solid, який по деформативним якостям звуження і викривлення та іншим показникам відповідав вимогам забезпечення розрахункової сітки на скінченно-елементному рівні [6]. У варіанті тришарової циліндричної структури без полімерного заповнювача кількість скінченних елементів складала у внутрішній несучій оболонці 9600 елементів, зовнішній – 9600, а в армуючих ребрах – 1200. Кількість скінченних елементів легкого заповнювача (пінопласту) дорівнювала 8400. Загальна кількість скінченних елементів у моделі без пінопласту складала 20400 елементів і 27280 вузлів. А при наявності пінопласту такі дані дорівнюють: 28800 елементів і 32400 вузлів.

При такій розбивці скінченно-елементної моделі на елементи і вузли забезпечується практична збіжність результатів розрахунків [6].

$$\Pi = E - W, \quad (2.5)$$

де E – потенціальна енергія деформацій, а W – потенціал прикладених сил.

Після розбивки суцільної області на окремі елементи залежність (2.5) матиме наступний вигляд:

$$\Pi = \sum_{e=1}^E (E^{(e)} - W^{(e)}) = \sum_{e=1}^E \pi^{(e)}. \quad (2.6)$$

Глобальна матриця жорсткості і глобальний вектор-стовпець в матричному рівнянні

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad (2.7)$$

записуються наступним чином:

$$[K] = \sum_{e=1}^E [k^{(e)}]; \quad \{F\} = -\sum_{e=1}^E \{f^{(e)}\}.$$

Отримані числові результати дозволяють проводити аналіз напружено-деформованого стану симетричної тришарової пружної структури циліндричного типу в будь-який момент часу (розрахунки проводилися при $0 \leq t \leq 40T$).

Розглянуто два варіанта дії експлуатаційних нестационарних навантажень при граничних умовах (2.1).

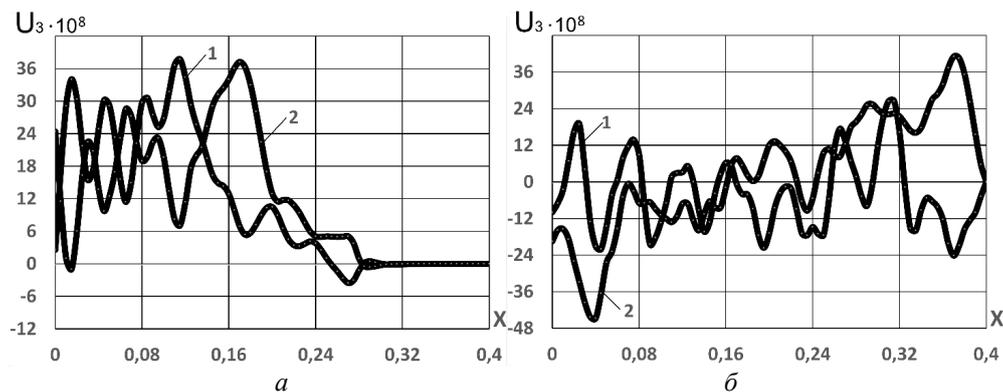


Рис. 3

На графіку рис. 3, *a* наведено розподіл прогинів серединних поверхонь несучих шарів u_3^1 і u_3^2 вздовж твірної оболонки в момент $t = 0,75t_c$ (працює двигун). Тут і в подальших графіках індекс 1 відповідає величинам внутрішнього несучого шару, а індекс 2 – зовнішнього несучого шару.

З рис. 3, *a* випливає, що збурення, які ініціює двигун, ще не пройшли повної довжини оболонки. Рис. 3, *б* демонструє як збурення від двигуна відбиваються від жорстко защемленого торця оболонки.

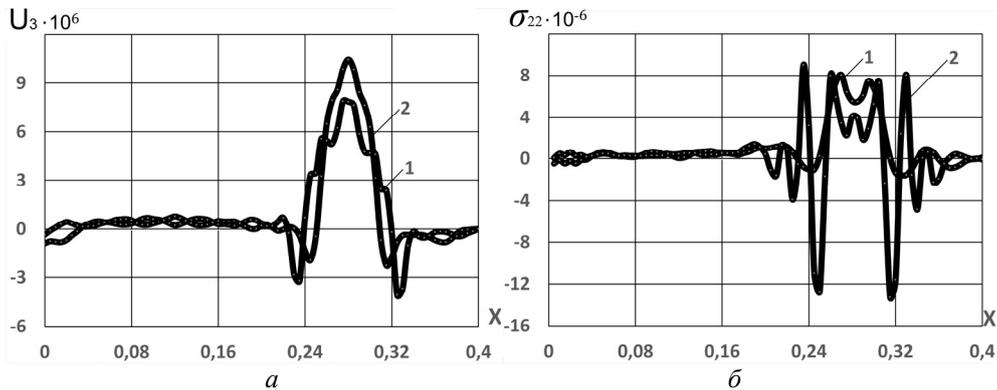


Рис. 4

На рис. 4, *a* наведено залежність максимальних прогинів внутрішнього несучого шару u_3^1 і зовнішнього несучого шару u_3^2 в момент $t = 4,878t_c$ (працює лише синусоїдальне навантаження і зосереджений локальний осесиметричний зовнішній удар по направляючій тришарової циліндричної оболонки (2.3) в місці установки четвертого армуючого ребра. Тут пінопласт відсутній. На рис. 4, *б* наведено залежність максимальних напружень внутрішнього несучого шару σ_{22}^1 і зовнішнього несучого шару σ_{22}^2 в момент $t = 4,878t_c$ (для того ж випадку навантаження).

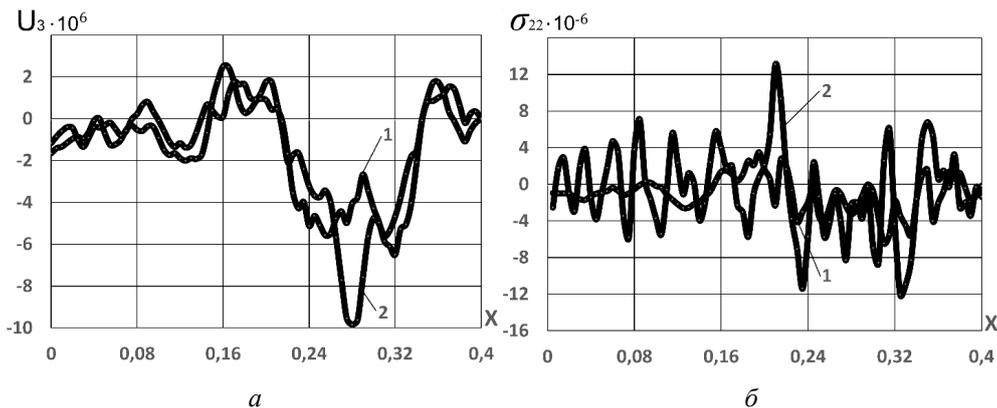


Рис. 5

На рис. 5, *a* наведено залежність максимальних прогинів внутрішнього несучого шару u_3^1 і зовнішнього несучого шару u_3^2 при $t = 5,725t_c$ (працює лише синусоїдальне навантаження і зосереджений локальний осесиметричний зовнішній удар по направляючій тришарової циліндричної оболонки (2.3) в місці установки четвертого армуючого ребра). Властивості пінопласту: $E_1^1 / E_t = 50$. На рис. 5, *б* наведено залежність максимальних напружень внутрішнього несучого шару σ_{22}^1 і зовнішнього несучого шару σ_{22}^2 в момент $t = 5,725t_c$ (для того ж випадку навантаження).

Враховуючи, що вихідна задача є багатопараметричною (в різні моменти часу t кінематичні та силові параметри приймають різні значення по координаті x) в подальшому будемо розглядати залежності вихідних величин в моменти часу досягнення ними максимальних значень по модулю.

Порівняльний аналіз графіків рис. 4 і 5 показує, що в даному випадку модулі максимальних прогинів внутрішнього несучого шару u_3^1 і модулі максимальних напружень σ_{22}^1 за рахунок пінопласту практично не змінилися. В свою чергу максимальні прогини зовнішнього несучого шару u_3^2 зменшилися на 23 %, а напруження σ_{22}^2 зменшилися в два рази.

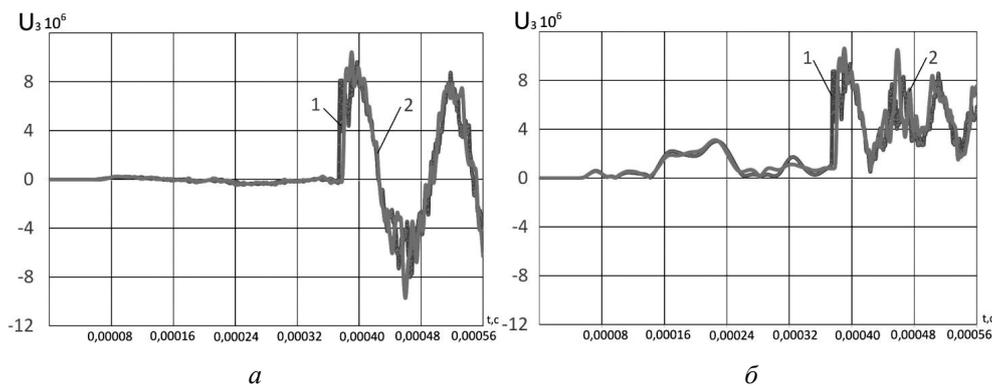


Рис. 6

На рис. 6, а наведено залежність прогинів u_3^1 і u_3^2 за часом в точці дії синусоїдального навантаження зосередженого локального осесиметричного зовнішнього удару по направляючій тришаровій циліндричній оболонки (2.3) в місці установки четвертого армуючого ребра без пінопласту. Аналіз наведеного графіка показує, що четверте ребро в даному випадку навантаження виконує роль кувадла.

На рис. 6, б представлено подібну залежність при наявності пінопласту $E_1^1/E_t = 50$. Порівняльний аналіз графіків на рис. 6, а і б вказує на згладжувальну дію пінопласту при розхитуванні оболонки.

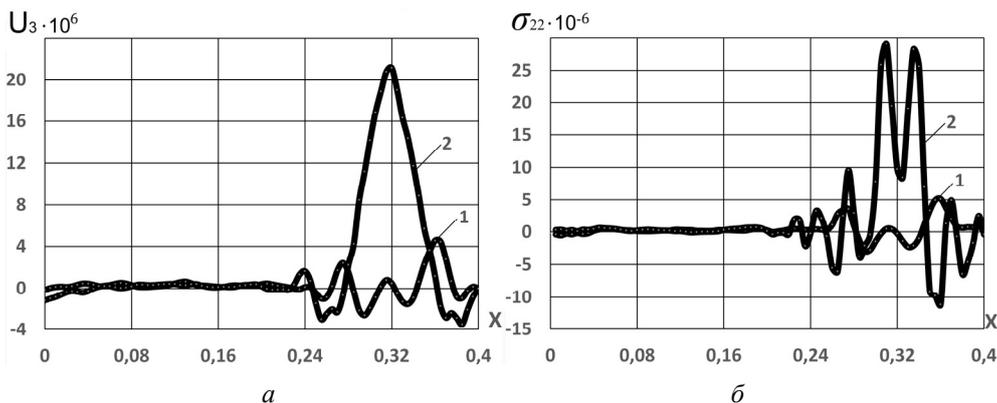


Рис. 7

На рис. 7, а наведено залежність максимальних прогинів внутрішнього несучого шару u_3^1 і зовнішнього несучого шару u_3^2 при $t = 4,984t_c$ (працює синусоїдальне навантаження і зосереджений локальний осесиметричний зовнішній удар по направляючій тришаровій циліндричній оболонки (2.4) по середині між четвертим і п'ятим ребрами). Пінопласт відсутній.

На рис. 7, б наведено залежність максимальних напружень внутрішнього несучого шару σ_{22}^1 і зовнішнього несучого шару σ_{22}^2 в момент $t = 4,984t_c$ (для того ж випадку навантаження).

На рис. 8, а наведено залежність максимальних прогинів внутрішнього несучого шару u_3^1 і зовнішнього несучого шару u_3^2 в момент зосередженого удару при $t = 4,81875t_c$ (працює синусоїдальне навантаження і зосереджений локальний осесиметричний зовнішній удар по направляючій тришаровій циліндричній оболонки (2.4) по середині між четвертим і п'ятим ребрами). Властивості пінопласту: $E_1^1/E_t = 50$.

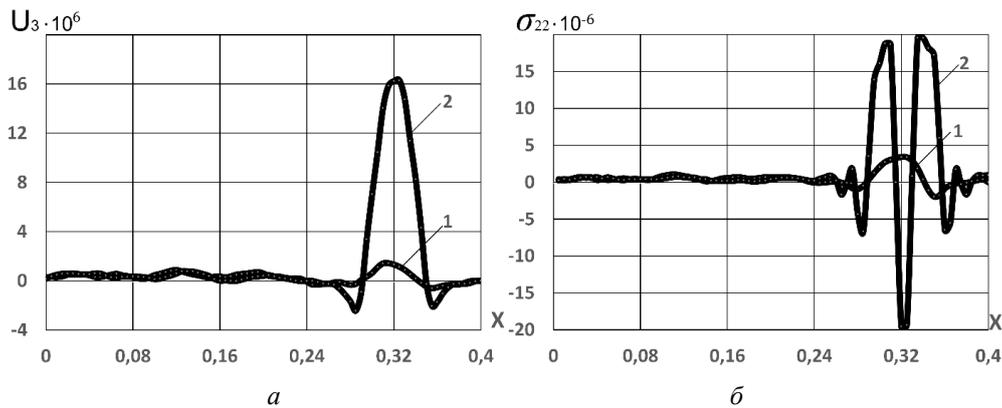


Рис. 8

На рис 8, б наведено залежність максимальних напружень внутрішнього несучого шару σ_{22}^1 і зовнішнього несучого шару σ_{22}^2 в момент $t = 4,81875t_c$ (для того ж випадку навантаження).

Порівняльний аналіз графіків рис. 7 і 8 показує, що в даному випадку роль кувадла виконує пінопласт. Прогини u_3^1 зменшилися в 3,3 рази, а прогини u_3^2 зменшилися на 30 %. Напруження σ_{22}^1 зменшилися на 25 %, а напруження σ_{22}^2 зменшилися на 45 %.

Висновки.

Проведені скінченно-елементні розрахунки динаміки перехідних процесів в симетричних тришарових циліндричних елементах з дискретно-симетричним легким армованим ребрами заповнювачем під дією комбінованих нестационарних навантажень показали їх можливість оцінити формування коливальних процесів в тришарових структурах в залежності від якості легкого заповнювача і розташування навантажень. Виконані розрахунки розповсюдження збурення, які ініціює двигун, вздовж оболонки і відбиття їх від жорстко защемленого торця оболонки. Порівняльний аналіз нормальних переміщень у випадку, коли локальне навантаження діє вздовж армуючого ребра, показує, що армуючі ребра виконують роль кувадла, а наявність пінопласту значно згладжує розхитування оболонки під дією локальних подовжених імпульсних навантажень. У випадку, коли локальне навантаження діє між четвертим і п'ятим ребрами, кувадлою слугує сам пінопласт. Розроблена методика може бути використана для попередніх розрахунків параметрів деформування елементів конструкцій у вигляді тришарових циліндричних оболонок з дискретно-симетричним легким армованим ребрами заповнювачем, які експлуатуються в динамічних режимах.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано у цій статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Досліджено вплив дії розподілених по торцю і локальних осесиметричних експлуатаційних нестационарних навантажень на тришарові циліндричні оболонкові елементи корпусів ракет. Дію двигуна представлено у вигляді поздовжніх зусиль зі змінною в часі частотою та амплітудою прикладених до торця оболонки. Локальні осесиметричні імпульсні зовнішні навантаження, які прикладені по направляючій циліндричної оболонки в місці розташування ребра і між ребрами – це імітація вибуху подовженого кумулятивного заряду миттєвої дії. Оскільки властивості матеріалів несучих шарів легкого заповнювача і армуючих ребер різні, доцільно застосовувати метод скінченних елементів. Проведене скінченно-елементне моделювання динаміки тришарової конструкції при експлуатаційних навантаженнях дає можливість з достатньою достовірністю дослідити вплив легкого заповнювача і вибрати місце встановлення дії локальних осесиметричних імпульсних навантажень. Отримані числові результати при розрахунку реальних об'єктів за розробленою методикою дозволяють отримати рекомендації для визначення оптимальної величини кумулятивного заряду, достатнього для відокремлення відпрацьованого ступеня ракети і збереження її руху за заданим курсом.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: динаміка, тришаровий циліндричний елемент, дискретно-неоднорідний заповнювач, торцеве навантаження змінне в часові за частотою та амплітудою, локальне зовнішнє імпульсне навантаження, жорстке закріплення, скінченно-елементний метод, механічні явища.

1. *Амиро И.Я., Прокопенко Н.Я.* Переходный процесс колебаний цилиндрической оболочки как системы со многими степенями свободы // Прикл. механика. – 1999. – **35**, № 3. – С. 57 – 63.
2. *Методы расчета оболочек:* в 5-и томах. Т.5. *Гузь А.Н., Кубенко В.Д.* Теория нестационарной аэрогидроупругости оболочек. – Киев: Наук. думка, 1982. – 400 с.
3. *Механика композитов:* в 12-и томах. Т.9. *Кубенко В.Д., Бабаев А.Э., Беспалова Е.И. и др.* Динамика элементов конструкций. – Киев: А.С.К., 1999. – 388 с.
4. *Луговий П.З., Мейш В.Ф., Мейш Ю.А.* Динаміка конструктивно-неоднорідних структур (під ред. Гузь О.М.). – Київ: Видавництво Ліра, 2022. – 326 с.
5. *Новожилов В.В.* Основы нелинейной теории упругости. – Ленинград-Москва: Гостехиздат, 1948. – 212 с.
6. *Рычков С.П.* Моделирование конструкций в среде Femap with NX Nastran. – Москва: ДМК Пресс, 2013. – 784 с.
7. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. – Москва: Наука, 1966. – 636 с.
8. *Успехи механики* (под ред. Гузь А.Н.): в 6-ти томах. Т.3. *Пискунов В.Г., Рассказов А.О.* Развитие теории слоистых пластин и оболочек. – Киев: «А.С.К.», 2007. – С. 141 – 175.
9. *Frostig Y., Thomsen O.T.* Higher-order free vibration of sandwich panels with a flexible core // Int. J. Solids Struct. – 2004. – **41**. – P. 1697 – 1724.
10. *Kheirikhah M.M., Khalili S.M.R., Malekzadeh Fard K.* Biaxial buckling analysis of soft-core composite sandwich plates using improved high-order theory // European J. of Mechanics A/Solids. – 2011. – **31** – P. 54 – 66.
11. *Lee Y.S., Lee K.D.* Dynamic response of laminated circular cylindrical shells under impulse loads // Comput. Struct. – 1997. – **63**. N 1. – P. 149 – 157.
12. *Li R., Kardomateas G.A., Simitzes G. J.* Nonlinear Response of a Shallow Sandwich Shell with Compressible Core to Blast Loading // J. Appl. Mech. (ASME). – 2008. – **75**, N 6. – P. 061023 – 061023-10.
13. *Librescu L., Hause T.* Recent developments in the modeling and behavior of advanced sandwich constructions: a survey // Composite Struct. – 2000. – **48**, N 1-3. – P. 1 – 17.
14. *Lugovoi P.Z., Meish V.F., Shtantsel S.E.*, Forced Nonstationary Vibrations of a Sandwich Cylindrical Shell with Cross-Ribbed Core // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, N 2. – P. 161 – 167.
15. *Lugovoi P.Z., Sirenko V.N., Skosarenko Yu.V., Batutina T.Ya.* Dynamics of a Discretely Reinforced Cylindrical Shell under a Local Impulsive Load // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 2. – P. 173 – 180.
16. *Lugovoi P.Z., Sirenko V.N., Skosarenko Yu.V., Batutina T.Ya.* Mathematical Modeling of Cylindrical Adapter Dynamics under Local Pulse Loading // Sci. and Innovation. – 2016. – N 3. – С. 35 – 42.
17. *Lugovoi P.Z., Skosarenko Yu.V., Orlenko S.P., Shugailo A.P.* Application of the Spline-Collocation Method to Solve Problems of Statics and Dynamics for Multilayer Cylindrical Shells with Design and Manufacturing Features // Int. Appl. Mech. – 2019. – **55**, N 5. – P. 524 – 533.
18. *Lugovyi P.Z., Gaidaichuk V.V., Skosarenko Yu.V., Kotenko K.E.* Stress-Strain State of Three-Layer Cylindrical Shells with Reinforced Light Core Under Nonstationary Loading // Int. Appl. Mech. – 2021. – **57**, N 4. – P. 395 – 404.
19. *Meish V.F., Shtantsel S.E.* Dynamic problems in the theory of sandwich shells of revolution with a discrete core under non-stationary loads // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, N 12. – P. 1501 – 1507.
20. *Qatu M.S.* Vibration of Laminated Shells and Plates. – New York: Academic Press, 2004. – 426 p.
21. *Qatu M.S., Sullivan R.W., Wang W.* Recent Research Advances in the Dynamic Behavior of Composite Shells: 2000 – 2009 // Composite Struct. – 2010. – **93**, N 1. – P. 14 – 31.
22. *Pourmoayed A.R., Malekzadeh Fard K., Shahravi M.* Vibration Analysis of a Cylindrical Sandwich Panel with Flexible Core Using an Improved Higher-Order Theory // Lat. Am. J. Solids Struct. – 2017. – **14**, N 4. – P. 714 – 742.
23. *Reddy J.N.* Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells, Theory and Application. – Boca Raton, FL: CRC Press, 2003. – 858 p.
24. *Surianinov M., Yemelianova T., Lazarijeva D.* Investigation of free vibrations of threelayered cylindrical shell supported by transverse ribs // Int. J. of Engng. and Technology. – 2019. – **11**, N 1. – P. 61 – 66.
25. *Turkmen H.S.* Structural response of laminated composite shells subjected to blast loading: comparison of experimental and theoretical methods // J. Sound and Vibration. – 2002. – **249**, N 4. – P. 663 – 678.

Надійшла 28.03.2023

Затверджена до друку 12.12.2023