

В. С. Кирилюк, О. І. Левчук

КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ ДВОХ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИХ  
ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИХ ПІВПРОСТОРІВ  
ЗА ПРИСУТНОСТІ МІЖ НИМИ ЖОРСТКОГО ПЛОСКОГО ВКЛЮЧЕННЯ  
ДОВІЛЬНОЇ ФОРМИ

*Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,  
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: kirilyuk\_v@ukr.net*

**Abstract.** Compressing two electroelastic transversally isotropic half-spaces with different properties in the presence of a rigid plany inclusion of arbitrary shape between them is studied. When considering the problem, it is assumed that the surfaces of the half-spaces do not contain an electrode coating. Based on the presentation of the general solution of the system of static equations of electroelasticity for a transversely isotropic piezoelectric body by the harmonic functions, the regularities of the contact interaction of two piezoelectric transversely isotropic half-spaces (with non-electrode surfaces) differing in properties with a plane inclusion of an arbitrary shape during compression are established. A generalization of Gladwell's result on the contact interaction of two isotropic elastic half-spaces with a rigid plane inclusion of an arbitrary shape under compression to the case of interaction with the inclusion of two electroelastic transversely isotropic half-spaces is obtained. The numerical studies are carried out for a disk-shaped inclusion (a partial case of the considered problem). The influence of electroelastic properties of the half-spaces and geometric dimensions of inclusion on the contact interaction parameters are studied.

**Key words:** piezoelectric transversely isotropic material, two electroelastic half-spaces, planar rigid inclusion, arbitrary shape, contact interaction parameters.

**Вступ.**

Широке використання в інженерній практиці п'єзоелектричних (електропружних) матеріалів при створенні елементів вимірювальних приладів та перетворювачів енергії стимулює проведення досліджень розподілу напружень у електропружних тілах з концентраторами напружень, а також при контактній взаємодії п'єзоелектричних тіл. Розв'язання просторових задач електропружності ускладнюється тим, що необхідно розглядати граничну задачу для системи рівнянь електропружності, яка враховує зв'язаність силових і електричних полів і має суттєво складнішу структуру (у порівнянні з системою рівнянь для пружного тіла).

Зі значною повнотою аналіз напруженого стану у трансверсально-ізотропних пружних та електропружних тілах з концентраторами напружень проведено для задач у двовимірній постановці [2, 7 – 10, 19, 20, 22, 26, 29]. Для тривимірних задач статички для трансверсально-ізотропних пружних та електропружних тіл представлення гармонічними функціями розв'язків відповідних систем диференціальних рівнянь з частинними похідними запропоновано у роботах [23] та [27]. Ряд результатів досліджень розподілу напружень у просторових пружних та електропружних тілах наведено в роботах [1, 3 – 5, 13 – 15, 16, 17, 21 – 24, 26 – 28] і [1, 2, 7, 19, 20, 24] відповідно. Просторові задачі статички електропружності для трансверсально-ізотропних та ортотроп-

них електропружних тіл з плоскими тріщинами та включеннями, які досліджувались, наприклад, в роботі [15], є узагальненням досліджень [11, 12] для чисто пружного ортотропного матеріалу на випадок електропружного тіла.

Задачі контактної взаємодії для двох різних за властивостями пружних ізотропних півпросторів при стиску за наявності між півпросторами жорсткого включення розглядались в роботах [6, 18, 25], з яких для включення сталої товщини кругової та довільної форми – в роботах [25] і [6], відповідно. Задача контактної взаємодії для двох електропружних трансверсально-ізотропних півпросторів при стиску за наявності між ними жорсткого плоского включення довільної форми до цього часу не вивчалась.

У даній статті досліджено контактну взаємодію двох різних за властивостями п'єзоелектричних трансверсально-ізотропних півпросторів, між якими міститься жорстке плоске включення сталої товщини довільної форми, при стиску. При постановці задачі припускається, що поверхня розділу двох п'єзоелектричних тіл розташована у площині ізотропії обох електропружних трансверсально-ізотропних півпросторів, поверхні яких не містять електродного покриття, а також, що при контактній взаємодії має місце гладкий (без тертя) контакт. На основі представлення розв'язку рівнянь статички для електропружного трансверсально-ізотропного тіла гармонічними функціями і подальшого зведення задачі електропружності до задач теорії потенціалу отримано відповідність між розв'язками граничних задач електропружності та пружності для випадку контактної взаємодії двох півпросторів за присутності жорсткого плоского включення (сталого товщини і довільної форми) між ними при стиску. Встановлено загальні закономірності розподілу контактних напружень та переміщень на границі розділу п'єзоелектричних півпросторів. З отриманих виразів для задачі електропружності отримуються параметри контактної взаємодії двох різних за властивостями пружних трансверсально-ізотропних півпросторів (як частинний випадок) за наявності між ними жорсткого плоского включення довільної форми.

### 1. Постановка задачі.

Розглянемо контактну взаємодію двох різних за властивостями електропружних трансверсально-ізотропних півпросторів за наявності між ними жорсткого плоского включення довільної форми при стиску (рис. 1).

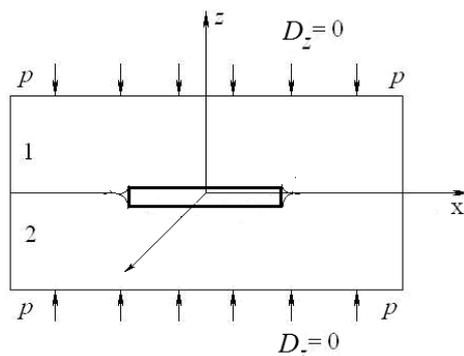


Рис. 1

Припускаємо, що площина  $z = 0$  (рис. 1), яка обмежує два півпростори, є площиною ізотропії електропружних трансверсально-ізотропних матеріалів кожного з півпросторів, поверхні яких не містять електродного покриття. Також вважаємо, що у площині контактної взаємодії  $z = 0$  виконуються умови гладкого (без тертя) контакту для кожного з півпросторів. Розміри області розшарування двох п'єзоелектричних півпросторів (рис. 1) є невідомими і визначаються у процесі розв'язання задачі. Параметри контактної взаємодії п'єзоелектричних тіл залежать від значення стискаючих зусиль  $p$ ,

електропружних властивостей двох п'єзоелектричних трансверсально-ізотропних півпросторів і геометричних параметрів жорсткого плоского включення.

Для визначення напружено-деформованого стану у кожному з трансверсально-ізотропних пружних півпросторів на поверхні розділу тіл (площині  $z = 0$ ) отримуємо наступні граничні умови:

$$u_z^{(1)}(x, y, 0) = \Delta_1, (x, y) \in \Omega_1 ; \quad \sigma_{zz}^{(1)}(x, y, 0) = 0, (x, y) \in \Omega_2 \setminus \Omega_1 ;$$

$$\sigma_{xz}^{(1)}(x, y, 0) = \sigma_{yz}^{(1)}(x, y, 0) = \sigma_{xz}^{(2)}(x, y, 0) =$$
(1)

$$\begin{aligned}
&= \sigma_{yz}^{(2)}(x, y, 0) = 0, \quad (x, y) \in R^2, \quad D_z^{(1)} = 0, \quad z = 0; \\
u_z^{(2)}(x, y, 0) &= -\Delta_2, \quad (x, y) \in \Omega_1; \quad \sigma_{zz}^{(2)}(x, y, 0) = 0, \quad (x, y) \in \Omega_2 \setminus \Omega_1; \\
\sigma_{zz}^{(1)}(x, y, 0) &= \sigma_{zz}^{(2)}(x, y, 0), \quad (x, y) \in R^2 \setminus \Omega_2; \quad D_z^{(2)} = 0, \quad z = 0; \\
u_z^{(1)}(x, y, 0) &= u_z^{(2)}(x, y, 0), \quad (x, y) \in R^2 \setminus \Omega_2; \quad \Delta_1 + \Delta_2 = \Delta,
\end{aligned} \tag{2}$$

де індекси «1» і «2» відповідають першому і другому п'єзоелектричним півпросторам;  $\Delta$  – товщина жорсткого плоского включення;  $\Delta_1$  і  $\Delta_2$  – глибини проникнення включення товщини  $\Delta$  у відповідні півпростори;  $\Omega_1$  – плоска область, що утворена перетином включення з площиною  $z = 0$ , а  $\Omega_2$  відповідає плоскій області, що утворена об'єднанням зони розшарування між півпросторами в площині  $z = 0$  з областю  $\Omega_1$ . Серед наведених граничних умов (1) – (3) у площині розділу маємо умови відсутності дотичних напружень на всій поверхні розділу (умови гладкого контакту), умови відсутності нормальної складової електричної індукції (за відсутності електродного покриття на поверхнях півпросторів), умови ідеального механічного контакту поза зоною розшарування матеріалу. Крім того, маємо наступні умови на нескінченності:

$$\sigma_{zz}^{(i)} \rightarrow -p; \quad D_z^{(i)} \rightarrow 0 \quad (i = 1, 2) \quad (\text{при } z \rightarrow \infty).$$

Представимо напружений стан у кожному з електропружних півпросторів суперпозицією основного стану (простого стиску  $\sigma_{zz}^{(i)} = -p, D_z^{(i)} = 0 \quad (i = 1, 2)$ ) та збуреного стану. Для знаходження збуреного стану у кожному з півпросторів у площині  $z = 0$  маємо наступні граничні умови:

$$\begin{aligned}
u_z^{(1)}(x, y, 0) &= \Delta_1, \quad (x, y) \in \Omega_1; \quad \sigma_{zz}^{(1)}(x, y, 0) = p, \quad (x, y) \in \Omega_2 \setminus \Omega_1; \\
\sigma_{xz}^{(1)}(x, y, 0) &= \sigma_{yz}^{(1)}(x, y, 0) = \sigma_{xz}^{(2)}(x, y, 0) = \sigma_{yz}^{(2)}(x, y, 0) = 0; \\
(x, y) &\in R^2; \quad D_z^{(1)} = 0, \quad z = 0;
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
u_z^{(2)}(x, y, 0) &= -\Delta_2, \quad (x, y) \in \Omega_1; \quad \sigma_{zz}^{(2)}(x, y, 0) = p, \quad (x, y) \in \Omega_2 \setminus \Omega_1; \\
\sigma_{zz}^{(1)}(x, y, 0) &= \sigma_{zz}^{(2)}(x, y, 0), \quad (x, y) \in R^2 \setminus \Omega_2; \quad D_z^{(2)} = 0, \quad z = 0;
\end{aligned} \tag{5}$$

$$u_z^{(1)}(x, y, 0) = u_z^{(2)}(x, y, 0), \quad (x, y) \in R^2 \setminus \Omega_2; \quad \Delta_1 + \Delta_2 = \Delta. \tag{6}$$

Умови (4) – (6) мають той же зміст, що й умови (1) – (3), але вже для збуреного стану. Їх необхідно задовольнити для кожного електропружного півпростору.

## 2. Основні рівняння і співвідношення.

Рівняння статички електропружності для трансверсально-ізотропного п'єзоелектричного тіла стосовно компонентів вектора переміщень і електричного потенціалу  $\Psi$  мають наступний вигляд [1, 23]

$$\begin{aligned}
c_{11}^E u_{x,xx} + \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E) u_{x,yy} + c_{44}^E u_{x,zz} + \frac{1}{2}(c_{11}^E + c_{12}^E) u_{y,xy} + \\
+(c_{13}^E + c_{44}^E) u_{z,xz} + (e_{31} + e_{15}) \Psi_{,xz} = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_{11}^E u_{y,yy} + \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E)u_{y,xx} + c_{44}^E u_{y,zz} + \frac{1}{2}(c_{11}^E + c_{12}^E)u_{x,xy} + \\
& + (c_{13}^E + c_{44}^E)u_{z,yz} + (e_{31} + e_{15})\Psi_{,yz} = 0; \\
& (c_{13}^E + c_{44}^E)(u_{x,xz} + u_{y,yz}) + c_{44}^E(u_{z,xx} + u_{z,yy}) + c_{33}^E u_{z,zz} + e_{15}(\Psi_{,xx} + \Psi_{,yy}) + e_{33}\Psi_{,zz} = 0; \\
& (e_{13} + e_{15})(u_{x,xz} + u_{y,yz}) + e_{15}(u_{z,xx} + u_{z,yy}) + e_{33}u_{z,zz} - \varepsilon_{11}^S(\Psi_{,xx} + \Psi_{,yy}) - \varepsilon_{33}^S\Psi_{,zz} = 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

У рівняннях (7)  $c_{11}^E, c_{12}^E, c_{13}^E, c_{33}^E, c_{44}^E$  – незалежні пружні сталі;  $e_{31}, e_{15}, e_{33}$  – п'єзо-модулі;  $\varepsilon_{11}^S, \varepsilon_{33}^S$  – діелектричні проникності. Тобто, для опису властивостей електропружного трансверсально-ізотропного матеріалу використовуються десять незалежних сталей.

Розв'язок системи рівнянь (7) згідно [23] можна отримати за допомогою чотирьох потенціальних функцій  $\Phi_j$  ( $j = \overline{1, 4}$ )

$$u_x = \sum_{j=1}^3 \Phi_{j,x} + \Phi_{4,y}; \quad u_y = \sum_{j=1}^3 \Phi_{j,y} - \Phi_{4,x}; \quad u_z = \sum_{j=1}^3 k_j \Phi_{j,z}; \quad \Psi = \sum_{j=1}^3 l_j \Phi_{j,z}, \tag{8}$$

де  $k_j, l_j$  – деякі сталі, а функції  $\Phi_j$  задовольняють рівнянням

$$\Phi_{j,xx} + \Phi_{j,yy} + \nu_j \Phi_{j,zz} = 0 \quad (j = 1, 2, 3); \tag{9}$$

$\nu_4 = 2c_{44}^E / (c_{11}^E - c_{12}^E)$ , а значення  $\nu_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) є коренями алгебраїчного рівняння третього порядку [6], що має наступний вигляд:

$$\begin{aligned}
& \nu^3 (A_1 B_2 - C_1 D_2) + \nu^2 (A_1 B_3 + A_2 B_2 - C_1 D_3 - C_2 D_2) + \\
& + \nu (A_2 B_3 + A_3 B_2 - C_2 D_3 - C_3 D_2) + A_3 B_3 - C_3 D_3 = 0,
\end{aligned}$$

де коефіцієнти при ступенях визначаються за допомогою співвідношень

$$\begin{aligned}
& A_1 = c_{11}^E e_{15}; \quad A_2 = (c_{13}^E + c_{44}^E)(e_{31} + e_{15}) - c_{11}^E e_{33} - c_{44}^E e_{15}; \quad A_3 = c_{44}^E e_{33}; \\
& B_2 = -[\varepsilon_{11}^S (c_{13}^E + c_{44}^E) + e_{15}(e_{31} + e_{15})]; \quad B_3 = \varepsilon_{33}^S (c_{13}^E + c_{44}^E) + e_{33}(e_{31} + e_{15}); \\
& C_1 = -c_{11}^E \varepsilon_{11}^S; \quad C_2 = (e_{31} + e_{15})^2 + c_{11}^E \varepsilon_{33}^S + c_{44}^E \varepsilon_{11}^S; \quad C_3 = -c_{44}^E \varepsilon_{33}^S; \\
& D_2 = e_{15}(c_{13}^E + c_{44}^E) - c_{44}^E (e_{31} + e_{15}); \quad D_3 = c_{33}^E (e_{31} + e_{15}) - e_{33}(c_{13}^E + c_{44}^E).
\end{aligned}$$

Сталі  $k_j, l_j$  ( $i = 1, 2, 3$ ) у виразах (8) пов'язані з коренями третього порядку  $\nu_j$  наступними співвідношеннями:

$$\frac{a_j + c_{13}^E k_j + e_{31} l_j}{c_{11}^E} = \frac{c_{33}^E k_j + e_{33} l_j}{c_{13}^E + a_j} = \frac{c_{33}^E k_j - \varepsilon_{33}^S l_j}{e_{31} + d_j} = \nu_j \quad (j = 1, 2, 3), \tag{10}$$

де

$$a_j = c_{44}^E (1 + k_j) + e_{15} l_j; \quad d_j = e_{15} (1 + k_j) - \varepsilon_{11}^S l_j \quad (j = 1, 2, 3). \tag{11}$$

Для визначення сталей  $k_j, l_j$  отримуємо формули

$$k_j = \frac{[(\nu_j c_{11}^E - c_{44}^E)(e_{15} \nu_j - e_{33}) + \nu_j (c_{44}^E + c_{13}^E)(e_{31} + e_{15})]}{[(c_{13}^E + c_{44}^E)(e_{15} \nu_j - e_{33}) - (c_{44}^E \nu_j - c_{33}^E)(e_{31} + e_{15})]};$$

$$l_j = \frac{[(v_j c_{11}^E - c_{44}^E)(v_j c_{44}^E - c_{33}^E) + v_j (c_{44}^E + c_{13}^E)^2]}{[(v_j c_{44}^E - c_{33}^E)(e_{31} + e_{15}) - (c_{13}^E + c_{44}^E)(e_{15} v_j - e_{33})]} \quad (j=1, 2, 3). \quad (12)$$

Зауважимо, що при введенні позначень  $z_j = zn_j^{-1/2}$  ( $j = \overline{1, 4}$ ) функції  $\Phi_1(x, y, z_1)$ ,  $\Phi_2(x, y, z_2)$ ,  $\Phi_3(x, y, z_3)$ ,  $\Phi_4(x, y, z_4)$  згідно (9) стають гармонічними функціями у відповідних системах координат.

### 3. Метод розв'язання.

При побудові розв'язку граничної задачі теорії пружності скористаємося представленням (8) та співвідношеннями (9) – (12). Функції  $\Phi_i(x, y, z_i)$  (для кожного п'єзоелектричного трансверсально-ізотропного півпростору з врахуванням властивостей матеріалу) візьмемо у вигляді

$$\Phi_i(x, y, z_i) = \alpha_i^* F_i^*(x, y, z_i) \quad (i=1, 2, 3); \quad \Phi_3 \equiv 0, \quad (13)$$

де  $F_i^*(x, y, z)$  ( $i=1, 2$ ) – гармонічні функції.

Сталі  $\alpha_i^*$  у виразах потенціальних функцій (13) визначимо з наступної системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 \alpha_j^{*(k)} (c_{44}^{E(k)} (1 + k_j^{(k)}) + e_{15}^{(k)} l_j^{(k)}) &= 1; \quad \sum_{j=1}^3 \alpha_j^{*(k)} (c_{44}^{E(k)} (1 + k_j^{(k)}) + e_{15}^{(k)} l_j^{(k)}) / \sqrt{v_j^{(k)}} = 0; \\ \sum_{j=1}^3 \alpha_j^{*(k)} (e_{15}^{(k)} (1 + k_j^{(k)}) - e_{11}^{S(k)} l_j^{(k)}) &= 0, \quad k=1, 2. \end{aligned} \quad (14)$$

При визначенні сталих  $\alpha_i^*$  згідно системи (14) задовольняються граничні умови по дотичним напруженням вздовж всієї поверхні розділу для трансверсально-ізотропного півпростору, а також умови рівності нормальних компонентів напружень поза зоною розшарування матеріалів. Для граничних умов, що залишились, використовуючи потенціальні функції на основі функцій  $F_1^*(x, y, z_i)$  і  $F_2^*(x, y, z_i)$  (функції для першого та другого пружних півпросторів) з врахуванням системи рівнянь (14), отримуємо умови у площині  $z=0$  стосовно невідомих гармонічних функцій  $F_1^*(x, y, z)$  і  $F_2^*(x, y, z)$ .

Введемо нові гармонічні функції

$$\frac{\partial F_1^*}{\partial z}(x, y, z) = f_1^*(x, y, z); \quad \frac{\partial F_2^*}{\partial z}(x, y, z) = f_2^*(x, y, z).$$

Тоді з граничних умов (4) – (6) отримуємо

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 \alpha_i^{(1)*} \frac{k_j^{(1)}}{\sqrt{v_j^{(1)}}} f_1^*(x, y, 0) &= \Delta_1, \quad (x, y) \in \Omega_1; \quad \frac{\partial f_1^*}{\partial z}(x, y, 0) = p, \quad (x, y) \in \Omega_2 \setminus \Omega_1; \\ \sum_{j=1}^3 \alpha_i^{(2)*} \frac{k_j^{(2)}}{\sqrt{v_j^{(2)}}} f_2^*(x, y, 0) &= -\Delta_2, \quad (x, y) \in \Omega_1; \quad \frac{\partial f_2^*}{\partial z}(x, y, 0) = p, \quad (x, y) \in \Omega_2 \setminus \Omega_1; \quad (15) \\ \sum_{j=1}^3 \alpha_i^{(1)*} \frac{k_j^{(1)}}{\sqrt{v_j^{(1)}}} f_1^*(x, y, 0) &= \sum_{j=1}^3 \alpha_i^{(2)*} \frac{k_j^{(2)}}{\sqrt{v_j^{(2)}}} f_2^*(x, y, 0), \quad (x, y) \in R^2 \setminus \Omega_2; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_1^*}{\partial z}(x, y, 0) = \frac{\partial f_2^*}{\partial z}(x, y, 0), \quad (x, y) \in R^2 \setminus \Omega_2, \quad \Delta_1 + \Delta_2 = \Delta.$$

Отже, задачу електропружності зведено до пошуку двох гармонічних функцій  $f_1^*(x, y, z)$  і  $f_2^*(x, y, z)$ , що визначаються у відповідних електропружних півпросторах і задовольняють граничним умовам (15). Зауважимо також, що невідома область розшарування визначається з умови відсутності сингулярної складової напружень вздовж її границі [25].

Для порівняння розглянемо більш просту задачу теорії пружності про стиск двох пружних ізотропних півпросторів, між якими розташоване жорстке включення сталої товщини, геометрична форма якого співпадає з формою включення між електропружними півпросторами. За допомогою представлення [4] дослідження збуреного стану у пружних ізотропних півпросторах зводиться до пошуку двох гармонічних функцій  $g_1^*(x, y, z)$  і  $g_2^*(x, y, z)$ , для знаходження яких на поверхні розділу пружних півпросторів  $z = 0$  маємо граничні умови, що структурно повністю подібні наведеним формулам (15). Отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{(1-\nu_1)}{\mu_1} g_1^*(x, y, 0) &= \Delta_1, \quad (x, y) \in \Omega_1; & \frac{\partial g_1^*}{\partial z}(x, y, 0) &= p, \quad (x, y) \in \Omega_2 \setminus \Omega_1; \\ \frac{(1-\nu_2)}{\mu_2} g_2^*(x, y, 0) &= -\Delta_2, \quad (x, y) \in \Omega_1; & \frac{\partial g_2^*}{\partial z}(x, y, 0) &= p, \quad (x, y) \in \Omega_2 \setminus \Omega_1; \\ \frac{(1-\nu_1)}{\mu_1} g_1^*(x, y, 0) &= \frac{(1-\nu_2)}{\mu_2} g_2^*(x, y, 0), \quad (x, y) \in R^2 \setminus \Omega_2; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\frac{\partial g_1^*}{\partial z}(x, y, 0) = \frac{\partial g_2^*}{\partial z}(x, y, 0), \quad (x, y) \in R^2 \setminus \Omega_2, \quad \Delta_1 + \Delta_2 = \Delta.$$

Єдина відмінність в умовах (15) і (16) полягає у тому, що у цих виразах (для ізотропних матеріалів) замість множників  $\sum_{j=1}^3 \alpha_i^{(1)*} k_j^{(1)} / \sqrt{\nu_j^{(1)}}$  і  $\sum_{j=1}^3 \alpha_i^{(2)*} k_j^{(2)} / \sqrt{\nu_j^{(2)}}$  використовуються вирази  $(1-\nu_1)/\mu_1$  і  $(1-\nu_2)/\mu_2$ , де  $\nu_1, \nu_2$  – коефіцієнти Пуассона, а  $\mu_1, \mu_2$  – модулі зсуву для ізотропних матеріалів пружних півпросторів. Порівняємо відповідні вирази контактних напружень і переміщень під плоским жорстким включенням довільної форми для ізотропних пружних і електропружних трансверсально-ізотропних півпросторів, що виражені гармонічними функціями. Встановлюємо, що для плоского включення **довільної форми**, що перебуває у контакті з двома різними за властивостями електропружними трансверсально-ізотропними півпросторами, згідно результату [6] для контактної взаємодії двох пружних ізотропних півпросторів з жорстким плоским включенням довільної форми, мають місце наступні закономірності:

переміщення  $\Delta_1$  та  $\Delta_2$  пов'язані співвідношенням

$$\Delta_1 / \left( \sum_{j=1}^3 \alpha_i^{(1)*} k_j^{(1)} / \sqrt{\nu_j^{(1)}} \right) = \Delta_2 / \left( \sum_{j=1}^3 \alpha_i^{(2)*} k_j^{(2)} / \sqrt{\nu_j^{(2)}} \right);$$

контактні напруження на кожній стороні включення є тотожними;  
нормальні переміщення в області, де півпростори контактують (поза зоною розшарування), є не тільки рівними, але й дорівнюють нулю.

Виходячи з такої відповідності граничних задач контактної взаємодії двох пружних ізотропних та двох електропружних трансверсально-ізотропних півпросторів перейдемо до випадку плоского дископодібного включення сталої товщини, який дозволяє отримати наближений аналітичний розв'язок задачі електропружності. За допомогою результатів [25] для двох пружних ізотропних тіл (за наявності дископодібного включення) та встановленої відповідності між розв'язками задач контактної взаємодії у випадку двох п'єзоелектричних трансверсально-ізотропних півпросторів (за наявності жорсткого дископодібного включення між ними) задачу зводимо до розв'язку інтегрального рівняння відносно невідомого значення  $c = b/a$  (відношення розміру невідомої області розшарування до радіуса жорсткого кругового включення).

Отримуємо

$$\begin{aligned} & \varphi(\eta) + \frac{2}{\pi^2} \int_0^1 \frac{\varphi(\xi)}{(\xi^2 - \eta^2)} \left( \eta \ln \left[ \frac{c - \eta}{c + \eta} \right] - \xi \ln \left[ \frac{c - \xi}{c + \xi} \right] \right) d\xi = \\ & = \frac{\Delta}{ap(1 + \alpha) \sum_{j=1}^2 \alpha_i^{(1)*} \frac{k_j^{(1)}}{\sqrt{v_j^{(1)}}}} + \frac{2}{\pi} (1 - \eta^2) \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{c^2 - 1}{1 - \eta^2} \right), \quad 0 < \eta < 1 \end{aligned} \quad (17)$$

з додатковою умовою, що характеризує відсутність сингулярної складової напружень вздовж зовнішнього контуру зони розшарування матеріалів при  $r = b$

$$\frac{2c}{\pi} \int_0^1 \frac{\varphi(\xi)}{(c^2 - \xi^2)} d\xi + (c^2 - 1)^{1/2} = 0,$$

де

$$\eta = r/a, \quad c = b/a, \quad \alpha = \left( \sum_{j=1}^3 \alpha_i^{(2)*} \frac{k_j^{(2)}}{\sqrt{v_j^{(2)}}} \right) / \left( \sum_{j=1}^3 \alpha_i^{(1)*} \frac{k_j^{(1)}}{\sqrt{v_j^{(1)}}} \right).$$

Далі, на основі розкладу за малим параметром  $\varepsilon = a/b = 1/c < 1$  шуканої функції, що входить до інтегрального рівняння (16) (аналогічно контакту двох пружних ізотропних півпросторів [25]), наближений розв'язок інтегрального рівняння з додатковою умовою може бути отримано за допомогою розв'язку алгебраїчного рівняння п'ятого порядку

$$\frac{W_1(\varepsilon)}{(1 + \alpha)} \left( \frac{\Delta}{a} \right) - 2p \left( \sum_{j=1}^3 \frac{\Delta_j^{(1)}}{\Delta^{(1)}} \frac{k_j^{(1)}}{\sqrt{v_j^{(1)}}} \right) \frac{W_2(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0, \quad (18)$$

де використано позначення

$$\begin{aligned} W_1(\varepsilon) &= \frac{4}{\pi} \varepsilon + \frac{16}{\pi^3} \varepsilon^2 + \varepsilon^3 \left( \frac{64}{\pi^5} + \frac{4}{3\pi} \right) + \varepsilon^4 \left( \frac{80}{9\pi^3} + \frac{256}{\pi^7} \right) + \varepsilon^5 \left( \frac{448}{9\pi^5} + \frac{1024}{\pi^9} + \frac{4}{5\pi} \right) + O(\varepsilon^6); \\ W_2(\varepsilon) &= 1 - \frac{4}{\pi^2} \varepsilon - \frac{16}{\pi^4} \varepsilon^2 - \varepsilon^3 \left( \frac{64}{\pi^6} + \frac{1}{8} \right) - \varepsilon^4 \left( \frac{16}{3\pi^4} + \frac{4}{\pi^2} \left( \frac{1}{24} - \frac{8}{9\pi^2} + \frac{64}{\pi^6} + \frac{4}{9\pi^3} \right) \right) - \\ & - \varepsilon^5 \left( \frac{16}{\pi^4} \left( \frac{1}{24} + \frac{64}{\pi^6} - \frac{8}{9\pi^3} + \frac{8}{9\pi^2} \right) + \frac{256}{9\pi^6} - \frac{4}{15\pi^2} \right) + O(\varepsilon^6). \end{aligned} \quad (19)$$

Знайдене з алгебраїчного рівняння (18) (з врахуванням формули (19)) значення  $\varepsilon = a/b$  визначає розміри зони розшарування між двома трансверсально-ізотропними пружними півпросторами (за наявності жорсткого дископодібного включення між ними) при стиску. Розміри заглиблення включення у відповідний електропружний трансверсально-ізотропний півпростір визначаються співвідношенням

$$\frac{1}{\left( \sum_{j=1}^3 \frac{\Delta_j^{(1)}}{\Delta^{(1)}} \frac{k_j^{(1)}}{\sqrt{v_j^{(1)}}} \right)} \Delta_1 = \frac{1}{\left( \sum_{j=1}^3 \frac{\Delta_j^{(2)}}{\Delta^{(2)}} \frac{k_j^{(2)}}{\sqrt{v_j^{(2)}}} \right)} \Delta_2, \quad \Delta_1 + \Delta_2 = \Delta.$$

З формул (18) отримуємо співвідношення, що пов'язує значення стискаючих навантажень  $p$  із розміром зони розшарування між півпросторами у вигляді

$$p = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon W_1(\varepsilon) / W_2(\varepsilon)}{\left( \sum_{j=1}^3 \frac{\Delta_j^{(1)}}{\Delta^{(1)}} \frac{k_j^{(1)}}{\sqrt{v_j^{(1)}}} \right) + \left( \sum_{j=1}^3 \frac{\Delta_j^{(2)}}{\Delta^{(2)}} \frac{k_j^{(2)}}{\sqrt{v_j^{(2)}}} \right)} \left( \frac{\Delta}{a} \right) = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon W_1(\varepsilon) / W_2(\varepsilon)}{N^*} \left( \frac{\Delta}{a} \right), \quad (20)$$

де

$$N^* = \left( \sum_{j=1}^3 \frac{\Delta_j^{(1)}}{\Delta^{(1)}} \frac{k_j^{(1)}}{\sqrt{v_j^{(1)}}} \right) + \left( \sum_{j=1}^3 \frac{\Delta_j^{(2)}}{\Delta^{(2)}} \frac{k_j^{(2)}}{\sqrt{v_j^{(2)}}} \right). \quad (21)$$

За допомогою виразів (20), (21) можуть бути знайдені значення навантажень  $p$ , що для відомих геометричних параметрів дископодібного включення, електропружних властивостей матеріалів півпросторів відповідає фіксованому розміру зони розшарування п'єзоелектричних півпросторів.

Відзначимо, що для частинного випадку розглянутої задачі (двох чисто пружних трансверсально-ізотропних півпросторів) після деяких перетворень отримуємо

$$\begin{aligned} A^{\text{Piezo}} &= \sum_{j=1}^3 \frac{\Delta_j}{\Delta} \frac{k_j}{\sqrt{v_j}} \rightarrow A^{\text{Trans}} = \sum_{j=1}^2 \frac{\Delta_j}{\Delta} \frac{k_j}{\sqrt{v_j}} = \\ &= \frac{\sqrt{c_{11}}}{(c_{11}c_{33} - c_{13}^2)\sqrt{c_{44}}} \left[ \sqrt{c_{11}c_{33} - c_{13}^2 - 2c_{44}c_{13} + 2c_{44}\sqrt{c_{11}c_{33}}} \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

Знайдений вираз (22) дозволяє одразу отримувати шукане значення  $A^{\text{Piezo}}$  безпосередньою підстановкою у нього п'яти пружних сталей для кожного трансверсально-ізотропного матеріалу.

#### 4. Аналіз результатів числових досліджень.

На рис. 2 відображено зв'язок діючих навантажень і розмірів області розшарування (при фіксованому відношенні товщини включення до її радіусу  $\Delta/a$ ). При розрахунках значення  $\Delta/a$  покладались рівними 0,15 (лінія 1); 0,25 (лінія 2); 0,35 (лінія 3). Видно, що при збільшенні відносної товщини кругового включення для досягнення

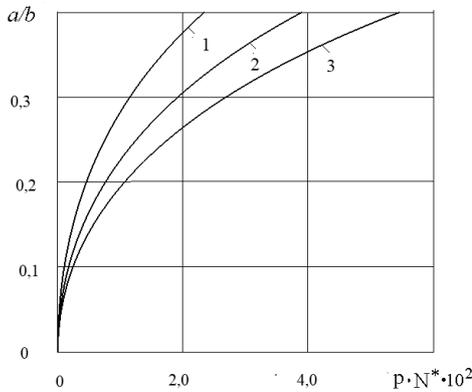


Рис. 2

того ж розміру зони розшарування, що і для більш тонкого включення, необхідно прикласти більше навантаження.

Проведемо дослідження відношень  $\Delta_2/\Delta_1$  (відношення глибин проникнення жорсткого включення у п'єзоелектричні півпростори) для ряду п'єзокерамічних матеріалів. Використаємо дані [13] стосовно електропружних властивостей таких матеріалів. Пронумеруємо усі матеріали у наступному порядку: 1 – PZT-4; 2 – PХЕ-5; 3 – ЦТС-19; 4 – PZT-5; 5 – PZT-7; 6 – ВаТіО3; 7 – PZT-5Н; 8 – P-7.

Після проведення розрахунків отримуємо

$$\Delta_1 / \Delta_2 = 0,8706; \quad \Delta_1 / \Delta_3 = 0,8252; \quad \Delta_1 / \Delta_4 = 0,8488; \quad \Delta_1 / \Delta_5 = 1,0549;$$

$$\Delta_1 / \Delta_6 = 1,2529; \quad \Delta_1 / \Delta_7 = 1,1035; \quad \Delta_1 / \Delta_8 = 0,9072.$$

Отримані числові результати дозволяють оцінити значення переміщень жорсткого включення для будь-якої пари п'єзокерамічних матеріалів з наведеного переліку. Так, наприклад, для знаходження  $\Delta_2 / \Delta_3$  маємо

$$\Delta_6 / \Delta_2 = (\Delta_1 / \Delta_2) / (\Delta_1 / \Delta_6) = 0,6949.$$

Тобто глибина проникнення жорсткого включення у матеріал 6 майже на 30% менша, ніж у матеріал 2 (при контакті півпросторів з цих матеріалів). Цілком аналогічно проводяться обчислення для інших пар матеріалів.

### Висновок.

У роботі проведено математичне моделювання контактної взаємодії двох електропружних трансверсально-ізотропних півпросторів при стиску (за наявності між ними жорсткого плоского включення довільної форми), узагальнено результат Гладвела на випадок електропружних півпросторів (з плоским включенням між ними). Для дископодібного включення (частинного випадку розглянутої проблеми) проведено числові розрахунки, досліджено вплив властивостей матеріалів, відносної товщини жорсткого включення та силових навантажень на розміри зони розшарування.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано у цій статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

**РЕЗЮМЕ.** Досліджено задачу про стиск двох різних за властивостями електропружних трансверсально-ізотропних півпросторів за наявності між ними жорсткого плоского включення довільної форми. При розгляді задачі припускається, що поверхні півпросторів не містять електродного покриття. На основі представлення загального розв'язку системи статичних рівнянь електропружності для трансверсально-ізотропного п'єзоелектричного тіла гармонічними функціями встановлено закономірності контактної взаємодії двох різних за властивостями п'єзоелектричних трансверсально-ізотропних півпросторів (з неелектродованими поверхнями) з плоским включенням довільної форми при стиску. Отримано узагальнення результату Гладвела про контактну взаємодію двох ізотропних пружних півпросторів з жорстким плоским включенням довільної форми при стиску на випадок взаємодії з включенням двох електропружних трансверсально-ізотропних півпросторів. Для дископодібного включення (частинного випадку розглянутої задачі) проведено числові дослідження, вивчено вплив електропружних властивостей півпросторів, геометричних розмірів включення на параметри контактної взаємодії.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** п'єзоелектричний трансверсально-ізотропний матеріал, два електропружні півпростори, плоске жорстке включення, довільна форма, параметри контактної взаємодії.

1. *Механика связанных полей в элементах конструкций: в 5-ти томах. Т. 5. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А.* Электроупругость. – Киев: Наук. думка, 1989. – 279 с.
2. *Dai L. Guo W., Wang X.* Stress concentration at an elliptic hole in transversely isotropic piezoelectric solids // Int. J. Solids Struct. – 2006. – **43**, N 6. – P. 1818 – 1831.
3. *Dinzart F., Sabar H.* Electroelastic ellipsoidal inclusion with imperfect interface and its application to piezoelectric composite materials // Int. J. Solids Struct. – 2018. – **136 – 137**. – P.241 – 249.
4. *Johnson K.L.* Contact Mechanics. – Cambridge: Cambridge University Press, 1985. – 452 p.
5. *El Ouafi J., Azrar L., Aljinaidi A.* Analytical and semi-analytical modeling of effective moduli bounds: Application to transversely isotropic piezoelectric materials // J. Intelligent Material Systems and Struct. – 2016. – **27**, N 12. – P. 1600 – 1623.
6. *Gladwell G.M.L.* On contact problems for a medium with rigid flat inclusions of arbitrary shape // Int. J. Solids Struct. – 1995. – **32**, N 3 – 4. – P. 383 – 389.

7. *Govorukha V., Kamlah M.* Analysis of a mode III interface crack in a piezoelectric bimaterial based on the dielectric breakdown model // *Archive of Appl. Mechanics.* – 2020. – **90**, N 5. – P. 1201 – 1213
8. *Govorukha V., Sheveleva A., Kamlah M.* A crack along a part of an interface electrode in a piezoelectric bimaterial under anti-plane mechanical and in-plane electric loadings // *Acta Mechanica.* – 2019. – **230**, N 6. – P. 1999 – 2012.
9. *Kaloerov S.A.* Determining the Intensity Factors for Stresses, Electric-Flux Density, and Electric-Field Strength in Multiply Connected Electroelastic Anisotropic Media // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – **43**, N 6. – P. 631 – 637.
10. *Kaloerov S.A., Samodurov A.A.* Problem of Electromagnetoviscoelasticity for Multiply Connected Plates // *Int. Appl. Mech.* – 2015. – **51**, N 6. – P. 623 – 639.
11. *Kirilyuk V.S.* The Stress State of an Elastic Orthotropic Medium with an Ellipsoidal Cavity // *Int. Appl. Mech.* – 2005. – **41**, N 3. – P. 302 – 308.
12. *Kirilyuk V.S.* Stress State of an Elastic Orthotropic Medium with an Elliptic Crack under Tension and Shear // *Int. Appl. Mech.* – 2005. – **41**, N 4. – P. 358 – 366.
13. *Kirilyuk V.S.* On the Relationship Between the Solutions of Static Contact Problems of Elasticity and Electroelasticity for a Half-Space // *Int. Appl. Mech.* – 2006. – **42**, N 11. – P. 1256 – 1269.
14. *Kirilyuk V.S.* Elastic State of a Transversely Isotropic Piezoelectric Body with an Arbitrarily Oriented Elliptic Crack // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, N 2. – P. 150 – 157.
15. *Kirilyuk V.S.* Thermoelastostressed State of a Piezoelectric Body with a Plane Crack under Symmetric Thermal Load // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, N 3. – P. 320 – 330.
16. *Kirilyuk V.S.* Stress State of a Piezoceramic Body With a Plane Crack Opened by a Rigid Inclusion // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, N 7. – P. 757 – 768.
17. *Kirilyuk V.S., Levchuk O.I.* Stress Contact Interaction of Two Piezoelectric Half-Space, One of Which Contains a Near-Surface Notch of Elliptical Cross-Section // *Int. Appl. Mech.* – 2022. – **58**, N 4. – P. 436 – 444.
18. *Kotousov A., Neto L.B., Khanna A.* On a rigid inclusion pressed between two elastic half spaces // *Mech. of Materials* – 2014. – **68**, N 1. – P. 38 – 44.
19. *Loboda V.V., Kryvoruchko A.G., Sheveleva A.Y.* Electrically plane and mechanically antiplane problem for an inclusion with stepwise rigidity between piezoelectric materials // *Advanced Struct. Materials.* – 2019. – **94**. – P. 463 – 481.
20. *Loboda V., Sheveleva A., Komarov O., Lapusta Y.* An interface crack with mixed electrical conditions at it faces in 1D quasicrystal with piezoelectric effect // *Mech. of Advanced Materials and Struct.* – 2021. – **29**, N 23. – P. 3334 – 3344.
21. *Martinez-Ayuso G., Friswell M.I., Khodaparast H.H., Roscow J.I., Bowen C.R.* Electric field distribution in porous piezoelectric materials during polarization // *Acta Materialia.* – 2019. – **173**. – P. 332 – 341.
22. *Pasternak Y.M., Sulym H.T., Pasternak R.M.* Action of concentrated heat sources in a pyroelectric with cracks for constant temperature of their faces // *Materials Sci.* – **51**, N 3. – P. 358 – 365.
23. *Podil'chuk Yu.N.* Representation of the General Solution of Statics Equations of the Electroelasticity of a Transversally Isotropic Piezoceramic Body in Terms of Harmonic Functions // *Int. Appl. Mech.* – 1998. – **34**, N 7. – P. 623 – 628.
24. *Podil'chuk Yu.N.* Exact Analytical Solutions of Static Electroelastic and Thermoelastostatic Problems for a Transversely Isotropic Body in Curvilinear Coordinate Systems // *Int. Appl. Mech.* – 2003. – **39**, N 2. – P. 132 – 170.
25. *Selvadurai A.P.S.* A unilateral contact problem for a rigid disc inclusion embedded between two dissimilar elastic half-spaces // *Q. J. Mech. Appl. Math.* – 1994. – N 3. – P. 493 – 509.
26. *Wang Y.J., Gao C.F., Song H.P.* The anti-plane solution for the edge cracks originating from an arbitrary hole in a piezoelectric material // *Mech. Research Communications.* – 2015. – **65**. – P. 17 – 23.
27. *Wang Z.K., Zheng B.L.* The general solution of three-dimension problems in piezoelectric media // *Int. J. Solids Struct.* – 1995. – **32**, N 1. – P. 105 – 115.
28. *Zhao M.H., Li Y., Yan Y., Fan C.Y.* Singularity analysis of planar cracks in three-dimensional piezoelectric semiconductors via extended displacement discontinuity boundary integral equation method // *Eng. Analysis with Boundary Elements.* – 2016. – **67**. – P. 115 – 125.
29. *Zhao M.H., Pan Y.B., Fan C.Y., Xu G.T.* Extended displacement discontinuity method for analysis of cracks in 2D piezoelectric semiconductors // *Int. J. Solids and Struct.* – 2016. – **94–95**. – P. 50 – 59.

Надійшла 27.03.2023

Затверджена до друку 12.12.2023