

М. О. Бабешко, В. Г. Савченко

ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ ВПЛИВУ ПЛАСТИЧНОЇ ЗМІНИ ОБ'ЄМУ ТА
ВИДУ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ В КРАЙОВИХ ЗАДАЧАХ ПЛАСТИЧНОСТІ

*Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: plast@inmech.kiev.ua*

Abstract. A statement of the problem is given and an algorithm for solving the plasticity problems for axisymmetric bodies made of isotropic materials, the properties of which depend on the stress type and plastic loosening, is described. The constitutive equations of the theory of deformation processes along the small curvature trajectories, containing two nonlinear dependencies, are used. One of them implements the connection between the first invariants of stress and strain tensors, and the other one implements the connection between the second invariants of the corresponding deviators. The influence of the dependence of deformation diagrams on the stress type and the plastic change of volumetric deformation on the results of the calculation of the stress-strain state of the shell is studied.

Key words: elasto-plastic deformation process, constitutive equations, first invariants of stress and strain tensors, second deviator invariants, plastic loosening of material.

Вступ.

Гіпотеза про лінійну залежність між першими інваріантами тензорів напружень та деформацій вважається обґрунтованою експериментальними дослідженнями для значної кількості конструкційних матеріалів і прийнята як одна з основних в класичних теоріях пластичності [3 – 6, 20, 29]. Інше формулювання цієї гіпотези – за рахунок пластичної деформації зміни об'єму не відбувається. Проте є публікації, в яких теоретично чи з використанням експериментальних даних показана наявність пластичної середньої деформації, за рахунок чого порушується лінійність залежності між першими інваріантами тензорів напружень та деформацій. В роботі [8] згадано про пластичне збільшення об'єму в області великих деформацій. В статті [9] стверджується, що розвиток пластичної деформації завжди супроводжується залишковим монотонним збільшенням об'єму. В [9] розглянуто теорії пластичності, побудовані з використанням кількох відомих критеріїв текучості, і показано, що при появі пластичних складових компонент деформації з'являється середня пластична деформація $\varepsilon_0^{(p)} \neq 0$. Відмічено, що у випадку циклічного знакозмінного навантаження відбувається пластичне збільшення об'єму, яке при великій кількості циклів може досягти значної величини незважаючи на мізерне пластичне збільшення об'єму в окремому циклі. В роботах [1, 11] розглянуто пластичне збільшення об'єму при циклічних навантаженнях та в умовах повзучості. З використанням експериментальних даних в [11] показано, що при циклічному навантаженні знакозмінним крученням трубчатих зразків з алюмінієвого сплаву величина $\varepsilon_0^{(p)} \neq 0$ досягає значень 0,2 – 0,4%.

В деяких дослідженнях [2, 24 – 26] запропоновано варіанти теорії пластичності, в яких прийнята гіпотеза про наявність залишкового збільшення об'єму при початково-

му навантаженні за межами пружності. Це стосується матеріалів, властивості яких залежать від виду напруженого стану [16 – 19, 21, 28].

В роботі [15] розглянуто два експериментально обґрунтовані варіанти теорії пластичності, які припускають можливість пластичного збільшення об'єму, і з використанням експериментальних досліджень, опублікованих в [2, 24 – 26], оцінена величина $\varepsilon_0^{(p)} \neq 0$ в описаних в цих роботах процесах.

В даній статті проаналізовано результати розв'язання крайових задач пластичності для осесиметричних тіл з метою оцінки впливу врахування пластичної складової об'ємної деформації на результати розрахунків напружено-деформованого стану (НДС) цих тіл. Крайові задачі розв'язано на основі визначальних рівнянь теорії термопластичного деформування ізотропного матеріалу вздовж траєкторій малої кривизни, які враховують вид напруженого стану (ВНС). Визначальні рівняння цієї теорії сформульовано в [24 – 26]; вони містять дві нелінійні залежності, одна з яких здійснює зв'язок між першими інваріантами тензорів напружень і деформацій, температурою та кутом ВНС [5] (кутом подібності девіаторів [10]), а інша – між другими інваріантами відповідних девіаторів, температурою та кутом ВНС. Нелінійність залежності між першими інваріантами тензорів напружень та деформацій зумовлена наявністю пластичної складової середньої деформації $\varepsilon_0^{(p)} \neq 0$. На основі згаданих визначальних рівнянь розроблено методики розв'язання крайових задач для осесиметричних тіл та оболонок.

§1. Постановка задачі та основні співвідношення.

Розглянемо в ортогональній системі координат НДС тіла обертання, складові частини якого теж є тілами обертання з спільною віссю, виготовленими з різних ізотропних матеріалів. Вважаємо, що ці матеріали непружно деформуються в процесі навантаження об'ємними та поверхневими силами при незмінній температурі тіла $T = T_0$. Рівень навантаження є таким, що деформації, які виникають в елементах тіла, малі. Припускаємо, що в процесі навантаження механічні властивості матеріалів залежать від ВНС і можлива поява середньої пластичної деформації. Навантаження тіла відбувається таким чином, що в його елементах відбуваються квазістатичні прості (чи близькі до простих) процеси або процеси деформування вздовж траєкторій малої кривизни, які супроводжуються пластичними деформаціями з можливим наступним розвантаженням. Вважається, що деформації повзучості малі порівняно з пружними та пластичними складовими деформацій і ними можна знехтувати. Припускається, що складові частини тіла, виготовлені з різних ізотропних матеріалів, скріплені між собою при початковій температурі без натягу і на їх спільній границі виконуються умови ідеального силового контакту.

Для врахування історії деформування весь процес навантаження розбивається на окремі достатньо малі етапи таким чином, щоб їх кінці по можливості співпадали з моментами зміни напряму процесу деформування окремих елементів тіла від навантаження до розвантаження чи навпаки. Історія простежується шляхом послідовного розв'язування задачі на кожному етапі. Процес визначення НДС таких тіл зводиться до послідовного розв'язування задачі пластичності по визначенню переміщень, деформацій і напружень для фіксованих моментів часу.

При формулюванні крайових задач скористаємось диференціальними рівняннями рівноваги та співвідношеннями Коші, які пов'язують компоненти тензора деформації з компонентами вектора переміщення, а також визначальними рівняннями [24 – 26], які враховують залежність властивостей матеріалу від ВНС та допускають появу об'ємної пластичної деформації.

Рівняння теорії пластичності, які описують деформування ізотропного матеріалу при початковій температурі $T = T_0$ вздовж траєкторій у вигляді ліній малої кривизни з урахуванням ВНС, базуються на таких припущеннях:

– тензори напружень σ_{ij} і деформацій ε_{ij} є сумами відповідних девіаторів і кульових тензорів

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= s_{ij} + \sigma_0 \delta_{ij}; \quad \sigma_0 = \sigma_{ii} / 3; \\ \varepsilon_{ij} &= e_{ij} + \varepsilon_0 \delta_{ij}; \quad \varepsilon_0 = \varepsilon_{ii} / 3,\end{aligned}\tag{1.1}$$

де s_{ij} і e_{ij} – компоненти девіаторів напруження і деформації відповідно, σ_0 і ε_0 – середні напруження та деформація відповідно; $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$;

– компоненти тензора і девіатора деформацій є сумами відповідних пружних $\varepsilon_{ij}^{(e)}$, $e_{ij}^{(e)}$ і пластичних $\varepsilon_{ij}^{(p)}$, $e_{ij}^{(p)}$ складових

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(e)} + \varepsilon_{ij}^{(p)}; \quad e_{ij} = e_{ij}^{(e)} + e_{ij}^{(p)};\tag{1.2}$$

– середня деформація ε_0 складається з пружної $\varepsilon_0^{(e)}$ і пластичної $\varepsilon_0^{(p)}$ (пластичне розпушення) складових

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_0^{(e)} + \varepsilon_0^{(p)}; \quad \varepsilon_0^{(p)} = \varepsilon_{ii}^{(p)} / 3 \neq 0;\tag{1.3}$$

– для пружних складових деформації має місце узагальнений закон Гука, внаслідок чого

$$\varepsilon_0^{(e)} = \sigma_0 / K; \quad K = \frac{2G(1+\nu)}{1-2\nu},\tag{1.4}$$

де G і ν – модуль зсуву і коефіцієнт Пуассона матеріалу, які вважаємо незалежними від ВНС;

– диференціали пластичних складових девіатора деформацій пропорційні компонентам девіатора напружень

$$de_{ij}^{(p)} = \frac{d\Gamma_p}{S} s_{ij},\tag{1.5}$$

де $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}$; Γ_p – інтенсивність накопиченої пластичної деформації зсуву (параметр Удквіста)

$$\Gamma_p = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t (de_{ij}^{(p)} de_{ij}^{(p)})^{1/2} dt,\tag{1.6}$$

S – інтенсивність дотичних напружень

$$S = \left(\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} \right)^{1/2}.\tag{1.7}$$

Визначальні рівняння зведено [24] до вигляду закону Гука з додатковими напруженнями

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + (K - 2G)\varepsilon_0 \delta_{ij} - \sigma_{ij}^*.\tag{1.8}$$

Додаткові напруження σ_{ij}^* мають вигляд

$$\sigma_{ij}^* = 2Ge_{ij}^{(p)} - K \left[\frac{F_1(\varepsilon_0, \omega_\sigma)}{K} - \varepsilon_0 \right] \delta_{ij},\tag{1.9}$$

де компоненти девіатора пластичних складових деформації $e_{ij}^{(p)}$ визначаємо як суми їх приростів $\Delta e_{ij}^{(p)}$ в кінці N етапу

$$e_{ij}^{(p)} = \sum_{k=1}^N \Delta_k e_{ij}^{(p)}. \quad (1.10)$$

Приріст $\Delta_k e_{ij}^{(p)}$ на довільному k -му етапі навантаження визначаємо, проінтегрувавши (1.5) в межах одного етапу та скориставшись теоремою про середнє значення, за формулою

$$\Delta_k e_{ij}^{(p)} = \left\langle \frac{s_{ij}}{S} \right\rangle_k \Delta_k \Gamma^{(p)}, \quad (1.11)$$

де $\Delta_k \Gamma^{(p)}$ – приріст на k -му етапі інтенсивності пластичних деформацій зсуву (1.6)

$$\Gamma^{(p)} = \sum_{k=1}^N \Delta_k \Gamma^{(p)}. \quad (1.12)$$

Кутові дужки в (1.11) означають середнє за етап значення величини в них.

Через F_1 в (1.9) позначено нелінійну залежність

$$\sigma_0 = F_1(\varepsilon_0, \omega_\sigma), \quad (1.13)$$

де ω_σ – кут ВНС, який в даному випадку визначається за формулою [5, 24]

$$\omega_\sigma = \frac{1}{3} \arccos \left[-\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{I_3(D_\sigma)}{S^3} \right] \quad (0 \leq \omega_\sigma \leq \pi/3). \quad (1.14)$$

В (1.14) $I_3(D_\sigma)$ – третій інваріант девіатора напружень

$$I_3(D_\sigma) = |s_{ij}|.$$

Як видно з (1.14), кут ω_σ визначається через компоненти напружень на відміну від параметра Лоде, який визначається через головні напруження. Цей кут пов'язаний з параметром Лоде μ_σ тригонометричною залежністю [5] і між ними існує така відповідність: при розтязі – $\omega_\sigma = \pi/3$, $\mu_\sigma = -1$; при рівності головних напружень $\sigma_1 = \sigma_2$ – $\omega_\sigma = 0$, $\mu_\sigma = 1$; при зсуві або співвідношенні головних напружень $2\sigma_1 = \sigma_2$ – $\omega_\sigma = \pi/6$, $\mu_\sigma = 0$.

Враховуючи (1.3), (1.4) і (1.13), запишемо додаткові напруження (1.9) у вигляді

$$\sigma_{ij}^* = 2G e_{ij}^{(p)} + K \varepsilon_0^{(p)} \delta_{ij}, \quad (1.15)$$

де $\varepsilon_0^{(p)}$ – пластична складова середньої деформації (пластичне розпушення).

Приріст $\Delta_k \Gamma^{(p)}$ визначаємо з використанням припущення про існування залежності

$$S = F_2(\Gamma, \omega_\sigma) \quad (1.16)$$

між інтенсивністю дотичних напружень S (1.7), інтенсивністю деформацій зсуву $\Gamma = \left[(e_{ij} e_{ij}) / 2 \right]^{1/2}$ і кутом ВНС ω_σ (1.14). Для конкретизації залежностей (1.13), (1.16) будемо використовувати результати експериментів на пропорційне навантаження

трубчатих зразків при кількох постійних значеннях кута $0 \leq \omega_\sigma \leq \pi/3$. В роботах [24 – 26] трубчаті зразки навантажують розтягуючим осьовим зусиллям та рівномірним внутрішнім тиском при значеннях кута ВНС $\omega_\sigma = 0; \pi/6; \pi/3$, а в [2] – стиском, крученням та розтягом.

При конкретизації залежності (1.16) припускаємо, що

$$\Gamma = \frac{S}{2G} + \Gamma^{(p)}. \quad (1.17)$$

Обчислення залежностей (1.13), (1.16) детально описано в [17, 24 – 26].

Наведені визначальні рівняння мають такий же вигляд, як і співвідношення теорії процесів деформування вздовж траєкторій малої кривизни [12], лінеаризовані методом додаткових напружень [13 – 16, 23, 27], і відрізняються лише конкретизацією додаткових напружень σ_{ij}^* (1.15), яка здійснюється з використанням нелінійних залежностей (1.13) і (1.16).

В роботах [17, 22] розглянуто варіант використання даних визначальних рівнянь у випадку, коли залежність (1.13) приймається у вигляді $\sigma_0 = K\varepsilon_0$, тобто розпушення не враховується; тоді в (1.15) $\varepsilon_0^{(p)} = 0$ і у визначальних рівняннях залишається лише залежність (1.16), що містить кут ВНС ω_σ (1.14). Заміна нелінійної залежності (1.13) на лінійну спрощує розрахунки при розв'язанні крайових задач. Варто зауважити, що у випадку лінійного зв'язку між першими інваріантами тензорів напружень та деформацій і незалежності зв'язку між другими інваріантами відповідних девіаторів від кута ВНС, визначальні рівняння (1.8), (1.15) перетворюються в традиційні рівняння теорії процесів деформування вздовж траєкторій малої кривизни, в основу яких покладено співвідношення класичної теорії течії [5, 20, 29].

§2. Алгоритм розв'язання крайових задач.

Наведені визначальні рівняння (1.8), (1.15), які враховують ВНС, разом з рівняннями рівноваги та співвідношеннями Коші утворюють повну систему рівнянь, що дозволяє визначити невідомі переміщення, деформації та напруження. Зокрема, для одержання розв'язувальної системи рівнянь в переміщеннях необхідно в визначальні рівняння підставити компоненти деформацій з співвідношень Коші, а потім одержані компоненти напружень підставити в рівняння рівноваги. Одержану таким способом систему рівнянь в переміщеннях необхідно розв'язувати поетапно, знаходячи розв'язок на кожному етапі методом послідовних наближень, задовольняючи заданим граничним умовам.

З використанням визначальних рівнянь (1.8), (1.9) сформульовано розв'язувальні системи для визначення термопружнопластичного стану осесиметричних просторових тіл та оболонок і розроблено методи розв'язання відповідних крайових задач.

При неосесиметричному навантаженні задані навантаження та розв'язувальні функції представляються у вигляді тригонометричних рядів за коловою координатою.

Для просторових тіл обертання використовується варіаційне рівняння Лагранжа та метод скінченних елементів. Задача зводиться до розв'язання в кожному наближенні на кожному етапі навантаження систем алгебраїчних рівнянь, коефіцієнти і праві частини яких обчислюються за результатами попереднього наближення. При розв'язанні систем алгебраїчних рівнянь використовується метод Гауса.

Для оболонок обертання при використанні гіпотез Кірхгофа – Лява задача зводиться до розв'язання в кожному наближенні на кожному етапі навантаження систем звичайних диференціальних рівнянь, коефіцієнти та вільні члени яких обчислюються за результатами попереднього наближення. При розв'язанні систем диференціальних рівнянь використовується метод Рунге – Кутта з дискретною ортогоналізацією та нормалізацією [7].

При проведенні обчислень вважаємо, що залежності (1.13) та (1.16) задані у вигляді таблиць $\varepsilon_0 \sim \sigma_0$ та $\Gamma \sim S$ відповідно для кількох значень кута $0 \leq \omega_\sigma \leq \pi/3$. Для розв'язання задачі на першому етапі зручно вибрати рівень навантаження таким чином, щоб тіло деформувалося в межах пружності. Розв'яжемо задачу термопружності і визначимо НДС тіла, яке досліджується. Будуючи процес послідовних наближень на другому і будь-якому з наступних етапів, використовуємо компоненти НДС, що відповідають кінцю попереднього етапу. Починаючи процес послідовних наближень на довільному етапі, обчислюємо коефіцієнти і додаткові напруження рівнянь (1.8), (1.15) і розв'язуємо крайову задачу при навантаженнях і граничних умовах, що відповідають даному етапу. Одержавши значення компонент деформацій і напружень, визначимо значення ε_0 (1.1) і ω_σ (1.14) в першому наближенні на поточному етапі. Шляхом лінійної інтерполяції залежності (1.13) по куту ω_σ знайдемо відповідне значення $\sigma_0 = F_1(\varepsilon_0, \omega_\sigma)$. Визначимо значення середньої пластичної деформації

$$\varepsilon_0^{(p)} = \varepsilon_0 - \frac{F_1(\varepsilon_0, \omega_\sigma)}{K}. \quad (2.1)$$

Потім шляхом лінійної інтерполяції залежності (1.16) по куту ω_σ визначимо значення $S^{(d)}$, яке відповідає значенню інтенсивності деформацій зсуву $\Gamma = (\Gamma^{(p)})_{k-1} + \frac{S}{2G}$, де S обчислено за формулою (1.7). Далі знайдемо

$$\Delta_k \Gamma^{(p)} = \frac{S - S^{(d)}}{2G}. \quad (2.2)$$

Використовуючи це значення, визначимо прирости компонент девіатора пластичних складових деформацій (1.11) і значення цих компонент (1.10). Тепер можна визначити σ_{ij}^* (1.15) і розв'язати крайову задачу в новому наближенні. В загальному випадку в довільному M -тому наближенні на k -тому етапі

$$\Delta_k \Gamma^{(p)} = \sum_{m=1}^{M-1} \Delta_m \Gamma^{(p)} + \frac{S - S^{(d)}}{2G}, \quad (2.3)$$

де S обчислено за формулою (1.7), а $S^{(d)}$ знайдено з використанням залежності (1.16) при відповідному значенні ω_σ (1.14), обчисленому за результатами попереднього наближення, при значенні інтенсивності деформацій зсуву

$$\Gamma = \Gamma_{k-1}^{(p)} + \Delta_k \Gamma^{(p)} + \frac{S}{2G}; \quad \Delta_k \Gamma^{(p)} = \sum_{m=1}^{M-1} \Delta_m \Gamma^{(p)}. \quad (2.4)$$

Процес послідовних наближень на етапі продовжуємо до виконання умов

$$\left| \frac{\sigma_0 - F_1(\varepsilon_0, \omega_\sigma)}{K} \right| \leq \delta_1; \quad \left| \frac{S - F_2(\Gamma, \omega_\sigma)}{2G} \right| \leq \delta_2, \quad (2.5)$$

де δ_1 і δ_2 – задані числа, які характеризують точність, з якою одержані в результаті розрахунку значення ω_σ , ε_0 , σ_0 задовольняють співвідношенню (1.13), а ω_σ , S , Γ – співвідношенню (1.16).

Описаний алгоритм реалізується у випадку, коли в елементі тіла відбувається процес активного навантаження. Для того, щоб визначити, відбувається процес активного навантаження чи розвантаження, на кожному етапі в усіх елементах тіла, в яких

виникли пластичні деформації ($\Gamma^{(p)} > 0$), після розв'язання задачі в першому наближенні необхідно виконати перевірку умови

$$\Delta\Gamma^{(p)} > 0, \quad (2.6)$$

де приріст $\Delta\Gamma^{(p)}$ визначається за формулою (2.2).

Якщо умова (2.6) виконується, це означає, що в даному елементі відбувається активне навантаження і обчислення проводяться по описаному вище алгоритму. В протилежному випадку в даному елементі відбувається розвантаження і для його врахування в цьому елементі тіла необхідно прийняти $\Delta\Gamma^{(p)} = 0$ та при визначенні додаткових напружень (1.15) використовувати значення пластичних складових деформацій і середньої пластичної деформації, що відповідають кінцю попереднього етапу і з цими значеннями розв'язувати крайову задачу в наступних наближеннях на даному етапі.

Правильність визначення моментів переходу від активного навантаження до розвантаження і навпаки та вибору величини етапів перевіряється шляхом повторного розрахунку при зменшенні величини етапів. Таким чином визначається потрібна величина етапів.

§3. Числові результати.

Розроблені з використанням рівнянь (1.8), (1.9) методики знайшли своє застосування при дослідженні НДС елементів конструкцій у вигляді просторових тіл [22, 23] та оболонок обертання [13 – 16, 18] із матеріалів, властивості яких залежать від ВНС. В статті [17] було показано, що в багатьох випадках врахування пластичної складової середньої деформації мало впливає на одержані в результаті розрахунків значення компонентів НДС. Проте, в [15] розглянуто навантаження трубчатих зразків осьовим зусиллям та внутрішнім тиском при процесі, в якому одна з компонентів деформацій має той же порядок, що і середня пластична деформація. При розрахунку цього процесу з врахуванням і без врахування пластичної зміни об'єму значення максимальної деформації значно відрізняються між собою. Розрахунки показали, що трапляються крайові задачі, в яких нехтування розпушенням може призвести до значних похибок при визначенні компонентів НДС. Такий вплив від врахування розпушення варто очікувати у випадку матеріалу досліджуваного тіла, у якого нелінійність діаграм деформування виникає при малих деформаціях, як, наприклад, у напівкрихких матеріалах типу чавуну.

З метою оцінки впливу від врахування розпушення на результати розрахунку НДС розглянемо пружнопластичний НДС оболонки, меридіаном серединної поверхні якої є частина кола радіусом $R_s = 1,75$ м, симетрична відносно площини $z = 0$ (z – вісь обертання оболонки); довжина меридіана $s_b - s_a = 0,25$ м (s_a і s_b – початкова і кінцева точки меридіану); радіус паралельного круга серединної поверхні при $s = s_a = 0$, $r = 0,5$ м; товщина оболонки $h = 0,01$ м. Оболонка знаходиться під дією внутрішнього тиску q_c^* і розтягуючого осьового зусилля N_z^* . Процес навантаження розділено на 22 етапи, на яких навантаження на кожному етапі задані наступними значеннями:

$$(q_c^*)_i = \left[(q_c^*)_1 + 0,1(i-1) \right] \text{ МПа} \quad (i = 1, \dots, 22), \quad (q_c^*)_1 = 0,4 \text{ МПа};$$

$$(N_z^*)_i = \left[(N_z^*)_1 + 2,4(i-1) \right] \cdot 10^4 \frac{\text{Н}}{\text{м}} \quad (i = 1, \dots, 22), \quad (N_z^*)_1 = 9,6 \cdot 10^4 \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

Залежності (1.13) та (1.16) задані у вигляді таблиць $\varepsilon_0 \sim \sigma_0$ та $\Gamma \sim S$ для значень кута ВНС, які відповідають стиску ($\omega_\sigma = 0$), крученню ($\omega_\sigma = \pi/6$) та розтягу $\omega_\sigma = \pi/3$ трубчатих зразків. Ці залежності наведено у вигляді кривих 1, 2, 3 відповідно на рис. 1

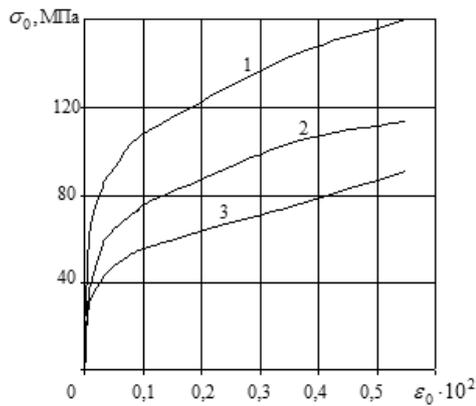


Рис. 1

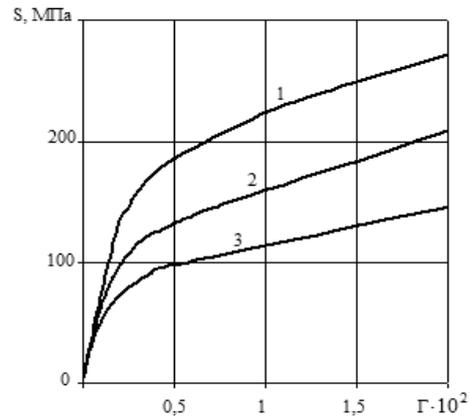


Рис. 2

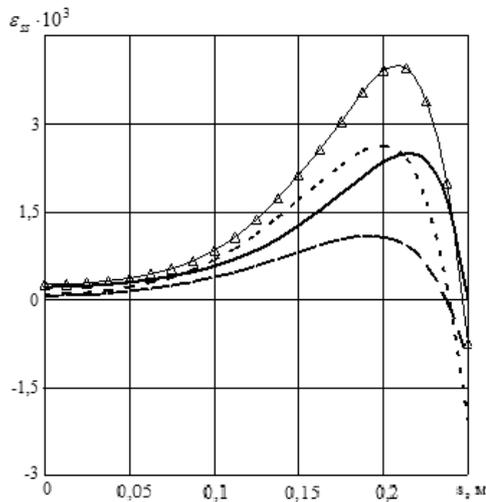


Рис. 3

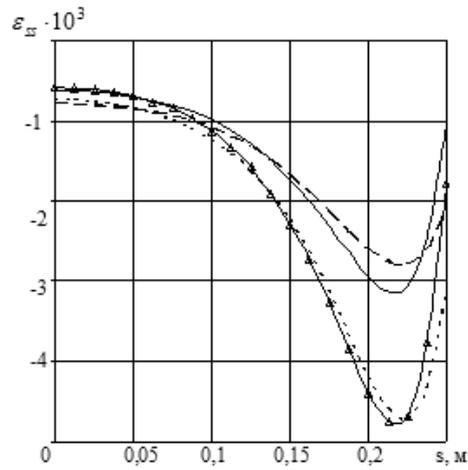


Рис. 4

($\varepsilon_0 \sim \sigma_0$) та рис. 2 ($\Gamma \sim S$). Криві побудовано з використанням даних робіт [3, 15]. Модуль пружності матеріалу $E = 1,07 \cdot 10^5$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,48$. Задачу розв'язано для симетричної частини оболонки при граничних умовах, які відповідають умовам симетрії при $s = s_a = 0$ і дії заданого осьового зусилля за відсутності інших силових навантажень на торці $s = s_b$.

При заданих умовах навантаження виконано чотири варіанти розрахунку НДС оболонки: 1 – з використанням наведених визначальних рівнянь, які враховують обидві нелінійні залежності (1.13) і (1.16); 2 – з врахуванням залежності (1.16) при заміні (1.13) лінійною залежністю $\varepsilon_0 \sim \sigma_0$ (тобто $\varepsilon_0^{(p)} = 0$); 3 – з урахуванням нелінійної залежності $\varepsilon_0 \sim \sigma_0$ в той час, як залежність $S \sim \Gamma$ відповідає діаграмі розтягу циліндричних зразків з даного матеріалу; 4 – без врахування залежності $S \sim \Gamma$ від ВНС при лінійній залежності $\varepsilon_0 \sim \sigma_0$, тобто з використанням традиційних рівнянь теорії пластичного деформування вздовж ліній малої кривизни. Результати чотирьох розрахунків НДС оболонки на 22-у етапі зображено в графічному вигляді на рис. 3 – 9; варіантам 1, 2 і 4 відповідають суцільні, штрихові і пунктирні лінії відповідно; результати варіанту 3 позначено маркерами. На рис. 10 показано зміну вздовж меридіану величини $\varepsilon_0^{(p)}$ при $\zeta = -h/2$ (1) і $\zeta = h/2$ (2) в розрахунку 1.

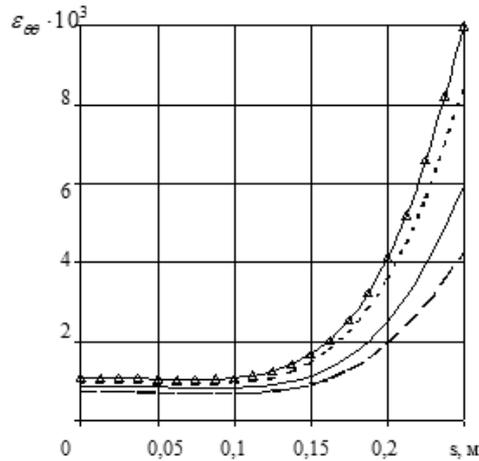


Рис. 5

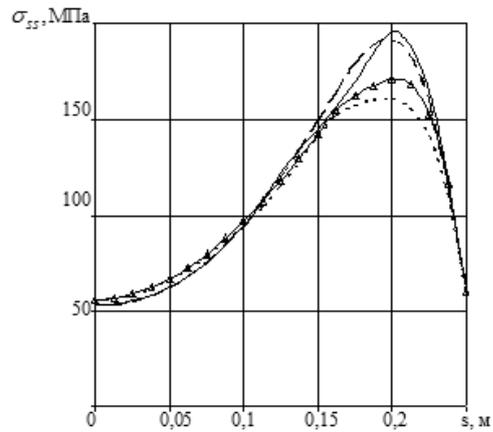


Рис. 6

В результаті розрахунків встановлено, що починаючи з другого етапу матеріал оболонки працює за межами пружності, розвантаження не відбувається. Графіки зміни меридіональної ε_{ss} деформації в залежності від меридіональної координати наведено на рис. 3 ($\zeta = -h/2$), рис. 4 ($\zeta = h/2$); колової $\varepsilon_{\theta\theta}$ – на рис. 5 ($\zeta = h/2$); $\varepsilon_{\theta\theta}$ наведено лише при $\zeta = h/2$, тому що $\varepsilon_{\theta\theta}$ мало змінюється по товщині оболонки. Відповідні напруження наведено на рис. 6 і 7 (σ_{ss}) та на рис. 8, 9 ($\sigma_{\theta\theta}$).

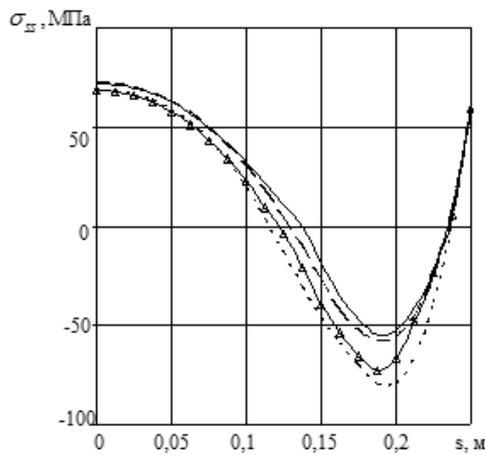


Рис. 7

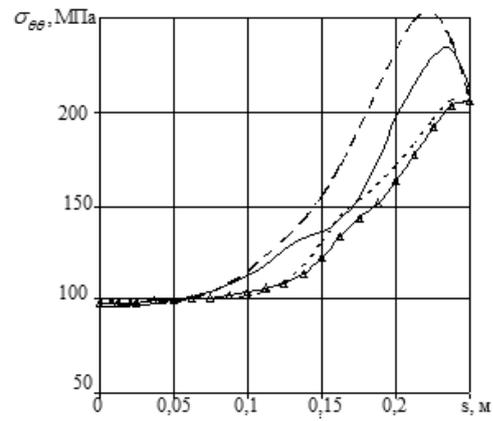


Рис. 8

Наведені результати розрахунків дають можливість зрозуміти, як впливає врахування різних факторів на результати НДС оболонки. З рисунків 3 – 9 видно, що врахування ВНС в обох залежностях (1.13) і (1.16) суттєво змінило значення компонент НДС. Максимальні позитивні значення ε_{ss} (рис. 3) зросли на 35% порівняно до розрахунку, в якому не враховувалося $\varepsilon_0^{(p)}$; на максимальні по абсолютній величині від'ємні значення ε_{ss} (рис. 4) більш вплинуло врахування ВНС в діаграмах $\Gamma \sim S$. Врахування ВНС в залежностях (1.13) і (1.16) суттєво вплинуло на значення $\varepsilon_{\theta\theta}$ (рис. 5). В області максимальних значень $\varepsilon_{\theta\theta}$ врахування (1.13) призвело до їх збільшення приблизно на 40% порівняно з розрахунком 2, в якому розпушення не враховано.

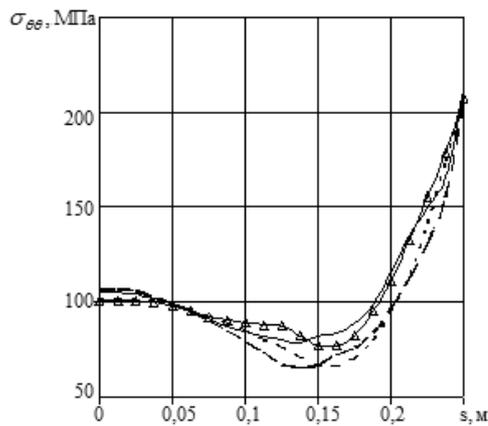


Рис. 9

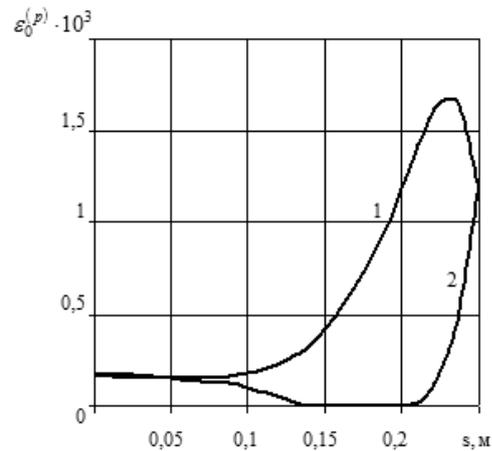


Рис. 10

Врахування ВНС в (1.16) знизило $\varepsilon_{\theta\theta}$ на 50% порівняно з розрахунком 4, в якому ВНС не враховано; це збільшення відбулося, в основному за рахунок врахування $\varepsilon_0^{(p)}$, як видно з рис. 5. Меридіональні напруження σ_{ss} при $\zeta = -h/2$ (рис.6) має максимальні значення в розрахунку 1, в якому було враховано ВНС в (1.13) і (1.16); ці значення приблизно на 20% вищі порівняно з розрахунком 4. В околі зовнішньої поверхні оболонки в усіх розрахунках одержано значення σ_{ss} , які відрізняються між собою лише в області мінімальних значень (рис. 7). Максимальні значення колових напружень $\sigma_{\theta\theta}$ при $\zeta = -h/2$ (рис. 8) одержано в розрахунку 2, в якому враховано ВНС в діаграмах $\Gamma \sim S$, але не враховувалось $\varepsilon_0^{(p)}$, а врахування $\varepsilon_0^{(p)}$ разом з врахуванням ВНС в діаграмах $\Gamma \sim S$ їх зменшило. В околі зовнішньої поверхні різниця в результатах розрахунків $\sigma_{\theta\theta}$ (як і σ_{ss}) виявилась в області мінімальних значень (рис. 9). Деяке пояснення впливу від врахування розпушення дає рис. 10. З цього рисунка видно, що в області максимальних значень $\varepsilon_0^{(p)}$ має той же порядок, що і компоненти деформації; на ділянці меридіану $0 \leq s \leq 0,1$ м в околі і зовнішньої, і внутрішньої поверхонь величина $\varepsilon_0^{(p)}$ однакова, а на наступній ділянці, з посиленням неоднорідності НДС, значення цієї величини, яка залежить від параметра виду НДС, розходяться – вони значно більші в околі внутрішньої поверхні. Тому її вплив на компоненти НДС в околі внутрішньої поверхні більш суттєвий. Загалом вплив від врахування нелінійності зв'язку між першими інваріантами тензорів напруження та деформації в даній задачі привів до значних змін в результатах розрахунків.

Висновки.

Проаналізовано результати розв'язання крайових задач пластичності для осесиметричних ізотропних тіл з метою оцінки впливу врахування пластичної складової об'ємної деформації та ВНС. При розв'язанні крайових задач використано визначальні рівняння теорії процесів непружного деформування вздовж траєкторій малої кривизни, лінеаризація яких здійснюється на основі двох нелінійних залежностей. Ці нелінійні залежності визначаються за результатами експериментів на трубчатих зразках при різних значеннях кута ВНС. Встановлено, що в переважній більшості задач врахування ВНС в залежності між другими інваріантами девіаторів напружень і деформацій суттєво впливає на результати розрахунків, а нелінійність залежності між першими інваріантами відповідних тензорів мало впливає на результати і нею можна знехтувати. Проте є задачі, в яких нехтування пластичною складовою об'ємної дефо-

рмації, яка обумовлює нелінійність залежності між першими інваріантами тензорів напружень і деформацій, може призвести до значних похибок при визначенні компонентів НДС. Такий вплив від врахування розпушення варто очікувати у випадку матеріалу досліджуваного тіла, у якого нелінійність діаграм деформування виникає при деформаціях 0,3% – 1%, як, наприклад, у матеріалах типу чавуну.

На конкретному прикладі тонкої оболонки показано, що врахування виду напруженого стану суттєво впливає на результати розрахунків НДС. Зокрема, проаналізовано вплив від врахування нелінійної залежності між першими інваріантами тензорів напружень і деформацій на результати розрахунку НДС та показано, що врахування пластичного розпушення змінило результати розрахунку НДС оболонки на 20 – 40%.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за рахунок бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Дано постановку задачі і описано алгоритм розв'язання задач пластичності для осесиметричних тіл з ізотропних матеріалів, властивості яких залежать від виду напруженого стану та пластичного розпушення. Використано визначальні рівняння теорії процесів деформування вздовж траєкторій малої кривизни, що містять дві нелінійні залежності. Одна з них реалізує зв'язок між першими інваріантами тензорів напружень і деформацій, а інша – зв'язок між другими інваріантами відповідних девіаторів. Досліджено вплив залежності діаграм деформування від виду напруженого стану та пластичної зміни об'ємної деформації на результати розрахунку напружено-деформованого стану оболонки.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: процес пружнопластичного деформування, визначальні рівняння, перші інваріанти тензорів напружень і деформацій, другі інваріанти девіаторів, пластичне розпушення матеріалу.

1. Волков В.М. Разрыхление металлов и разрушение конструкций машин // Научные проблемы водного транспорта. ВГАВТ (Вестник Волжской государственной академии водного транспорта). Надежность и ресурс. – 2003, вып. 4. – С. 50 – 68.
2. Золочевский А.А., Скелпус А.Н., Скелпус С.Н. Нелинейная механика деформируемого твердого тела. – Харків: Бізнес Інвестор Груп, 2011. – 720 с.
3. Ильюшин А.А. Пластичность: Основы общей математической теории. – Москва: Изд-во АН СССР, 1963. – 272 с.
4. Ишинский А.Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением // Укр. мат. журн. – 1954. – 6, № 3. – С. 314 – 315.
5. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. – Москва: ГИТТЛ, 1956. – 324с.
6. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – Москва: Машиностроение, 1975. – 400 с.
7. Методы расчета оболочек: в 5-ти томах. Т.4. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Теория оболочек переменной жесткости. – Киев: Наук. думка, 1981. – 544 с
8. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. – Москва: ИЛ, 1954. – 647 с.
9. Новожилов В.В. О пластическом разрыхлении // ПММ. – 1965. – т. 29, вып. 4. – С. 681 – 689.
10. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. – Москва: Наука, 1979. – 744 с.
11. Рыбакина О.Г., Сидорин И.С. Экспериментальные исследования закономерностей пластического разрыхления металлов // МТТ. – 1966. – № 1. – С. 120 – 124.
12. Шевченко Ю.Н., Терехов П.Г. Физические уравнения термовязкопластичности. – Киев: Наук. думка, 1982. – 240 с.
13. Babeshko M.E., Savchenko V.G. Method of Solving the Problem of Thermoradiation Plasticity for Layered Axisymmetrical Bodies Made of Isotropic and Orthotropic Materials // Int. Appl. Mech. – 2021. – 57, N 3. – P. 306 – 313.
14. Babeshko M.E., Savchenko V.G. Elastoplastic Axisymmetric Stress-Strain State of Thin Shells Made of Materials with Different Compressive and Tensile Moduli // Int. Appl. Mech. – 2021. – 57, N 4. – P. 414 – 423.
15. Babeshko M.E., Savchenko V.G. Different Options of Accounting for Loosening in the Theory of Isotropic Plasticity // Int. Appl. Mech. – 2022. – 58, N 3. – P. 289 – 298.

16. Babeshko M.E., Shevchenko Yu.N. Method of Successive Approximations for Solving Boundary-Value Problems of Plasticity with Allowance for the Stress Mode // *Int. Appl. Mech.* – 2010. – **46**, N 7. – P. 744 – 752.
17. Babeshko M.E., Shevchenko Yu.N., Tormakhov N.N. Approximate Description of the Inelastic Deformation of an Isotropic Material with Allowance for the Stress Mode // *Int. Appl. Mech.* – 2010. – **46**, N 2. – P. 139 – 148.
18. Galishin A.Z., Shevchenko Yu.N. Determining the Axisymmetric Elastoplastic State of Thin Shells with Allowance for the Third Invariant of the Stress Deviator // *Int. Appl. Mech.* – 2010. – **46**, N 8. – P. 869 – 876.
19. Galishin A., Zolochovsky A., Kühhorn A., Springmann M. Transversal shear effect in moderately thick shells from materials with characteristics dependent on the kind of stress state under creep-damage conditions: Numerical modeling // *Technische Mechanik.* – 2009. – **29**, N 1. – P. 48 – 59.
20. Hill R. *The Mathematical Theory of Plasticity.* – Oxford: Clarendon Press, 1950. – 350 p.
21. Mahnken R. Creep simulation of asymmetric effect by use of stress mode dependent weighting functions // *Int. J. of Solids and Struct.* – 2003. – **40**. – P. 6189 – 6209.
22. Savchenko V.G. A Method to Study the Nonaxisymmetric Plastic Deformation of Solids of Revolution with Allowance for the Stress Mode // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, N 9. – P. 975 – 981.
23. Shevchenko Yu.N., Savchenko V.G. Three-Dimensional Problems of Thermoviscoplasticity: Focus on Ukrainian Research (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2016. – **52**, N 3. – P. 217 – 271.
24. Shevchenko Yu.N., Terekhov R.G., Tormakhov N.N. Constitutive Equations for Describing the Elastoplastic Deformation of Elements of a Body along Small-Curvature Paths in View of the Stress Mode // *Int. Appl. Mech.* – 2006. – **42**, N 4. – P. 421 – 430.
25. Shevchenko Yu.N., Terekhov R.G., Tormakhov N.N. Linear Relationship between the First Invariants of the Stress and Strain Tensors in Theories of Plasticity with Strain Hardening // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – **43**, N 3. – P. 291 – 302.
26. Shevchenko Yu.N., Terekhov R.G., Tormakhov N.N. Elastoplastic Deformation of Elements of an Isotropic Solid along Paths of Small Curvature: Constitutive Equations Incorporating the Stress Mode // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – **43**, N 6. – P. 621 – 630.
27. Steblyanko P.A., Shevchenko Yu.N. Computational Methods in Stationary and Nonstationary Thermal – Plasticity Problems. In: "Encyclopedia of thermal Stresses. In. 11 volumes (Ed. R.B.Hetnarski). – New York, Dordrecht: Springer, 2014. – **2**, C – D, P. 507 – 1084". – P. 623 – 630.
28. Zolochovsky A., Galishin A., Kühhorn A., Springmann M. Transversal shear effect in moderately thick shells from materials with characteristics dependent on the kind of stress state under creep-damage conditions: Theoretical framework // *Technische Mechanik.* – 2009. – **29**, N 1. – P. 38 – 47.
29. Zyczkowski M. *Combined Loadings in the Theory of Plasticity.* – Warszawa: Panstwowe Wydawnictwo Naukowe – Polish Scientific Publishers, 1981. – 714 p.

Надійшла 12.05.2023

Затверджена до друку 12.12.2023